

# Transzportfolyamatok

(transzport = szállítás, fuvarozás)

## Jelentősége:

élőlények → anyagcsere

pl. légzés, vérkeringés, sejtek közötti és  
sejten belüli anyagáramlás

## Korábban szerzett felhasználható ismeretek:

– mechanika (mozgások)

– elektromosság

(elektromos áramerősség,  $I_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  ;[A])

– sugárzások

(energia áramerősség,  $I_E = \frac{\Delta E}{\Delta t}$  ;[W];

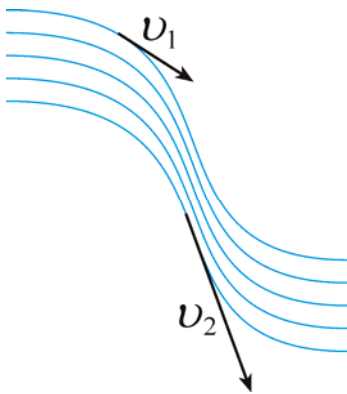
energia áramsűrűség,  $J_E = \frac{\Delta I_E}{\Delta A}$  ; $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$ )

# Térfogati áramlás (csövekben)

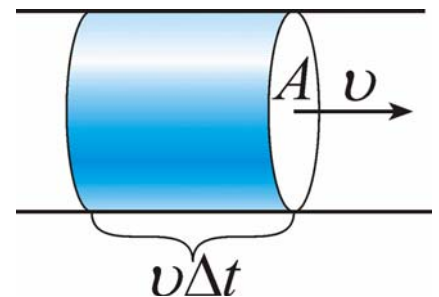
Áramló folyadékok (és gázok)



hidrodinamika



(áramvonalak;  
időben állandó:  
**stacionárius áramlás**)



térfogati áramerősség  $I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$  ;  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$

térfogati áramsűrűség  $J_V = \frac{\Delta I}{\Delta A}$  ;  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

(áramlási sebesség)

Megjegyzések:

összenyomhatatlan áramló közeg esetén,

$$\text{tömeg áramerősség } I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\Delta m}{\Delta V} = I_V \rho_m$$

**reális** folyadék

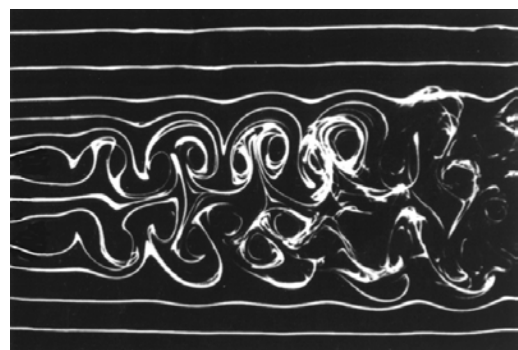
**lamináris áramlás**

(réteges)



**turbulens áramlás**

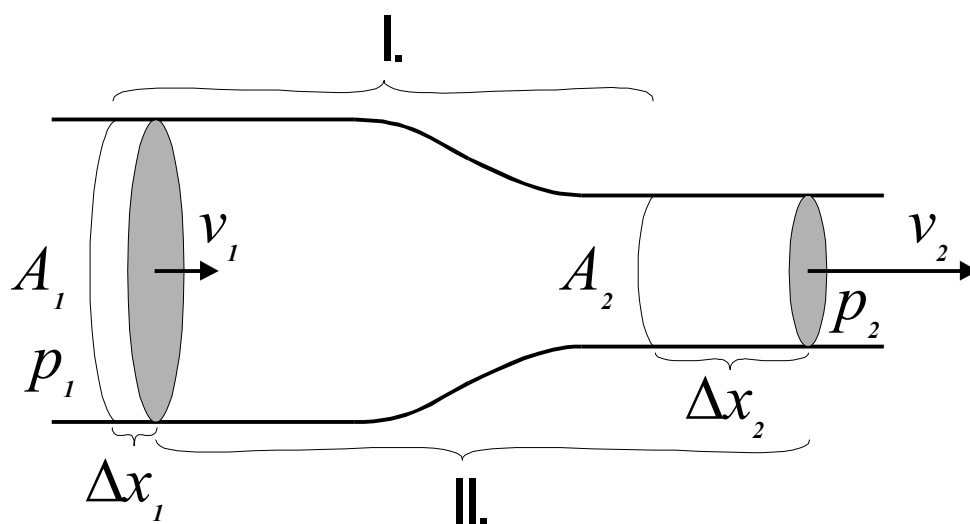
(gomolygó)



**Kontinuitási törvény:**  $I_V = \text{állandó}$

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \frac{\Delta x}{\Delta t} = Av = \text{állandó} \quad \rightarrow \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(tömegmegmaradás, nincs forrás sem nyelő)



Pl. erek

érszakasz	átmérő (cm)	ágak száma	$A_{\text{össz}}$ (cm <sup>2</sup> )	$v$ (cm/s)
aorta	2,4	1	4,5	23
artériák	0,4	160	20	5
arteriolák	0,003	$5,7 \cdot 10^7$	400	0,25
kapillárisok	0,0007	$1,2 \cdot 10^{10}$	4500	0,022
venulák	0,002	$1,3 \cdot 10^9$	4000	0,025
vénák	0,5	200	40	2,5
venae cavae	3,4	2	18	6

## Ideális folyadék:

- 1.) összenyomhatatlan (**inkompresszibilis**)
- 2.) a súrlódásától eltekintünk

Mechanikai energia megmaradás (munkatétel):

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \quad \left( \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho_m \right)$$

## Bernoulli törvény:

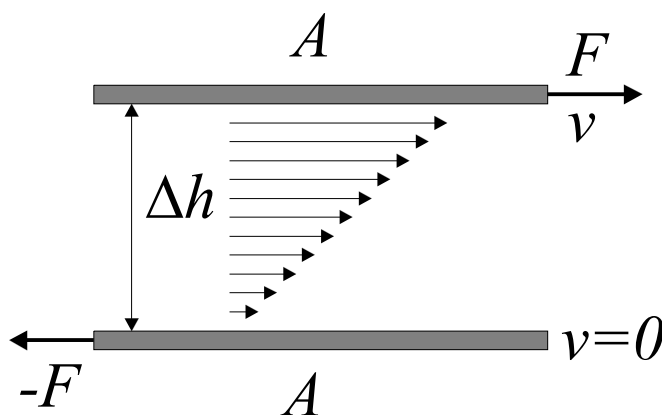
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_m v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_m v_2^2 = \text{állandó}$$

## Példák

## Viszkózus (reális) folyadék:

(Amikor a súrlódásától nem tekintünk el)

## Newton-féle súrlódási törvény:



$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

$\Delta v / \Delta h$  a **sebességesés**

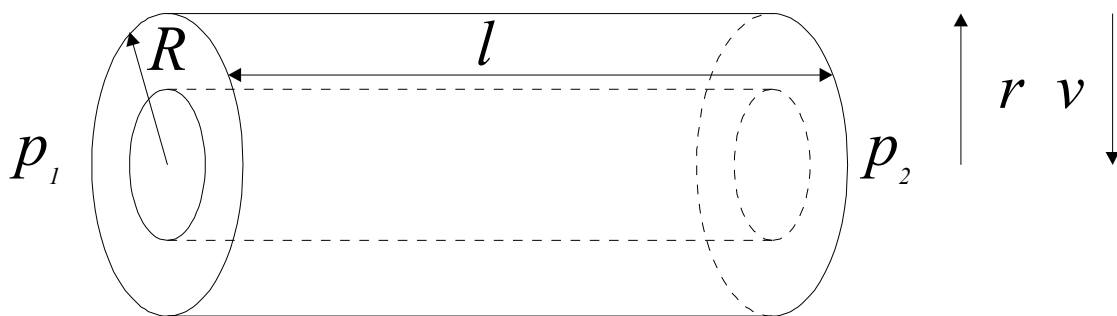
$\eta$  [Pas] **belső súrlódási együttható** vagy **viszkozitás**

Néhány anyag viszkozitása normál állapotban mérve:

anyag	viszkozitás [Pas]
<u>levegő</u>	$10^{-5}$
<u>víz</u>	$10^{-3}$
<u>méz</u>	$10^1$
<u>bitumen</u>	$10^8$
<u>üveg</u>	$10^{40}$

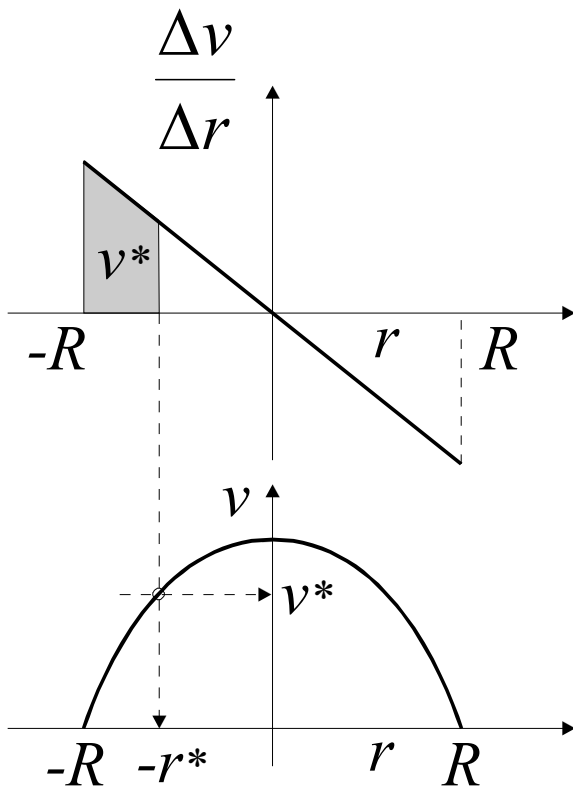
Érvényesség: **newtoni folyadék**      nem newtoni folyadék

Alkalmazás:



$$\Delta p r^2 \pi = -\eta 2r \pi l \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{\Delta p r}{2\eta l} = -Kr$$

## Megoldás:



$$v^* = \frac{(KR + Kr^*)(-r^* - (-R))}{2}$$

$$v^* = \frac{1}{2}K(R+r^*)(R-r^*)$$

$$v^* = \frac{1}{2}K(R^2-r^{*2})$$

$$v^* = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{1}{2}(R^2-r^{*2})$$

(parabolikus sebességprofil)

## Mekkora a térfogati áramerősség?

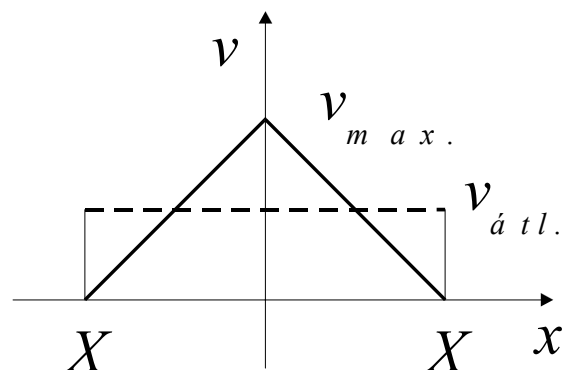
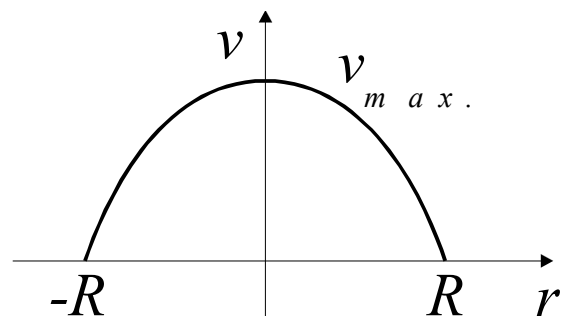
$$I_V = v_{\text{átl.}} A = v_{\text{átl.}} R^2 \pi$$

## Mekkora $v_{\text{átl.}}$ ?

$$v(r) = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{1}{2}(R^2 - r^2)$$

$$v_{\text{max.}} = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2)$$

Új jelölés:  $R^2 \equiv |X|$ ,  
 $r^2 \equiv |x|$



$$v(x) = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{1}{2} (|X| - |x|) \quad v_{\text{átl.}} = \frac{v_{\text{max.}}}{2}$$

### **Hagen–Poiseuille-törvény:**

$$I_V = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2) R^2 \pi = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4$$

### Hogyan mozog a test viszkózus közegben?

Becslés gömb esetén:  $\leftarrow (F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta h})$

$$F \approx \eta 4 r^2 \pi \frac{v}{r} = 4\pi\eta r v$$

### **Stokes törvény:**

$$F = 6\pi\eta r v$$

Lamináris áramlás ( $F \sim v$ )

Turbulens áramlás ( $F \sim v^2$ )

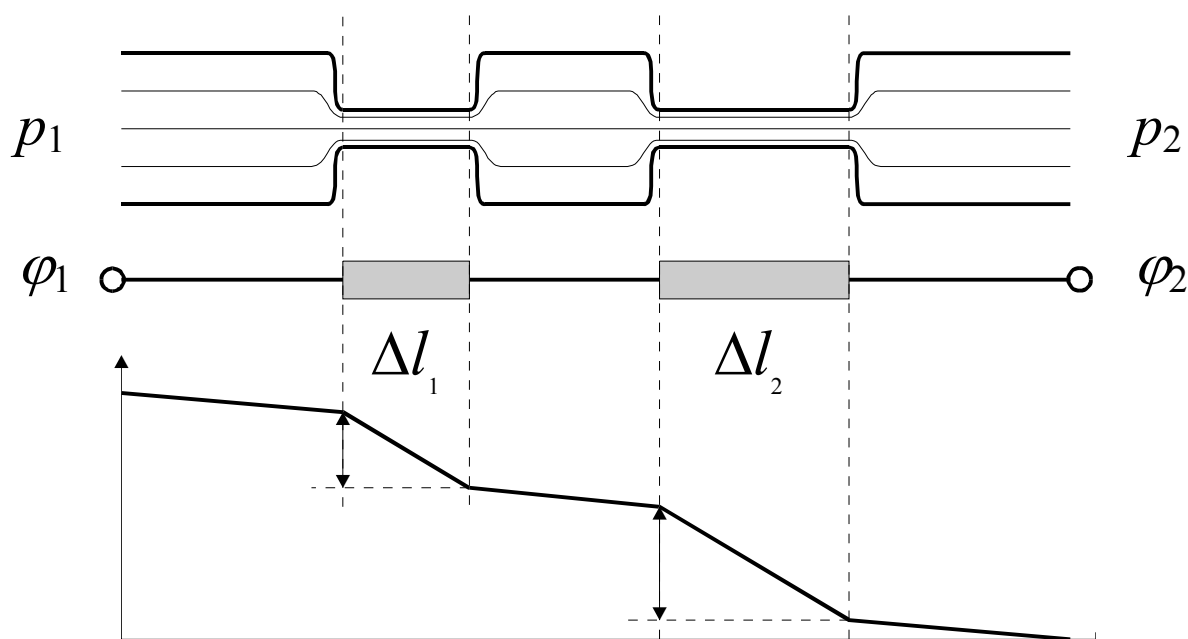
$$v_{\text{kritikus}} = Re \frac{\eta}{\rho_m r}$$

Reynolds szám ( $Re \approx 1000$  sima falú cső esetén)

## A H–P-törvény és az Ohm-törvény hasonlósága

$$I_V = \frac{\pi}{8\eta l} R^4 \Delta p \quad \rightarrow \quad I_Q = \frac{1}{R_\Omega} U = \frac{A}{\rho l} U = \frac{\pi}{\rho l} R^2 \Delta \varphi$$

→ a soros és párhuzamos kapcsolásra vonatkozó összefüggések (Kirchhoff törvények) érvényessége



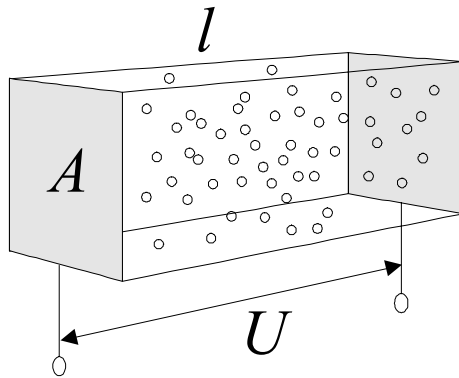
gradiens vektor

$(-\text{grad } p), (-\text{grad } \varphi)$



## Miért lép fel „súrlódás”? (mikroszkopikus kép)

(aluljáró pl.)



$t$  idő alatt

a véletlen ütközések száma  $k$

$\tau = \frac{t}{k}$  az ütközések között

eltelt átlagos idő

a kitüntetett részecskékre  $F = \frac{U}{l}q$  erő hat

$v_{drift} = \frac{F}{m} \tau = uF = uq \frac{U}{l}$ ; ( $u$ ;  $\left[\frac{\text{m}}{\text{Ns}}\right]$  a mozgékonyság)

$n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$  a részecske koncentráció; ( $n$ ;  $\left[\frac{1}{\text{m}^3}\right]$ )

$\Delta t$  idő alatt  $\Delta Q = q\Delta N = qnv_{drift}\Delta tA$  töltés éri el a lemezt

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I_Q = uq \frac{U}{l}Anq = uq^2n \frac{A}{l}U = \sigma \frac{A}{l}U \quad \left(\sigma; \left[\frac{\text{S}}{\text{m}}\right]\right)$$

$$J_Q = -\sigma \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$$

**Megjegyzések:** gáz ill. folyadék lamináris áramlása

# Diffúzió

(kísérlet)

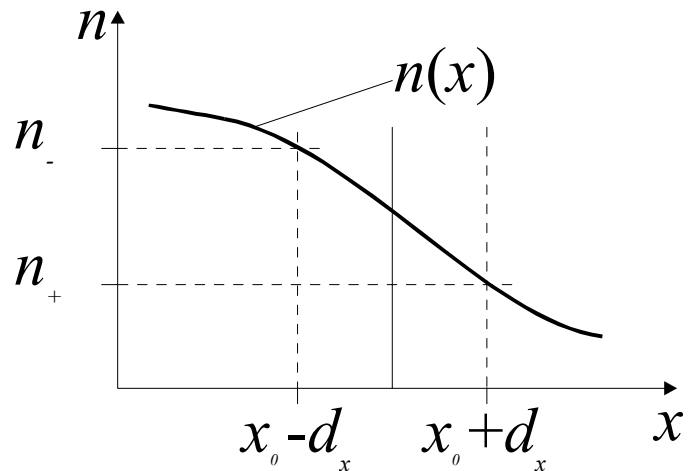
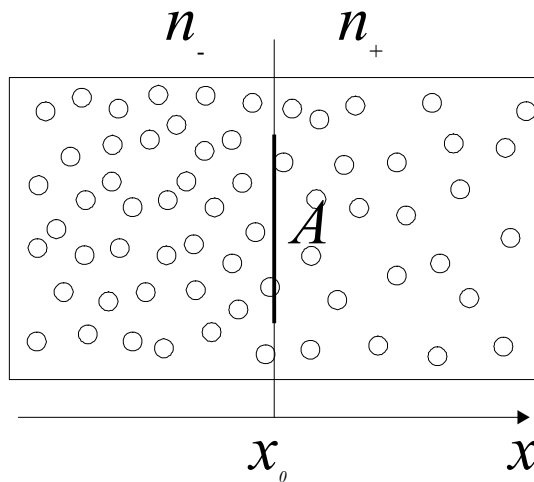
részecske áramerősség  $I_N = \frac{\Delta N}{\Delta t}$  ;  $\left[ \frac{1}{s} \right]$

részecske áramsűrűség  $J_N = \frac{\Delta I_N}{\Delta A}$  ;  $\left[ \frac{1}{m^2 s} \right]$

átlagos szabad úthossz  $d = v\tau$  ; [m]

Megjegyzések: elektromos áramerősség  $I_Q = qI_N$ ,

tömeg áramerősség  $I_m = mI_N$



$\Delta t$  idő alatt  $\Delta N = N_- - N_+ = \frac{1}{2} v_x \Delta t A (n_- - n_+)$  részecske

lép át az  $A$  felületen

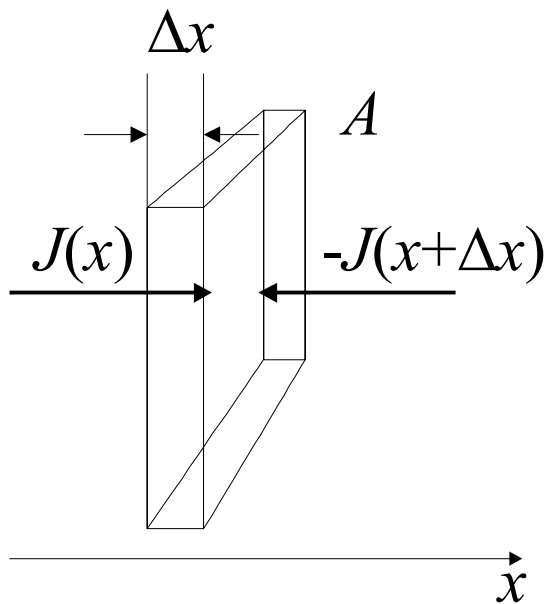
## Fick I. törvénye:

$$J_{Nx} = \frac{1}{2} v_x 2d_x \left( -\frac{\Delta n}{\Delta x} \right) = -v_x d_x \frac{\Delta n}{\Delta x} = -D \frac{\Delta n}{\Delta x} \quad \left( D ; \left[ \frac{m^2}{s} \right] \right)$$

felhasználva, hogy  $d_x = v_x \tau$ , ill.  $\tau = um$   $\rightarrow$

$$J_{Nx} = -m v_x^2 u \frac{\Delta n}{\Delta x} ; \left( \text{de } \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} kT \right) \rightarrow D = ukT$$

## Általánosított kontinuitási törvény:



$$[J(x) - J(x + \Delta x)] A \Delta t = \\ = [n(t + \Delta t) - n(t)] A \Delta x$$

$$-\frac{\Delta J}{\Delta x} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

alkalmazás:

## Fick II. törvénye:

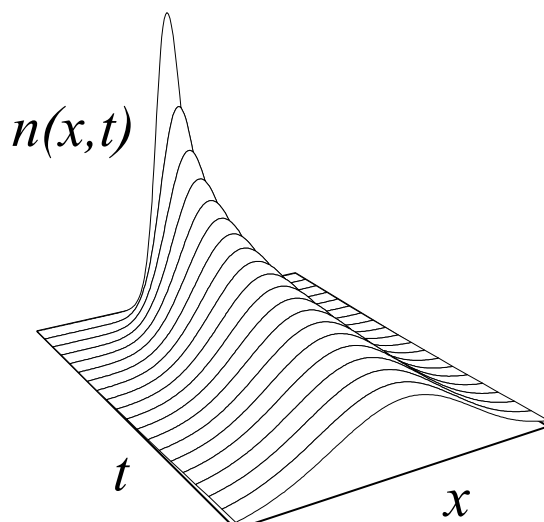
$$D \frac{\Delta \left( \frac{\Delta n}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

$$n(t + \Delta t) = n(t) + D \Delta t \frac{\Delta \left( \frac{\Delta n}{\Delta x} \right)}{\Delta x}$$

$$\left( D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t} \right)$$

$n(x, t)$  grafikus megoldás:

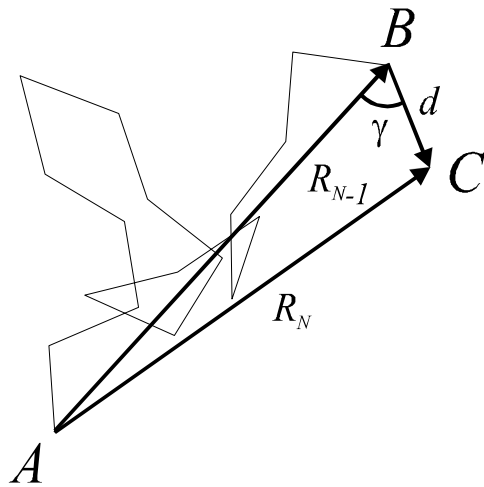
(gyakorlat)



$$n(x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2[\sigma(t)]^2}}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt}$$

## Bolyongás



$$R_N^2 = R_{N-1}^2 + d^2 - 2 R_{N-1} d \cos \gamma$$

$$R_N^2 = N d^2 \quad \text{és} \quad N = \frac{t}{\tau}$$

$$R(t) = \sqrt{\frac{t}{\tau}} d = \sqrt{Dt}$$

(Robert Brown (1773-1858) angol botanikus, Maryan Smoluchowski (1872-1917) lengyel fizikus, Einstein)

## Hővezetés

termikus energiaáram „diffúzió” útján: felhasználjuk,

hogy  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{1}{2} v_z \Delta t A (n_2 - n_1) \neq 0$

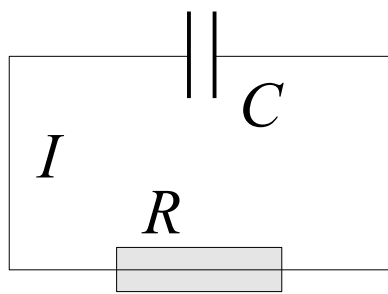
részecske lép át az  $A$  felületen, de

$$\Delta E = N_2 \frac{1}{2} k T_2 - N_1 \frac{1}{2} k T_1 = \frac{1}{2} v_z \Delta t A n \frac{1}{2} k (T_2 - T_1) \neq 0$$

$$J_{Ez} = \frac{1}{2} v_z d_z n k \frac{\Delta T}{\Delta z} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta z} \quad \left( \lambda ; \left[ \frac{W}{mK} \right] \right)$$

(Fourier törvény)

## Meddig tart az áramlás?



$$I = \frac{1}{R} U; \quad U = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC} Q; \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Beáll az egyensúly.

## A transzportfolyamatok termodinamikai vonatkozásai

Termodinamika: energetikai kölcsönhatások folytán fellépő folyamatok ill. egyensúlyok tudománya.

$V, Q, N, E$

$p\Delta V, \varphi\Delta Q, \mu\Delta N \rightarrow \Delta E \quad (\mu?)$

Termodinamikai rendszer (és környezet): „sok”  
(egymással kölcsönható) részecske  
(makroszkopikus)

Felosztás:

Típusa	Anyag	Energia
	csere	
Izolált	–	–
Zárt	–	+
Nyitott	+	+

Jellemző mennyiségek:

**extenzív mennyiségek:** (pl.  $V$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $E$ )

- arányosak a rendszer méretével,  
(a részrendszerekre vonatkozó mennyiségek összege megegyezik a teljes rendszerre vonatkozó mennyiséggel; pl.  $\sum_i V_i = V_{teljes}$ )
- összeadódnak
- áramlanak

**intenzív mennyiségek:** (pl.  $p$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$ ,  $T$ )

- függetlenek a rendszer méretétől
- kiegyenlítődnek
- különbségük áramot hajt

Általánosítás:

**Onsager egyenlet:**

$$J = LX$$

ahol

$$J = \frac{1}{A} \frac{\Delta x_{ext}}{\Delta t} \qquad X = -\frac{\Delta y_{int}}{\Delta x}$$

Ha  $X = 0 \quad \rightarrow \quad J = 0 \quad \rightarrow \quad$  EGYENSÚLY  
(dinamikus)

## A termodinamika főtételei

0.) Ha a rendszer intenzív mennyiségeinek térbeli eloszlása homogén, akkor a rendszer egyensúlyban van.

$$\text{I.) } \Delta E = Q_E + W \quad \rightarrow \quad W = -p\Delta V$$

több lehetséges kölcsönhatás

$$W_Q = \varphi\Delta Q; \quad W_N = \mu\Delta N$$

A  $\mu$  fizikai jelentése (hasonló az elektromos potenciálhoz): energiaváltozás;

(Új töltetlen részecske megjelenése növeli a rendszer mozgási energiáját, továbbá a többi részecskével való kölcsönhatások miatt a helyzeti energia is megváltozik.)

$$W_Q \text{ és } W_N \text{ összevonható, mert} \quad \Delta Q = zq\Delta N$$

$$W_{NQ} = (\mu + zq\varphi)\Delta N \quad [W_{NQ} = (N_A\mu + zF\varphi)\Delta \nu]$$

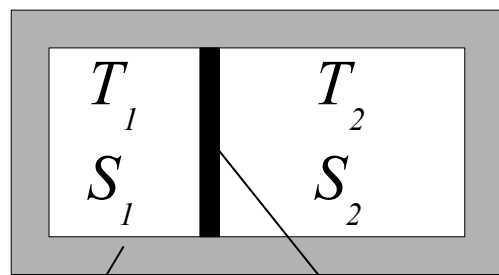
$$\text{További általánosítás:} \quad W^{(i)} = y_{int}^{(i)} \Delta x_{ext}^{(i)}$$

(a termikus kölcsönhatás kitüntetett)

II.) A spontán folyamatok irányára vonatkozó kvalitatív megállapítás;  $T$  kiegyenlítődik.

A kvantitatív megfogalmazáshoz szükséges az **entrópia** ( $S$ ) bevezetése; formálisan:  $Q_E = T\Delta S$

## Hogyan változik az entrópia ( $S$ ) a kiegyenlítődési folyamat során?



izolált

hővezető

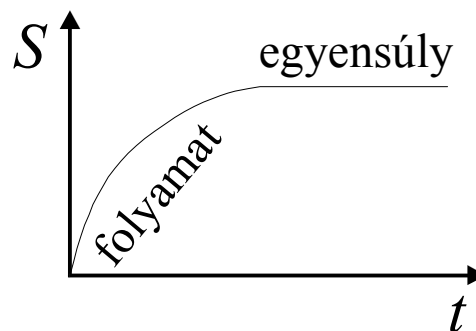
$$\Delta E = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta E_1 = -\Delta E_2$$

$$\Delta E_1 = T_1 \Delta S_1 ; \quad \Delta E_2 = T_2 \Delta S_2$$

$$\Delta S = \frac{\Delta E_1}{T_1} + \frac{\Delta E_2}{T_2} = \Delta E_1 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\Delta S \geq 0$$

$S$  nem megmaradó  
mennyiség!



## Az entrópia statisztikus értelmezése (Mi az entrópia valójában?)

Láttuk, hogy a formálisan bevezetett **entrópia növekszik**.

Van-e olyan **más mennyiség**, ami ugyanígy viselkedik?

**Mikroállapot:** a rendszer összes részecskéjének mikroszkopikus paramétereit (pl. helyét, sebességét) ismerjük.

(egyformán valószínűk)

**Makroállapot:** a makroszkopikus paraméterek (pl. hőmérséklet, nyomás, sűrűség, **energia**) eloszlását kell ismernünk.



Egy makroállapothoz tartozó mikroállapotok száma a makroállapot **termodinamikai valószínűsége**:  $\Omega$

Lássunk egy példát!

A termodinamikai rendszer: a tanteremben lévő levegő

$$\Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B$$

kiegyenlítődési folyamat során növekszik, de  $\Omega$  nem additív

$$\ln \Omega_{AB} = \ln \Omega_A + \ln \Omega_B$$

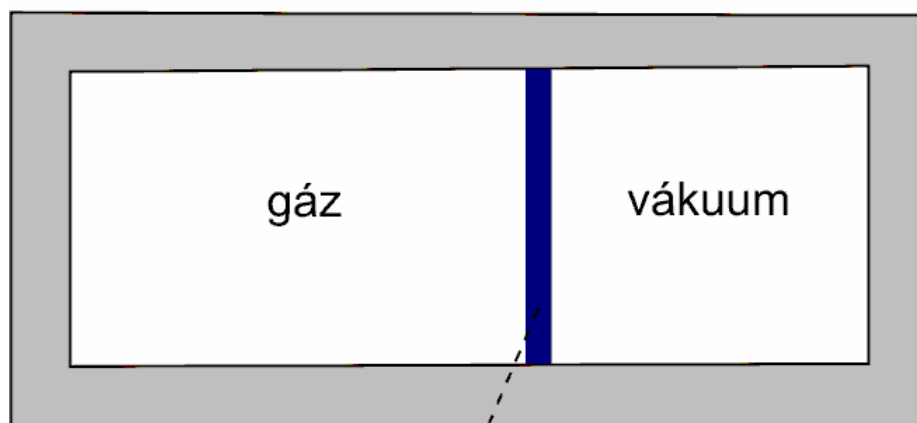
$$\mathbf{S = k \ln \Omega} \quad \left( \Omega = e^{\frac{S}{k}} \right)$$

**III.** Egykomponensű kristályosodó anyagok entrópiája 0 K-n zérus.

$$S = k \ln \Omega = k \ln 1 = 0$$

## Egy fontos példa: gáz „szabad” tágulása

$$\Delta S > 0 \quad W = 0 \quad Q = 0$$



A mozgatható falat eleresztjük

$\Delta E = Q + W$  igaz összefüggés

$\Delta E = T\Delta S - p\Delta V$  igaz összefüggés, **de**

$T\Delta S \neq Q$  és  $-p\Delta V \neq W$

$\Delta E = 0$  és  $T\Delta S = p\Delta V$

nincs munkavégzés, nincs hőcsere, de a térfogat és az entrópia növekszik

A rendszer entrópiája a környezettől felvett hő következtében és a rendszerben lejátszódó megfordíthatatlan (irreverzibilis) folyamatok révén változik meg.

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma, \text{ ahol } \sigma > 0$$

## Termodinamikai potenciálok

Hess tétele:

adott kezdeti és végállapot közötti átalakulásnak megfelelő átalakulási hő összege független az átalakulás közbeni állomásaitól, csakis a kezdeti és végállapottól függ

Kitérő: a szorzat (pl.  $xy$ ) kis megváltozásáról

$$\Delta xy = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x$$

mert  $\Delta x \Delta y$  ezek mellett elhanyagolhatóan kicsi

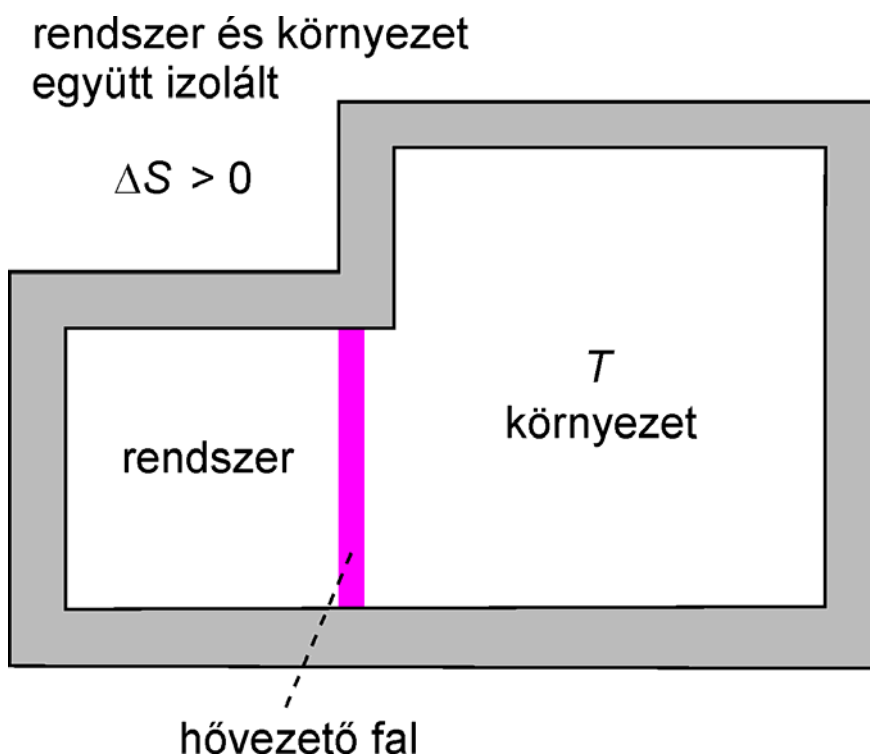
A kémiai reakciók többsége állandó nyomáson zajlik ( $\Delta p = 0$ )

$$\Delta E = Q + W \quad \rightarrow \quad \Delta E = Q - p\Delta V,$$

$$\text{de } p\Delta V = \Delta p V, \text{ mivel } V\Delta p = 0$$

ezért  $\Delta E + \Delta p V \equiv \Delta(E + pV) \equiv \Delta H = Q$  **entalpia** változás

A folyamatok iránya nem izolált rendszerekben



$$\Delta S = \Delta S_r + \Delta S_k > 0$$

$$\Delta S_k = \frac{-Q}{T}$$

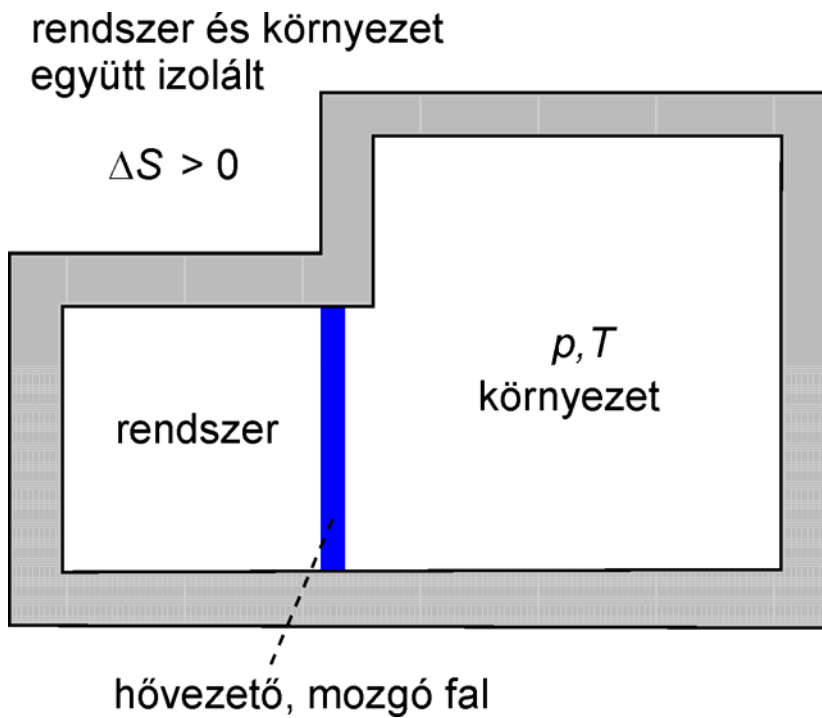
$$\Delta S_r - \frac{Q}{T} > 0$$

$$T\Delta S_r > Q = \Delta E_r$$

$$0 > \Delta E - T\Delta S, \text{ de } \Delta T = 0$$

$$\Delta(E - TS) \equiv \Delta F < 0$$

**szabadenergia** változás



$$\Delta S = \Delta S_r + \Delta S_k > 0$$

$$\Delta S_k = \frac{-Q}{T}$$

$$\Delta S_r - \frac{Q}{T} > 0$$

$$T\Delta S_r > Q = \Delta E_r + p\Delta V$$

$$0 > \Delta E - T\Delta S + p\Delta V,$$

$$\text{de } \Delta T = 0 \text{ és } \Delta p = 0$$

$$\Delta(E - TS + pV) = \Delta(H - TS) \equiv \Delta G < 0$$

**szabadentalpia** változás

Mennyi energia fordítható munkavégzésre?

Példa: akkumulátor (állandó hőmérsékleten,  $T = \text{állandó}$ )

$$\Delta E = Q + W, \quad \text{módosítás} \quad \Delta E = Q - W_{le},$$

ahol  $W_{le}$  az akkumulátor által végzett munka

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma = \frac{\Delta E + W_{le}}{T} + \sigma > \frac{\Delta E + W_{le}}{T}$$

$$W_{le} < -\Delta(E - TS) = -\Delta F$$

Elnevezés: „szabad” energia.

A belső energia sohasem fordítható teljes mértékben munkára.