



SEMMELWEIS EGYETEM

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet,  
Nanokémiai Kutatócsoport



## TRANSPORTFOLYAMATOK II biológiai rendszerekben

**Zrínyi Miklós**

egyetemi tanár, az MTA rendes tagja  
[mikloszrinyi@gmail.com](mailto:mikloszrinyi@gmail.com)

2016

### Konduktív transzportfolyamatok egységes leírása

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	$\nabla c$	$\nabla T$	$\nabla v$
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

Fick

Fourier

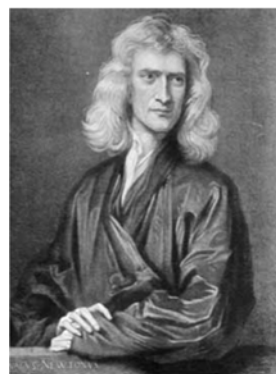
Newton

Laplace operátor:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$



A különböző anyagi rendszerek folyásával  
foglalkozó tudományt 1928-ban **Bingham**  
javaslatára nevezték el **reológiának**.

(Rheos logos = folyástan)



Sir Isac Newton (1642-1727)

Ha egy testre **erő** hat   
  $\swarrow$  helyváltozás   
  $\searrow$  alakváltozás

DEFORMÁCIÓ

rugalmasság

viszkózus

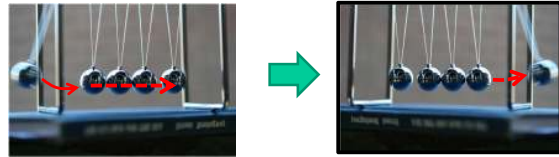


Fluidumok áramlása

**Fluid fázis:** a folyadék és a gáz halmazállapot összefoglaló neve,  
amely arra utal, hogy az anyagok mindkét állapotban viszonylag  
könnyen változtatják alakjukat, könnyen folynak.

# REOLÓGIA

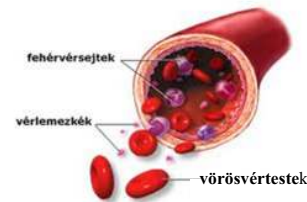
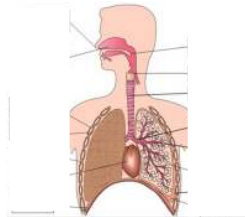
(konduktív impulzustranszport)



(Rheos logos = áramlástan)

Légzés

Vérkeringés



## A térfogatáram hajtóereje: a nyomáskülönbség



$$1 \text{ Hgmm} = 133,32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 735,55 \text{ Hgmm}$$

	P/Hgmm
arteriás (szisztolés)	100 - 140
arteriás (diasztolés)	60 - 90
kapilláris az artéria végénél	30

## Alapfogalmak

Folyás

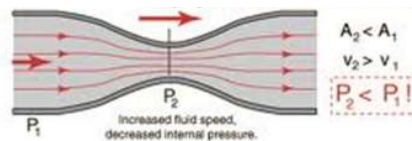
lamináris,  
turbulens,  
összenyomható,  
összenyomhatatlan,  
„száraz”,  
viszkózus,  
állandó,  
pulzáló,  
rotáló.



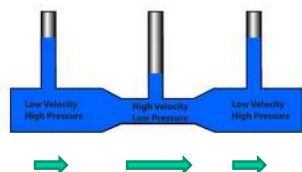
Daniell Bernoulli  
1700-1782

Bernoulli egyenlet

$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = konst.$$



$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$$



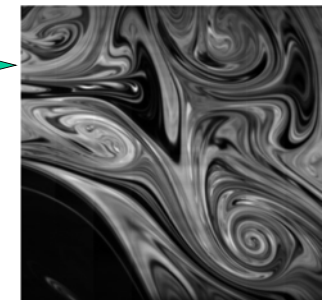
## Az áramlás típusai



turbulens

á  
t  
m  
e  
n  
e  
t

lamináris



$$R_e = \frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}} \left. \vphantom{\frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}}} \right\} \text{erők}$$



$$R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}$$

$v$ : átlagos áramlási sebesség

$\rho$ : folyadék sűrűsége

$\eta$ : viszkozitás

$d$ : átmérő



Osborne Reynolds  
1842-1912



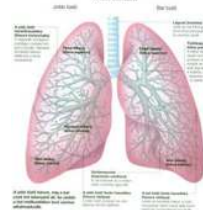
ha  $R_e < 2100$



**Lamináris áramlás**

Megjegyzés: ha átmérő helyett sugarat használunk, akkor  $Re=1150$

## Levegő áramlása a tüdőben

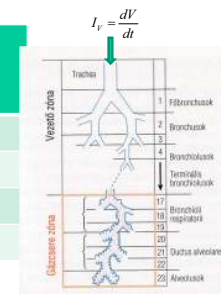


Normál légzés 12/perc  
Heves légzés 30/perc

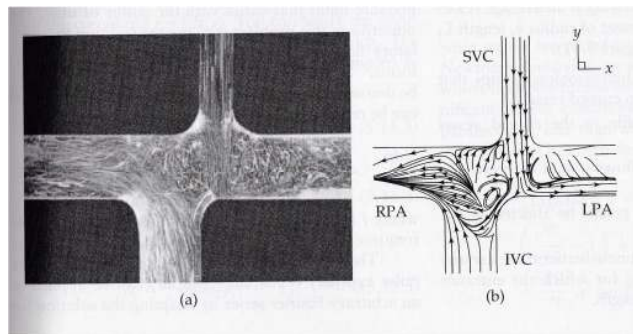
átmé rő (cm)	$v$ (cm/s)	Re	$v$ (cm/s)	Re
1,8	197	2325	790	<b>9324</b>
0,56	250	921	1002	<b>3684</b>
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127

23 generáció a  
légsövek  
átmérőjében

$$\frac{dV_{\text{lev.}}}{dt} \approx 6 \text{ L / min} \rightarrow O_2 \sim 2 \text{ kg / nap}$$



Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légsövekben.



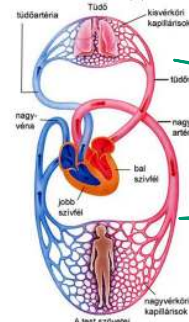
Elágazásoknál és szűkületeknél könnyen kialakulhat turbulencia!

## A vérkeringés

Impulzus, anyag és energia transzport

A **kisvérkör**, amelynek feladata a szívből a tüdőbe eljuttatni az oxigénben szegény és széndioxidban dús vért és a tüdőből a szívbé szállítani az oxigénben dús vért.

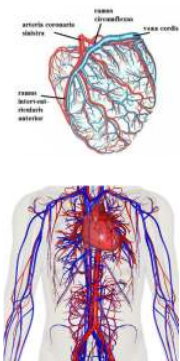
A **nagyvérkör**, amely a szívből a szervekhez juttatja az oxigénben dús és onnan szállítja el az „elhasznált” vért együttesen alkotja a vérkeringést.



A gázcsere végzi el

Az oxigénnel dúsult vért juttatja a szövetekbe.

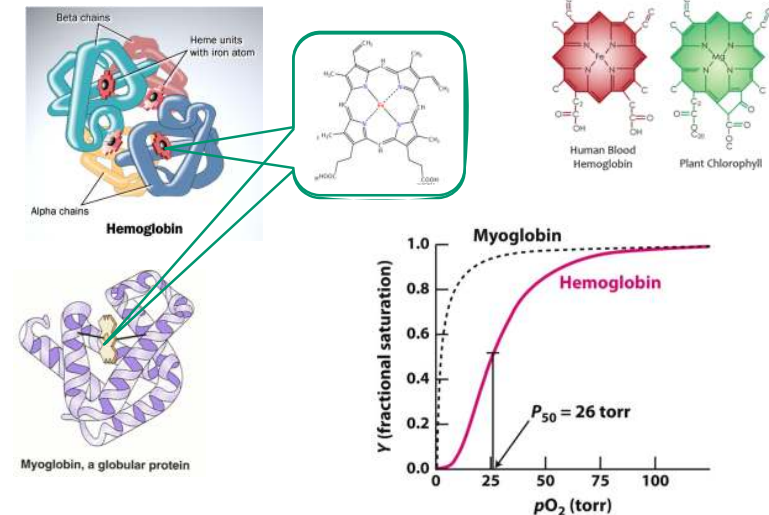
## Vér áramlása a szív- és érrendszerben



erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	4500	20	750
↓ aorta	1,3	105	3400	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	$10^{-6}$

A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris**. Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

## Az oxigén megkötése a hemoglobinnal kooperatív folyamat



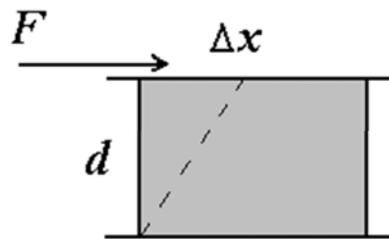
## Alapfogalmak:

Nyomó erő

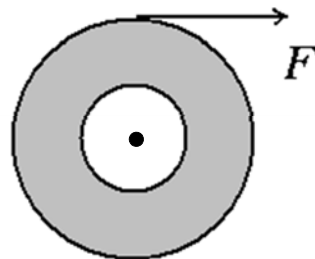


Nyíró erő

**Nyírás:** tangenciálisan ható (**nyíró**)erő ( $F$ ) vált ki deformációt.



Tiszta nyírás



Rotációs nyírás

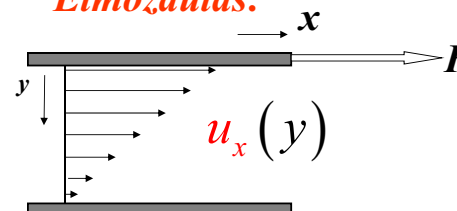
## Alapfogalmak:

**Nyírófeszültség:**

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$



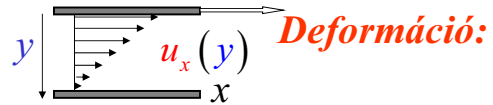
**Elmozdulás:**



**Deformáció:**

$$\gamma = \frac{du_x(y)}{dy}$$

## Alapfogalmak:



**Deformáció:**

$$\gamma = \frac{du_x}{dy}$$

**Deformáció sebesség:**

$$\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{du_x}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du_x}{dt} \right) = \frac{dv_x}{dy}$$

A **deformáció sebesség** megegyezik a **sebesség gradienssel**!

## Alapfogalmak:

$$j_i = -\eta \nabla v \quad \xrightarrow{j_i = -\tau} \quad \tau = \eta \nabla v$$

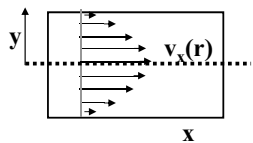
**Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:**

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

↑  
viszkozitás

**Newton** egyenlet

## A reológia alapösszefüggése. **Newton** egyenlet



$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$



$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

**Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:**

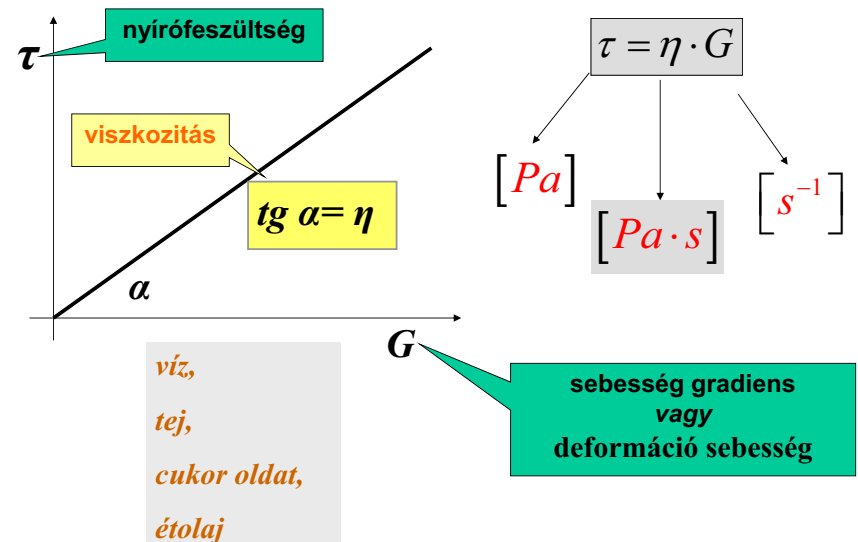
**Nyírófeszültség:**  $\tau = \frac{F}{A_s}$



**Sebesség gradiens:**

$$G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}$$

## Newtoni folyadék **folyásgörbéje**



**Dinamikai viszkozitás** (általában ezt értjük viszkozitás alatt *pascal secundum* ( $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ))

Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) tiszteletére használták a

$$1 \text{ poise} = 100 \text{ centipoise} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}.$$

Az orvosi gyakorlatban ma is gyakran a cP (centi-poise)-t használják

**Fluiditás** a viszkozitás reciproka ( $= 1/\eta$ ).

**Kinematikai viszkozitás:** a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa ( $= \eta/\rho$ ). ( $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) vagy *stoke* (*St*).

anyag	T/ °C	viszkozitás / $\text{mPa}\cdot\text{s}$
víz	20	1,0
glicerín	20	1500
n-pentán	20	0,23

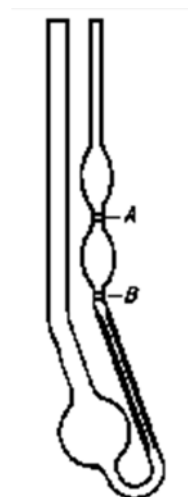
biofolyadék	T/ °C	viszkozitás / $\text{mPa}\cdot\text{s}$
vér	37	4 (nem Newtoni)
vér plazma	37	1,5
kőnny	37	0,73 – 0,97
levegő	18	0,018
liquor	20	1,02

**Relatív viszkozitás** ( $\eta_{rel}$ ).

$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_o} = \frac{t}{t_o}$$

oldat

oldószer



**Specifikus viszkozitás** ( $\eta_{sp}$ )

$$\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$$

**Ostwald-féle viszkoziméter**

**Redukált viszkozitás** ( $\eta_{red}$ )

$$\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}$$

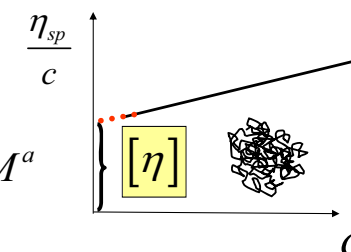


**Jellemző viszkozitás** ( $[\eta]$ )

**Ubbelohde féle viszkoziméter**

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \eta_{red}$$

$$[\eta] = k \cdot M^a$$





$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$f_s = 4a_r^2 \pi \cdot \tau$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{a_r}$$

$$f_s = 4a_r^2 \pi \cdot \eta \cdot \frac{v}{a_r}$$



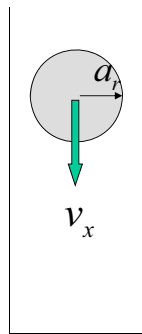
George Stokes  
1819-1903

$$f_s = 4\pi\eta a_r v_x$$

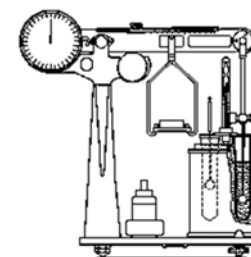
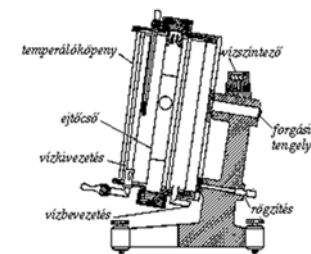
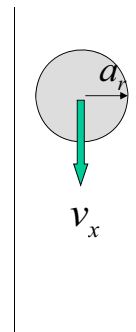
**Stokes törvény:**

$$f_\eta = 6\pi\eta a_r v_x$$

$$f_g = f_\eta \Rightarrow v_x = \frac{2}{9} \frac{a_r^2 \Delta \rho g}{\eta}$$

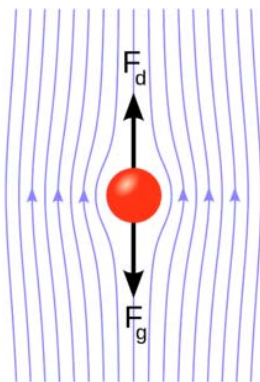


$$f_\eta = 6\pi\eta a_r v_x$$

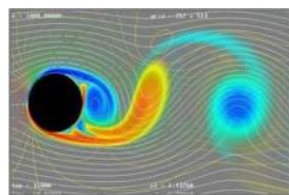


**Höppler féle viszkoziméter**

Kármán örvénysor



lamináris



turbulens



Kármán Tódor  
1881-1963

**Híg szuszpenziók viszkozitása**

Általában *newtoni* viselkedés

**Einstein**-egyenlet

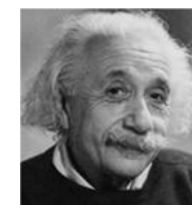


$$[\eta] = 2.5\Phi$$



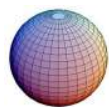
$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$

Térfogati tört



Albert Einstein  
1879-1955

## Einstein-egyenlet általánosítása:



$$[\eta] = v_a \Phi$$

$$\eta = \eta_o (1 + v_a \Phi)$$

Aszimmetria faktor

$$v_a = \frac{(a/b)^2}{15 \left[ \ln \left( \frac{2a}{b} \right) - \frac{3}{2} \right]} + \frac{(a/b)^2}{5 \left[ \ln \left( \frac{2a}{b} \right) - \frac{1}{2} \right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid



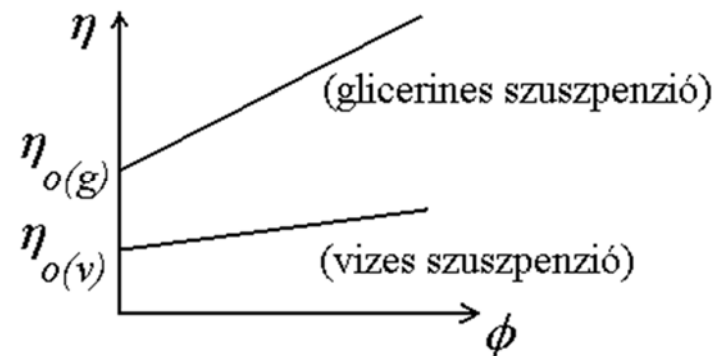
$$v_a = \frac{16(a/b)}{15 \tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid

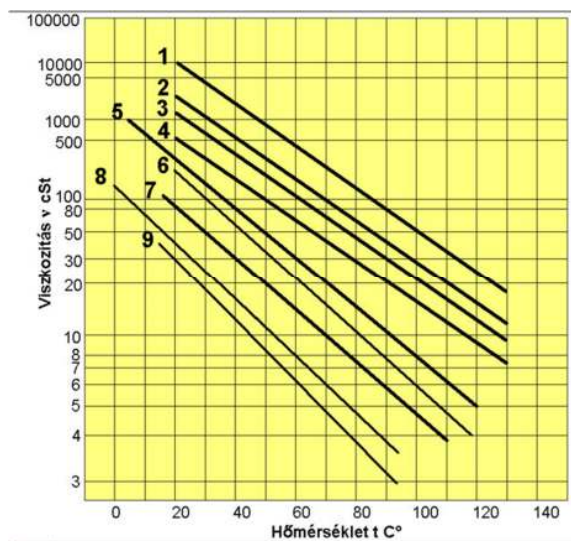


DNS-re:  $a/b = 27,8$   $v_a = 65,2$

$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$



## A viszkozitása függése a hőmérséklettől:



$$\eta(T) = \eta_o \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

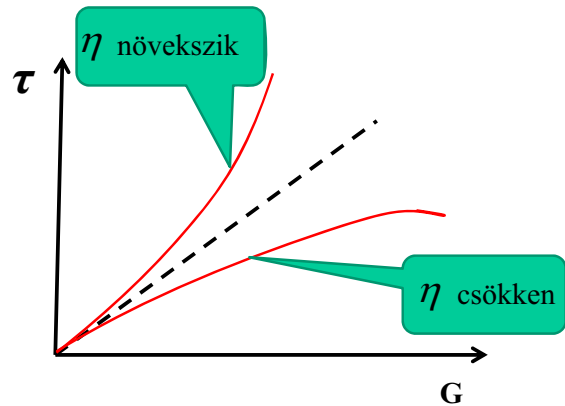
Stokes-Einstein törvény:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a_r}$$



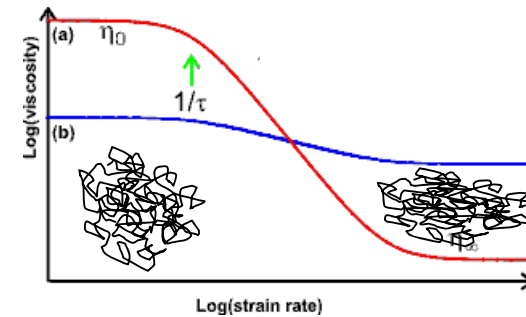
## Nem newtoni folyadékok

- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a **deformációs hatás mértékétől** és **idejétől** is függ.

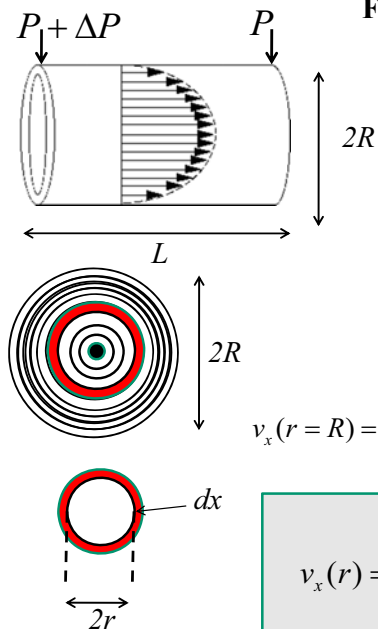


## • szerkezeti viszkozitás

**Viszkozitás csökken nyírás hatására**



polimer oldat  
festék  
ketchup



Folyadék áramlása kapillárisban  
áramlási profil

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r \pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \left( \frac{dP}{dx} \right) = \frac{r}{2} \left( \frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$dv_x = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot 2 \cdot r \cdot dr = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d(r^2)$$

$$v_x(r=R) = 0$$

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konst.$$

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Folyadék áramlása kapillárisban  
térfogatáram

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

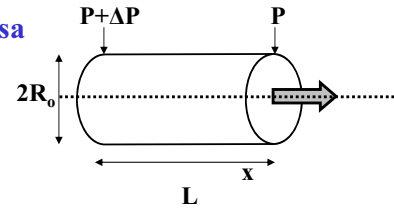
$$v_x(r) = v_{\max} \cdot \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr \quad I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{\max} \cdot \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot dr$$

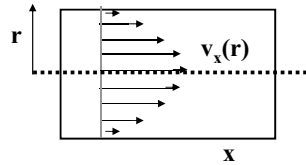
$$I_V = \frac{\pi \cdot R_0^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$\overline{v_x} = \frac{I_V}{R_0^2 \pi} = \frac{R_0^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max}$$

## Newtoni folyadék lamináris áramlása (összefoglalás)



### Parabolikus sebesség profil

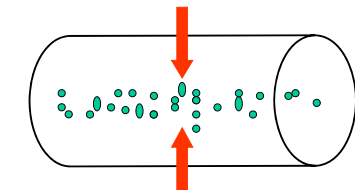


$$v_z(r) = \frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)$$

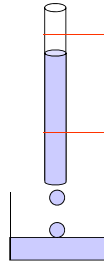
### Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Térfogatáram



$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = \text{const} \quad \text{Bernoulli törvény}$$



## Vér áramlása elágazó ereken

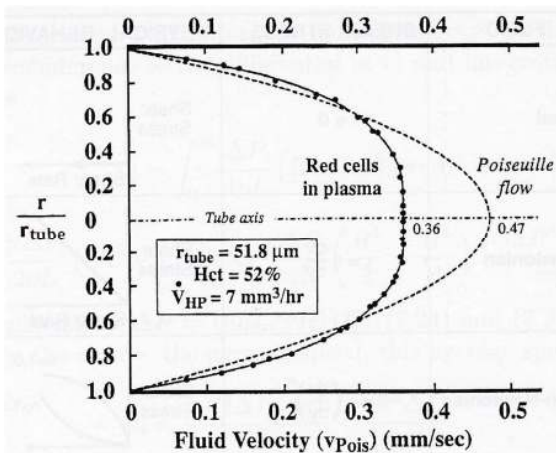


$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta L} \cdot \Delta P = \frac{1}{R_{res}} \cdot \Delta P$$

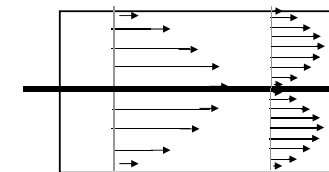
$$R_{res}(\text{soros}) = \sum_i R_{res,i}$$

$$\frac{1}{R_{res}(\text{párhuzamos})} = \sum_i \frac{1}{R_{res,i}}$$

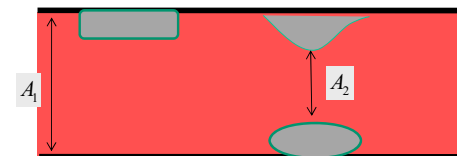
érszakasz	átmérő cm	hossz cm	elágazások száma	áramlási seb. cm/s
aorta	2,4	40	1	23
artériák	0,4	15	160	5
kapillárisok	0,0007	0,07	$1,2 \cdot 10^{10}$	0,022
vénák	0,5	15	200	2,5



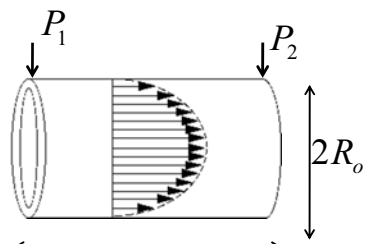
## Parabolikus sebesség profil módosulása



katéter



turbulens



### Gázok áramlása kapillárisban

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$I_v = \frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{dn}{dt} = \frac{RT}{P} I_n$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{8\eta} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx}$$

$$I_n dx = \frac{R_o^4 \pi}{16\eta RT} d(p^2)$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \left( \frac{dP}{dx} \right) \neq \frac{r}{2} \left( \frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{16L\eta RT} (P_1^2 - P_2^2)$$

A gáz áramlási sebessége nem a nyomások, hanem a nyomásnégyzetek különbségével arányos!

### Konduktív hővezetés: Fourier törvények

$$j_Q = -k_T \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \alpha T(x) \text{ függvény görbülete } \alpha = \frac{k_T}{\rho \cdot C_p} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

anyag	T/K	$k_T / Wm^{-1}K^{-1}$	$\alpha / m^2 s^{-1}$	$c_p / kJkg^{-1}K^{-1}$
levegő	300	0,025	$2,11 \cdot 10^{-5}$	1,006
víz	300	0,609	$1,5 \cdot 10^{-7}$	4,186
zsír	298	0,21	$0,69 \cdot 10^{-7}$	3,258
vér	298	0,642	$1,76 \cdot 10^{-7}$	3,889
bőr	310	0,442	$1,19 \cdot 10^{-7}$	3,471

$$\frac{\Delta Q_{\text{hővezetés}}}{\Delta t} = -k_T \cdot A_s \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

### Pennes bio-hő egyenlete

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k_t \nabla T) + c_b w_b (T - T_b) + Q + Q_m$$

Parameter name	Symbol	Tissue	Tumor
Thermal conductivity (W/m)	k	0.42	0.42
Blood perfusion rate (l/s)	$\omega_b$	$18e^{-8}$	$9e^{-6}$
Density (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_b$	920	920
Specific heat of blood (J/kg.K)	$c_b$	3000	3000
Arterial blood temperature (K)	$T_b$	310	310
Metabolic heat generation rate(W/ m <sup>3</sup> )	$Q_{\text{met}}$	450	29000

### A BELSŐ ENERGIA (HŐ) TRANSPORTJA

Hol keletkezik a nyugalmi metabolikus hő?

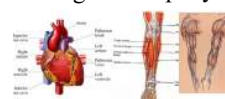
agyvelő	25%
szív	15%
vázizom	25%
hasi zsigerik	25%
vese	6%
bőr	4%

Hol veszik el a metabolikus hő?

$$Q_{\text{vesztesség}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

A szervezetben belül a hőmérséklet eloszlás nem homogén.

mag köpeny



54-60 %

25 %

7 %

14 %

## Testhőmérséklet szabályozás

metabolizmus  $\longleftrightarrow$  hővesztesség

T=28 C° ♥ fibrilláció  
 T=30 C° Hőmérséklet szabályozás felborul -  
 T=33 C° Tudat vesztés  
 T=37 C°

T=41 C° Központi idegrendszer -  
 T=42 C° Fehérjék denaturálódnak

↑  
 testhőmérséklet

egységnyi  
 felület

## Hőszugárzás



Wien törvény:  $R = \varepsilon \sigma T^4$   $\varepsilon$  : emisszió

Stefan-Boltzmann konst.:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

$$-\frac{\Delta Q_{\text{sugárzó}}}{\Delta t} = R \cdot A_s = \varepsilon \sigma T^4 \cdot A_s \quad A_s = 1,85 \text{ m}^2 \text{ átlagos felület}$$

$\varepsilon \cong 1$  emberi bőr

$$\frac{\Delta Q_{\text{sugárzó}}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{nyereség}} - \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{vesztesség}}$$

$$R = \varepsilon \sigma (T_{\text{test}}^4 - T_{\text{környezet}}^4)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

anyag	emisszió
emberi bőr	0,95 – 0,99
fa	0,99
beton	0,95
tégla	0,92

## Konvektív hővezetés (1)



$$-\frac{1}{A_s} \frac{\Delta Q_{\text{konvektív}}}{\Delta t} = h_c \cdot (T_{\text{bőr}} - T_{\text{levegő}})$$

$h_c$  : egységnyi felületre vonatkozó  
 konvektív hővezetési tényező  
 $\text{W/m}^2 \text{ C}^\circ$

Szél sebessége [ m/s ]	$h_c [ \text{W/m}^2 \text{ C}^\circ ]$
0,1	2,6
0,6	6,4
2,0	11,7
4,0	16,6

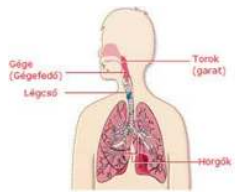
Szélben:  $h_c = 10,45 - v + 10v^{1/2}$   $v$  : áramló levegő sebesség: m/sec  
 (közelítés)

## Testen belüli hővezetés (2)

(Test és vér közötti hővezetés)

$$-\frac{1}{A_s} \frac{\Delta Q_{\text{véráram}}}{\Delta t} = h_c \cdot (T_{\text{vér}} - T_{\text{testrész}})$$





### Hővesztés párolgással (1) légzés

Ki- és belégzés térfogata nyugalomban: 500 ml

Ki- és belégzés frekvenciája nyugalomban: 12 – 14 / perc

$$I_{\text{levegő}} = \frac{\Delta V_l}{\Delta t} \approx 0,1 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$-\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_l c_{p,l} (T_{ki} - T_{be}) \frac{\Delta V_l}{\Delta t}$$



$V_{\text{izz}}$

### Hővesztés párolgással (2) izzadás

Víz párolgáshője:  $\Delta h_{\text{parolgas}} = 2,25 \text{ kJ / g}$

$$-\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta h_{\text{parolgas}} \cdot (\rho_{\text{lev}}^{ki} - \rho_{\text{lev}}^{be}) \frac{\Delta V_{\text{izz}}}{\Delta t}$$