



Kleine medizinische Signalverarbeitung



KAD 2023.10.24

Signal: eine Grösse, die Information trägt, weiterleitet oder speichert

Beispiel1:

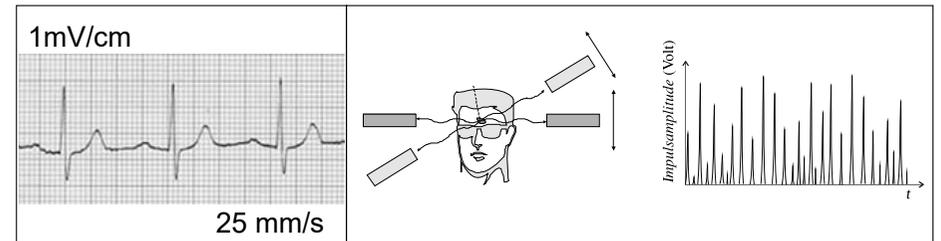
elektrische Spannung, die infolge der Herz-/Gehirn-tätigkeit auf der Körper-/Schädeloberfläche erscheint (EKG/EEG)

Beispiel2:

die detektierte Gamma-Quanten bei der Isotopendiagnostik

(1)

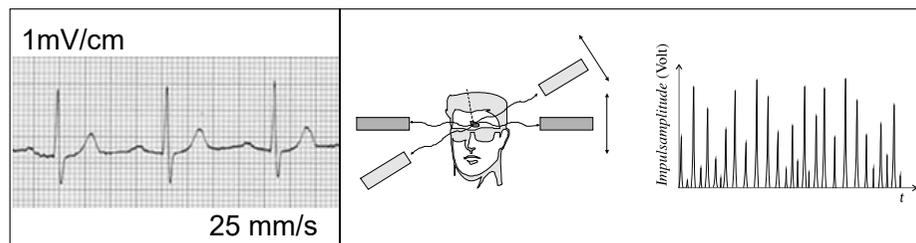
(2)



2

Klassifizierung der Signale

- | | | |
|------------------------|---|--|
| statisches S. | – | zeitabhängiges S. |
| (quasi)periodisches S. | – | nichtperiodisches S. |
| stochastisches S. | – | nichtstochastisches S.
(deterministisches S.) |
| nichtelektrisches S. | – | elektrisches S. |
| analoges S. | – | digitales S. |



3

in ausgezeichneter Rolle

elektrische Signale

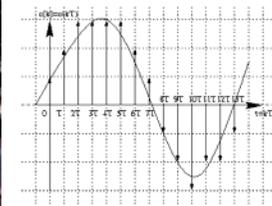
die nichtelektrische Signale werden in elektrische Signale umgewandelt

Vorteil der elektrischen Signale:
Umwandlung, Verstärkung,
Weiterleitung ist einfach

digitale Signale

die analoge Signale werden digitalisiert

Vorteil der digitalen Signale:
Speicherung ist einfach,
Rausch kann minimalisiert werden



4

Grösse (und Einheit), die für die Vergleichung der Masse der Signale verwendet wird:

Bel-Zahl: n

(nach A. Bell)

Einheit von n : Bel (B)

$$n = \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ B} = \lg \frac{J_2}{J_1} \text{ B} = \lg \frac{E_2}{E_1} \text{ B}$$

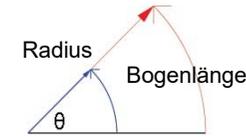
Zehnerlogarithmus des Quotienten von zwei Leistungen (oder Intensitäten, oder Energien)

5

Vgl. **Bogenmass**

$$\Theta = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

$$[\Theta] = \frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad} = 1$$



Vgl. **pH** (power of Hydrogen)

$$\text{pH} = -\lg \frac{[\text{H}^+]}{1\text{M}}$$

z.B.: $[\text{H}^+] = 10^{-7}\text{M}$
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg 10^{-7} = -1 \cdot (-7) = 7$

Anstatt der Bel-Zahl die angewandte Grösse:

Dezibel-Zahl oder **Pegel**

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad (10\text{d} = 1)$$

6

charakteristische Grösse: **Leistung** (o. Intensität/ Energie),
technische Grösse: (elektrische) **Spannung**

Zusammenhang zwischen der Leistung und der Spannung:

$$P = U \cdot I = U^2 / R \quad (\text{Ohm: } U = R \cdot I)$$

Dezibel Zahl mit Spannungsverhältnis:

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{U_2^2 / R_2}{U_1^2 / R_1} \text{ dB} \stackrel{R_2 \approx R_1}{=} 10 \cdot \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} \text{ dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB}$$

7

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow 10 \lg 2 \text{ dB} = 10 \cdot 0,3 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB}$$

vgl. Halbwerts-Zeit/Dicke

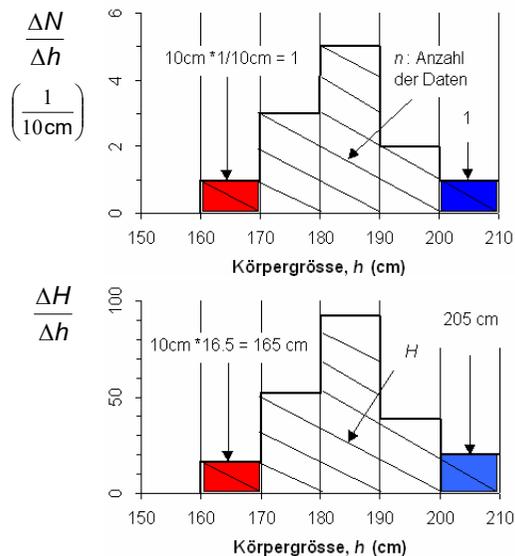
$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow 10 \lg 10 \text{ dB} = 10 \cdot 1 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 100 \Leftrightarrow 10 \lg 100 \text{ dB} = 10 \cdot 2 \text{ dB} = 20 \text{ dB}$$

U_2/U_1	P_2/P_1	dB
1,414	2	3
2	4	6
	8	9
3,16	10	10
	20	13
10	100	20
	1000=10 ³	30
100=10 ²	10000=10 ⁴	40
1000=10 ³	10 ⁶	60

8

Häufigkeitsverteilung

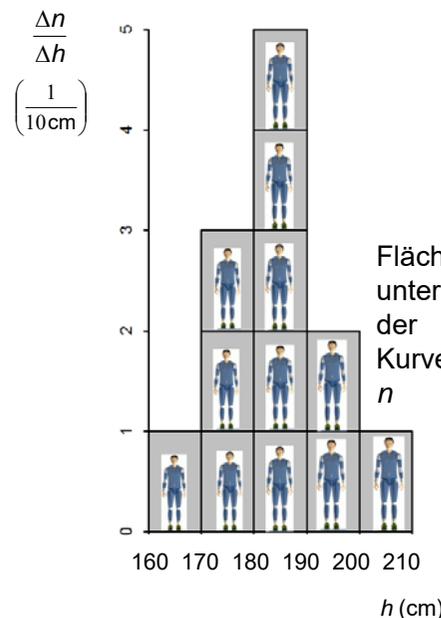


h : Körperhöhe
 H : kollektive Höhe, Gesamthöhe

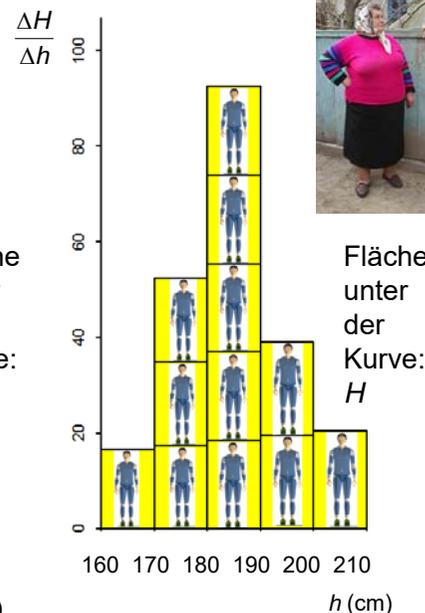


Spektrum als eine spezielle Häufigkeitsverteilung

Häufigkeitsdichte



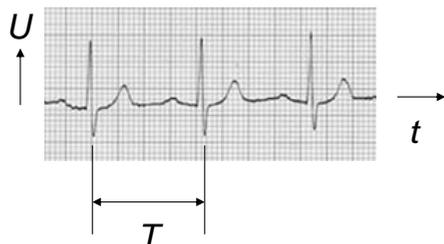
Spektrum



Fourier-Theorem für periodische Funktionen (Signale)

Jede periodische Funktion kann durch die Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen (Grundfrequenz + Obertöne) hergestellt werden.

periodische Funktion: es gibt eine Periode(nzeit), T



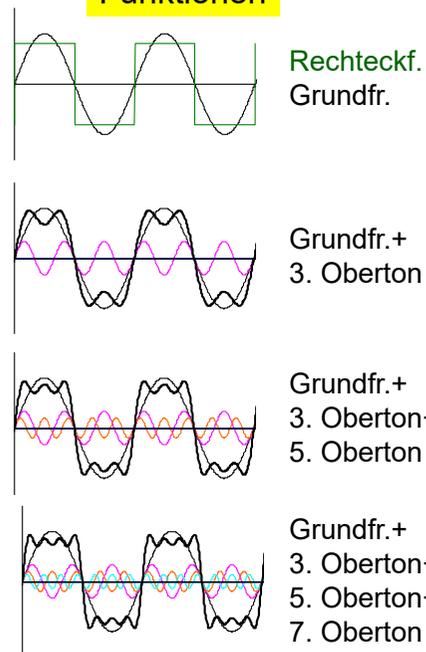
$1/T=f$, wo f ist die Frequenz

f ist die Frequenz der Sinusfunktion: **Grundfrequenz** (Grundschiwingung)

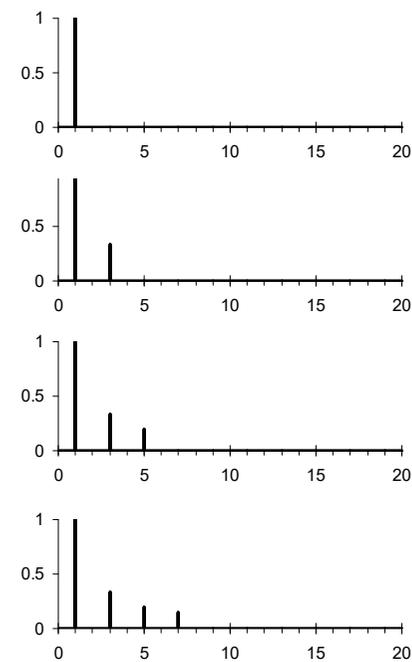
$2f, 3f, 4f, \dots$: **Obertöne** (Oberschiwingungen)

(Linienspektrum)

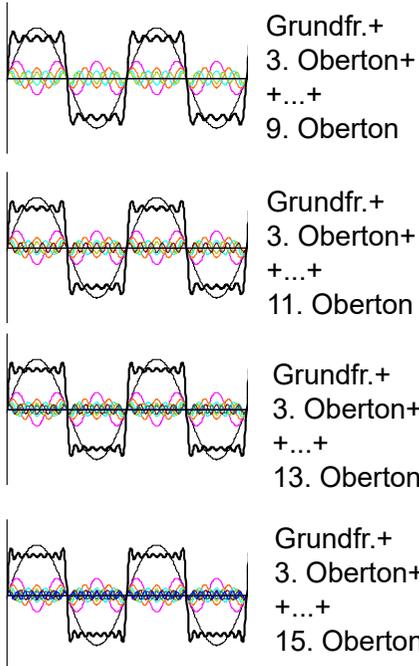
Funktionen



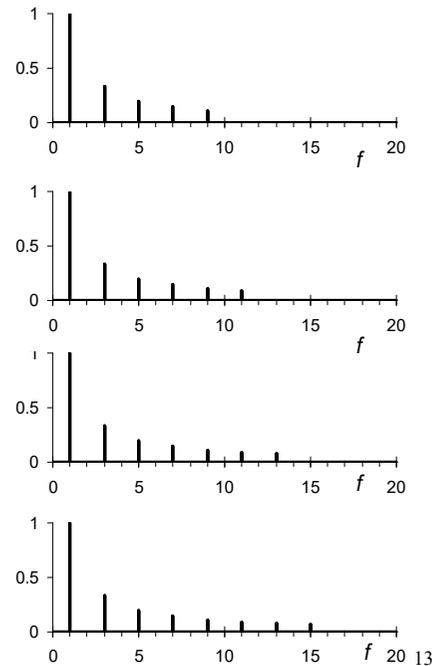
Spektrum



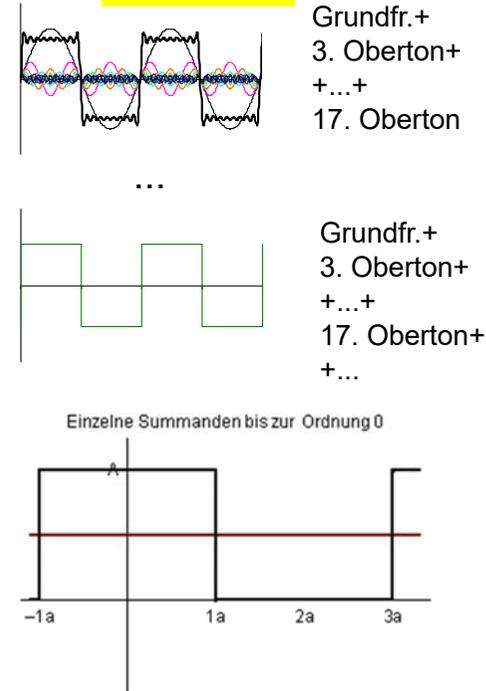
Funktionen



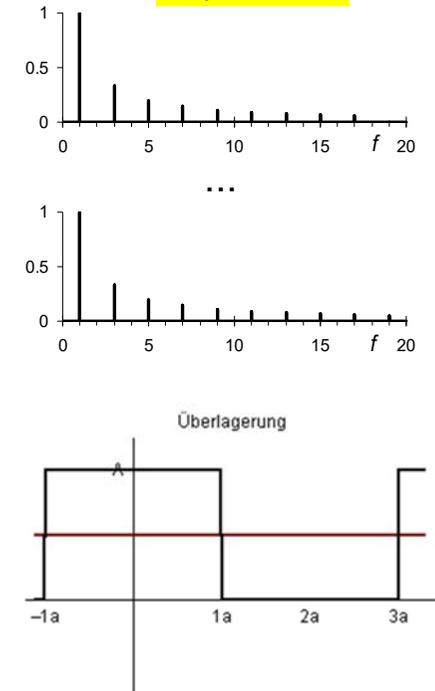
Spektrum



Funktionen

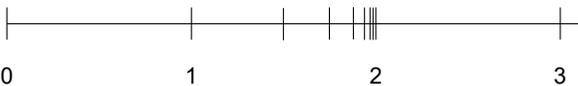


Spektrum



Vgl. Funktionsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



i	1/2 ^k	Σ(1/2 ^k)	ε=2-Σ(1/2 ^k)
0	1	1	1
1	0,5	1,5	0,5
2	0,25	1,75	0,25
3	0,125	1,875	0,125
4	0,0625	1,9375	0,0625
5	0,03125	1,96875	0,03125
6	0,015625	1,984375	0,015625
7	0,007813	1,9921875	0,0078125
8	0,003906	1,99609375	0,00390625
9	0,001953	1,998046875	0,001953125
10	0,000977	1,9990234375	0,0009765625
11	0,000488	1,99951171875	0,00048828125
12	0,000244	1,9997578125	0,000244140625
13	0,000122	1,99987890625	0,0001220703125
14	6,1e-05	1,999939453125	6,1e-05
15	3,0e-05	1,9999697265625	3,0e-05
16	1,5e-05	1,99998486328125	1,5e-05
17	7,5e-06	1,999992431640625	7,5e-06
18	3,7e-06	1,9999962158203125	3,7e-06
19	1,9e-06	1,99999810791015625	1,9e-06
20	9,5e-07	1,999999053955078125	9,5e-07
21	4,7e-07	1,9999995269775390625	4,7e-07
22	2,4e-07	1,99999976348828125	2,4e-07
23	1,2e-07	1,999999881744140625	1,2e-07
24	6,1e-08	1,9999999408720703125	6,1e-08
25	3,0e-08	1,99999997043603515625	3,0e-08
26	1,49E-08	1,999999985218017578125	1,49012E-08
27	7,45E-09	1,9999999926090087890625	7,45058E-09
28	3,73E-09	1,99999999630450439453125	3,72529E-09
29	1,86E-09	1,999999998152252197265625	1,86265E-09
30	9,31E-10	1,9999999990761260986328125	9,31323E-10
31	4,66E-10	2	4,65661E-10
32	2,33E-10	2	2,32831E-10
33	1,16E-10	2	1,16416E-10
34	5,8E-11	2	5,8208E-11
35	2,9E-11	2	2,9104E-11
36	1,45E-11	2	1,4552E-11
37	7,25E-12	2	7,276E-12
38	3,62E-12	2	3,638E-12
39	1,81E-12	2	1,819E-12
40	9,05E-13	2	9,095E-13
41	4,52E-13	2	4,547E-13
42	2,26E-13	2	2,273E-13
43	1,13E-13	2	1,136E-13
44	5,65E-14	2	5,68E-14
45	2,82E-14	2	2,84E-14
46	1,41E-14	2	1,42E-14
47	7,11E-15	2	7,10543E-15
48	3,55E-15	2	3,55271E-15
49	1,78E-15	2	0
50	8,88E-16	2	0

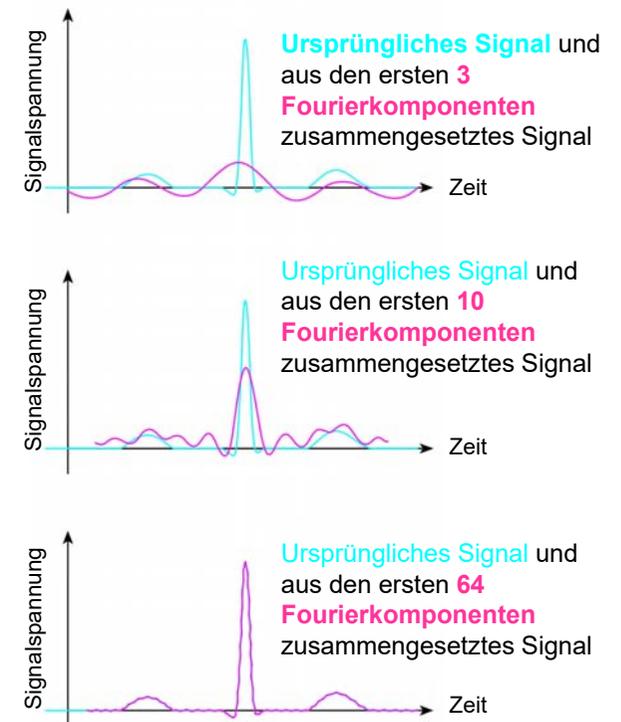
$$\sum_{k=0}^{31} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{31}} = 2, \text{ Fehler: } 4,6 \cdot 10^{-10}$$

genau genug(?)

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} = 2, \text{ Fehler: } 3,55 \cdot 10^{-15}$$

genau genug

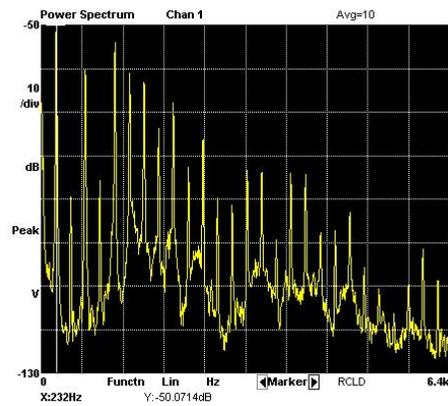
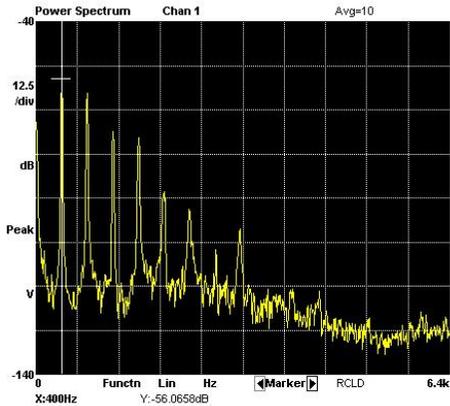
Erzeugung eines EKG-Signals aus der Summe von Sinussignalen



Warum nennen wir die Grund- und Oberfrequenzen als Grundton und Obertönen?

Flöte

Klarinette

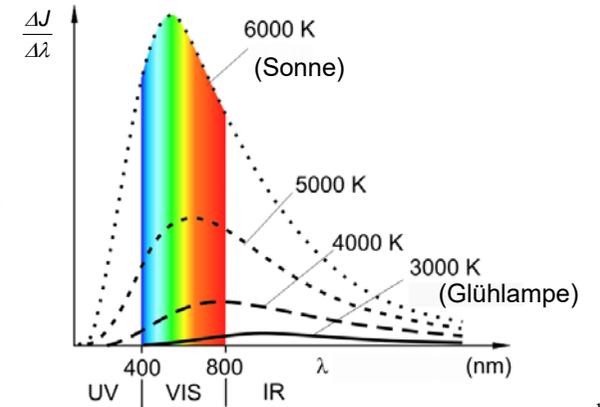


Fourier-Theorem für aperiodische Funktionen (Signale)

Jede Funktion kann durch eine Summe von Sinus- (harmonischen) Funktionen hergestellt werden.

Das Spektrum: kontinuierliches Spektrum.

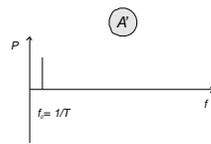
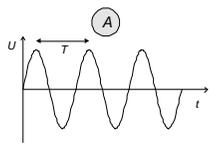
vgl. Emissionsspektren



Funktionen

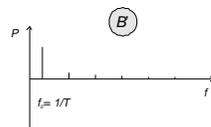
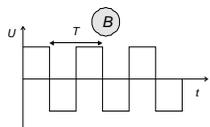
Spektrum

Sinus-Funktion



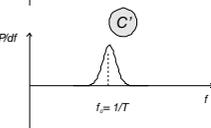
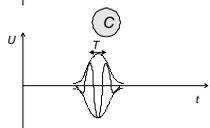
Linienspektrum (1 Linie)

periodische Funktion



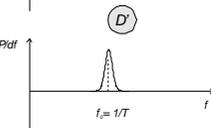
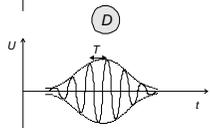
Linienspektrum

ein Paar Periode



Bandenspektrum

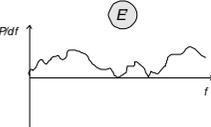
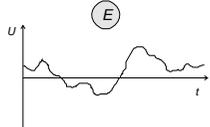
ein Paar Periode



Anwendung: Puls-Ultraschall

Bandenspektrum

aperiodische Funktion



kontinuier. Spektrum

Inisheer

Musik in Zeit-Frequenz Darstellung

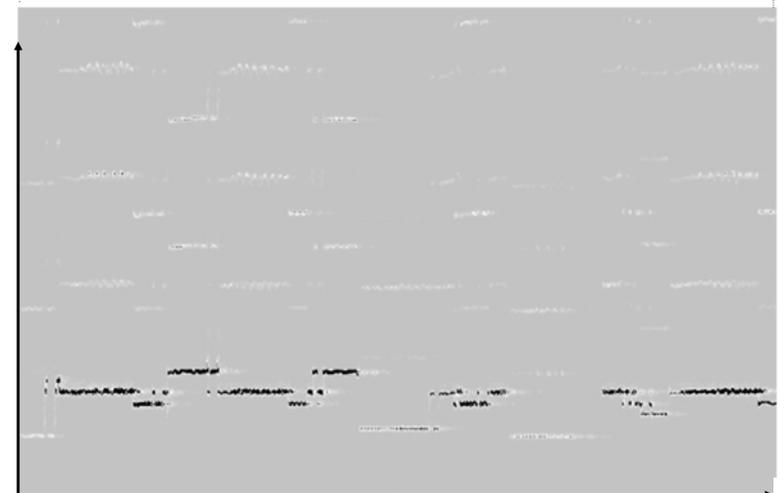
Traditional

Penny Whistle

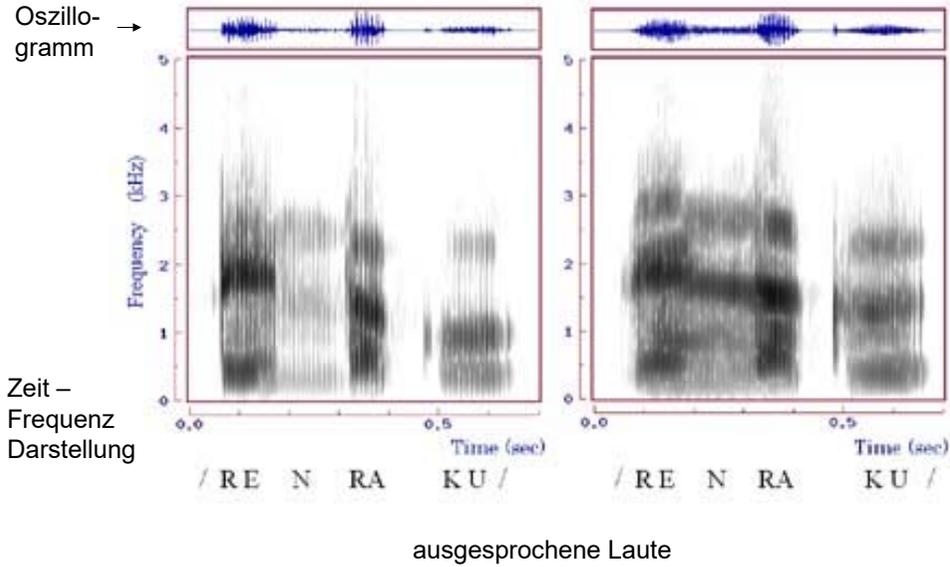
Air



f_{sinus}



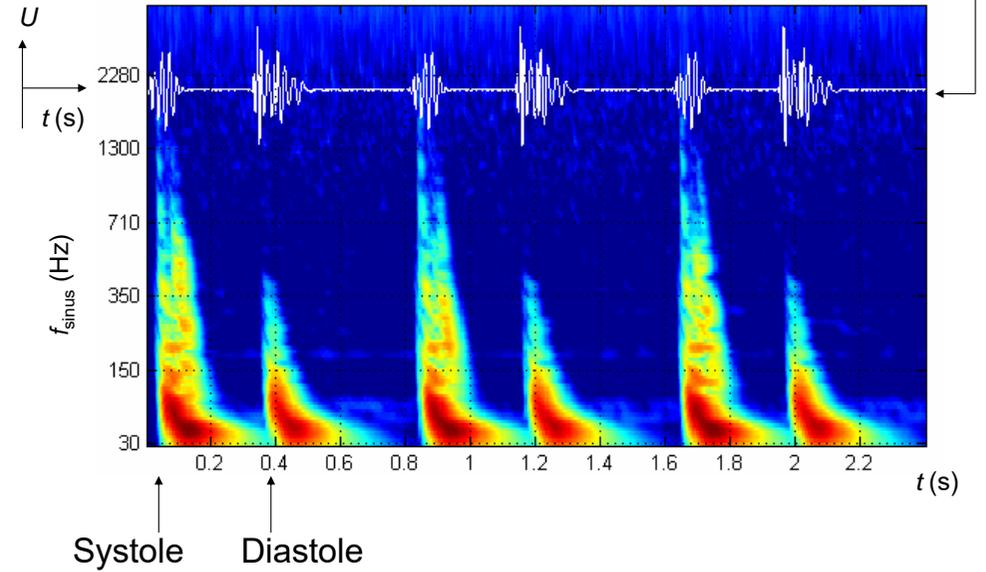
Sonogramm = Schall-Spektrogramm (voiceprint)



<http://www.nriips.go.jp/org/fourth/info3/index-e.html>

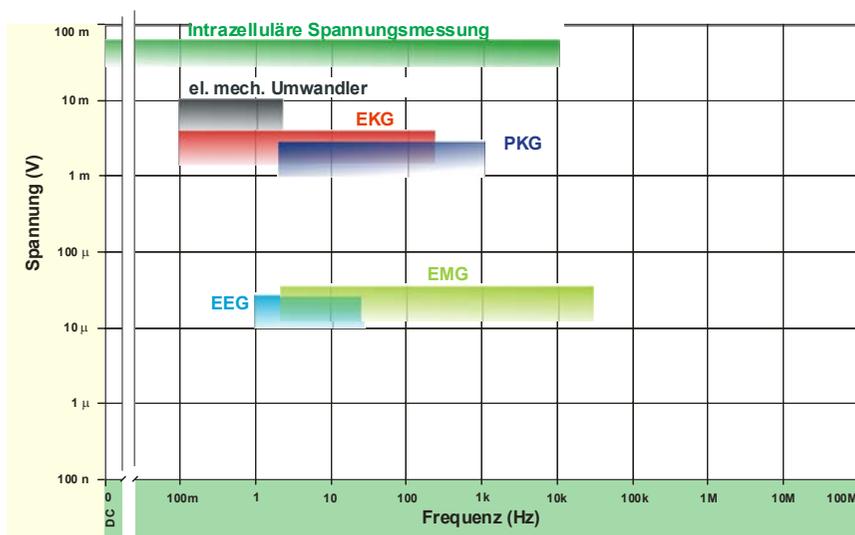
21

Herztöne in Zeit-Frequenz Darstellung (+ Oszillogramm)



22

Einige charakteristische Daten bioelektrischer Potentiale



Biophysik für Mediziner, Abb. VII.4.

23

Eine frequenzabhängige Einheit: (elektrischer) Verstärker

$$(1) P_{\text{ein}} < P_{\text{aus}}$$

$$(2) P_{\text{ein}} \text{ und } P_{\text{aus}} : \text{gleiche Funktionen}$$

gleich: „fundamentale“ Anforderung
ähnlich: reelle Anforderung

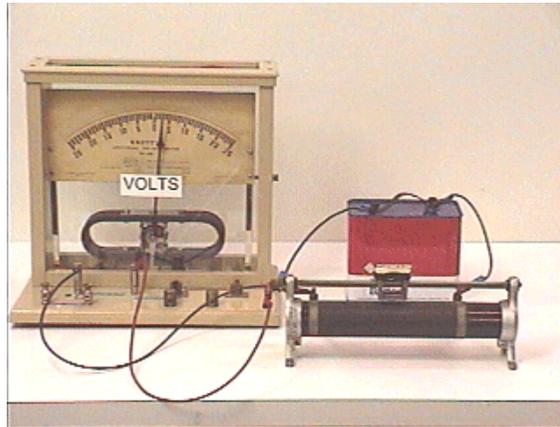
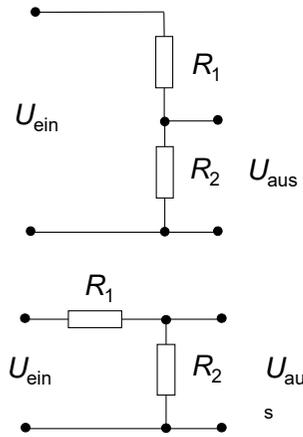
$$(1) + (2) V_P \cdot P_{\text{ein}}(t) \equiv P_{\text{aus}}(t), \text{ wo } V_P > 1$$

$$V_P = \frac{P_{\text{aus}}}{P_{\text{ein}}}, \text{ Leistungsverstärkung (sfaktor)}$$

$$V_U = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}}, \text{ Spannungsverstärkung (sfaktor)}$$

24

Frequenzunabhängiger Spannungsteiler



$$U_{\text{aus}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{ein}}$$

Frequenzabhängige Spannungsteilung mit Kondensator

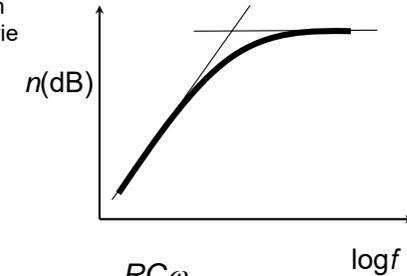
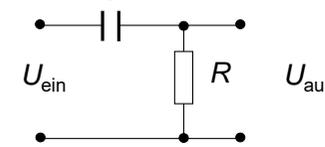
25

Ergänzungsmaterial

Hochpass Filter (high-pass filter)

$$R_c = \frac{1}{C\omega}$$

Kapazität bei hohen Frequenzen wirkt wie ein Kurzschluss



Streukapazität/parasitäre Kapazität

$$U_{\text{aus}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{C^2\omega^2} + R^2}} U_{\text{ein}} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} U_{\text{ein}}$$

bei sehr kleinen Frequenzen: wenn $\omega \approx 0$, $U_{\text{aus}} = 0$

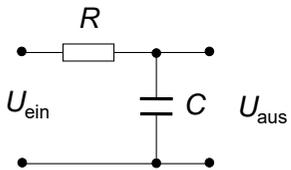
bei kleinen Frequenzen: wenn $\omega \ll \omega_0$, $U_{\text{aus}} = RC\omega U_{\text{ein}}$

bei hohen Frequenzen: wenn $\omega \gg \omega_0$ ($\omega \approx \infty$), $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

26

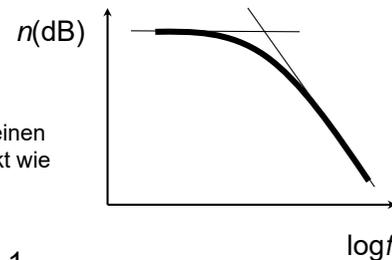
Ergänzungsmaterial

Tiefpass Filter (low-pass filter)



$$R_c = \frac{1}{C\omega}$$

Kapazität bei kleinen Frequenzen wirkt wie ein Riss



$$U_{\text{aus}} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} U_{\text{ein}} = \frac{1}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}} U_{\text{ein}}$$

bei kleinen Frequenzen: wenn $\omega \ll \omega_0$ ($\omega \approx 0$), $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

bei grossen Frequenzen: wenn $\omega \gg \omega_0$, $U_{\text{aus}} = \frac{1}{RC\omega} U_{\text{ein}}$

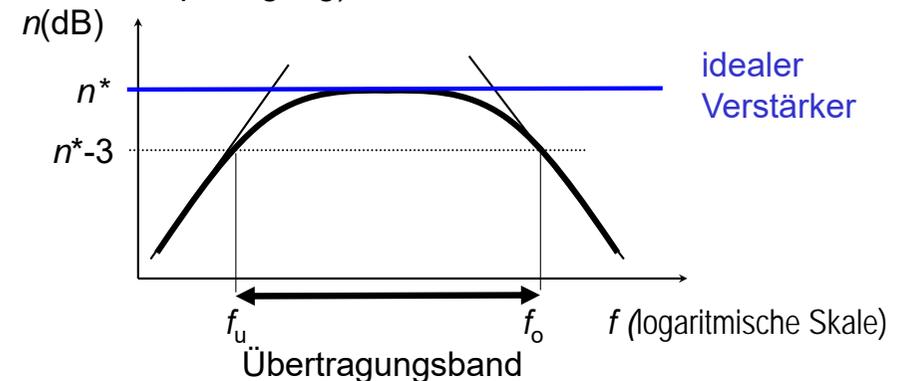
bei sehr grossen Frequenzen: wenn $\omega \approx \infty$, $U_{\text{aus}} = 0$

27

für (1): $V_p > 1$, $n = 10 \lg V_p = 20 \lg V_U$ (dB) > 0 dB

für (2): Frequenzcharakteristik

(Frequenz-Antwort-Funktion, Übertragungskennlinie, Frequenzgang)

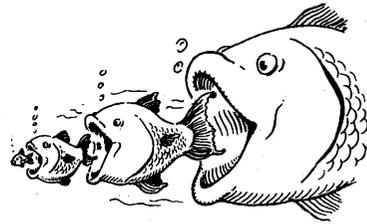
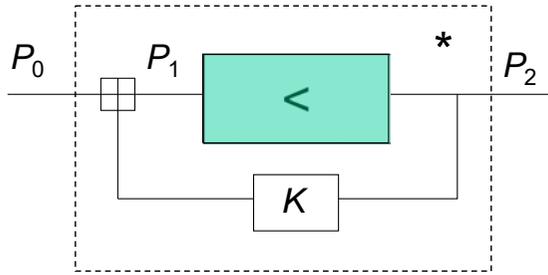


f_u : untere Grenzfrequenz

f_o : obere Grenzfrequenz

28

Rückkopplung(sverstärker)



(a) $P_1 = P_0 + KP_2$ (b) $V_P = \frac{P_2}{P_1}$

(c) $V_P^* = \frac{P_2}{P_0} = \frac{P_1 V_P}{P_0} = \frac{(P_0 + KP_2)V_P}{P_0} = V_P + K \frac{P_2}{P_0} V_P = V_P + KV_P^* V_P$

$V_P^* - KV_P^* V_P = V_P$ $V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}$

$V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}$, V_P^* : Verstärkungsfaktor des rückgekoppelten Verstärkers

V_P : Verstärkungsfaktor des Verstärkers (ohne R.k.)

$K > 0$, Mitkopplung (positive R.k. - gleiche Phase),

$V_P^* > V_P$ (Vorteil)

$K < 0$, Gegenkopplung (negative R.k. - entgegengesetzte Phase),

$V_P^* < V_P$ (Nachteil)

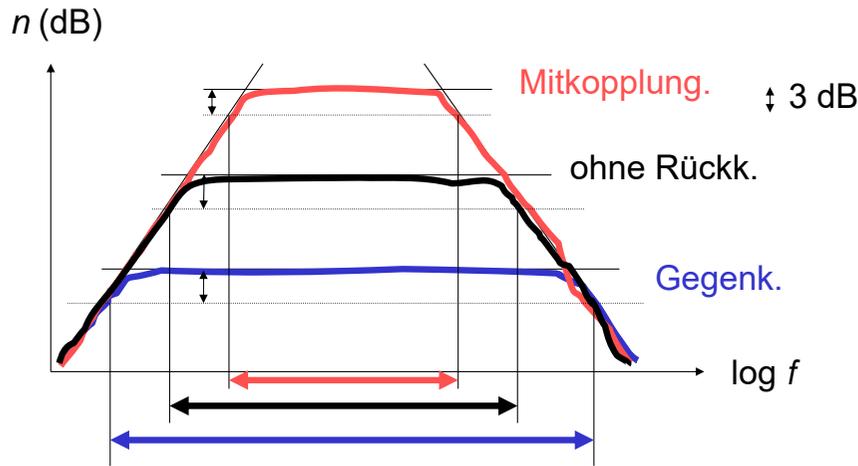
Mitkopplung: Sinusoszillator
($KV_P=1$, Verstärkung: „unendlich“)

Anwendung: Ultraschall(generator)
Wärmetherapie(gen.)

Gegenkopplung: alle Verstärker



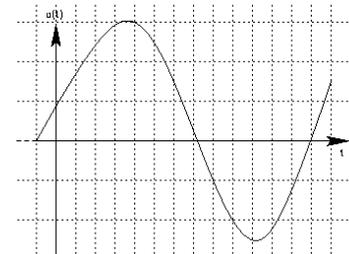
„... and whose idea was it to ask for employee feedback?“



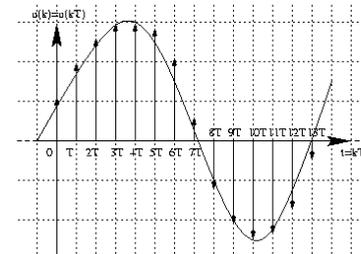
Mitkopplung: Übertragungsband – schmaler (Nachteil)

Gegenkopplung: Übertragungsband – breiter (Vorteil)

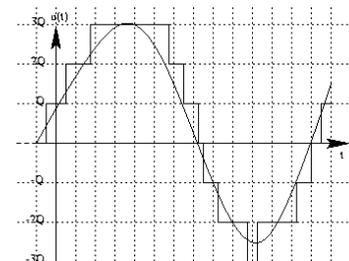
Analoges Signal – digitales Signal



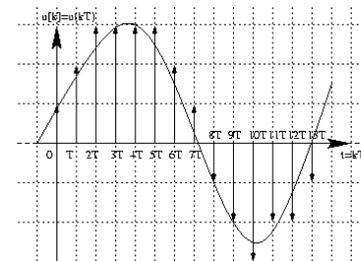
analoges Signal: zeit- und wertkontinuierliches S.



zeitdiskretes, wertkontinuierliches S.

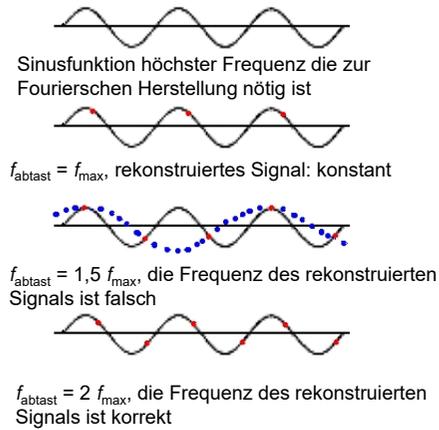


wertdiskretes, zeitkontinuierliches S.



digitales Signal: zeit- und wertdiskretes S.

zeitdiskretes Signal: man kennt den Signalwert nicht in allen Zeitpunkten



Nyquist-Shannon Abtasttheorem:

Ein Signal einer Maximalfrequenz f_{max} mit einer Frequenz grösser als $2f_{\text{max}}$ abgetastet werden muss, damit man aus dem so erhaltenen zeitdiskreten Signal das Ursprungssignal ohne Informationsverlust rekonstruieren kann.

z.B.: hifi, $f_{\text{max}} = 20 \text{ kHz}$

$f_{\text{abtast}} = 44.1 \text{ kHz} > 2 \cdot 20 \text{ kHz}$

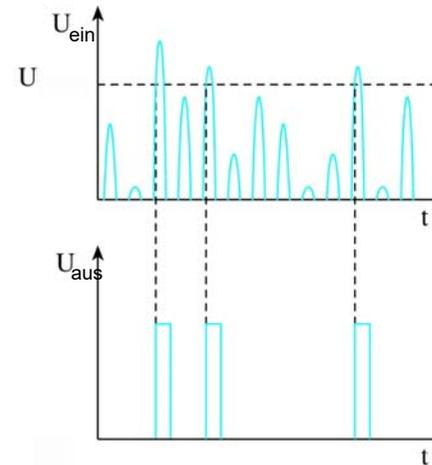
wertediskretes Signal: der Wert des Signals kann nicht beliebig gross sein

z.B.: hifi, 16 bit = $2^{16} = 65\,536$ (CD Standard)

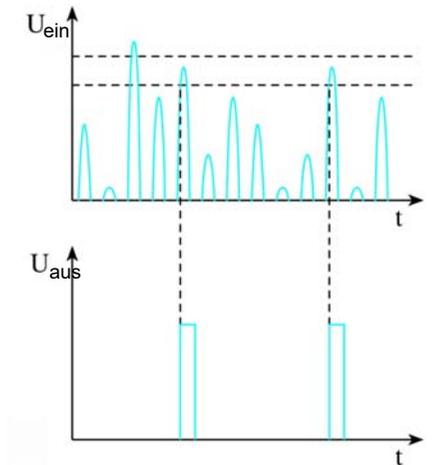
24 bit = $2^{24} = 16\,777\,216$ ("beste" Tonkarte)

Selektieren von Impulssignalen

Integraldiskrimination

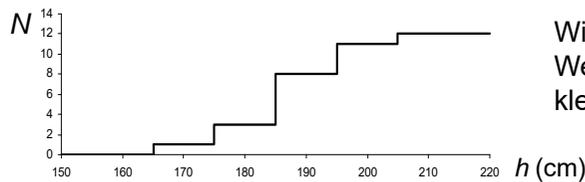


Differentialdiskrimination



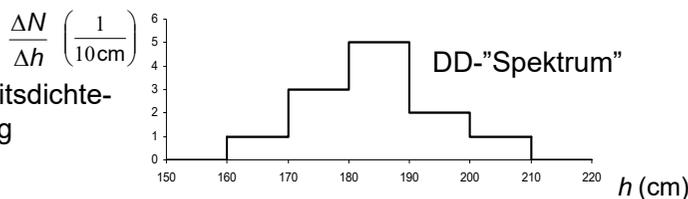
Summen- (kumulierte/kumulative) Häufigkeitsverteilung

Summen-Häufigkeitsverteilung



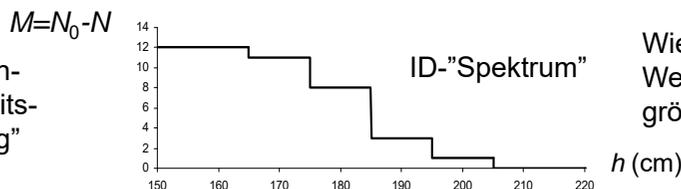
Wieviele Werte sind kleiner als h ?

Häufigkeitsdichte-Verteilung



DD-"Spektrum"

"Summen-Häufigkeitsverteilung"

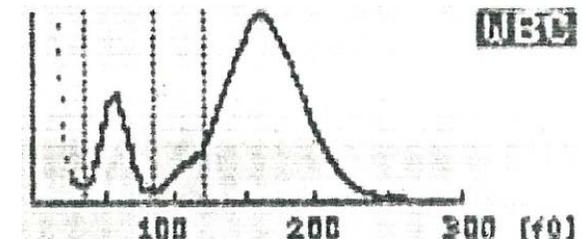
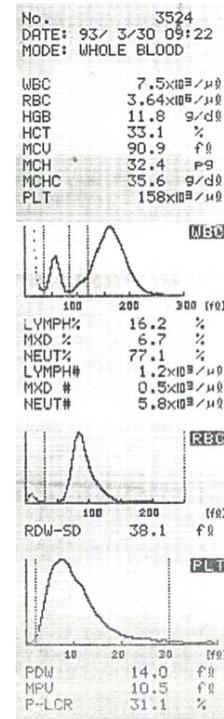


Wieviele Werte sind grösser als h ?

Coulter-Zähler (S. Praktikum)



Konzentration von Leukozyten



LYMPH%	16.2 %
MXD %	6.7 %
NEUT%	77.1 %
LYMPH#	$1.2 \times 10^3 / \mu\text{l}$
MXD #	$0.5 \times 10^3 / \mu\text{l}$
NEUT#	$5.8 \times 10^3 / \mu\text{l}$