



SEMMELWEIS EGYETEM

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet,
Nanokémiai Kutatócsoport

Lágy Anyagok
Laboratóriuma

Transzportjelenségek az élő szervezetben II.

Zrínyi Miklós

egyetemi tanár, az MTA levelező tagja

mikloszrinyi@gmail.com

Konduktív transzportfolyamatok egységes tárgyalása

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

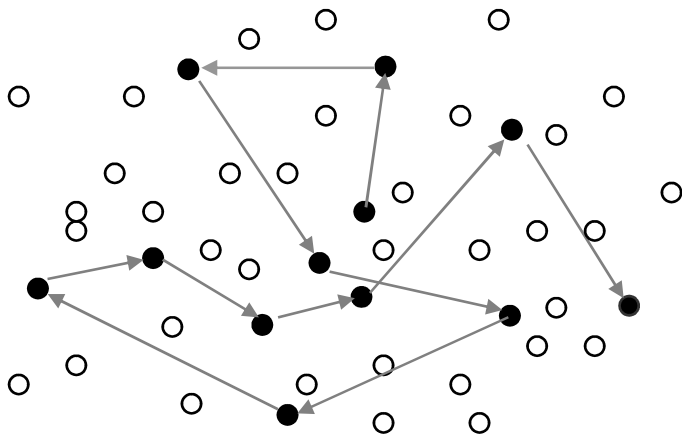
Fick

Fourier

Newton

Laplace operátor: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

A diffúzió molekuláris elmélete

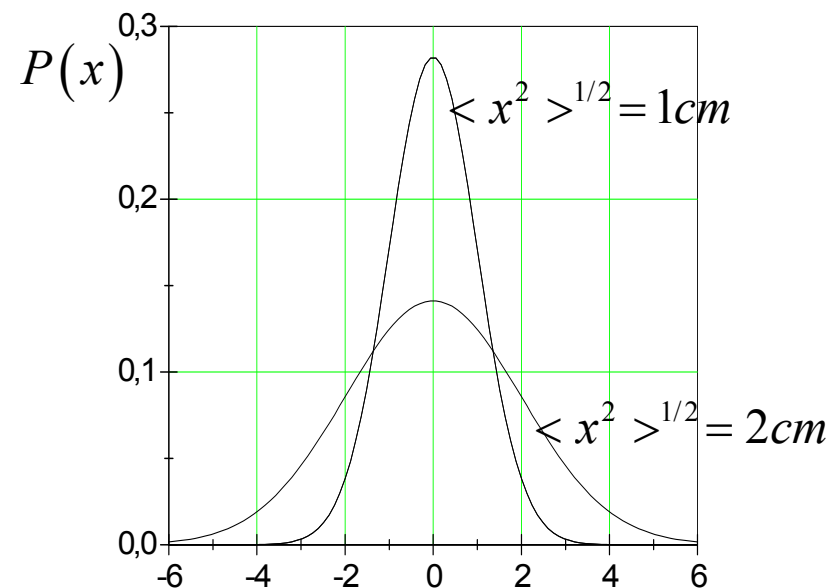


<i>egyirányú</i>	$\langle x^2 \rangle = 2Dt$
<i>laterális</i>	$\langle \sigma^2 \rangle = 4Dt$
<i>radiális</i>	$\langle r^2 \rangle = 6Dt$

Brown mozgás, bolyongás

$$D = \frac{k_B T}{\xi} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

Stokes-Einstein összefüggés



Konvekció vagy diffúzió ?

Konvektív anyagtranszport esetén adott L távolság megtételéhez szükséges idő: $t_{konv} = L / v$

Konduktív anyagtranszport esetén adott L távolság megtételéhez szükséges idő: $t_{diff} = L^2 / D$

Péclet szám:

$$Pe = \frac{t_{diff}}{t_{konv}} = \frac{L \cdot v}{D}$$

egység	Méret (m)
Proteinek és nuklein savak	10^{-8}
organelles	10^{-7}
sejtek	10^{-6}
kapillárisok	10^{-4}
szervek	10^{-1}
test	10^0

$Pe \ll 1$ **A diffúzió gyorsabb, mint a konvekció !**

$Pe \gg 1$ **A konvekció gyorsabb, mint a diffúzió !**

Glükóz diffúziója és áramlása sejtben.

$$L = 10^{-6} m \quad D = 7 \cdot 10^{-8} m^2 s^{-1} \quad v = 10^{-2} m s^{-1} \quad Pe = \frac{10^{-8}}{7 \cdot 10^{-8}} = 0,13$$

A diffúzió a gyorsabb anyagtranszport!

Konszekutív transzportfolyamatok



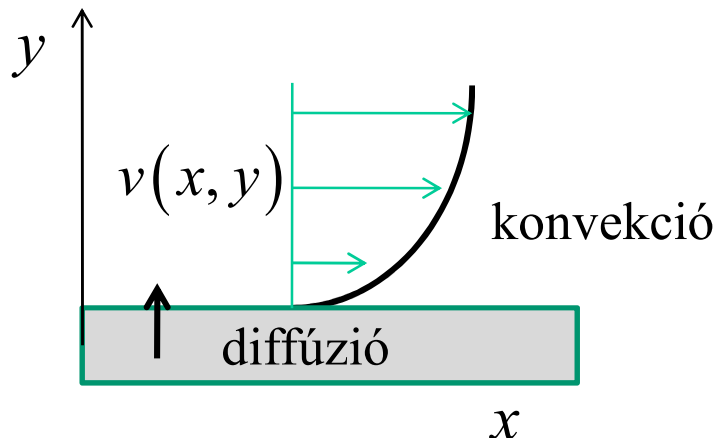
A leglassúbb folyamat a sebesség meghatározó

diffúzió - konvekció **Péclet szám:** $\frac{\text{diffúziós idő}}{\text{áramlási idő}}$

$$Pe = \frac{L \cdot v}{D}$$

m. átadás - diffúzió
(dialízis) **Biot szám:** $\frac{\text{m. átadás}}{\text{i. diffúziós idő}}$

$$Bi = \frac{k_m \cdot L}{D_{eff}}$$



$$\nabla c = \frac{dc}{dy} = f[v(x, y)]$$

A komponens áram függ az áramlási sebességtől !

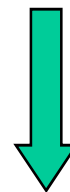
Ha egy testre **erő** hat

- **hely**változás
- **alak**változás

DEFORMÁCIÓ

ru g a l m a S

viszkózus



Fluidumok áramlása

Fluid fázis: a folyadék és a gáz halmazállapot összefoglaló neve, amely arra utal, hogy az anyagok mindkét állapotban viszonylag könnyen változtatják alakjukat, könnyen folynak.

Biomechanika

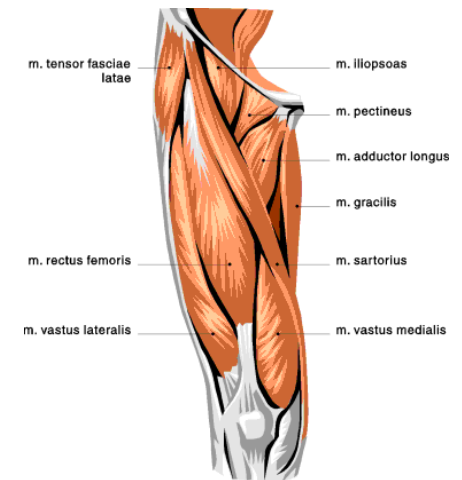
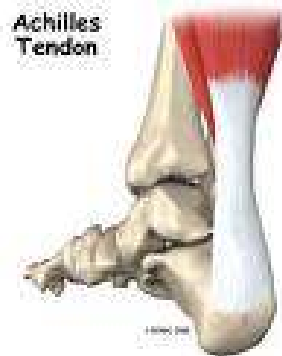
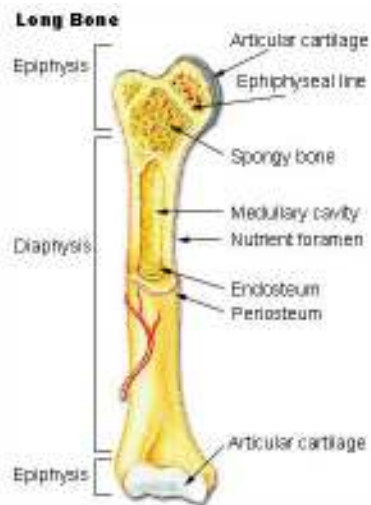
A mechanika törvényeinek alkalmazása élő rendszerekre.
Erő hatására bekövetkező mozgásokat tárgyalja térben és időben.

passív komponensek

aktív komponensek

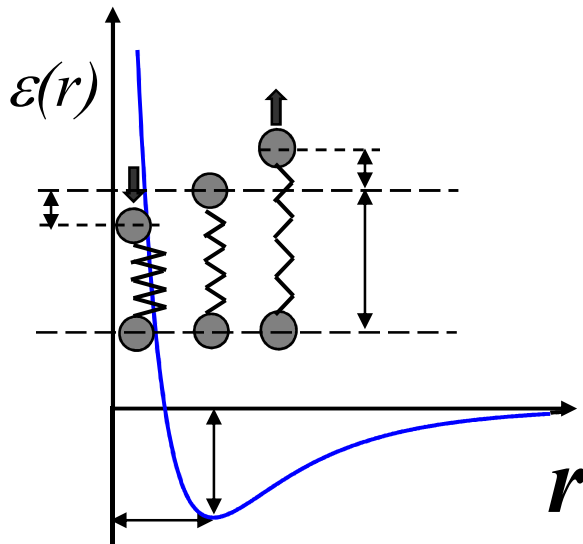
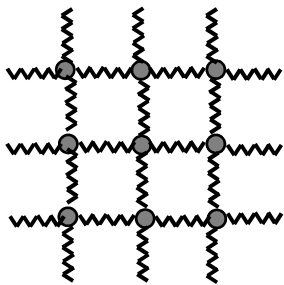
Erő hatására változnak
mint pl. csontok, és
inak. Hooke szerű
mechanikai viselkedés

Erőt generálnak
mint pl. az izmok,
Komplex
mechanikai
viselkedés

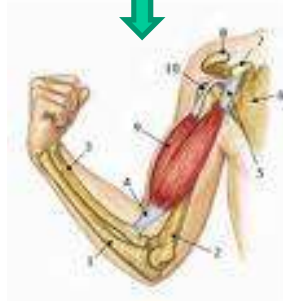


Biomechanika

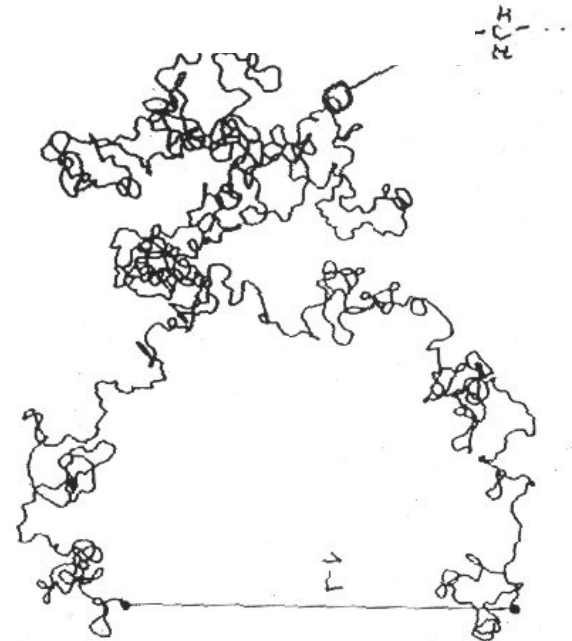
energia rugalmasság



**Nemlineáris,
időtől függő
mechanikai
viselkedés**



entrópia rugalmasság



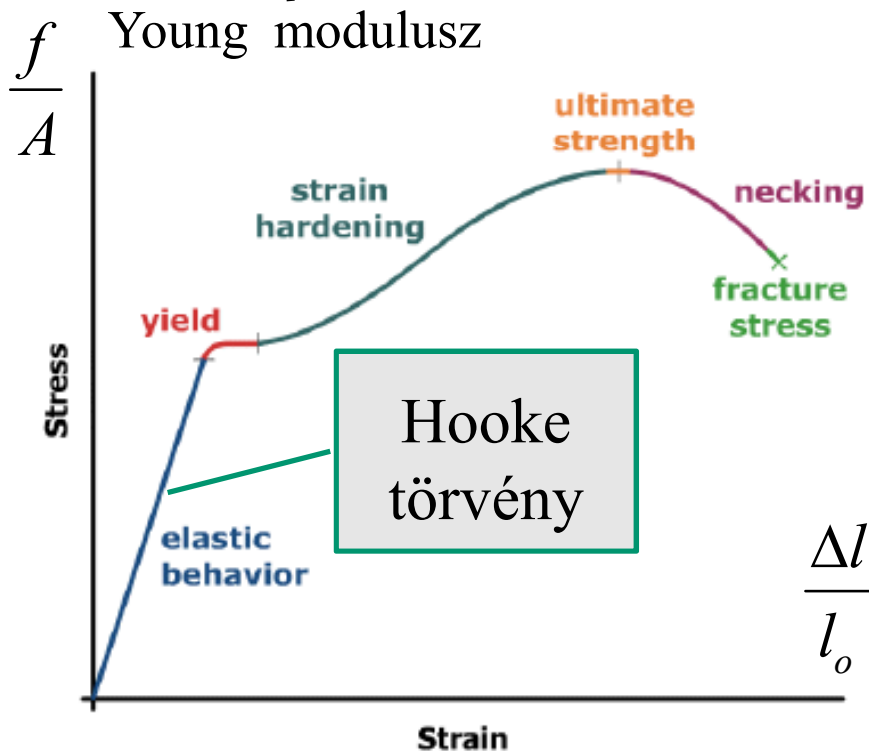
Biomechanika

Hooke törvény

$$\frac{f}{A} = E \frac{\Delta l}{l_o}$$



Young modulus



Nemlineáris,
időtől függő
mechanikai
viselkedés

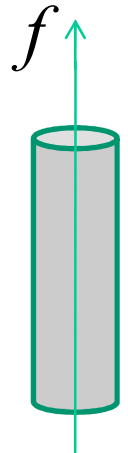
neo-Hooke törvény

$$f / r_o^2 \pi = G (\lambda_x - \lambda_x^2)$$

Nominális feszültség

deformáció arány

„nyíró„ modulusz



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Poisson arány

Egyirányú deformációnál a keresztirányú alakváltozás és a hosszirányú alakváltozás viszonya.

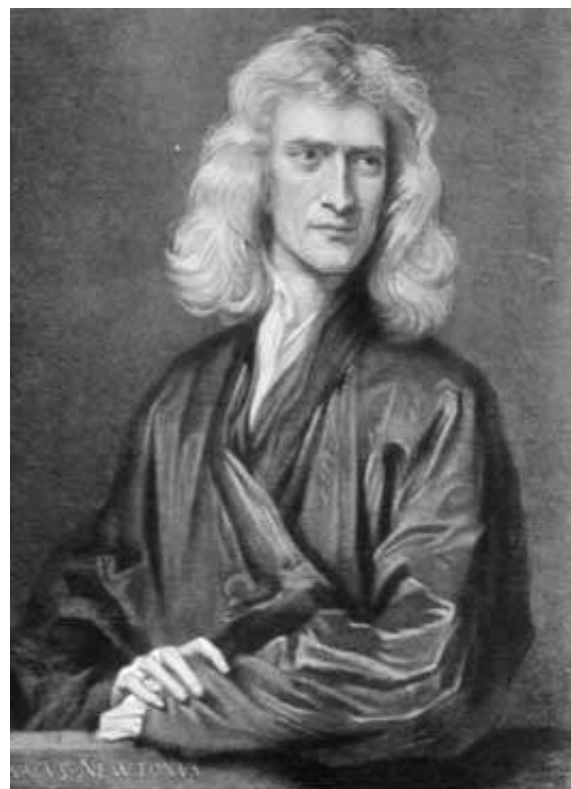
Young modulusz

haj:	12000 <i>MPa</i>
combsont:	6000 <i>MPa</i>
kollagén	2000 <i>MPa</i>
Achilles in:	250 <i>MPa</i>
acél:	200 <i>MPa</i>
köröm:	160 <i>MPa</i>
izületi porc:	24 <i>MPa</i>
idegrost:	10 <i>MPa</i>
porckorong:	6,0 <i>MPa</i>
arcbőr:	0,3 <i>MPa</i>
koronária:	0,1 <i>MPa</i>
szívizom:	0,08 <i>MPa</i>
nyelőcső:	0,03 <i>MPa</i>
harántcsíkolt izom:	0,02 <i>MPa</i>



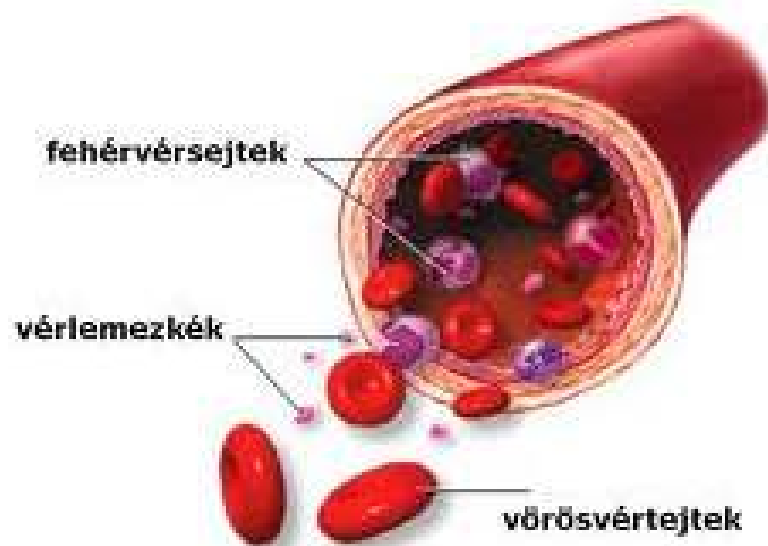
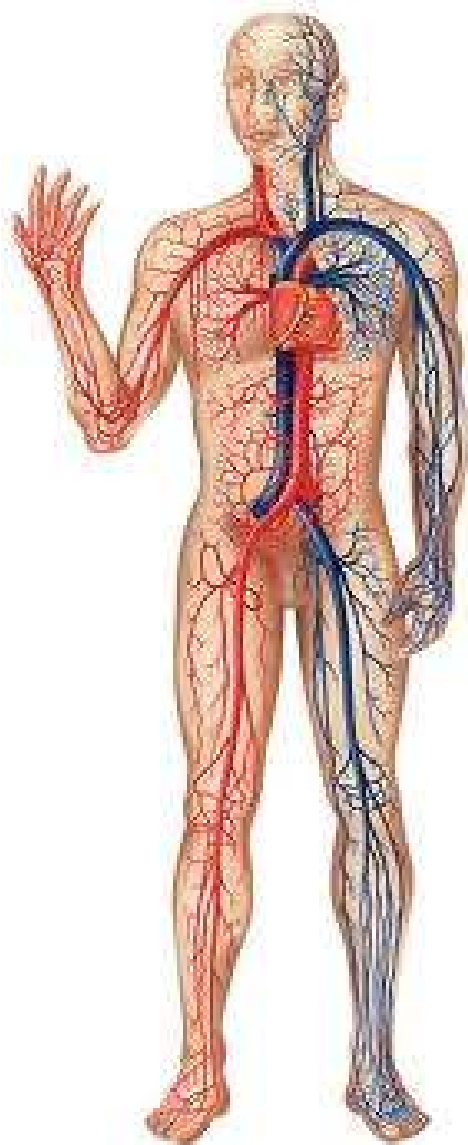
A különböző anyagi rendszerek folyásával foglalkozó tudományt 1928-ban **Bingham** javaslatára nevezték el **reológiának**.

(Rheos logos = folyástan)



Sir Isac Newton (1642-1727)

Hemoreológia



Az áramlás típusa



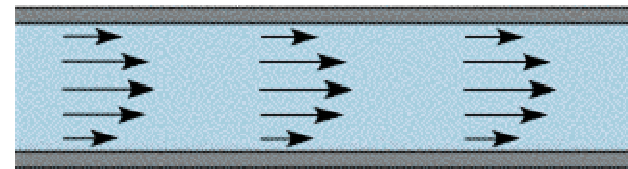
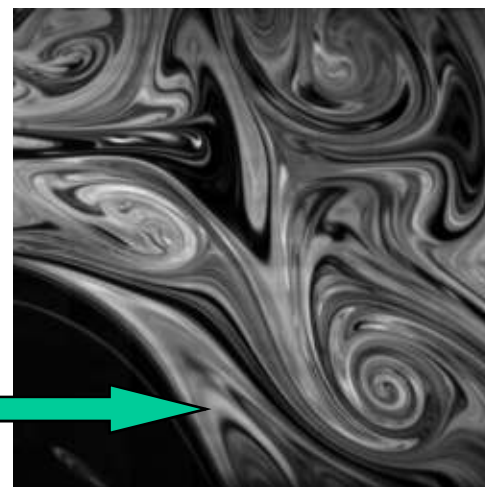
turbulens

$$R_e = \frac{vd\rho}{\eta}$$

$$v_{kr} = R_e \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot d}$$

lamináris

$$R_e < 2100(?)$$



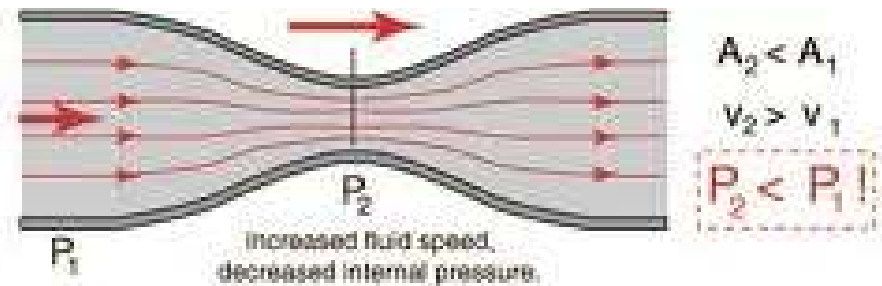
Folyás

lamináris,
turbulens,
összenyomható,
összenyomhatatlan,
„száraz”,
viszkózus,
állandó,
pulzáló,
rotáló.



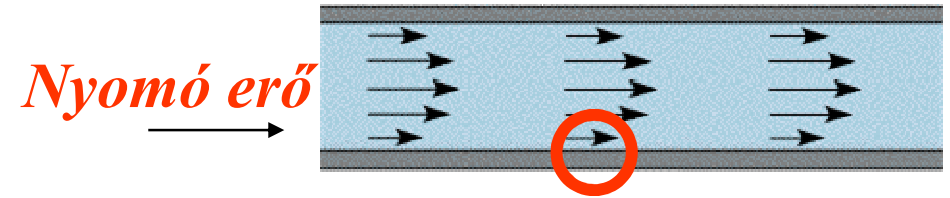
Bernoulli egyenlet

$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = konst.$$



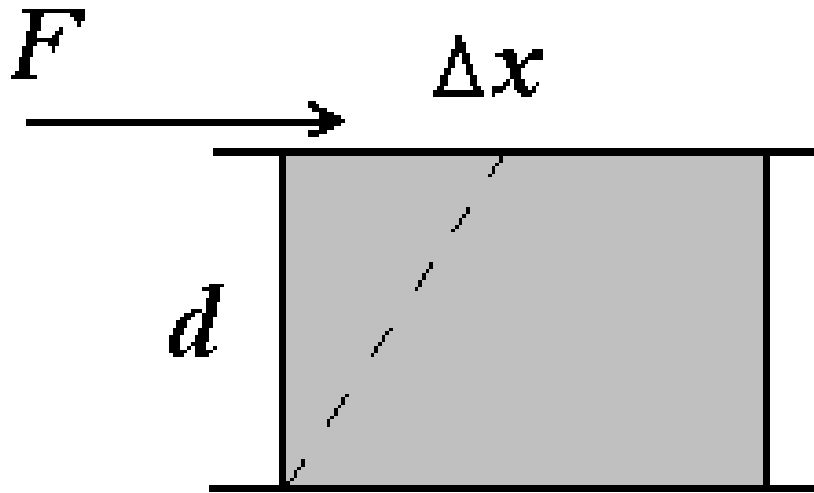
A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében az áramlás lamináris. Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

Alapfogalmak:

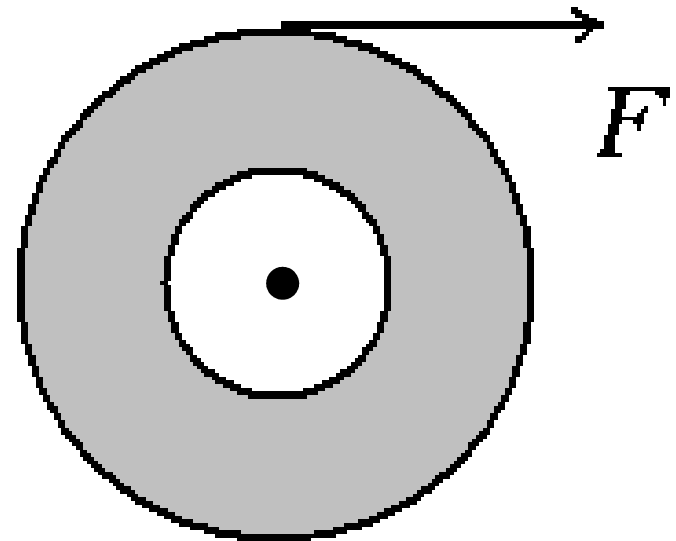


Nyíró erő

Nyírás: tangenciálisan ható (***nyíró***)erő (F) vált ki deformációt.



Tiszta nyírás

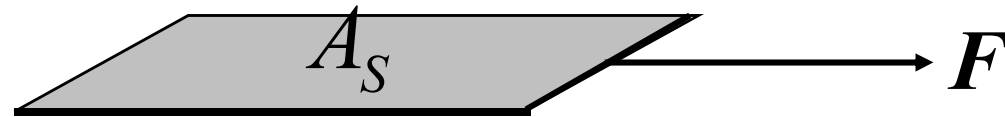


Rotációs nyírás

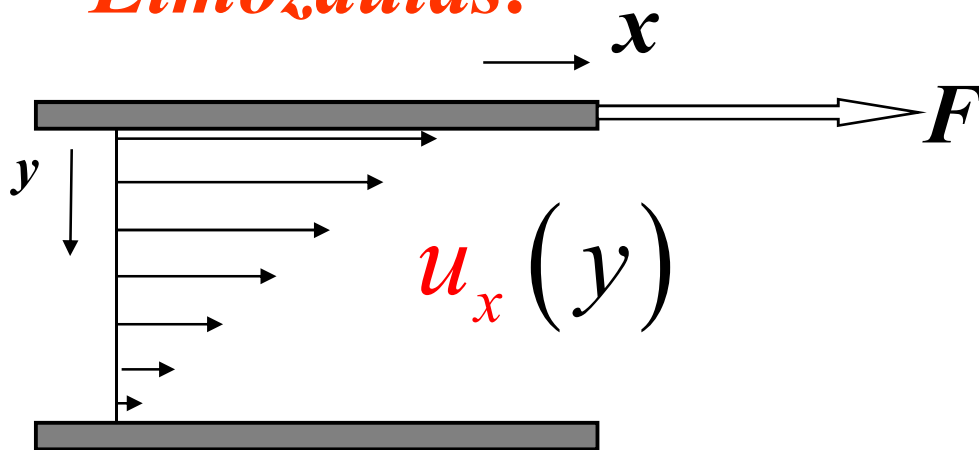
Alapfogalmak:

Nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A_S}$$



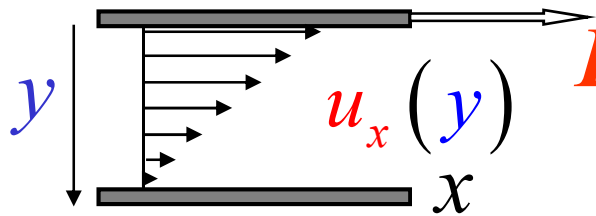
Elmozdulás:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x(y)}{dy}$$

Alapfogalmak:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x}{dy}$$

Deformáció sebesség:

$$\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{du_x}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{du_x}{dt} \right) = \frac{dv_x}{dy}$$

A deformáció sebesség megegyezik a sebesség gradienssel!

Alapfogalmak:

$$j_i = -\eta \nabla v \quad \longrightarrow \quad \tau = \eta \nabla v$$

Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Newton egyenlet

viszkozitás

Rotációs viszkoziméter

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$



Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt *pascal seconds* ($Pa\ s$))

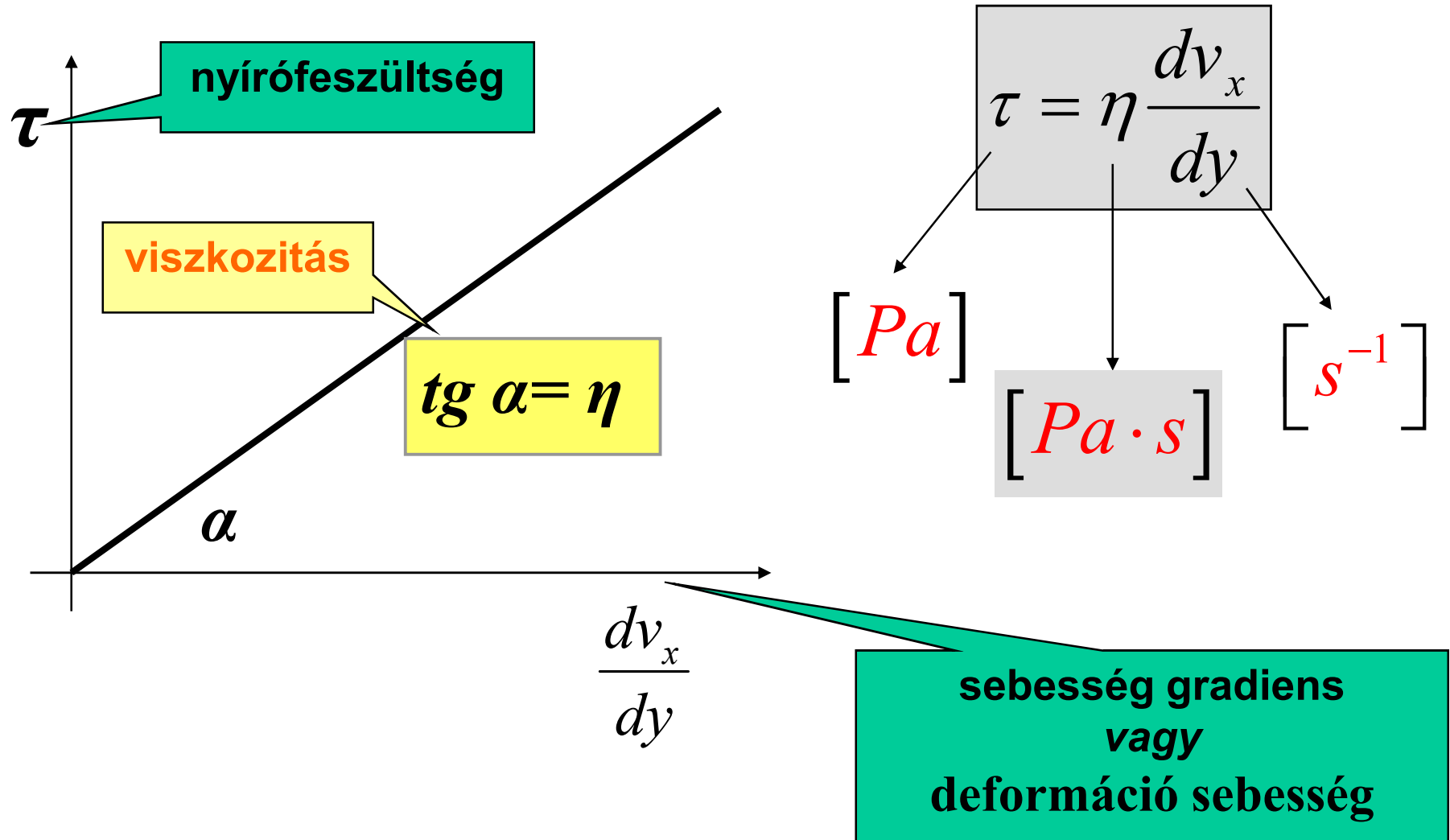
Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) tiszteletére használták a

$$1 \text{ poise} = 100 \text{ centipoise} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}.$$

Fluiditás a viszkozitás reciproka ($= 1/\eta$).

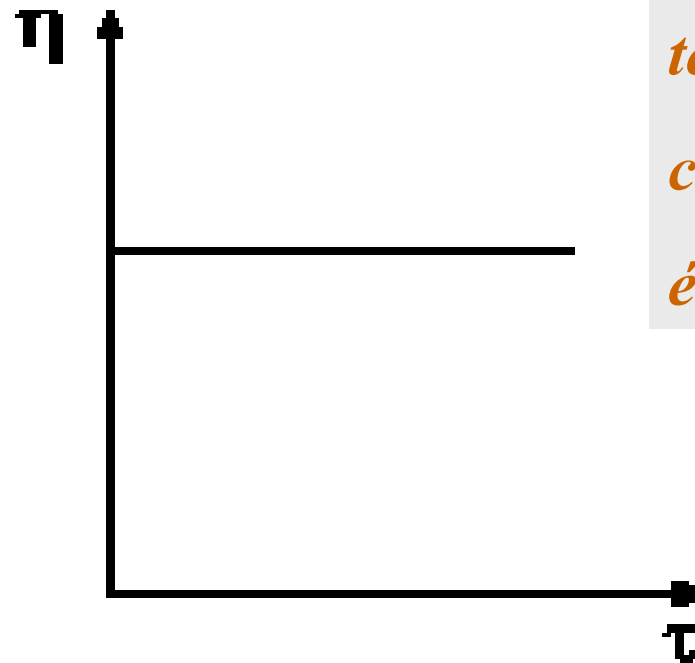
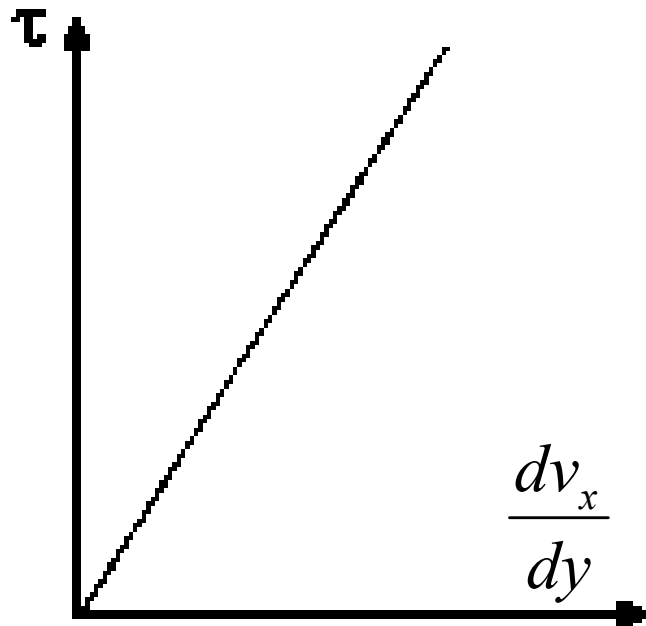
Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa ($= \eta/\rho$).
($m^2\ s^{-1}$) or the stoke (St).

Newtoni folyadék **folyásgörbéje**



Newtoni testek folyás és viszkozitásgörbéi

- folyás már a legkisebb nyíróerő hatására is megindul,
- a nyíróerő és a sebesség-gradiens között **egyenes** arányosság van,
- a viszkozitás **független** a nyíróerő nagyságától.



*víz,
tej,
cukor oldat,
étolaj*

Anyag	Hőmérséklet	Viszkozitás	$[mPa \cdot s]$
Levegő	18 °C	0,018	
Víz	0 °C	1,8	
Víz	20 °C	1	
Víz	100 °C	0,28	
Glicerín	20 °C	1500	
Higany	20 °C	1,6	
n-Pentán	20 °C	0,23	
Argon	85 K	0,28	
He ⁴	4,2 K	0,033	
Szuperfoly. He ⁴	< 2,1 K	0	
Üveg		> 10 ¹⁵	

biofolyadék	T/ °C	viszkozitás η / Pa · s
vér	37	4 (nem Newtoni)
vér plazma	37	1,5
könny	37	0,73 – 0,97
levegő	20	$1,8 \cdot 10^{-2}$
izületi folyadék	20	$> 3 \cdot 10^2$ (nem Newtoni)
agyvíz	20	1,02

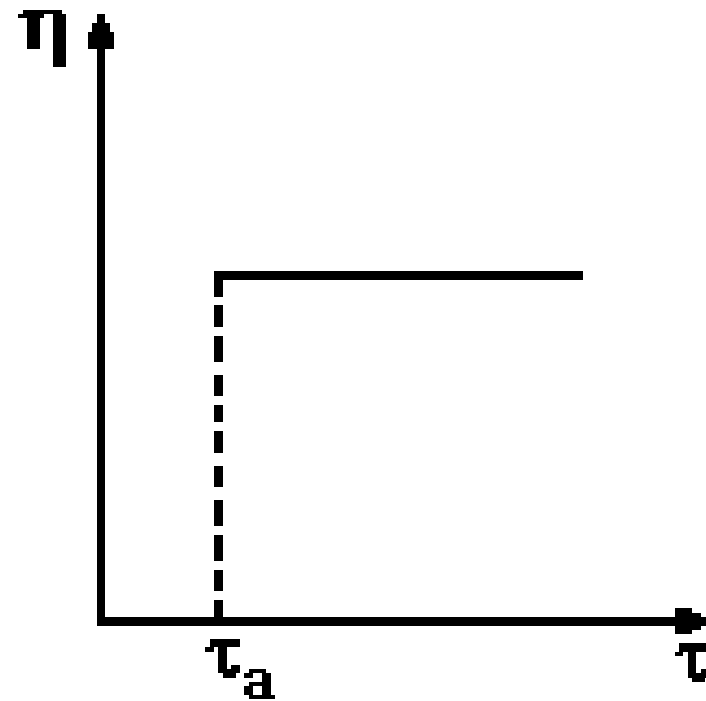
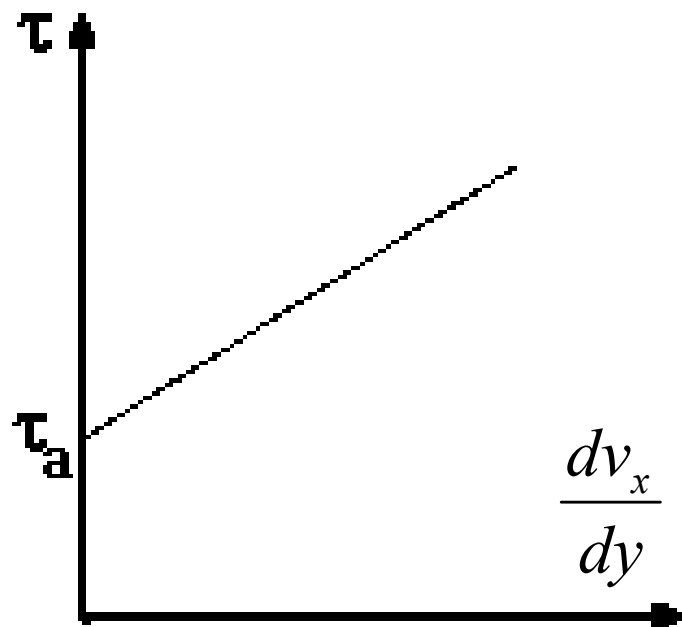
Nem newtoni testek folyásgörbéi

- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a **deformációs hatás mértékétől** és **idejétől** is függ.

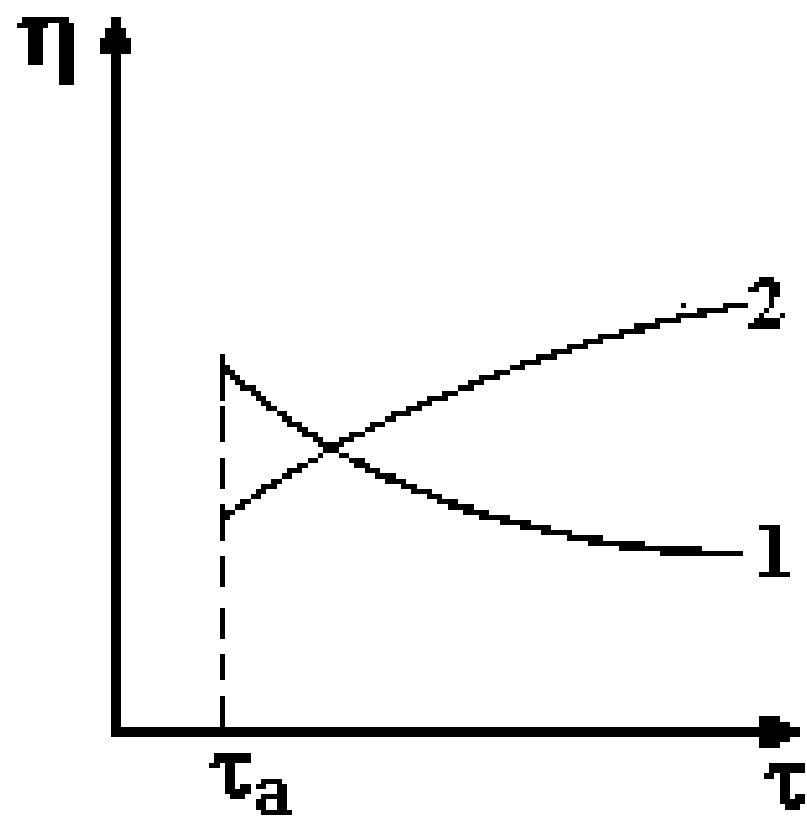
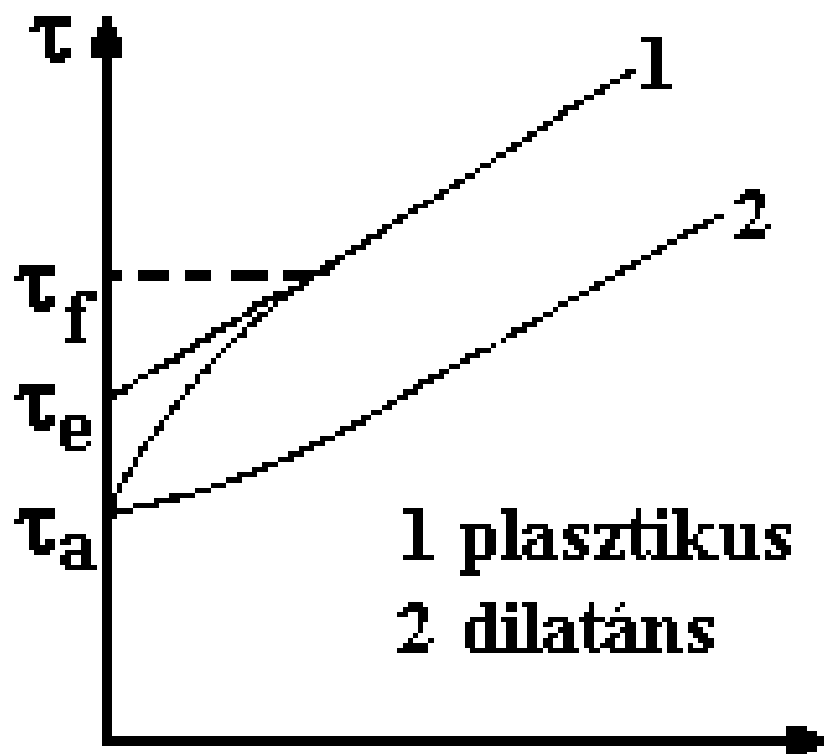
Folyásgörbéik alapján megkülönböztetünk:

- ideálisan plasztikus (Bingham-testek)
- reális plasztikus tulajdonságú testeket.
- szerkezeti viszkozitás

- ideálisan plasztikus (Bingham-test)



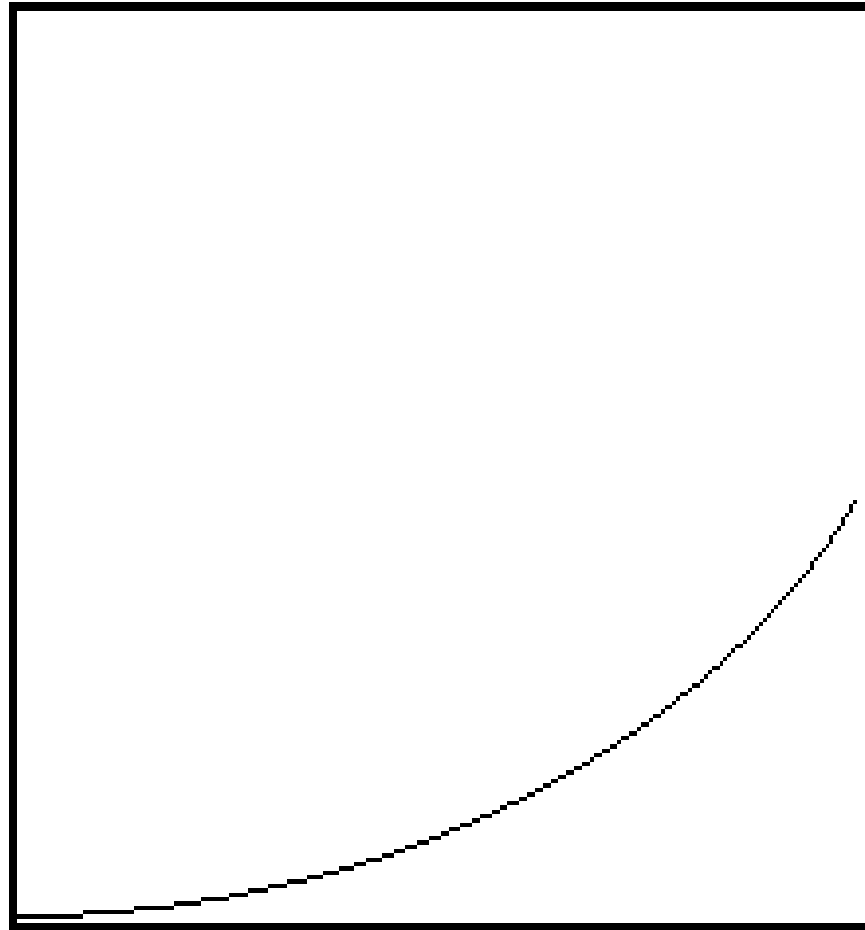
Reálisan plasztikus testek



Dilatancia

Viszkozitás növekszik nyírás hatására

τ

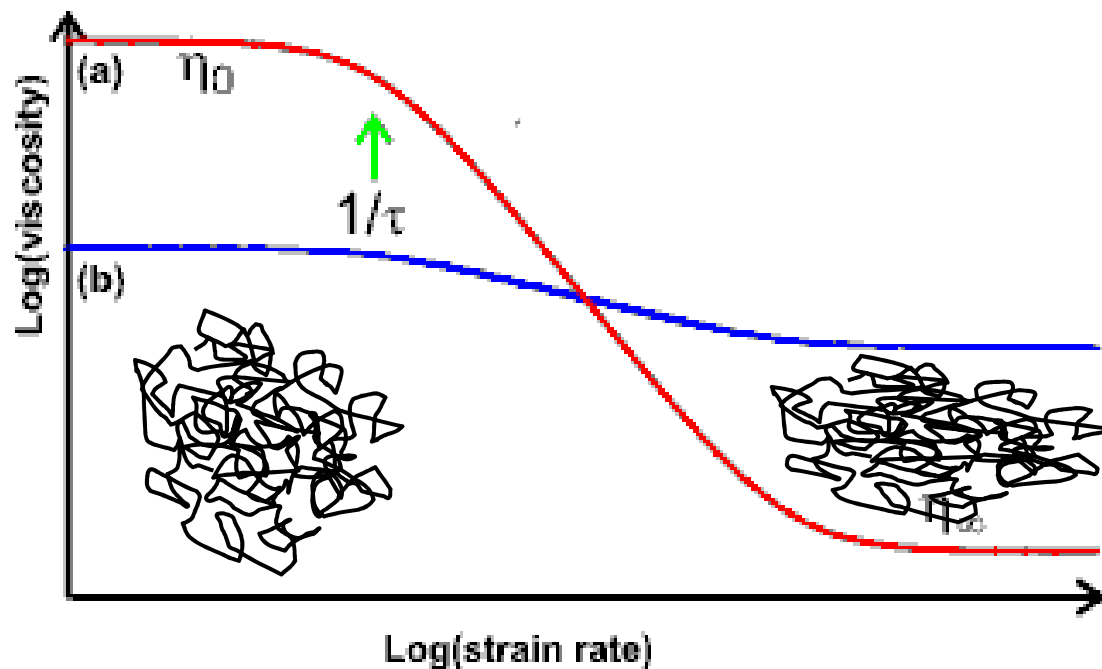


$\frac{dv_x}{dy}$

- Nedves homok
- Keményítő szuszpenzió
- vér

- szerkezeti viszkozitás

Viszkozitás csökken nyírás hatására



polimer oldat

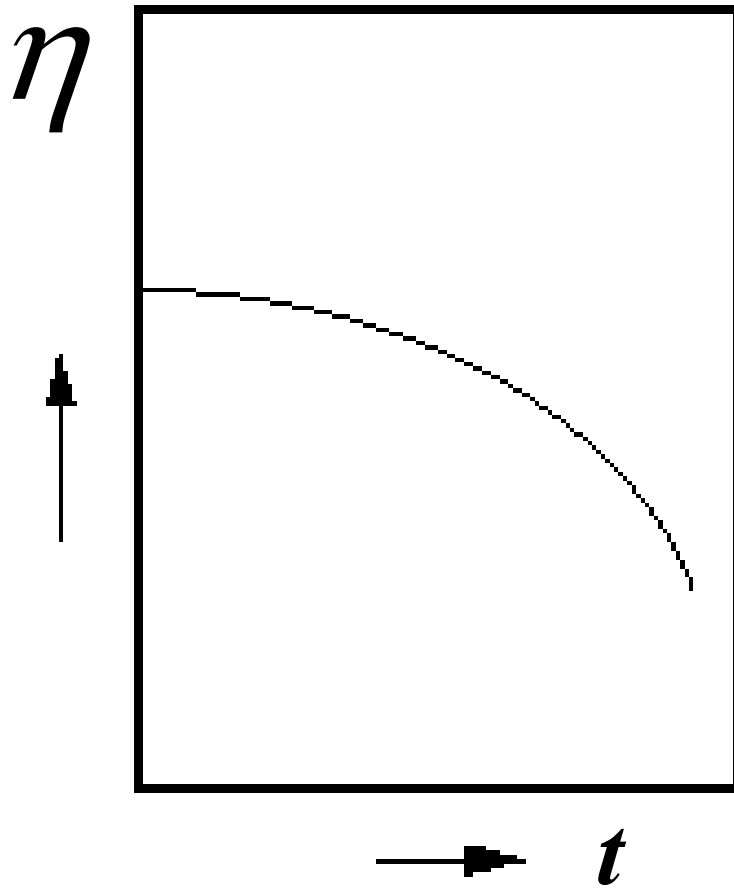
festék

ketchup

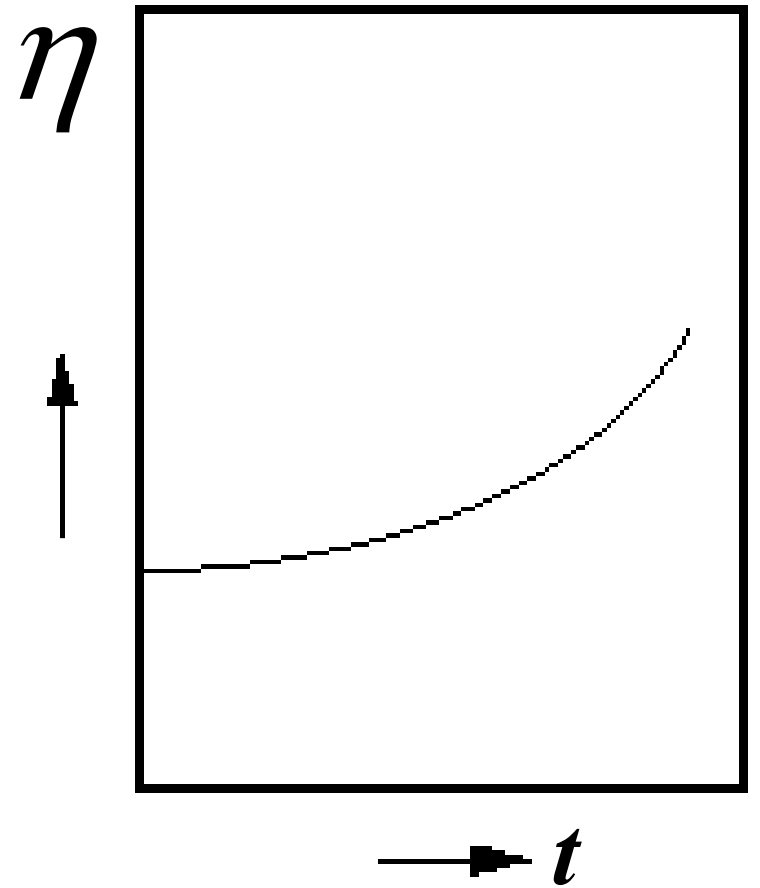
A **tixotrópiát** mutató testek külső mechanikai erők hatására (rázás, keverés, dörzsölés), aránylag kis munkabefektetés mellett **elfolyósodnak**. Az elfolyósodás **viszkozitás csökkenés**ben nyilvánul meg. **(festék, joghurt)**

A **reopexiát** mutató testek külső mechanikai erők hatására (rázás, keverés, dörzsölés), aránylag kis munkabefektetés mellett **keményednek**. Az elfolyósodás **viszkozitás növekedés**ben nyilvánul meg. **(gipsz szuszpenzió)**

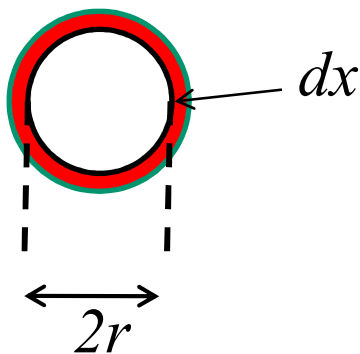
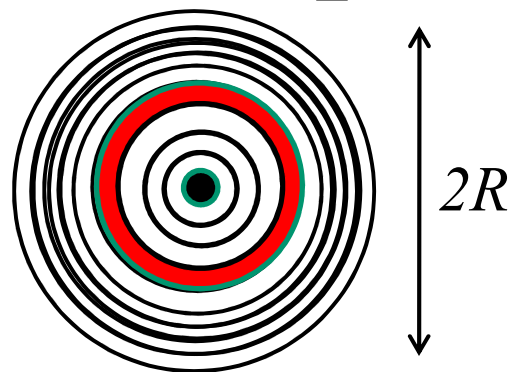
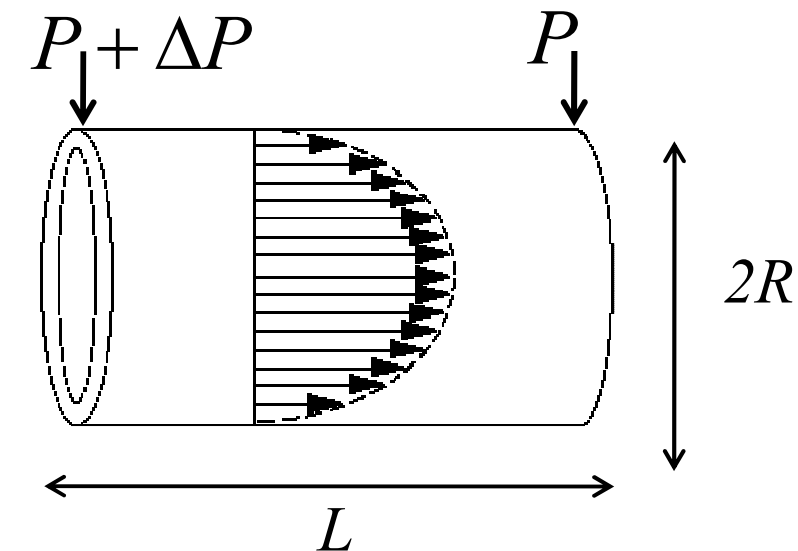
tixotrópia



reopexia



Folyadék áramlása csőben áramlási profil



$$v_x(r = R) = 0$$

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L}$$

$$dv_x = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot 2 \cdot r \cdot dr = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d(r^2)$$

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konst.$$

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Folyadék áramlása csőben
térfogatáram

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$v_x(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr$$

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot dr$$

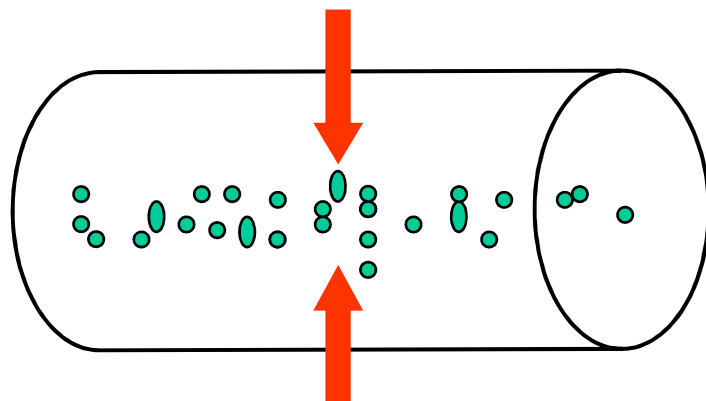
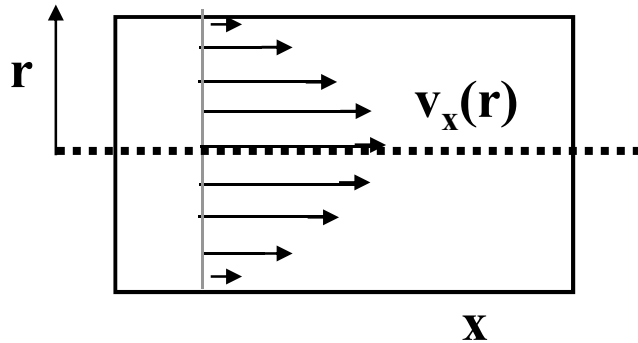
$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$\overline{v_x} = \frac{I_V}{R_o^2 \pi} = \frac{R_o^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max}$$

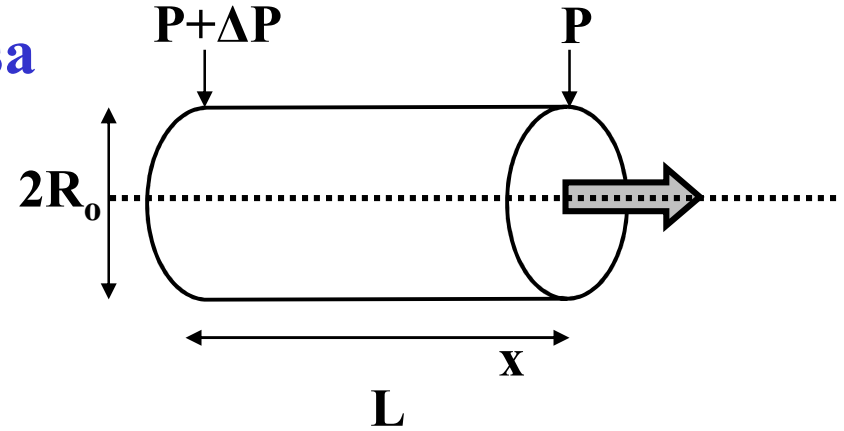
Newtoni folyadék lamináris áramlása

(összefoglalás)

Parabolikus sebesség profil



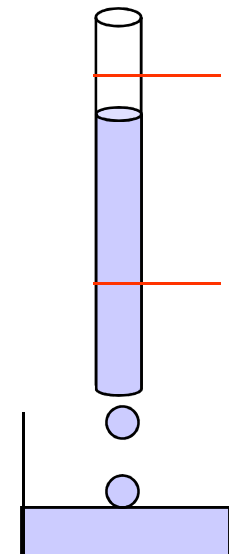
$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = \text{const} \quad \text{Bernoulli törvény}$$



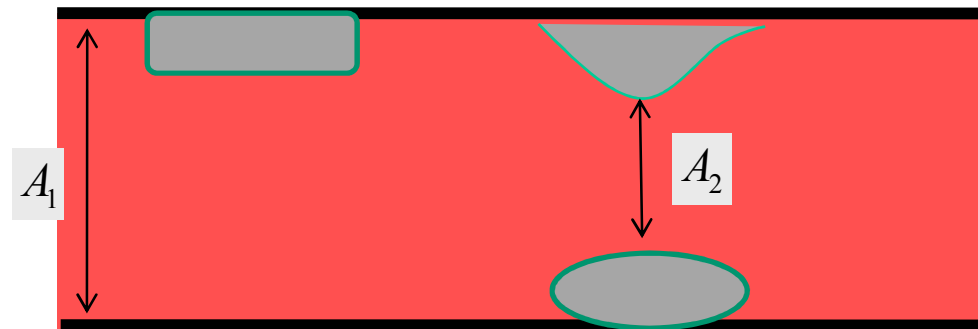
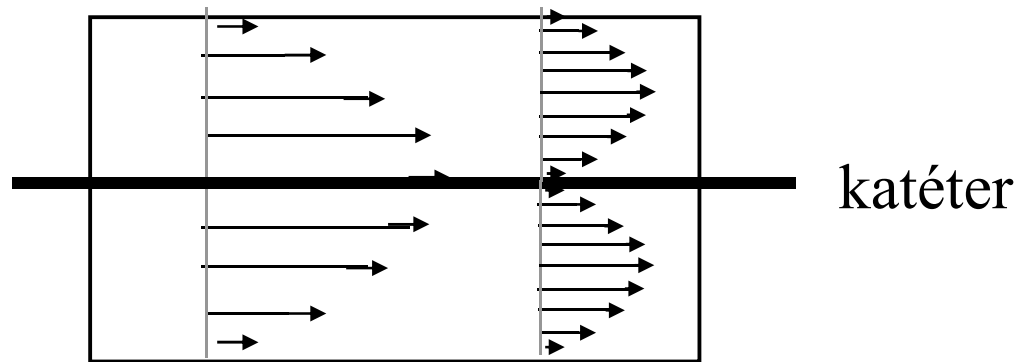
$$v_z(r) = \frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right)$$

Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$



Parabolikus sebesség profil módosulása



turbulens

Vér áramlása elágazó erekben



$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta L} \cdot \Delta P = \frac{1}{R_{res}} \cdot \Delta P$$

$$R_{res} (soros) = \sum_i R_{res,i}$$

$$R_{res} (párhzamos) = \sum_i \frac{1}{R_{res,i}}$$

érszakasz	átmérő cm	hossz cm	elágazások száma	áramlási seb. cm/s
aorta	2,4	40	1	23
artériák	0,4	15	160	5
kapillárisok	0,0007	0,07	$1,2 \cdot 10^{10}$	0,022
vénák	0,5	15	200	2,5

Relatív viszkozitás (η_{rel}).

$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_o} \simeq \frac{t}{t_o}$$

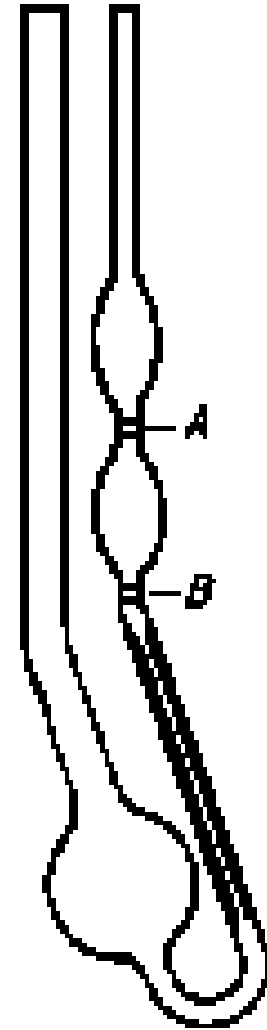
oldat

oldószer

Specifikus viszkozitás (η_{sp})

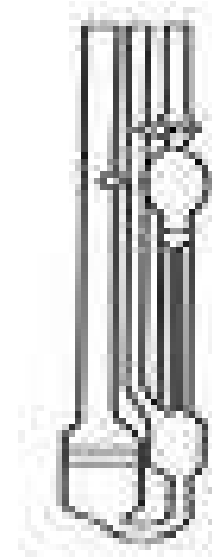
$$\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$$

Ostwald-féle viszkoziméter



Redukált viszkozitás (η_{red})

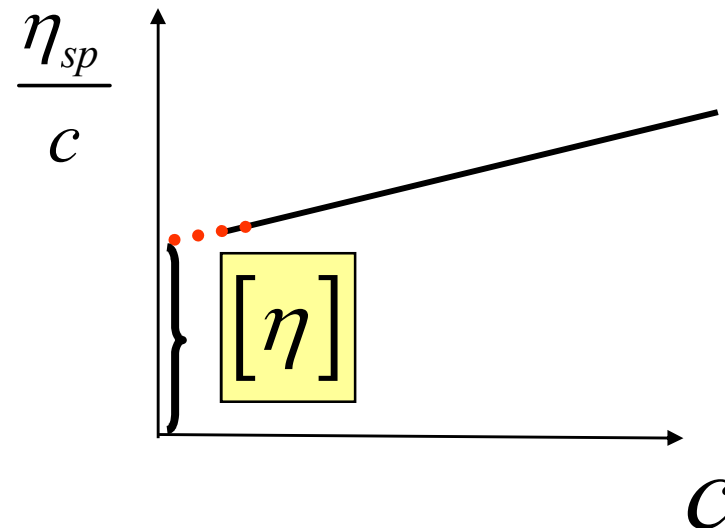
$$\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}$$



Jellemző viszkozitás ($[\eta]$)

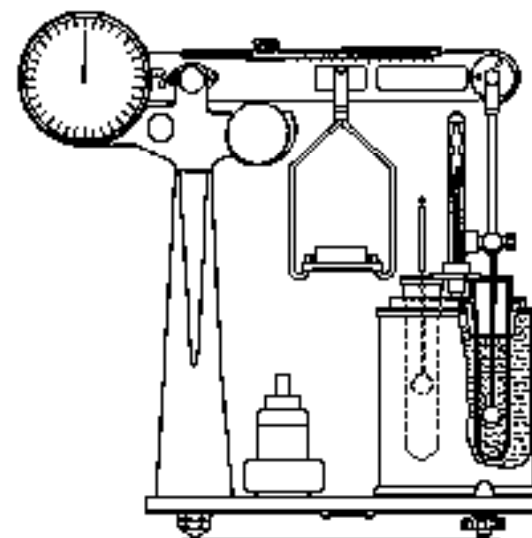
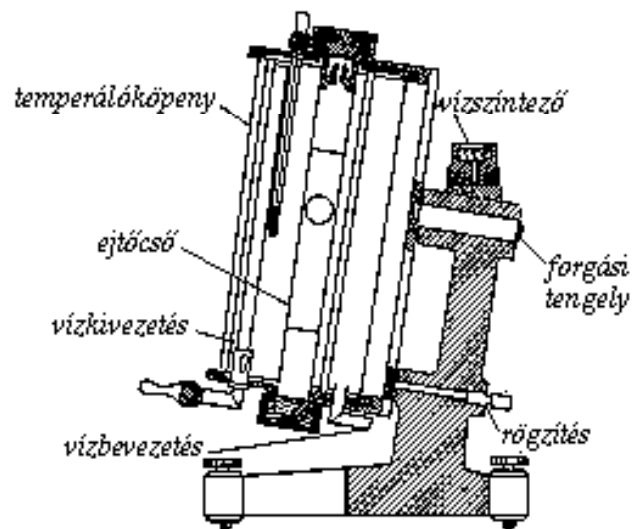
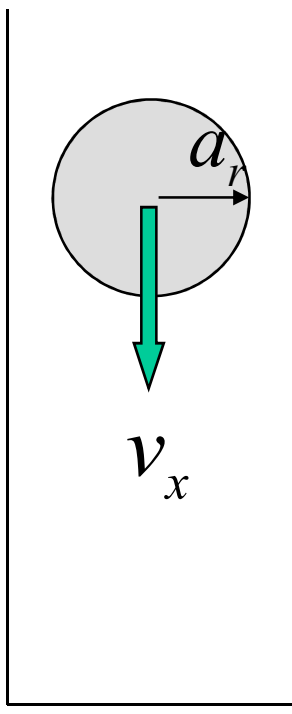
Ubbelohde féle viszkoziméter

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \eta_{red}$$



Stokes törvény:

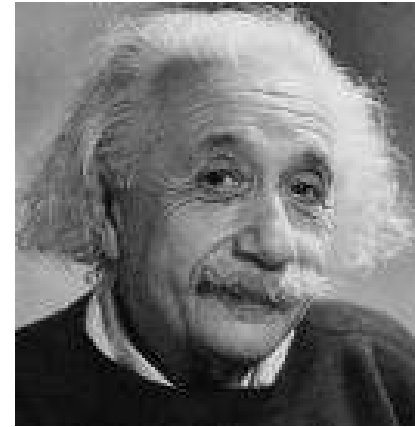
$$f_{\eta} = 6\pi\eta a_r v_x$$



Höppler féle viszkoziméter

Híg szuszpenziók viszkozitása:

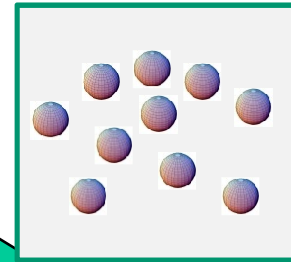
Általában *newtoni* viselkedés



Einstein-egyenlet



$$[\eta] = 2.5\Phi$$

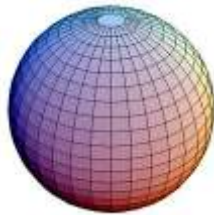


$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$

Térfogati tört

A viszkozitás független a részecskék méretétől !

Einstein-egyenlet általánosítása:



$$[\eta] = \nu_a \Phi$$

$$\eta = \eta_o (1 + \nu_a \Phi)$$

Asszimetria faktor

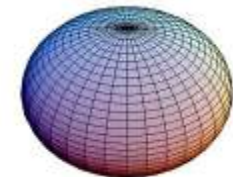
$$\nu_a = \frac{(a/b)^2}{15 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{3}{2} \right]} + \frac{(a/b)^2}{5 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{1}{2} \right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid



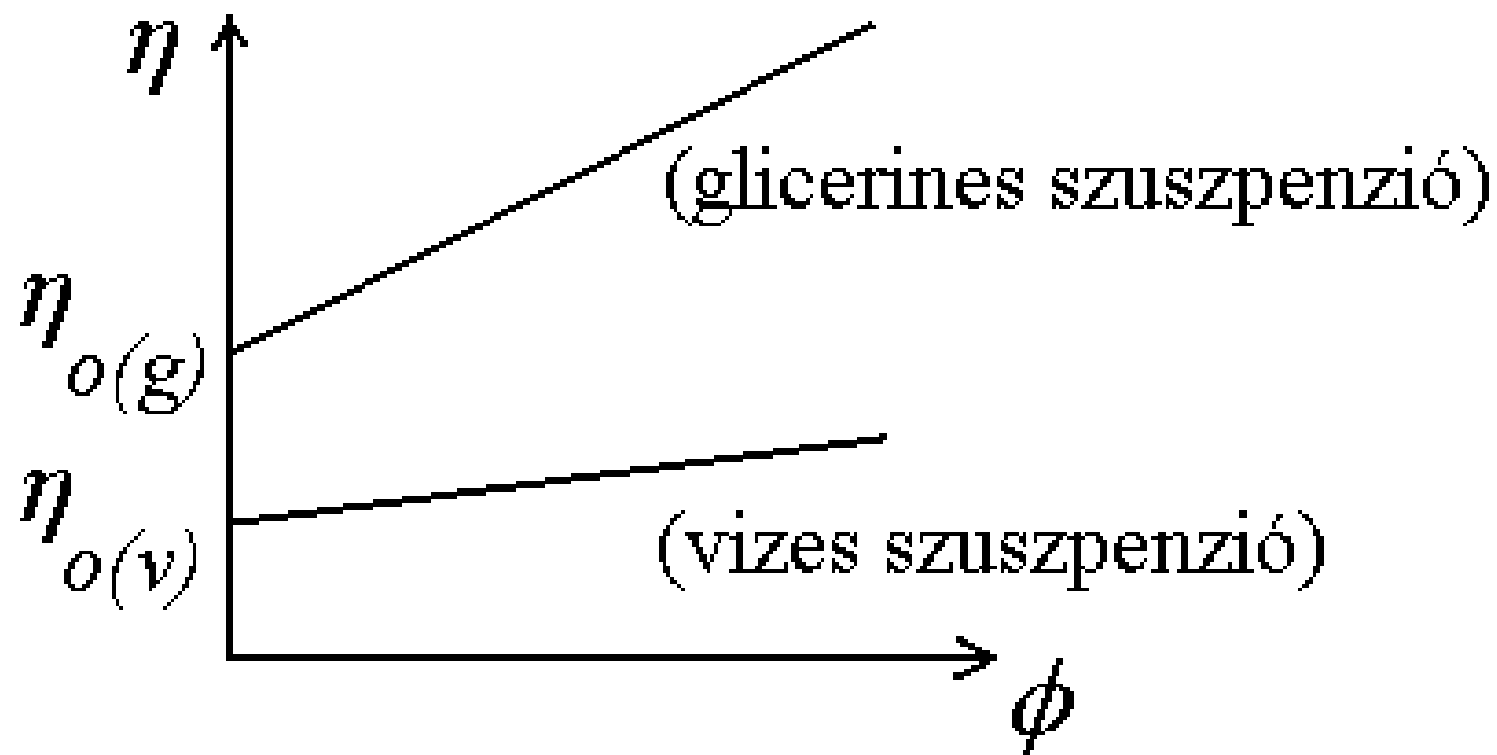
$$\nu_a = \frac{16(a/b)}{15 \tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid

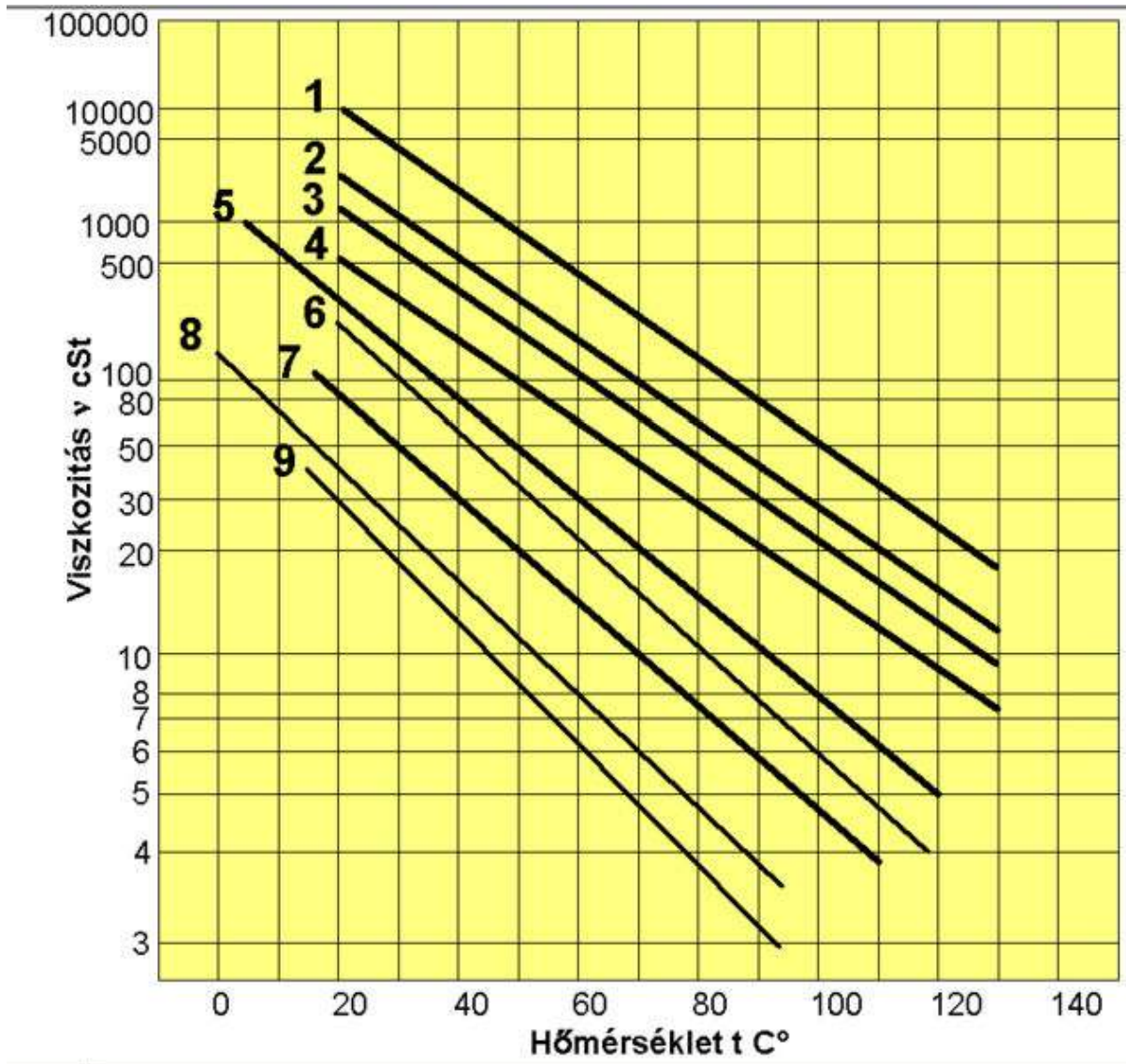


DNS-re: $a/b = 27,8$ $\nu_a = 65,2$

$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$



A viszkozitása függése a hőmérséklettől:



$$\eta(T) = \eta_o \cdot \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

Stokes-Einstein law:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a_r}$$