

A biostatisztika alapjai

FOK22-23 Biofizika-2

hipotézisvizsgálatok

Liliom Károly

biostatisztika előadások tematikája

1. leíró statisztika (adatok jellemzése)
2. hipotézisvizsgálatok (adatok összehasonlítása)
3. korreláció és regresszióanalízis

Javasolt tankönyv:

- **Orvosi Biofizikai Gyakorlatok, Statisztika pótfejezet** – Medicina Kiadó, 2017

Javasolt olvasmányok:

- Herényi Levente: Statisztika és Informatika, Medicina Kiadó 2016
- Harvey Motulsky: Intuitive Biostatistics – A Nonmathematical Guide to Statistical Thinking, Oxford University Press
- Nature Collection: Statistics for Biologists

STATISZTIKAI DÖNTÉS, HIPOTÉZISVIZSGÁLAT

Az eddigi számítások arra vonatkoztak, hogy a **mintából** a változóra jellemző eloszlás megfelelő paramétereit minél jobban megközelítsük. Az ehhez hasonló számszerű, **kvantitatív következtetések** a **becslés** témakörébe tartoznak.

Gyakran kerül sor azonban a következtetések másik fajtájának, a **kvalitatív következtetéseknek** az alkalmazására is. Ez azt jelenti, hogy valamilyen **eldöntendő kérdésre kell igen–nem típusú választ adnunk**. Ilyen típusú kérdéseket már feltettünk az első részben a pulzusszámmal kapcsolatban. Azok a kérdések úgy kezdődtek, hogy: „**VÁLTOZIK-E ...?**”, „**VAN-E KÜLÖNBESÉG ...?**”.

A döntést minden esetben a **minta alapján** kell meghoznunk. Mivel a kérdés eldöntése mindig egy kiinduló feltételezés, hipotézis cáfolatát vagy megerősítését jelenti, ezeket a következtetéseket **hipotézisvizsgálatoknak** nevezzük (lásd 8. megjegyzés).

A módszer lényege, illetve főbb lépései egy példán keresztül mutathatók meg. Azt mondhatjuk, hogy a **büntető ügyekben a bírósági tárgyalás során „hipotézisvizsgálat” történik**. (Bár tudjuk, hogy ez a megállapítás túlzottan leegyszerűsített, mégis segíthet abban, hogy a hipotézisvizsgálat legfontosabb elemeit megragadjuk.) Esküdtbíráskodás esetén ugyanis az esküdtszék dönt arról, hogy a vádlott bűnös vagy nem bűnös. (A bíró csak az ítélet mennyiségi kérdéseit mérlegelheti.) Tehát van egy eldöntendő **kérdés**, amire csak igen–nem válasz adható: **bűnös-e a vádlott?** Számos jogrendben azonban alkalmazzák az **ártatlanság vélelmét**, ami annyit tesz, hogy mindaddig, amíg a vádlottról be nem bizonyosodik, hogy bűnös, ártatlannak kell tekinteni. (Tehát bizonyítani a bűnösséget és nem az ártatlanságot kell.) Ez a **„nem bűnös” állítás az alaphelyzet**, vagy, ha tetszik, **kiindulási hipotézis**.

Az ügyésznek (vagy a vád képviselőjének) a feladata a **bizonyítékok** felvonultatása annak igazolására, hogy a vád megalapozott. Az ügyvéd (vagy a védelem képviselője) a felhozott bizonyítékok hitelét, megbízhatóságát próbálja gyengíteni. **Az esküdtszék végül értékeli, mérlegeli a bizonyítékok „erejét”, és dönt**. A döntés maga az **alaphelyzet** vagy **kiindulási hipotézis**, nevezetesen a **„ártatlan” állítás elfogadását**, vagy **elvetését** jelenti. Bárhogyan is dönt az esküdtszék, döntése lehet igazságos vagy téves, így összesen négyféle kimenetel valósulhat meg.

Igazságos (helyes) döntés két esetben lehetséges:

- ha a bíróság **elfogadja az „ártatlan” hipotézist**, miközben a vádlott valójában **ártatlan**, vagy akkor is,
- ha a bíróság **elveti az „ártatlan” hipotézist** (azaz kimondja a bűnösséget), miközben a vádlott valójában **bűnös**.

Téves (helytelen) döntés is két esetben lehetséges:

- ha a bíróság **elfogadja az „ártatlan” hipotézist**, annak ellenére, hogy a vádlott valójában **bűnös**, vagy akkor is,
- ha a bíróság **elveti az „ártatlan” hipotézist** (azaz kimondja a bűnösséget), de a vádlott valójában **ártatlan** (lásd 9. megjegyzés).

A valódi **hipotézisvizsgálat** abban különbözik ettől (az előbb említett leegyszerűsítésektől eltekintve), hogy a **mérlegelést számszerű eredmények alapján végezhetjük**, így a döntést szubjektív elemek kevésbé befolyásolják.

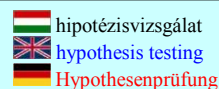
A mellékelt példa (lásd 1. feladat) megoldása során a fenti lépések szerint fogunk haladni.

A megválaszolandó **kérdés**: *Megtiltható-e a további forgalmazás az eltérő hatóanyag tartalom miatt*, vagy még egyszerűbben, *eltér-e a hatóanyag tartalom a megadottól?* („bűnös”-e?)

A vizsgálandó állítás, **alaphelyzet** vagy **kiindulási hipotézis**: *A további forgalmazás nem tiltható meg, mert a hatóanyag tartalom nem tér el a megadottól* („ártatlanság vélelmé”, nem bűnös).

A **bizonyítékok**: *A mg-ban megadott adatok együttese*.

Orvosi biofizikai gyakorlatok



8. megjegyzés:

A leggyakrabban vizsgált hipotézisek a következők:

1. *Egy eloszlás valamely paraméterére vonatkozó hipotézis.* Például tudjuk, hogy egy vizsgált változó normális eloszlású és ellenőrizni akarjuk, helyes-e az a hipotézis, hogy várható értéke egyenlő valamely μ_0 számmal. Ilyen fajta vizsgálat szükséges például a változások eldöntéséhez is.

2. *Két (vagy több) eloszlás paraméterére vonatkozó hipotézis.* Például tudjuk, hogy két független változó normális eloszlású és ellenőrizni akarjuk azt a hipotézist, hogy várható értékeik egyenlőek. Így dönthető el például az a kérdés, hogy mondjuk egy adott populációban a férfiak vagy a nők élnek tovább, (vagy másképpen mondván, van-e különbség a várható élettartamuk között).

3. *Függetlenségvizsgálat.* Azt a hipotézist ellenőrizzük, hogy két vagy több változó független-e egymástól, (illetve van-e kapcsolat közöttük).

4. *Homogenitásvizsgálat.* Azt kérdezzük, hogy két (vagy több) változó eloszlása megegyezik-e.

5. *Illeszkedésvizsgálat.* Egy változó eloszlására vonatkozó hipotézis. Például azt vizsgáljuk, hogy egy változó normális eloszlású-e.

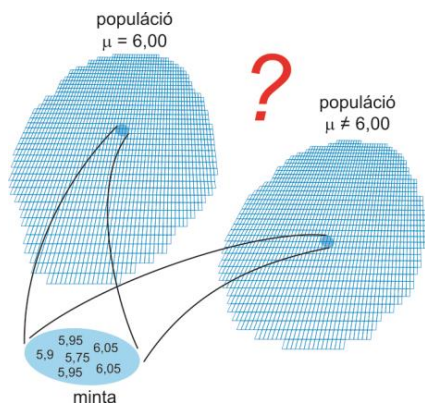
9. megjegyzés:

Az ítélet lehetséges kimenetelei:

valójában	az ítélet	
	felmentés	elítélés
ártatlan	igazságos	téves
bűnös	téves	igazságos

1. feladat:

Egy gyógyszer rendszeres forgalmazásának egyik feltétele a 6 mg hatóanyag tartalom. Egy ellenőrzés alkalmával a tárlóból kivett néhány tabletta adatai a következők voltak (mg-ban): 6,05; 5,95; 5,75; 5,9; 5,95; 6,05. Megtiltható-e a további forgalmazás az eltérő hatóanyag tartalom miatt?



17. ábra. A kiválasztott minta származásának lehetőségei. (A feltüntetett értékek mg-ban értendők.)

10. megjegyzés:

Transzformációk:

A változók transzformációja voltaképpen azt jelenti, hogy az értékeket más skálán fejezzük ki; az eredeti értékekhez egy másik skálán új értékeket rendelünk hozzá.

Transzformáció az is, amikor egy fizikai mennyiséget az egyik mértérendszerből a másikba alakítunk át, azaz transzformálunk. Például: energia [eV] · $1,6 \cdot 10^{-19}$ = energia [J].

A transzformáció célja és értelme az, hogy a transzformált változókkal olyan statisztikai eljárásokat is elvégezhessünk, amelyeket az eredeti változóval nem, de a következtetéseink az eredeti változóra nézve is érvényesek lesznek.

Normalizáló transzformáció segítségével nem normális eloszlású változókat normális eloszlásúvá "tehetünk".

Kategorizáló transzformációkkal folytonos eloszlású változókat ordinális vagy nominális változókká alakíthatunk át. Akkor hasznosak többek között az ilyen eljárások, ha valamely, általunk vizsgált jelenség egy folytonos mennyiségi jellemző változásával minőségileg is megváltozik.

Ilyen változó például az életkor, ahol a következő transzformációval, folytonos változóból kétértékű nominális, ún. bináris változóhoz juthatunk:

- | | |
|---------------------------|------|
| életkor < 18 év → gyermek | (0), |
| életkor ≥ 18 év → felnőtt | (1). |

Rangsor transzformációt számszerű vagy ordinális változó esetén végezhetünk. Ilyenkor a minta elemeit nagyság szerint sorba rendezzük, majd a sorszámokat (rangsorszámokat) használjuk az eredeti értékek helyett. Rangsor transzformáción alapul számos, ún. **nem-paraméteres statisztikai eljárás** (lásd a NÉHÁNY PÉLDA AZ ORVOSI STATISZTIKA KÖRÉBŐL című részt).

A következő lépéseket (**értékelés, mérlegelés, döntés**) egy kicsit részletesebben kell megvizsgálnunk. **Amennyiben minden ismeret a birtokunkban lenne**, azaz ismernénk a populációt (azaz az összes (!) tabletta hatóanyag tartalmát), vagy ami azzal ekvivalens, annak eloszlását, akkor nem kellene mást tennünk, mint a populációra jellemző eloszlás várható értékét (μ -t) össze kellene hasonlítanunk 6 mg-mal. Ebben a helyzetben nincs szükségünk mérlegelésre. Egyszerűen azt mondhatjuk, hogy ha $\mu = 6$, akkor elfogadjuk, ha $\mu \neq 6$ akkor elvetjük a kiindulási hipotézist. Azt is mondhatjuk, hogy egy ilyen lépéssel nem tettünk mást, mint számszerűsítettük a kiindulási hipotézist, nevezetesen a $\mu = 6$ állítás esetünkben ekvivalens azzal, hogy „a további forgalmazás **nem tiltható meg**, mert a hatóanyag tartalom **nem tér el a megadottól**”. (Meg kell jegyeznünk azért, hogy a gyakorlatban az is fontos feltétel, hogy a tabletták azonos mennyiségű hatóanyagot tartalmazzanak, tehát a szórás is vizsgálnunk kellene.)

Mivel ez az ideális eset a valóságban gyakorlatilag sohasem áll fenn, ezért a helyzet ennél bonyolultabb. Tudjuk, hogy egy minta alapján meghatározott, jól megválasztott konfidencia intervallum a várható értéket adott bizonyossággal közrezárja. Ezért úgy járhatunk el, hogy **először megválasztjuk** a „szükséges” bizonyosságot, azaz azt a **konfidencia szintet** amelyet megfelelőnek tartunk, **majd megnézzük, hogy az ehhez tartozó konfidencia intervallum közrezárja-e a 6-ot**. Ha **igen**, akkor **elfogadjuk**, ha **nem**, akkor **elvetjük** a kiindulási hipotézist. Tehát a döntést egy **minta alapján**, egy előre megválasztott és **lerögzített konfidencia szint mellett** hozzuk meg.

Egy másik szempontból úgy is tekinthetjük ezt a problémát, hogy létezik egy populáció, aminek ismert a várható értéke ($\mu = 6$) és a kérdés az, hogy az adott minta ebből a populációból lett véletlenül kiválasztva, vagy egy másiktól, olyanból, amelynek a várható értéke, $\mu \neq 6$ (lásd 17. ábra).

Válasszuk a konfidencia szintet 95%-osra. Ez azt jelenti, hogy 100 hasonló mintavétel esetén csak 5-ször fordulhat elő, hogy az ennek megfelelő konfidencia intervallum a „véletlen” folytán nem zárja közre a 6-ot. Tudjuk, hogy ez az intervallum az $\bar{x} \pm k_{\bar{x}}$ képlet segítségével meghatározható, és azt is tudjuk, hogy nagy minták esetén $k \approx 2$. A mi esetünkben (kis elemszámú mintáról van szó) k egyelőre nem ismert, de ezt a hiányosságot hamarosan pótoljuk. Amennyiben $k = 2$ -vel számolunk, az adatok alapján a konfidencia intervallum: 5,85 és 6,03 között húzódik. Mivel ez közrezárja 6-ot, ezért **elfogadjuk a kiindulási hipotézist**.

Ez azt jelenti, hogy a vizsgálat eredménye nem szolgáltatott elegendő bizonyítékot ahhoz, hogy a forgalmazást betiltsák, ezért „a további forgalmazás (ha csak ez volt a kritérium) **nem tiltható meg**”, (hiszen a hatóanyag tartalom nem tér el a megadottól, pontosabban nem esik a konfidencia intervallumon kívülre).

A fenti gondolatmenethez hasonlókkal találkozunk majd az ún. statisztikai próbák megbeszélése során, melyre hamarosan rátérünk, de a jobb érthetőség kedvéért előbb egy fontos matematikai segédeszközt ismertetünk.

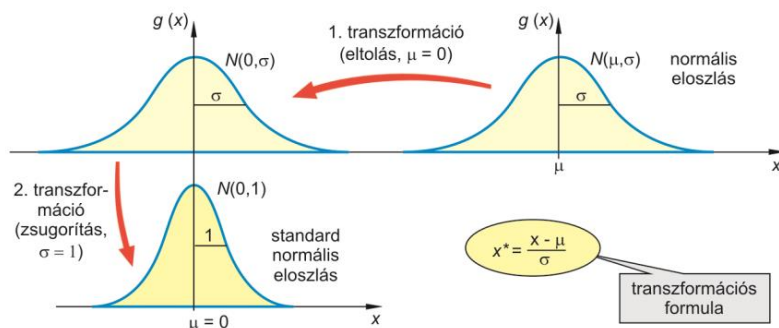
A VÁLTOZÓK TRANSZFORMÁCIÓJA ÉS AZ ÚJ VÁLTOZÓK ELOSZLÁSA

Az adatok transzformációjáról már szót ejtettünk a GRAFIKUS ADATFELDOLGOZÁS című részben, amikor az volt a célunk, hogy mérési pontjainkat egyenessel „összekössük”. Itt egy kicsit részletesebben megvizsgáljuk a transzformáció kérdését.

Amikor egy, vagy több adatból matematikai műveletek elvégzése után megkapjuk az eredményt, azt mindig egy **új változónak** is tekinthetjük, hiszen más adatokból kiindulva ugyanaz a művelet sor általában más eredményre vezet. Az ilyen átalakításokat általánosan **transzformációnak** nevezzük. A legegyszerűbb transzformációk között említhetjük egy állandó hozzáadását, vagy egy állandóval való szorzást, de az átlag, vagy a tapasztalati szórás meghatározása is transzformációnak tekinthető (lásd még a 10. megjegyzést).

Vegyük például az $N(\mu, \sigma)$ normális eloszlású populáció x általános elemét (változót), és hajtuk végre rajta a $x^* = (x - \mu) / \sigma$ transzformációt. (Azt is mondhatjuk, hogy a populáció minden elemén végrehajtjuk ezt a műveletsort.)

A kérdés az, hogy milyen az új x^* változó eloszlása. Az első lépésben tehát az összes elemet eltoljuk egy várható értéknyivel, ami az $N(0, \sigma)$ normális eloszlást eredményezi, majd a 0-tól való eltéréseket σ -val osztva az $N(0, 1)$ standard normális eloszlást kapjuk (lásd 18. ábra). Egy ilyen transzformációnak fontos gyakorlati haszna van, ugyanis bármilyen normális eloszlású változó standard normális eloszlásúvá transzformálható, ami egységes adatfeldolgozást tesz lehetővé.



18. ábra. Általános helyzetű és szélességű normális eloszlás transzformációja standard normális eloszlássá ($N(\mu, \sigma) \rightarrow N(0, 1)$).

Tegyük most fel, hogy „ugyanazt” a transzformációt szeretnénk végrehajtani, de σ -t nem ismerjük, így annak csak becslést értékét, egy n elemű mintából meghatározott tapasztalati szórást (s) használjuk fel a célra. Az így kapott változó természetesen nem lehet $N(0, 1)$ eloszlású, csak ahhoz hasonló. Az új eloszlás az $n - 1$ szabadságfokú **Student-, vagy t-eloszlás**: $t = (x - \mu)/s$ (lásd 19. ábra). (Azon nem csodálkozhatunk, hogy ez az eloszlás n -től is függ, hiszen a transzformációban szerepel egy n -től függő paraméter (s). Az eloszlás további tulajdonságairól a következő részben ejtünk néhány szót.)

Más transzformációkkal más eloszlásokhoz juthatunk. Ezek közül még egyet itt bemutatunk: ha van n darab $N(0, 1)$ eloszlású változónk és ezeknek a négyzetösszegét vesszük, akkor az új változó eloszlása n szabadságfokú χ^2 -eloszlás lesz (lásd 20. ábra). (Egy ilyen változó negatív értékeket értelemszerűen nem vehet föl. Ez a transzformáció figyelhető majd meg a (24) összefüggésben is.)

STATISZTIKAI PRÓBÁK

Bár a hipotézisvizsgálatot a már bemutatott módon is el lehet végezni (k pontos megadásával ugyan egyelőre adások maradtunk), az egyszerűbb kezelhetőség érdekében inkább **statistikai próbákat** használunk.

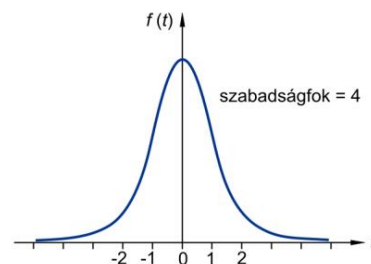
A statisztikai próbák igen **sokfélék** aszerint, hogy **mi az ellenőrizendő hipotézis**, mik az **alkalmazhatóság feltételei**, és mi a **végrehajtás módja**; valamennyinek **közös** azonban a **gondolatmenete**.

Abból indulunk ki, hogy a mintából számolt **becsült paramétereknek is van valamilyen eloszlásuk**, hiszen, ha másik mintát választunk, a becsült paraméterek is mások lesznek. Az eloszlás konkrét alakja

- egyrészt az eredeti változó eloszlásától függ,
- másrészt attól, hogy melyik becsült paraméterről, vagy általánosabban mondva, melyik statisztikai jellemzőről (ami lehet például az r korrelációs együttható is) van szó,
- harmadrészt pedig a minta elemszámától, pontosabban az azzal szorosan összefüggő szabadságfoktól.

Az egyszerűsítés kedvéért sok-sok eloszlás helyett azoknak csak viszonylag kevés számú standardizált változatát fogjuk használni. Ennek érdekében azonban a vizsgált becsült paramétert, illetve statisztikai jellemzőt mindig — az adott standardizált eloszláshoz illeszkedően — a kívánt alakra kell transzformálnunk (lásd az előző részt, mint például $N(\mu, \sigma) \rightarrow N(0, 1)$).

Student-, vagy t-eloszlás
Student-, or t-distribution
Student-, oder t-Verteilung



19. ábra. A t-eloszlás 4-es szabadságfokú változata.

A görbe az $N(0, 1)$ eloszláshoz hasonlít, de a szabadságfoktól függően, többé-kevésbé eltér attól.

χ^2 -eloszlás
 χ^2 -distribution
 χ^2 -Verteilung









20. ábra. A χ^2 -eloszlás 6-os szabadságfokú változata.




statisztikai próba
statistical test
statistischer Test




 *t*-próba
 *t*-test
 *t*-Test

 χ^2 -próba
 χ^2 -test
 χ^2 -Test

 nullhipotézis
 null hypothesis
 Nullhypothese

 alternatív hipotézis
 alternative hypothesis
 Alternativhypothese

 kétoldali próba
 two-tailed test
 zweiseitiger Test

 egyoldali próba
 one-tailed test
 einseitiger Test

A legegyszerűbb és elég gyakran használt statisztikai próbák a ***t*-próbák** és a **χ^2 -próbák**. Mindkét típusú próbához tartozik egy-egy standardizált elméleti eloszlás, a *t*-eloszlás, illetve a χ^2 -eloszlás. Ezek valójában nem egy-egy konkrét eloszlást jelentenek, hanem eloszlás sorozatokat, hiszen bennük a szabadságfok — mint szabad paraméter — befolyásolja az eloszlás konkrét alakját.

Térjünk vissza az előbbi példához (1. feladat) és nézzük meg, mit is jelent a próbák „nyelvén” a hipotézisvizsgálat. A megválaszolandó **kérdés** változatlan: **Megtiltható-e a további forgalmazás az eltérő hatóanyag tartalom miatt**, vagy még egyszerűbben, **eltér-e a hatóanyag tartalom a megadottól?** („bűnös”-e?)

A vizsgálandó állítást, az alaphelyzetet vagy kiindulási hipotézist itt **nullhipotézisnek** nevezzük (ennek okára még visszatérünk): *A további forgalmazás nem tiltható meg, mert a hatóanyag tartalom nem tér el a megadottól* („ártatlanság vélelme”, nem bűnös).

Ezt egy kicsit átfogalmazzuk a számszerűsíthetőség kedvéért: az adott átlaggal ($\bar{x} = 5,94$) jellemzett **minta** a **$\mu_0 = 6$ várható értékű populációból lett kiválasztva**, és nem egy másik $\mu' \neq 6$ várható értékű populációból. Azt is mondhatjuk, hogy mivel a **populáció várható értékét, μ -t nem ismerjük**, csak a minta átlagát, tulajdonképpen $5,94 \approx 6$ és az eltérés „nem valódi”, csak a véletlen eredményezi. (Tehát valójában $\mu = \mu_0$, illetve $\bar{x} \approx \mu_0$, vagy másképpen $\mu - \mu_0 = 0$, illetve $\bar{x} - \mu_0 \approx 0$). A **nullhipotézis**, amit **H_0 -al** szokás jelölni, tehát úgy is megfogalmazható, hogy $\mu - \mu_0 = 0$, de ez direkt módon nem ellenőrizhető, így csak $\bar{x} - \mu_0 \approx 0$ marad, noha erről meg tudjuk, hogy **nem teljesülését a véletlen is okozhatja**.

A nullhipotézis megfogalmazásakor egy **alternatív hipotézist, H_1 -et** is fel kell állítanunk, ami akkor lép életbe, ha a nullhipotézist elvetjük. Első gondolatunk az lehet, hogy ez teljesen felesleges, hiszen az ellentétes állítás megfogalmazása egyértelmű. Így amennyiben $H_0 : (\mu - \mu_0 = 0)$, akkor $H_1 : (\mu - \mu_0 \neq 0)$. Sok esetben ez igaz, tehát a **H_0 -t akkor is elvetjük, ha $\mu - \mu_0 < 0$, meg akkor is, ha $\mu - \mu_0 > 0$** . Ekkor beszélünk **kétoldali próbáról**.

Vannak azonban olyan esetek is, amikor csak az egyik irányú eltérés felel meg elvárásainknak. Ha például egy gyógyszer hatását vizsgáljuk, legyen az mondjuk egy vérnyomáscsökkentő vagy lázcsillapító, akkor a lehetséges két irányú változás közül csak az egyik, nevezetesen a csökkenés jelenti a gyógyszer hatásosságát. Ilyenkor eleve feltesszük, hogy vérnyomás-, illetve hőmérsékletnövekedés csakis véletlenül következhet be. Ilyen esetekben a nullhipotézis ugyanaz marad, $H_0 : (\mu - \mu_0 = 0)$, de az alternatív hipotézis $H_1 : (\mu - \mu_0 < 0)$, tehát **H_0 -t csak akkor vetjük el, ha $\mu - \mu_0 < 0$** . Ekkor beszélünk **egyoldali próbáról**.

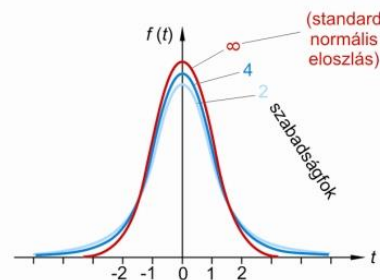
Folytatva a megkezdett gondolatsort, azt mondhatjuk, hogy **ha a hiba** (véletlen hiba) **elég nagy**, akkor az az érvelés, hogy a nullhipotézis $\bar{x} - \mu_0 \approx 0$ alakja **igaz, csak nem pontosan teljesül**, elfogadható. Ha azonban ez a **hiba kicsi**, akkor egyáltalán nem lehetünk annyira biztosak a dolgunkban, tehát **az eltérés akár „valódi” is lehet**. Emiatt **a döntéshez az $\bar{x} - \mu_0$ mérhető eltérést és a standard hibát** (ami éppen a véletlen eltérések jellemzője), **más néven az átlag szórását** ($s_{\bar{x}}$ -ot) **kell összehasonlítani**. Az előző részben láthattuk, hogy az $x \sim N(\mu, \sigma)$ eloszlású változó a $t = (x - \mu)/s$ összefüggés segítségével $n-1$ szabadságfokú *t*-eloszlásúvá transzformálható. Ebből arra következtethetünk, hogyha a változó (x) és annak szórása (s) helyett az átlagot (\bar{x}) és annak szórását ($s_{\bar{x}}$) írjuk a transzformációs képletbe, szintén ugyanarra az eredményre jutunk, tehát

$$t = (\bar{x} - \mu_0) / s_{\bar{x}}.$$

Így esetünkben a még ismeretlen *t*-próba használata tűnik a legkézenfekvőbbnek.

A t -PRÓBÁKRÓL ÁLTALÁBAN

A 21. ábrán ismét a t -eloszlás látható, de most több (2, 4 és ∞) szabadságfok esetében. Megfigyelhetjük, hogy az eloszlás várható értéke mindig 0 ($t=0$), lefutása pedig, mint már az előző részben említettük, hasonlít a standard normális eloszláshoz ($N(0,1)$), sőt, ha a szabadságfok végtelen, akkor egzaktul megegyezik vele. Láthatjuk azt is, hogy az imént megfogalmazott **nullhipotézisnek** ($\bar{x} - \mu_0 \equiv 0$) a $t=0$ elvi érték felel meg. Az adott **mintából kiszámított t_m** pedig arra jellemző, hogy az adatok inkább a nullhipotézis elfogadása vagy elvetése mellett szólnak, így t_m **együttal az adatok** (bizonyítékok) „**erejét**” is méri. (Az eredeti hasonlathoz visszatérve a vád célja t növelése, a védelem pedig annak csökkentése.)



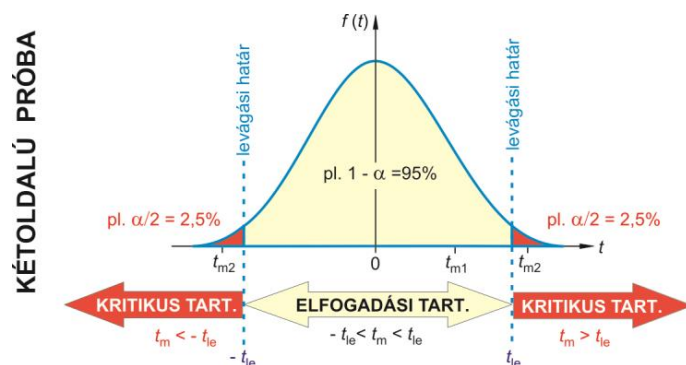
21. ábra. Különböző szabadságfokú t -eloszlások.

Egy sor statisztikai jellemző eloszlását bizonyos átalakításokkal a t -eloszlásra tudjuk visszavezetni. A változókban feltételezett **megváltozást, eltérést, különbséget, kapcsolatot** minden esetben valamilyen paraméter méri. Ezt a paramétert fogjuk a mintából számolt statisztikai jellemzővel közelíteni, és ennek standardizált alakja mindig egy t_m értéket ad.

Az így kiszámított t_m értéke **elvileg nulla**, ha **nincs megváltozás, nincs eltérés, nincs különbség**, vagy **nincs kapcsolat**. Ez az oka annak, hogy az eredetileg feltett eldöntendő kérdésre tagadó választ megfogalmazó állítást nullhipotézisnek nevezik. A nullhipotézisnek kitüntetett szerepe van a hipotézisvizsgálatban. Függetlenül attól, hogy melyik állítás megerősítését várjuk a vizsgálattól, az eljárás során mindig a nullhipotézis helyességét tesszük föl. Végül is ezt megerősítve vagy cáfolva fogadjuk el a tagadó, illetve az igenlő választ az eredeti kérdésre.

Igen könnyű megtalálni ennek az eljárásnak az indokát. Az **igenlő** válasz esetén a paraméter értéke végtelen sokféle lehet, a **tagadó** állításhoz ellenben csak egyetlen paraméterérték, a nulla tartozik. A paraméter rögzítése egyértelművé teszi a kiszámításra kerülő statisztikai jellemző eloszlását, a nullhipotézisnek tehát egyetlen lehetséges eloszlás (a t -eloszlás) felel meg, az ellenkező állításnak pedig végtelen sok. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a kiszámított t_m érték csak elméletileg lehet 0. A valóságban a számítások elvégzése után legtöbbször egy 0-tól különböző t_m értéket kapunk. Az így kapott t_m érték és a hipotézisben feltételezett t -eloszlás egymáshoz való viszonyából kell döntésünket meghoznunk.

A döntéshozatal szempontjából könnyű lenne a dolgunk, ha a t -eloszlás eleve csak egy adott tartományra, mondjuk ($t_{\text{kezdő}} - t_{\text{vég}}$) terjedne ki. Ilyenkor csak azt kellene megnéznünk, hogy a t_m érték ezen a tartományon belül, vagy kívül helyezkedik-e el. A tartományon belül a nullhipotézist elfogadnánk, a tartományon kívül pedig elvetnénk. Tudjuk azonban, hogy a t -eloszlás — ugyanúgy, mint a Gauss-eloszlás — $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig terjed, így olyan tartomány, ami alapján egyértelmű döntést hozhatnánk, nem létezik.



22. ábra. Elfogadási és kritikus tartományok kétoldali t -próba esetén.

Mivel a döntéshez mindenképpen valamilyen tartományra van szükségünk, vágjuk le a t -eloszlás „nullától távoli” értékeit. (Hogy pontosan hogyan, illetve, hogy milyen szabályok szerint, arra természetesen még visszatérünk.) Ezután már

szignifikáns
significant
signifikant

kritikus tartomány
critical region
kritischer Bereich (Ablehnungsbereich)

elfogadási tartomány
acceptance region
Annahmebereich

11. megjegyzés:

A „szignifikáns eltérés” sohasem jelenthet „biztosat” és a nem szignifikáns még kevésbé, hogy biztosan nincs eltérés. Nyilvánvaló ugyanis, hogy lehetnek olyan valódi, de kis különbségek, melyek jelenlegi kísérleti, mérési stb. módszereink és műszereink hibahatárain belül vannak. Meg kell jegyeznünk továbbá azt is, hogy a szignifikancia vizsgálat sohasem felelhet arra a kérdésre, hogy mi az ok.

szignifikancia szint
significance level
Signifikanzniveau

elsőfajú hiba
type I error
Fehler 1. Art

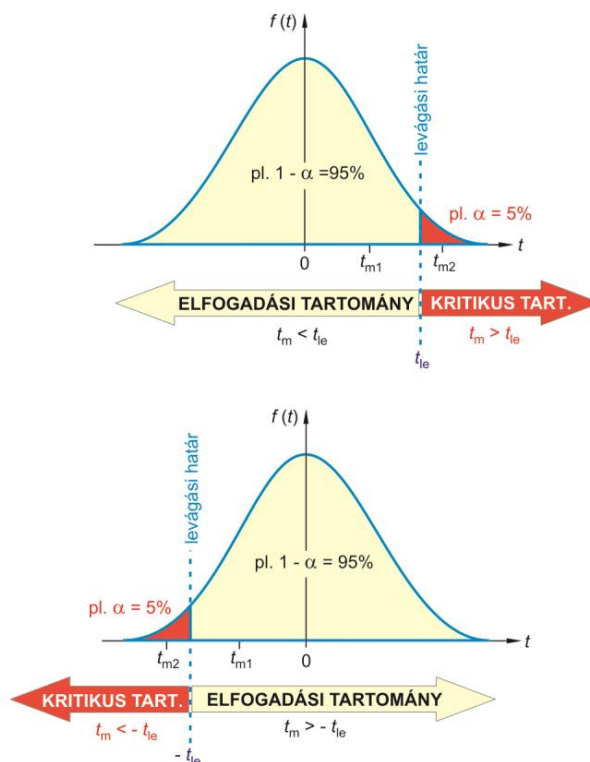
másodfajú hiba
type II error
Fehler 2. Art

megkérdőjelezhetjük, hogy a kiszámított t_m érték a levágási határokon (t_{le}) belül vagy kívül helyezkedik-e el (lásd 22. és 23. ábra). Ha belül van (például t_{m1}), elfogadjuk a nullhipotézist, ha kívül van (például t_{m2}), akkor elvetjük azt, és azt mondjuk, hogy a kiszámított t_m értéke az adott levágás mellett a nullától szignifikánsan eltér, vagy röviden csak így: **szignifikáns** (lásd 11. megjegyzés). A levágott részeket **kritikus tartománynak**, a megmaradó részt **elfogadási tartománynak** nevezzük.

Bárhogyan is döntünk, tehát akár elvetjük, akár elfogadjuk a nullhipotézist, döntésünkben — mint minden döntésben — benne van a tévedés lehetősége.

Azt a fajta tévedést, hibát, hogy egy valójában **igaz nullhipotézist mégis elvetünk, elsőfajú hibának** nevezzük. (Az eredeti hasonlatban ez annak felel meg, amikor az ártatlant tévesen bűnösnek mondja ki az esküdtszék.) Ezt a hibát akkor követjük el, ha a kiszámított t_m -érték igazából a (0 körüli) t -eloszláshoz „tartozik”, de a levágás miatt a kritikus tartományba esik, és ezért elvetjük a nullhipotézist. Pontosan **meg tudjuk adni e hiba elkövetésének valószínűségét**: a levágással „kívülre” kerülő értékek előfordulásának valószínűsége éppen a **levágott terület nagyságával mérhető** (lásd a 22. és 23. ábrákat, valamint a korábbi 9. ábrát is).

EGYOLDALÚ PRÓBÁK

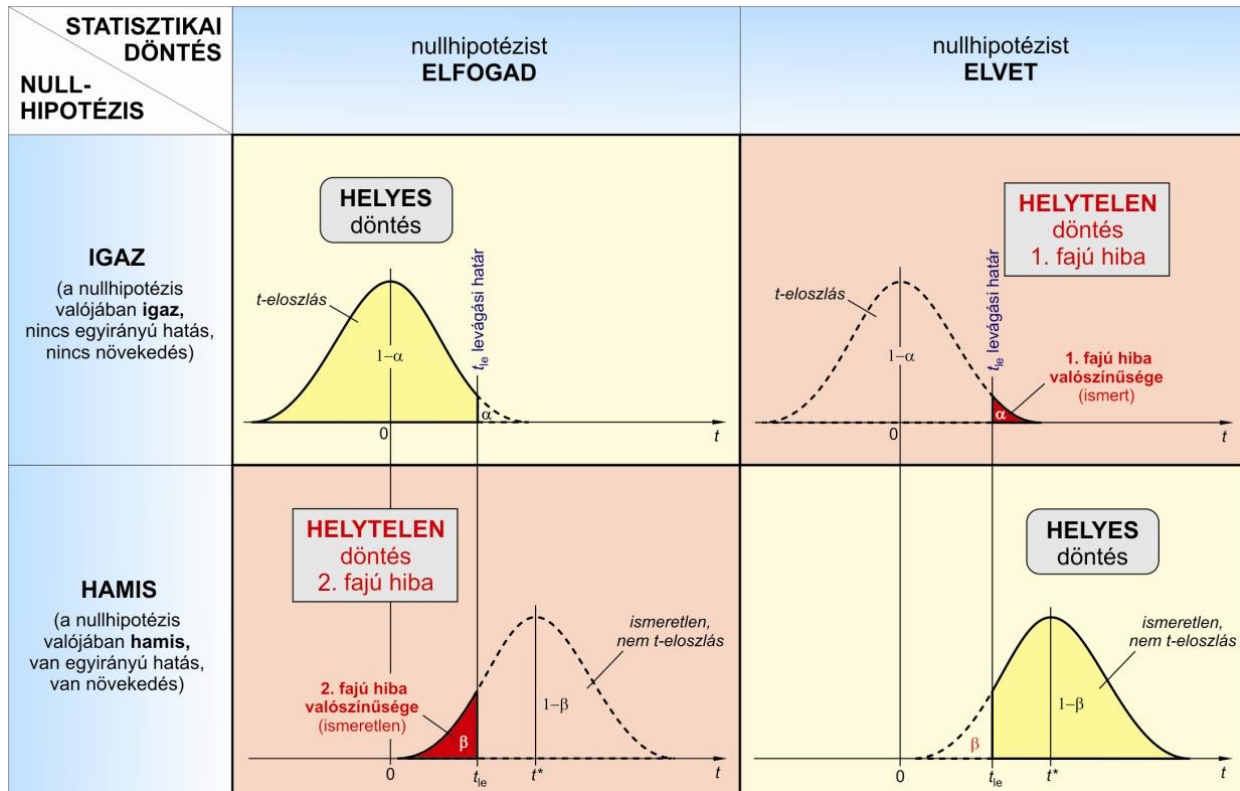


23. ábra. Elfogadási és kritikus tartományok egyoldali t -próba esetén.

Az elsőfajú hiba valószínűségét (probabilitás; p) α -val jelölik és a **statisztikai döntés valószínűségi szintjének**, ritkábban a tévedés valószínűségének nevezik. A gyakorlatban úgy járunk el, hogy nem a nullától való távolságot választjuk meg szabadon, hanem az elhagyott értékeknek (a levágott területtel jellemezhető) α valószínűségét. Ezt a valószínűséget **szignifikancia szintnek** is nevezik, mert egyértelműen meghatározza, hogy mely t értékek tekinthetők szignifikánsnak és melyek nem.

Abban az esetben is hibát követünk el, tehát tévedünk, ha **egy hamis nullhipotézist** — amiről persze nem tudjuk, hogy valójában hamis — **elfogadunk**. Ezt a hibafajtát **másodfajú hibának** nevezzük. (Az eredeti hasonlatban ez annak felel meg, amikor a bűnöst tévesen felmenti a bíróság.) Ez a helyzet akkor áll elő, ha a kiszámított t_m érték valamilyen $t^* \neq 0$ várható értékű eloszláshoz „tartozik”, tehát nem a (0 körüli) t -eloszláshoz, de mi tévesen mégis ahhoz „tartozónak”

képzelmük. Az ilyen hiba elkövetésének ($p = \beta$) valószínűségét most a t^* várható értékű eloszlás megfelelő görbe alatti területével mérhetnénk, de mivel t^* -ot nem ismerjük, ezért a levágott terület is ismeretlen, és emiatt **a másodfajú hiba valószínűségét nem lehet meghatározni** (lásd a 24. ábrát is). (Csak megjegyezzük, hogy azért vannak módszerek, amelyekkel ez a hiba is becsülhető.)



24. ábra. Az első- és másodfajú hiba szemléltetése.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy α -nak csak a hipotézis elvetésekor, β -nak pedig csak a hipotézis elfogadásakor van értelme. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az egyik hiba valószínűségének csökkentésével a másik hiba valószínűsége növekszik. Mivel csak az elsőfajú hiba valószínűsége (α) rögzíthető, ezért annak megválasztásakor figyelembe kell vennünk ezt a körülményt is.

A statisztikai döntésnek az orvosi, biológiai területeken szokásos valószínűségi szintje ($p = \alpha = 0,05$ (azaz 5%). Ez azt jelenti, hogy átlagosan 100 olyan eset közül, amikor nullhipotézisünk igaz, 5 esetben fogjuk azt tévesen elvetni. Számos esetben azonban az $\alpha = 0,05$ tévedés nem engedhető meg. Ilyenkor a valószínűségi szint $\alpha = 0,01$ -ra, $\alpha = 0,001$ -re, vagy tetszés szerint tovább csökkenthető. Ezzel szemben természetesen növekszik a másodfajú hiba valószínűsége, nevezetesen az, hogy a helytelen nullhipotézist elfogadjuk (amennyiben tényleg elfogadjuk).

Nézzük meg ezek után azt, hogy a gyakorlatban hogyan végezzük el t -próbával a hipotézisvizsgálatot. Ehhez tudnunk kell azt, hogy bár a t -eloszlás bonyolult képlet formájában is megadható lenne, egyszerűbb, ha — ugyanúgy, mint pl. a szögfüggvények esetében — táblázatos formában adjuk meg. Lényeges felépítésbeli különbség van azonban a t -eloszlás táblázata és mondjuk a szinusz függvény táblázata között. Míg a szinusz függvény esetében az adott x értékekhez az $f(x) = \sin x$ függvényértékeket adjuk meg, addig a t -eloszlás táblázatának a jobb használhatóság kedvéért különleges szerkezete van (lásd 25. ábra és 7. táblázat).

Először is a **t táblázat** nem egy, hanem **sok t -eloszlást tartalmaz**, amelyeket a szabadságfok különböztet meg egymástól. A bal oldali **oszlopban** találjuk a **szabadságfokokat**: ennek megfelelően minden sorban egy-egy eloszlás szerepel, ez azonban nem függvényértékeket jelent, hanem t értékeket, azaz a független változó speciális értékeit.

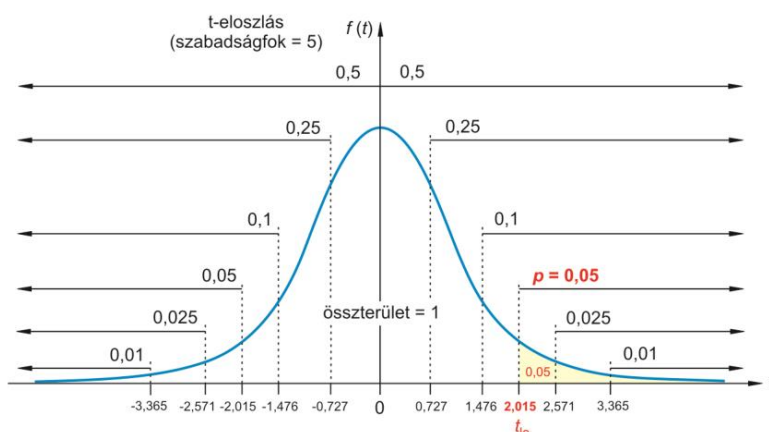
A táblázat jelentésének jobb megértése érdekében hasonlítsuk össze az 5-ös szabadságfokú t -eloszlás ábráját a táblázat ötödik sorában álló eloszlással. A táblázat két **fejlécében a p valószínűségek** állnak (egy, illetve kétoldali próba esetére): az ábrán ezeknek görbe alatti területek felelnek meg. A táblázat annak a t -nek az abszolút értékét adja meg, amelynél az eloszlás egyik vagy mindkét végét (szimmetrikusan) levágva, a lehasított területek együttesen a fejlécen álló valószínűséggel egyenlők. Másképpen mondva tehát a t táblázat legfelső soraiban állnak a szabadon megválasztható szignifikancia szintek, az ezekhez tartozó (levágási) t_{le} értékeket pedig a t táblázat adott szabadságfokú sorából olvashatjuk ki.

Az egyértelmű döntéshozatal szempontjából az imént ismertetett eljárás egyes lépéseinek sorrendje is nagyon fontos. **Először kell megválasztanunk azt a szignifikancia szintet**, amelyen majd a későbbi döntésünket meghozzuk, és csak utána végezzük el az összehasonlítást (lásd a 12. megjegyzést is).

12. megjegyzés:

A komputeres világban a t táblázatot egyre kevésbé használjuk, hiszen a számítógép tetszőleges levágási értékhez meg tudja határozni a valószínűséget. (Illetve legtöbbször ki sem számolja t értékét.) Így a próbák eredménye egy p valószínűség, és a mérlegelést ennek alapján végezzük el. Ha p elég kicsi (kisebb, mint az általunk előre megválasztott α), akkor elvetjük H_0 -t (és emiatt H_1 -lép életbe), hiszen kicsi a valószínűsége annak, hogy egy igaz hipotézist vetettünk el. (Azt is mondhatjuk, hogy kicsi a valószínűsége annak, hogy csupán az adatok véletlen eltérése okoz 0-tól ennyire eltérő t értéket.) Ha p nagy, akkor hasonló érvelés miatt ezt nem tehetjük meg, tehát megtartjuk H_0 -t.

(p kicsiségét vagy nagyságát viszont nekünk kell eldöntenünk.)



25. ábra. t -eloszlás. Az egyoldali t -próbához tartozó levágási határok és valószínűségek.

p (egyoldali próba)									
	0,45	0,35	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
p (kétoldali próba)									
szab. fok	0,90	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,510	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,445	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,424	0,765	1,250	1,638	2,35	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,414	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,74	4,604
5	0,132	0,408	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032

7. táblázat. A t -eloszlás levágási határai és p valószínűségei egy-, és kétoldali próba esetén.

A következő lépésként összehasonlítjuk a táblázatból kapott t_{le} értéket a mintából meghatározott t_m értékkel. **Ha $t_m \leq t_{le}$, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, ha $t_m > t_{le}$, a nullhipotézist elvetjük**, és azt mondjuk, hogy az adott szignifikancia szint mellett az eltérés szignifikáns.

A *t*-PRÓBA ALKALMAZÁSA AZ 1. FELADATRA

Az 1. feladattal odáig jutottunk, hogy megfogalmaztuk a nullhipotézist többféleképpen is:

1. *A további forgalmazás nem tiltható meg, mert a hatóanyag tartalom nem tér el a megadottól.*
2. $H_0: (\bar{x} - \mu_0 \equiv 0)$.

Ezután megfogalmazzuk az alternatív hipotézist: $H_1: \mu - \mu_0 \neq 0$. Ebből tudjuk, hogy kétoldali próbát kell alkalmaznunk. A további lépések:

- Kiszámítjuk a mintából t_m értékét: $t_m = 1,28$.
- Megváltaszjuk a szignifikancia szintet: $\alpha = 0,05$.
- Megállapítjuk a szabadságfokot: $n - 1 = 5$.
- A táblázatból kikeressük az értékpárnak megfelelő t_{le} értéket: $t_{le} = 2,571$.
- Mivel $1,28 < 2,571$ (azaz $t_m < t_{le}$), ezért a nullhipotézist elfogadjuk.
- Tehát: *A további forgalmazás nem tiltható meg, mert a hatóanyag tartalom nem tér el a megadottól.*

Ez még pontosabban azt jelenti, hogy **adataink nem szolgáltatnak elegendő bizonyítékot** (t_m , a bizonyítékok „erejét” mérő paraméter nem elég nagy) **ahhoz, hogy a nullhipotézist elvessük**, tehát, hogy ennek alapján a *forgalmazást megtiltsuk*.

További megjegyzések: Mivel a nullhipotézist elfogadtuk, ezért bennünket nem α , hanem β érdekelne jobban, tehát annak a valószínűsége, hogy **esetleg mégis hamis hipotézist fogadtunk el**. Mint már említettük, β -t viszont nem lehet számszerűen meghatározni. Tudjuk azonban, hogy α növelése β csökkenésével jár együtt. Így azt tehetjük, hogy α -t egészen addig növeljük, (ezzel együtt t_{le} -et addig csökkentjük), amíg $t_{le} = t_m$ nem teljesül. Ha ennél csak egy kicsit nagyobb levágási értéket (t_{le}) választunk, a nullhipotézist ugyanúgy elfogadjuk, mint az előbb, viszont az ehhez tartozó α lényegesen nagyobb, mint 0,05: $p = 0,26$. Bár ennek, mivel elfogadtuk a nullhipotézist, önmagában nincs sok értelme, áttételesen azt jelenti, hogy β , tehát a másodfajú hiba valószínűsége csökkent. Így ilyen esetben célszerű ezt az α értéket megadni.

A *t*-próba alkalmazhatóságának feltételei a következők:

1. a változó eloszlása legyen normális eloszlás,
2. a minta vagy minták elemei legyenek függetlenek egymástól,
3. két minta esetén a szórások legyenek „eléggé” egyformák.

A három feltétel közül az 1.-t és a 3.-at nem kell nagyon szigorúan venni, de a 2. - at igen. A *t*-próbát általában középértékek, illetve középértékek különbségének vizsgálatához használjuk, de például a korrelációs együttható is vizsgálható vele.

Ezek után lássuk a *t*-próba legismertebb formáit és a t_m értékét megadó képleteket.




EGYMINTÁS *t*-PRÓBA




Az ide vonatkozó **korábbi kérdés**: *VÁLTOZIK-E* a pulzusszám egyperces lélegzet-visszatartás után (lásd 13. megjegyzés)?




Általánosabban megfogalmazva: **megváltozik-e a populáció eloszlásának várható értéke** valamilyen beavatkozás következtében, más szóval van-e hatása a beavatkozásnak. Vagy **különbözik-e a populáció eloszlásának várható értéke egy előre megadott értéktől?**

$$t_m \text{ kiszámítása: } t_m = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \quad (20)$$

t_m szabadságfoka: $n-1$.

 egymintás *t*-próba
 *t*-test for a single sample
 Einstichproben-*t*-Test

 kétmintás *t*-próba
 *t*-test for two samples
 Zweistichproben-*t*-Test

 korrelációs *t*-próba
 *t*-test for correlation
 *t*-Test zur Korrelationsanalyse

13. megjegyzés (részletesen kidolgozott megoldás):

- H_0 : a pulzusszám nem változik, azaz $\mu - \mu_0 = 0$, ahol $\mu_0 = 0$, vagy $\bar{x} \approx 0$, ahol \bar{x} a változások átlagát jelenti.
- H_1 : $\mu - \mu_0 \neq 0$, (kétoldali próba). Az első két oszlop a felvett adatokat tartalmazza, egyperces lélegzet-visszatartás előtt (x_e), és után (x_u), $n = 6$ kísérleti személy esetén. A harmadik és a negyedik oszlop az adatok különbségeit (x'_i), illetve azok négyzeteit tartalmazza (ez utóbbiak az átlag és a szórás kiszámításához szükségesek).

x_e	x_u	$x'_i = x_u - x_e$	x'^2_i
69	71	2	4
60	63	3	9
68	70	2	4
75	76	1	1
71	70	-1	1
66	69	3	9
		$\Sigma x'_i = 10$	$\Sigma x'^2_i = 28$

Az adatok különbségeinek átlaga:

$$x' = \frac{\Sigma(x_u - x_e)}{n} = \frac{10}{6} = 1,67.$$

Az adatok különbségeinek szórása (4), illetve (6) szerint:

$$s' = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2_i - \frac{(\Sigma x'_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{28 - \frac{10^2}{6}}{6-1}} = 1,51.$$

A mintából számolt t_m értéke (20) szerint ($\mu = 0$):

$$t_m = \frac{x'}{s'} \cdot \sqrt{n} = \frac{1,67}{1,51} \cdot \sqrt{6} = 2,72.$$

Legyen a szignifikancia szint: $\alpha = 0,05 \rightarrow 5\%$.

A szabadságfok: $(n-1) = (6-1) = 5$.

A 7. táblázat kétoldali próbákhoz tartozó $p = 0,05$ oszlopának és az 5-ös szabadságfoknak megfelelő 5. sorának metszete megadja a levágási határ értékét:

$t_{le} = 2,571$.

Mivel: $t_m = 2,72 > t_{le} = 2,571$,

így t_m a kritikus tartományba esik, tehát a **nullhipotézist elvetjük**. Az egyperces lélegzet-visszatartás tehát **szignifikáns** pulzusváltozást okozott (5%-os szignifikancia szint mellett).

KÉTMINTÁS t -PRÓBA

Az ide vonatkozó **korábbi kérdés**: *VAN-E KÜLÖNBSÉG* a lányok és a fiúk pulzusszáma között (lásd 14. megjegyzés)?

Általánosabban megfogalmazva: két populáció eloszlásának várható értéke különbözik-e?

$$t_m \text{ kiszámítása: } t_m = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s^*} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \text{ ahol } s^* = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}, \quad (21)$$

t_m szabadságfoka: $n_1 + n_2 - 2$,

ahol Q az (6)-ban bevezetett jelöléssel ekvivalens az 1. illetve 2. mintára vonatkoztatva. (Megfigyelhetjük, hogy ez a kifejezés formailag nagyon hasonlít a (20) egyenlőséghez.)

KORRELÁCIÓS t -PRÓBA

Az ide vonatkozó **korábbi kérdés**: *VAN-E KAPCSOLAT* az életkor és a szem akkomodációs képessége között?

Általánosabban megfogalmazva: a korrelációs együttható és a minta elemszámának figyelembevételével **mondhatjuk-e két mennyiségről** (a változásai alapján), **hogy kapcsolat van közöttük?**

$$t_m \text{ kiszámítása: } t_m = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \quad (22)$$

t_m szabadságfoka: $n-2$,

ahol n a mérési pontok (összetartozó x és y értékpárok) száma, r pedig a (19) képlettel bevezetett korrelációs együttható. (Mivel az eljárás további része gyakorlatilag megegyezik az előző két t -próbánál bemutatott lépésekkel (lásd a 13. és a 14. megjegyzéseket), ezért itt erre külön nem térünk ki.)

A 8. táblázatban összefoglaltuk a t -próbák itt megbeszélt változatait. A konkrét esetben alkalmazandó statisztikai próba típusát elsősorban a feltett kérdés jellege dönti el. Ennek egyértelmű megfogalmazását segíti az elvégzendő mérés, illetve a rendelkezésre álló adatok ismerete.

14. megjegyzés (kidolgozott megoldás):

- H_0 : a lányok és a fiúk pulzusszáma között nincs különbség, azaz $\mu_{\text{lányok}} - \mu_{\text{fiúk}} = 0$.
 - H_1 : $\mu_{\text{lányok}} - \mu_{\text{fiúk}} \neq 0$, (kétoldalú próba).
- Az alábbi táblázat 6 lány és 9 fiú pulzusszám adatait tartalmazza.

$x_{\text{lányok}}$	$x_{\text{fiúk}}$
74	71
87	63
62	70
79	74
71	71
77	69
	82
	56
	78
$\bar{x}_{\text{lányok}} = 75$	$\bar{x}_{\text{fiúk}} = 70$

Az átlagok kiszámításából úgy tűnhet, hogy a lányoknak magasabb a pulzusszáma. Vajon szignifikáns-e ez az eltérés (vagy csak a véletlen okozhatja)?

Feltesszük, hogy a t -próba elvégzéséhez minden feltétel teljesül, (még az is, hogy a két minta szórása is egyforma, amit külön próbával ellenőrizhetnénk).

Számítógép segítségével kiszámítjuk az adatainkhoz tartozó p valószínűséget: $p = 0,296$. (A t -próba függvény paramétereinek beállításánál figyelembe vesszük a kétoldalúságot és az azonos szórásokat.)

Mivel p elég nagy, sokkal nagyobb, mint 0,05, a szokásos szignifikancia szint, ezért a nullhipotézist nem vethetjük el, hiszen ellenkező esetben majdnem 30%-os lenne az elsőfajú hiba, ami annak a valószínűségét méri, hogy igaz hipotézist vetettünk el. Így H_0 -t megtartjuk, tehát azt mondhatjuk, hogy a mintáinkban megfigyelhető különbség nem szignifikáns.

	egymintás t -próba	kétmintás t -próba	korrelációs t -próba
Egy tipikus kérdés az orvostudomány területről	Hatásos-e a kezelés? (Van-e változás a várt irányban?)	Van-e különbség két kezelés hatása között?	Van-e a kapcsolat két mennyiség között?
az ehhez tartozó nullhipotézis	a kezelés hatástalan	a két kezelés ugyanolyan hatású	nincs kapcsolat
a próbával eldöntendő kérdés pontosabb megfogalmazása	származhat-e a minta egy μ_0 várható értékű eloszlásból?	származhat-e a két minta ugyanabból az eloszlásból?	kis r esetén mondhatjuk-e mégis, hogy van korreláció két (folytonos) változó között?
a nullhipotézis pontosabban	$\mu - \mu_0 = 0$	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	valójában nincs korreláció a két változó között
mérés	egy mennyiséget mérünk egy mintán	ugyanazt a mennyiséget mérjük két mintán	két mennyiséget mérünk ugyanazon a mintán
t	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$	lásd (21)	$t = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$
szabadságfok	$n - 1$	$n_1 + n_2 - 2$	$n - 2$

8. táblázat. Összefoglaló a leggyakrabban használt t -próbákról.