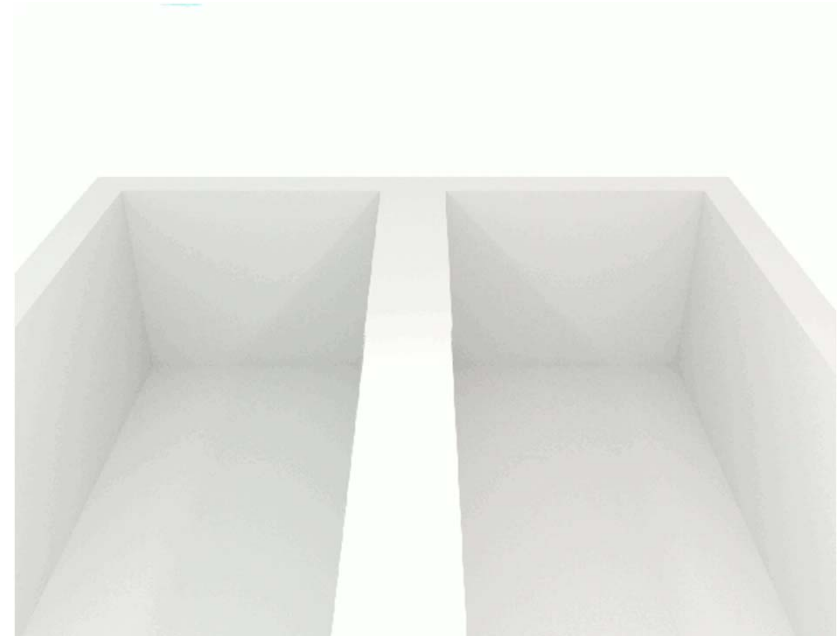
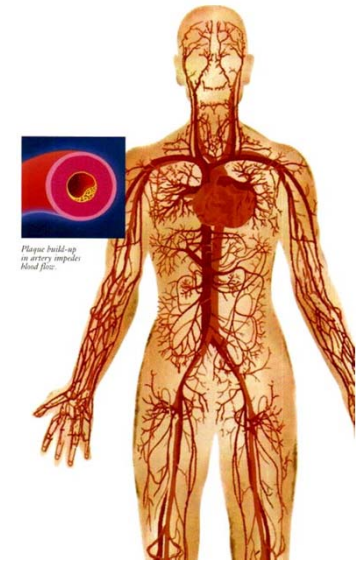
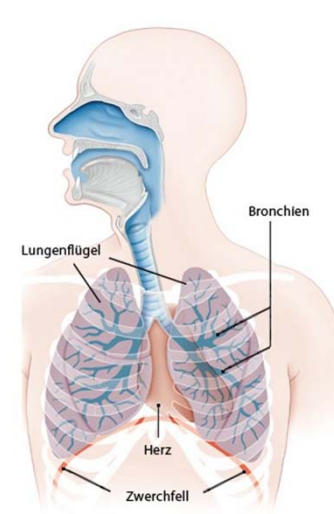


# Transportprozesse 1. Strömung von Gasen und Flüssigkeiten



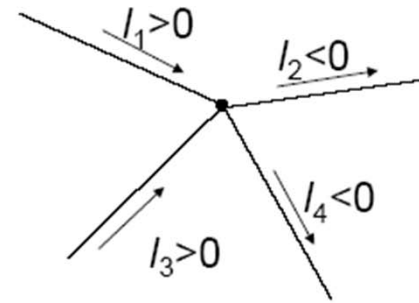
KAD 2024.03.28

## Themen

- Elektrischer Ladungstransport (elektrischer Strom)
- **Volumentransport (Strömung von Flüssigkeiten und Gasen)**
- Stofftransport (Diffusion)
- Wärmetransport (Wärmeleitung)
- Allgemeine Beschreibung von Transportprozessen
- Energetische Beziehungen der Transportprozessen

### Kirchoffsche Gesetze

1. Kirchhoffsches  
Gesetz:  
**Knotenregel**



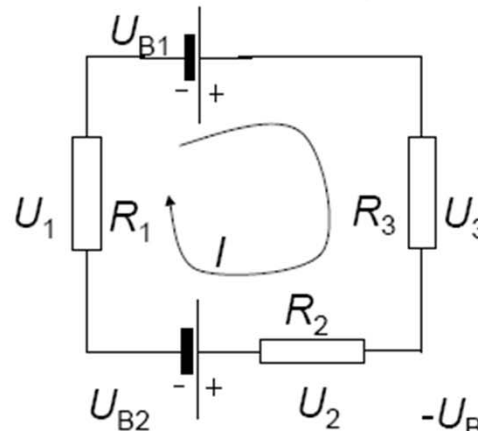
$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\sum_k I_k = 0$$

(Wiederholung)

2. Kirchhoffsches  
Gesetz:  
**Maschenregel**

(Summe der  
Spannungen in  
einer Masche  
ist 0.)



$$\sum_k U_k = 0$$

$$-U_{B1} + U_3 + U_2 + U_{B2} + U_1 = 0$$

Ohmsches Gesetz:  $U = R \cdot I$

Spannung = Widerstand · Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A (Amper)}$$

$$[U] = \text{V}; \quad [R] = \Omega$$

$$R = \rho \frac{\Delta \ell}{A}$$

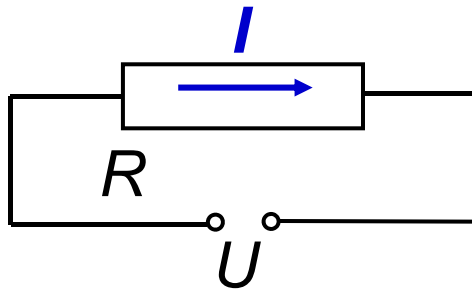
Diagram showing the formula  $R = \rho \frac{\Delta \ell}{A}$  with labels:  $\Delta \ell$  is labeled "Länge" (length) and  $A$  is labeled "Querschnittsfläche" (cross-sectional area).  $\rho$  is labeled "spezifischer Widerstand" (specific resistance).

spezifischer Widerstand

Querschnittsfläche

$$U = \rho \frac{\Delta \ell}{A} I$$

$$I = \frac{1}{\rho} A \frac{U}{\Delta \ell}$$



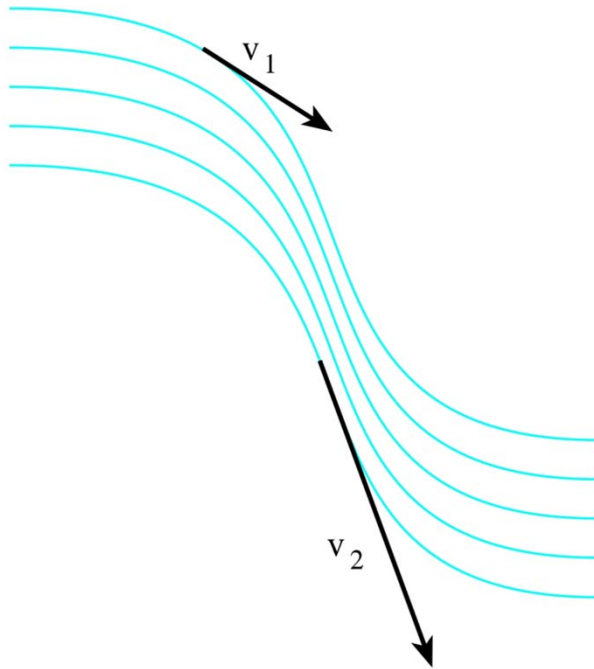
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\sigma A \frac{\Delta \varphi}{\Delta \ell}$$

Diagram showing the formula  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\sigma A \frac{\Delta \varphi}{\Delta \ell}$  with labels:  $\sigma$  is labeled "spezifische Leitfähigkeit" (specific conductivity) and  $\Delta \varphi$  is labeled "elektr. Potentialdifferenz" (electrical potential difference).

spezifische Leitfähigkeit

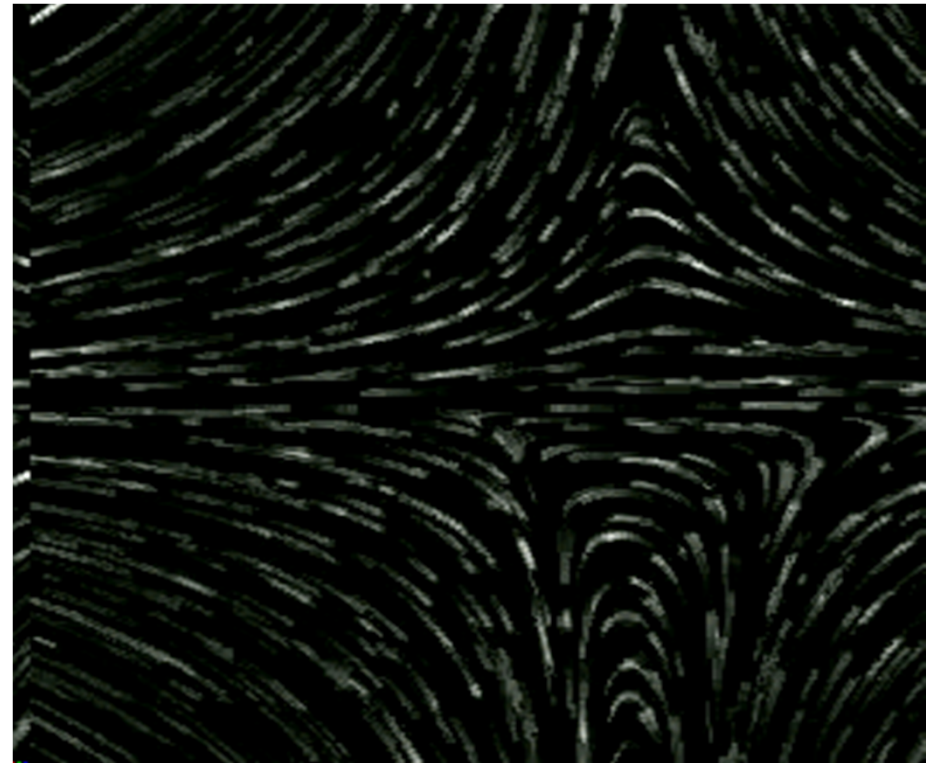
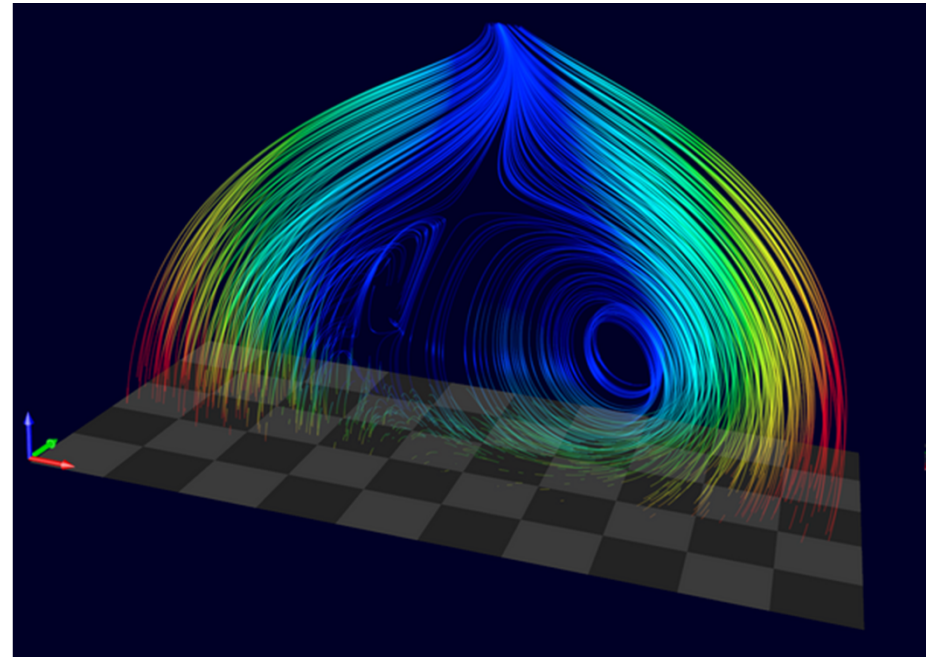
elektr. Potentialdifferenz

# Stromlinien, Strömungsbild



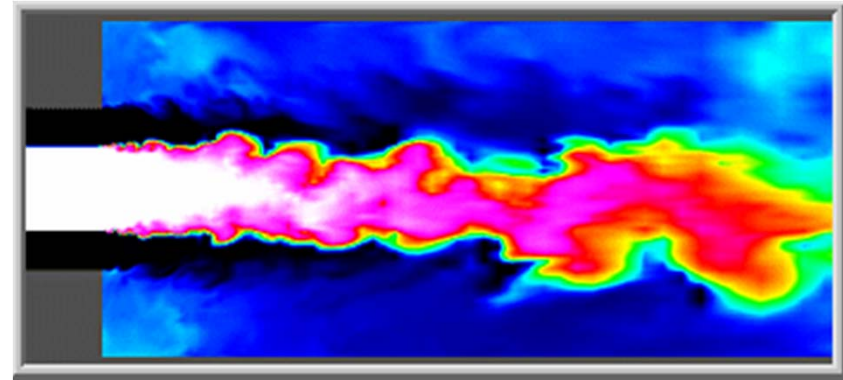
Die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit wird von der Tangente der Stromlinien in einem gegebenen Punkt, die Höhe der Geschwindigkeit wird von der Dichte der Stromlinien angezeigt.

Lehrbuch, Abb. III.1

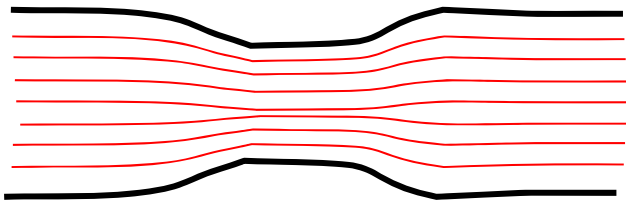


# Einige Grundbegriffe

stationäre Strömung:  
zeitunabhängig

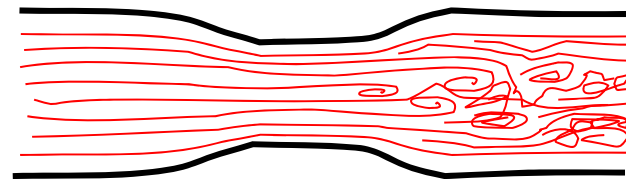


laminare

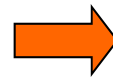


$$V \leq V_{\text{krit}}$$

turbulente



$$V > V_{\text{krit}}$$



lamina: Platte

$$\left( v_{\text{krit}} = \text{Re} \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r} \right)$$



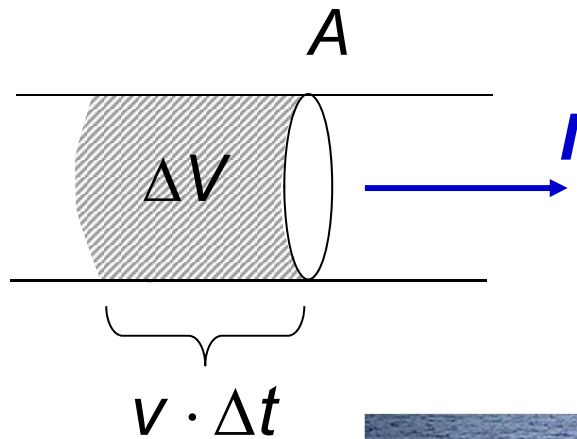
## **(Quasi-) laminare Strömungen**



# Volumenstromstärke (Strömungsintensität, $I$ )

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$[I] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$



$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = A \cdot v$$

$$I = A \cdot \bar{v}$$



# Messmethoden der Volumenstromstärke

## Anwendung: Blutströmung

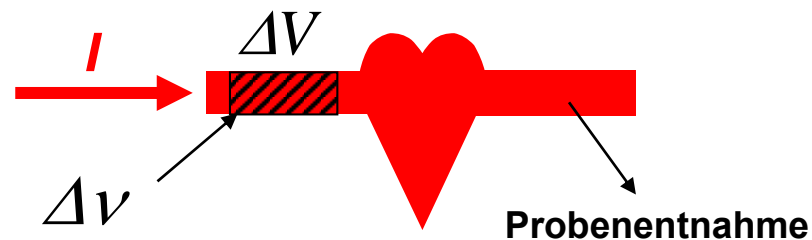
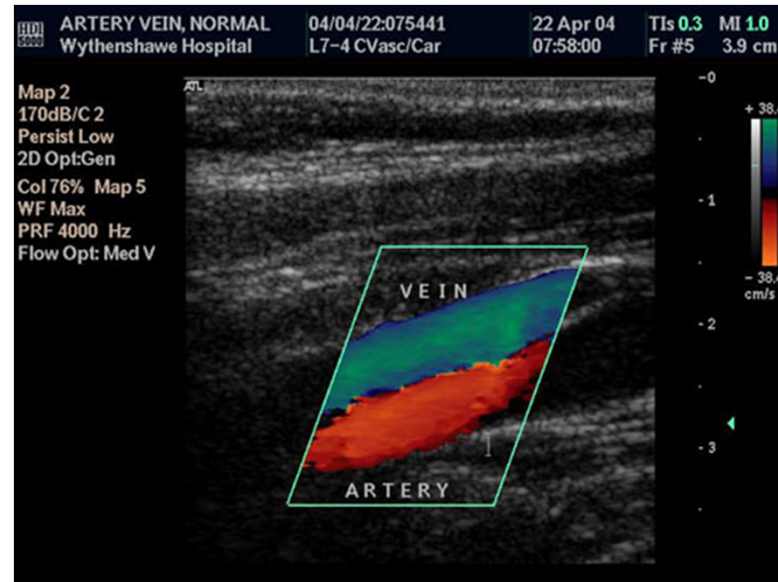
Impedanz-Methode

Ultraschall-Doppler

Laser-Doppler

Dilutionsmethoden

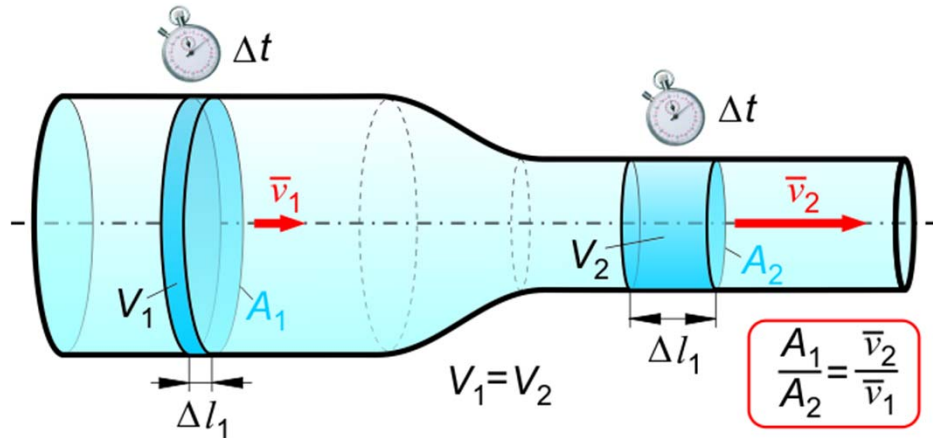
- Fluoreszenzfarbstoffe
- Radioisotope
- kalte phys. Salzlösung



Das Grundprinzip der **Dilutionsmethode** besteht darin, dass ein detektierbarer Indikator in die Blutbahn eingespritzt und dann die Konzentration des verdünnten Indikators in einem späteren Abschnitt der Blutbahn gemessen wird.



# Kontinuitätsgleichung (folgt aus dem Massenerhaltungssatz)



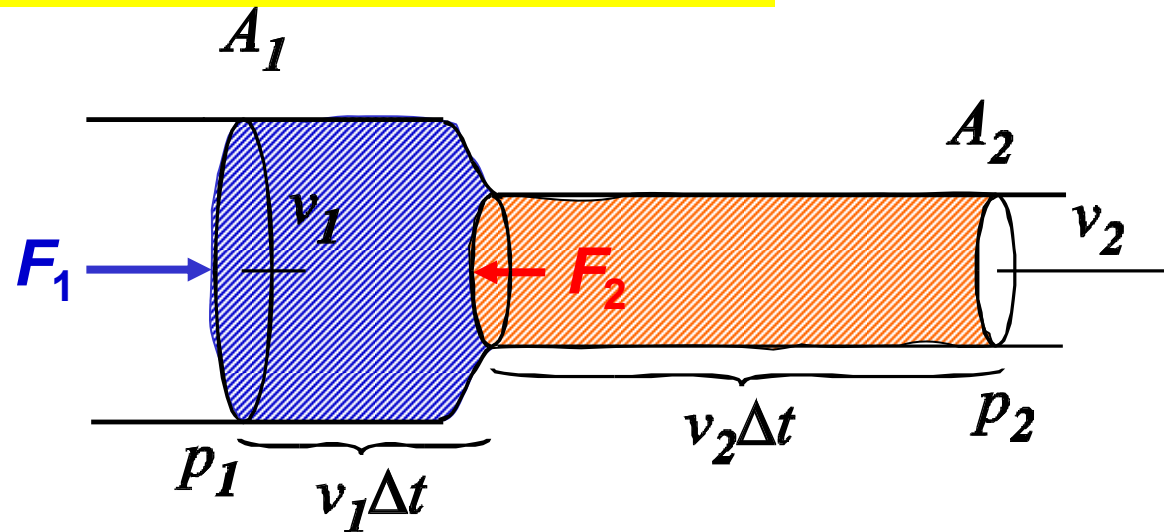
$$I_1 = I_2$$

$$A_1 \cdot \bar{v}_1 = A_2 \cdot \bar{v}_2$$

Gefäß	A (cm <sup>2</sup> )	v (cm/s)
Aorta	4	30
Arterien	12	10
Arteriolen	600	0,2
Kapillaren	3000	0,04
Venolen	1000	0,12
Venen	30	4

# Ideale Flüssigkeiten

innere  
Reibung = 0 !



$$W = \Delta E_{\text{kin}}$$

$$p_1 \cdot \cancel{A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t} - p_2 \cdot \cancel{A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t} = \frac{1}{2} (\rho \cdot \cancel{v_2 \cdot \Delta t \cdot A_2}) \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} (\rho \cdot \cancel{v_1 \cdot \Delta t \cdot A_1}) \cdot v_1^2$$

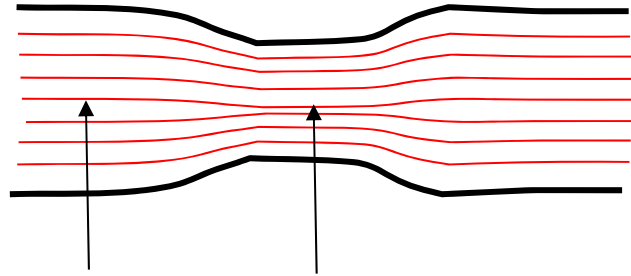
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

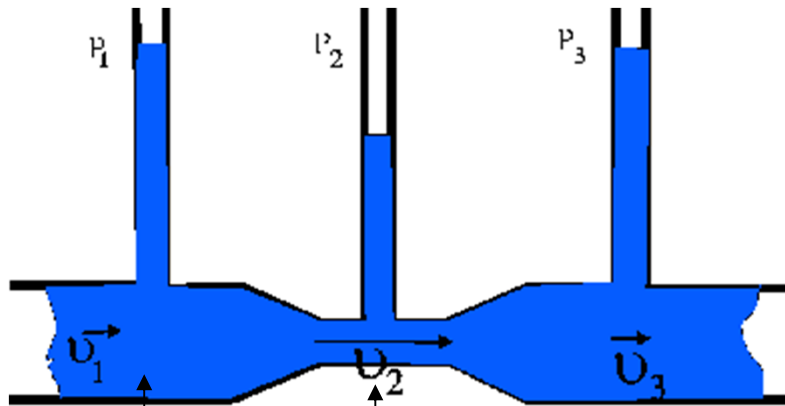
$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{konstant}$$

**Bernoulli-Gesetz**

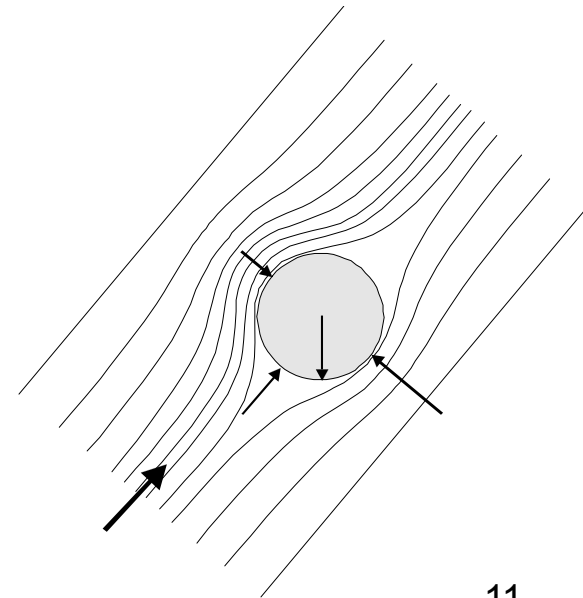
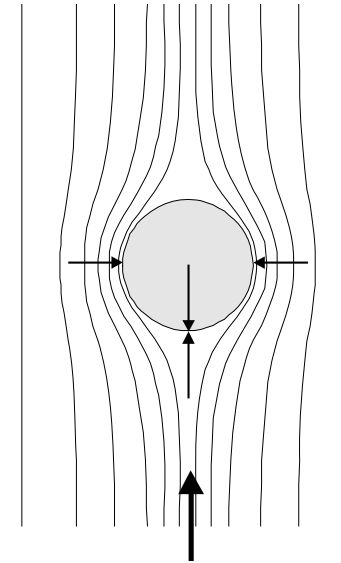
# Konsequenz des Bernoulli-Gesetzes



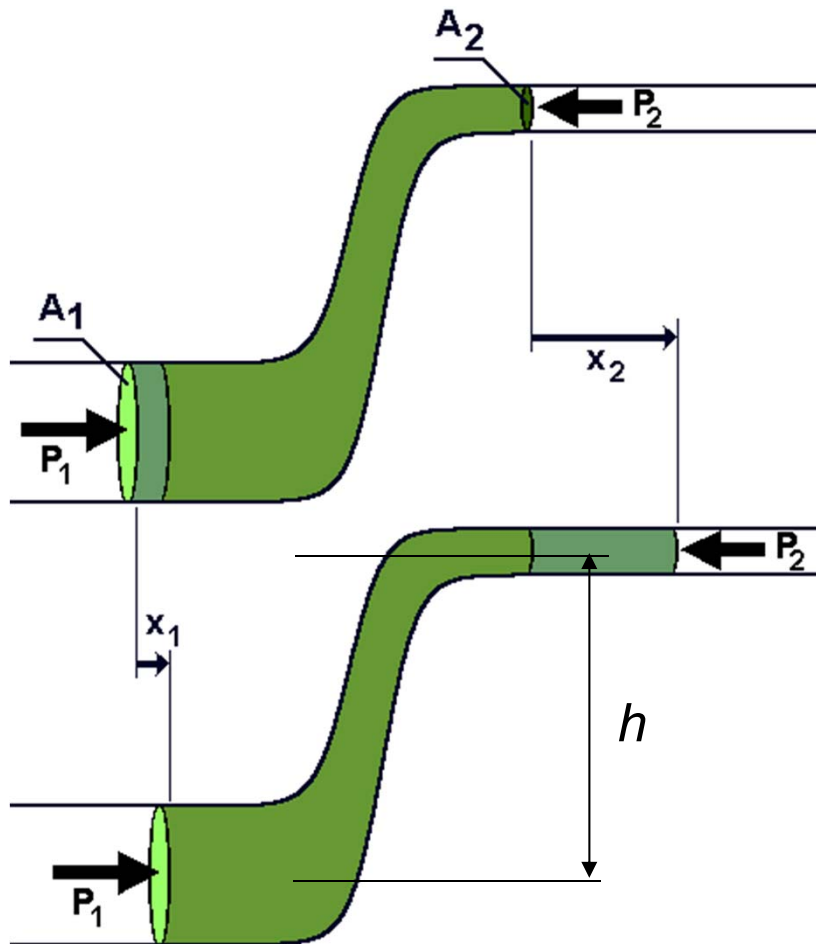
höherer    kleinerer    Druck



kleinere    grössere    Fliess-  
geschwindigkeit



# Strömung im Graviationsfeld



statischer Druck

dynamischer Druck  
(Staudruck)

Schweredruck  
(Potentialdruck)

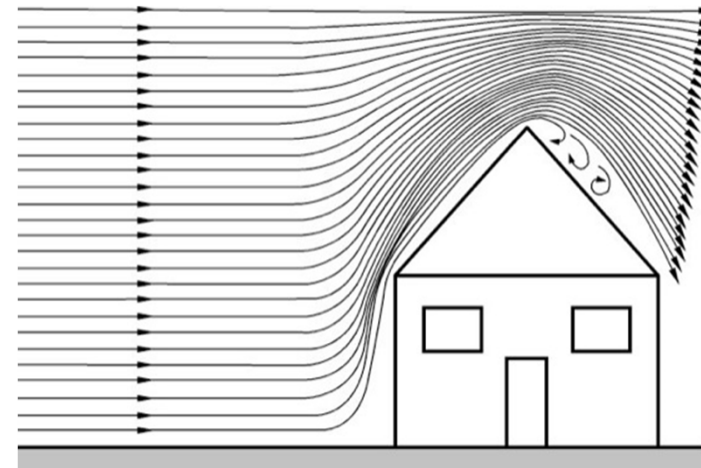
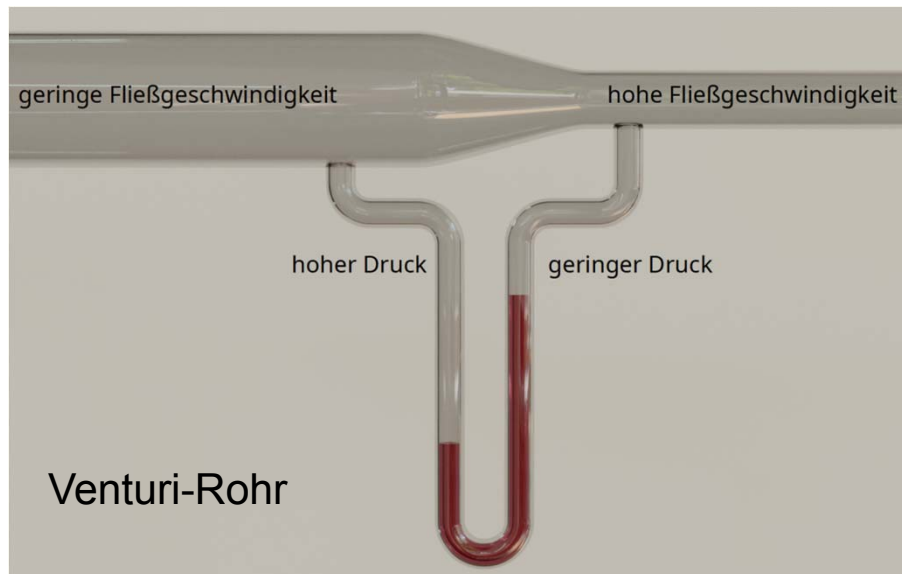
$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho g h = \text{konstant}$$

**Bernoulli-Gesetz**

Die Summe aus Potential-, Stau- und statischem Druck  
ist überall gleich



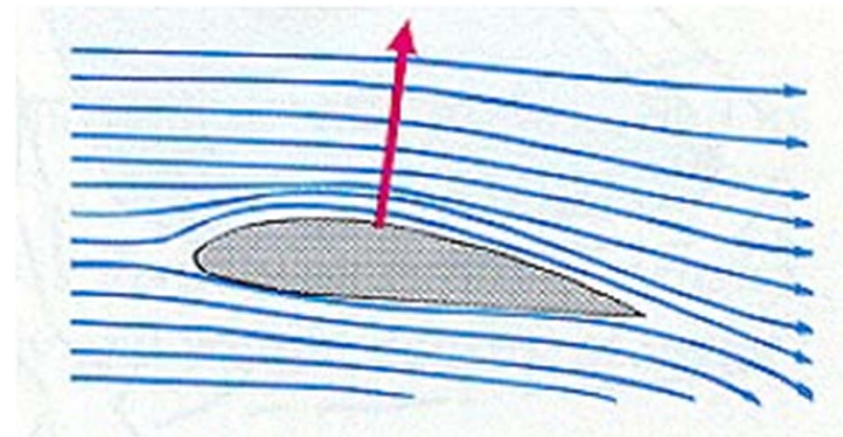
# Anwendungen der bernoullischen Gleichung



Strömung über ein Hausdach



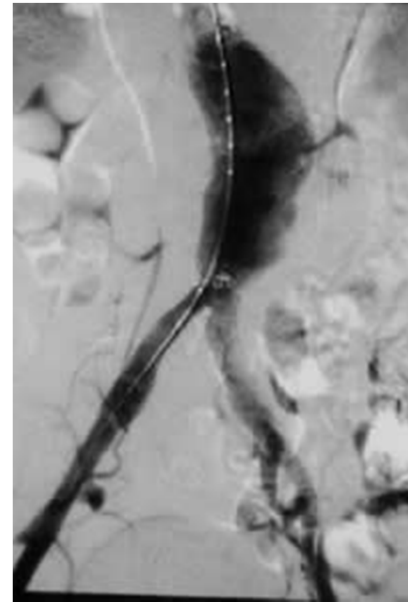
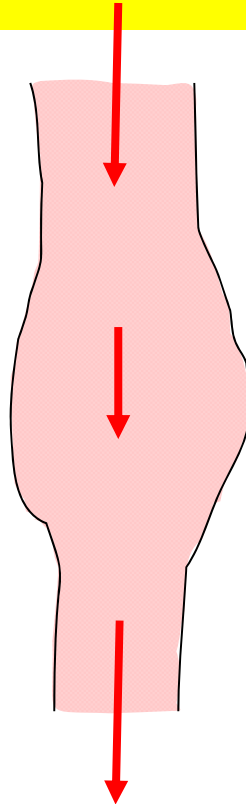
Flugzeug



# Ärztliche Konsequenzen des Bernoulli-Gesetzes

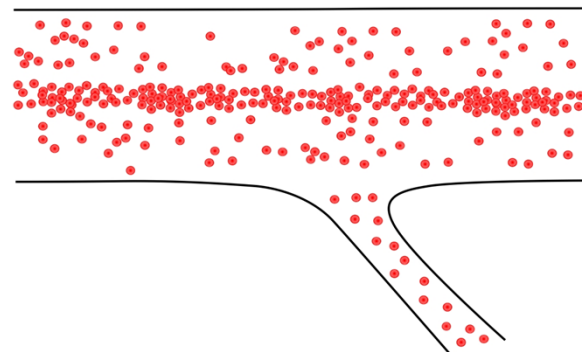
- Entstehung von Aneurysmen

Erweiterung →  
langsamere Strömung →  
erhöhter Druck →  
Erweiterung →



- Plasma „skimming“

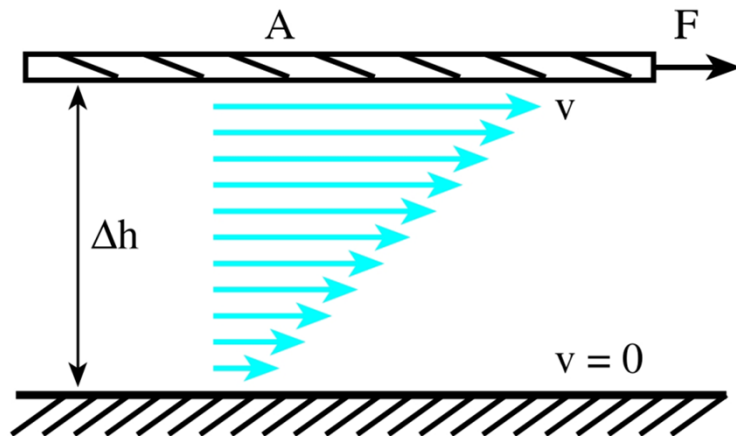
Der Druckunterschied „treibt“ die Erythrozyten von der Wand zur Rohrmitte hin.



# Reelle Flüssigkeiten

innere Reibung !

Newtonsches Reibungsgesetz:



$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

**Viskosität**  
(innerer  
Reibungskoeff.)

Geschwindig-  
keits**gradient**

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

# Viskosität (Innerer Reibungskoeffizient)

hängt von mehreren Faktoren ab:

- Temperatur  $\left( \eta \sim e^{\frac{\Delta E}{RT}} \right)$  **Newtonsche (normale) Flüssigkeit**
- Geschwindigkeitsgradient **nicht-Newtonsche (anomale) Flüssigkeit**

Flüssigkeit	$\eta$ [mPa s]
Quecksilber	1.554
Diäthyläther	0.24
Benzol	0.648
Wasser	1
Blut	4
Rizinusöl	990
Glycerin	1480

Viskosität für verschiedene Flüssigkeiten

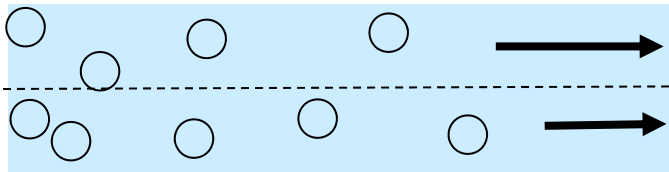
Die Viskosität des Wassers

t [°C]	0°	10°	20°	30°	50°	70°	100°
$\eta$ [mPa s]	1.792	1,397	1.002	0.798	0.548	0.404	0.283



# Über den Mechanismus der inneren Reibung

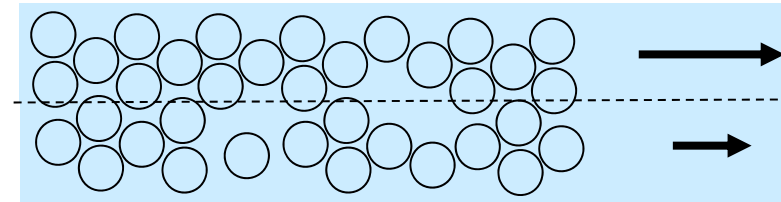
Gase:



Bewegung der  
Schichten

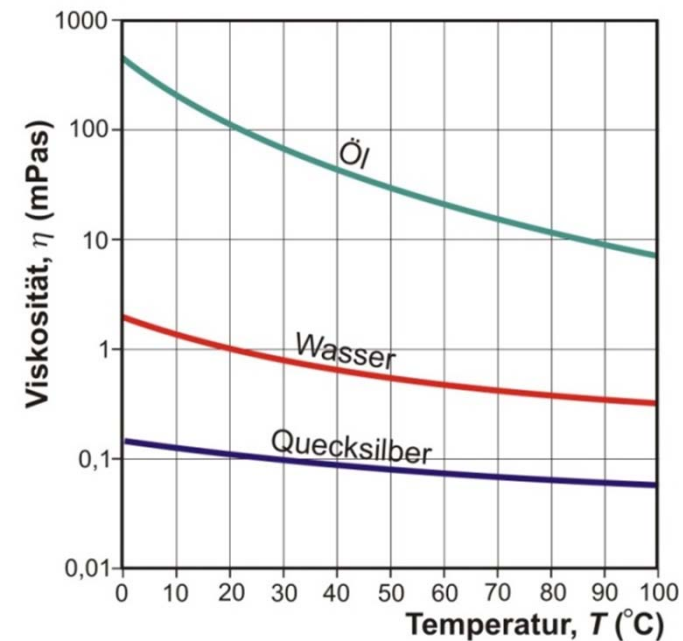
$T \uparrow \quad \eta \uparrow$

Flüssigkeiten:



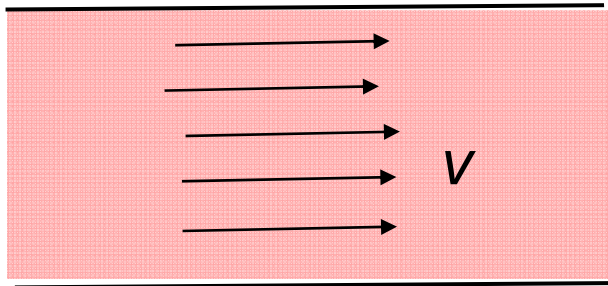
Bewegung der  
Schichten

$T \uparrow \quad \eta \downarrow$



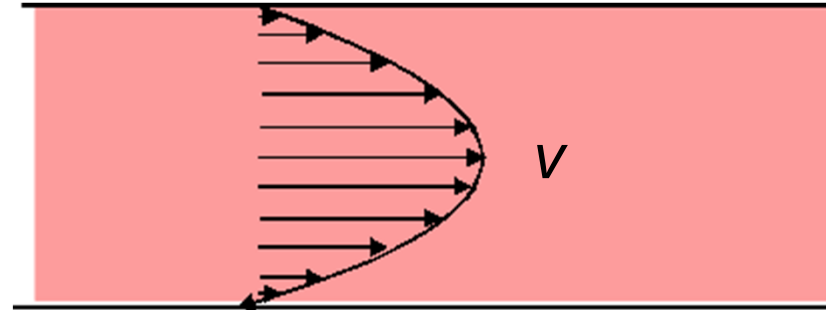
# Konsequenzen der inneren Reibung

ideale Flüssigkeit

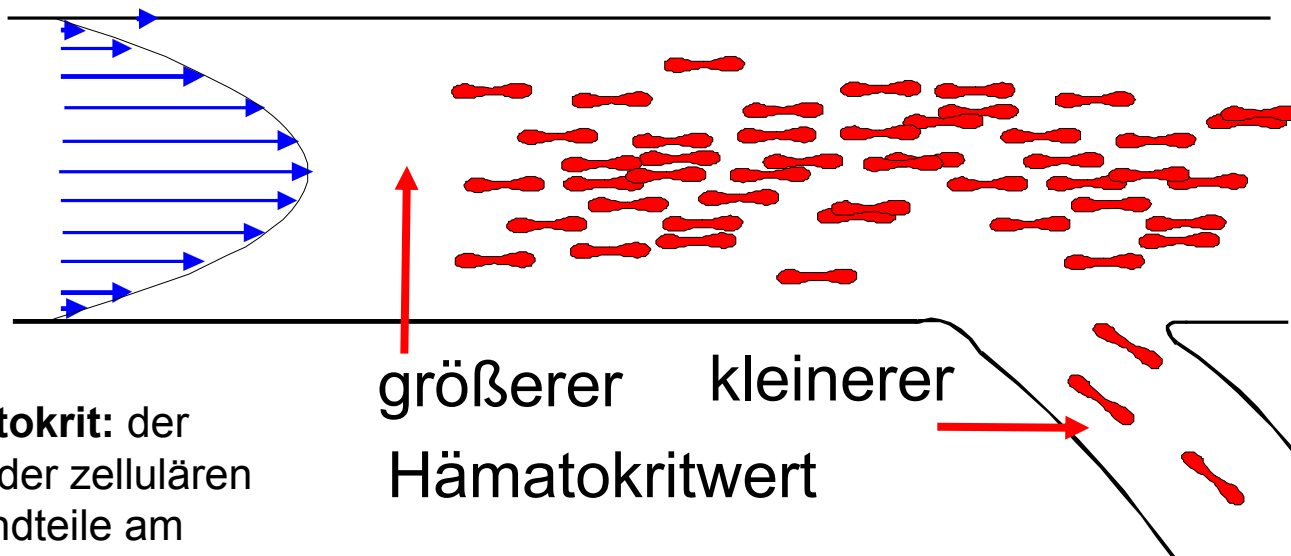


keine Reibung

reelle Flüssigkeit



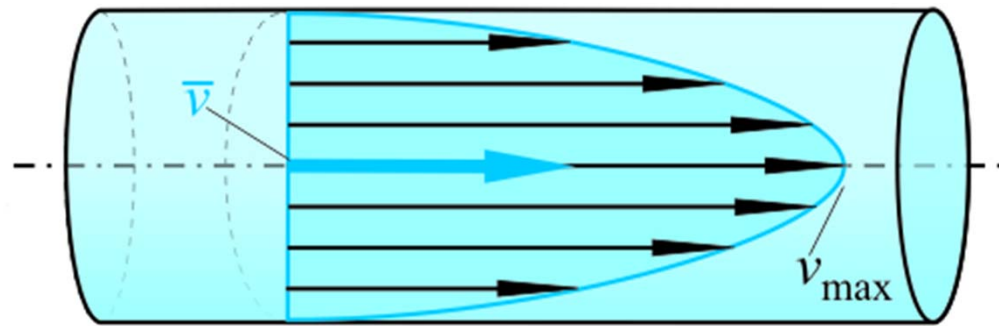
parabolisches Geschwindigkeitsprofil



„skimming“

**Hämatokrit:** der Anteil der zellulären Bestandteile am Volumen des Blutes

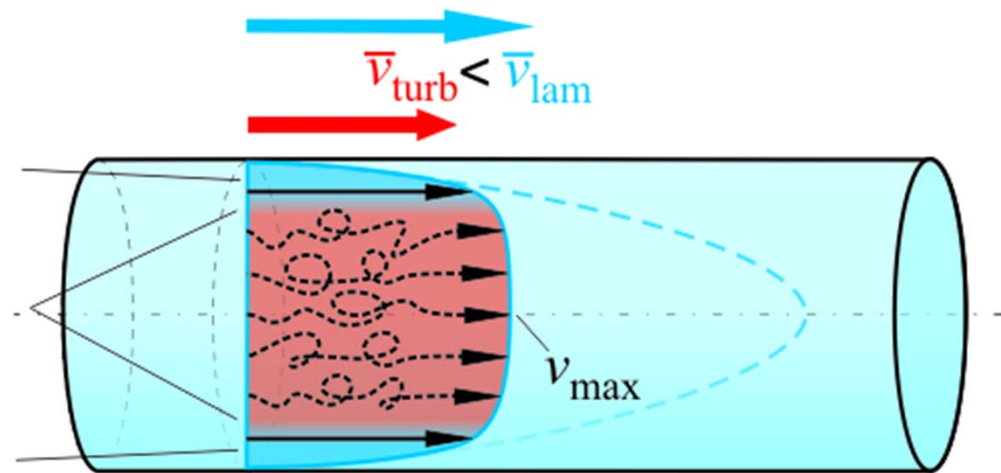
laminäre Strömung



laminäre Strömung

turbulente Strömung

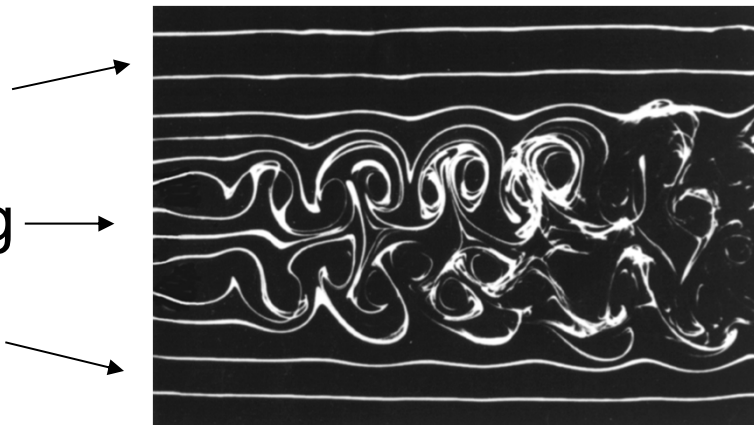
laminäre Strömung



laminäre Strömung

turbulente Strömung

laminäre Strömung



# Flüssigkeit

ideale Fl.:  $\eta = 0$

reale Fl.:  $\eta \neq 0$

newtonsche Fl.:

nicht-newtonsche Fl.:

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

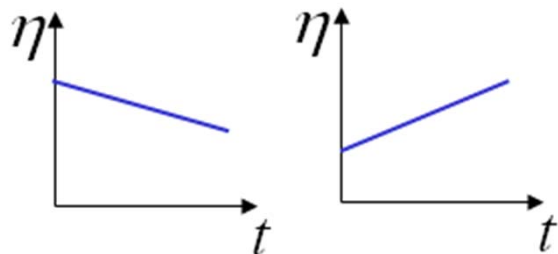
$$\eta \neq \eta \left( \frac{\Delta v}{\Delta h} \right)$$

$$\eta = \eta \left( \frac{\Delta v}{\Delta h} \right)$$

dilatante Fl.:

pseudoplastische Fl.:

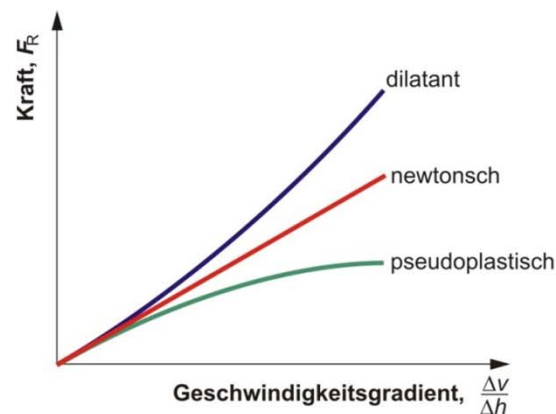
zeitabhängige  
Strukturveränderungen:  
Thixotropie / Rheopexie



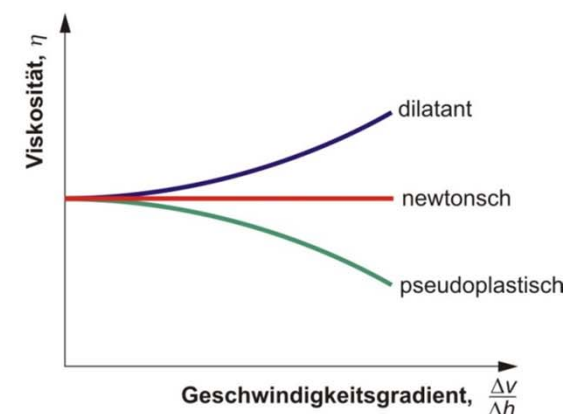
Ketchup

trockener Sand  
in einer  
Luftballonhülle

deren Viskosität zunimmt,  
wenn eine Kraft ausgeübt  
wird, z.B.: 1:1-Gemisch aus  
Stärke und Wasser



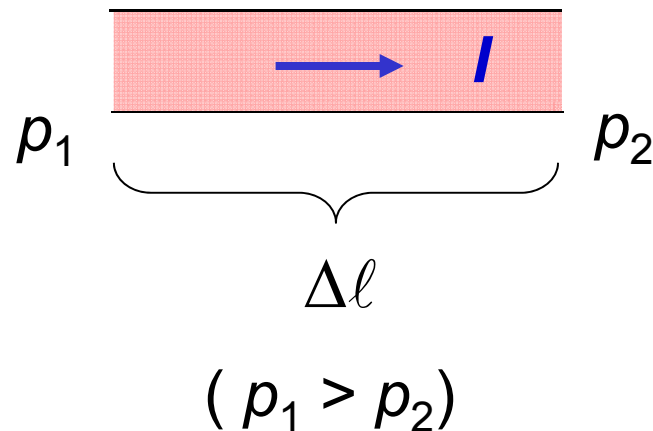
Flüssigkeiten, deren Viskosität  
abnimmt, wenn eine Kraft  
ausgeübt wird,  
z.B.: Blut, Speichel, Zahnzemente





# Hagen-Poiseuillesches Gesetz

Druckinhomogenitäten lösen Strömungen aus.  
Die Volumenstromstärke ist proportional zu dem Druckgradienten:



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} r^4 \frac{\Delta p}{\Delta \ell}$$

Gültigkeitsbedingungen:

- laminäre Strömung
- stationäre Strömung
- starre Röhre
- Newtonsche Flüssigkeit

# Anwendung des H-P Gesetzes an die Blutströmung

- laminäre Strömung?
- stationäre Strömung?
- starre Röhre?
- Newtonsche Flüssigkeit?



Obwohl nicht exakt,  
doch ist das H-P  
Gesetz annähernd  
anwendbar an die  
Blutströmung!

Regulierung der Blutströmung:

0 %



20 %



50 %



80 %



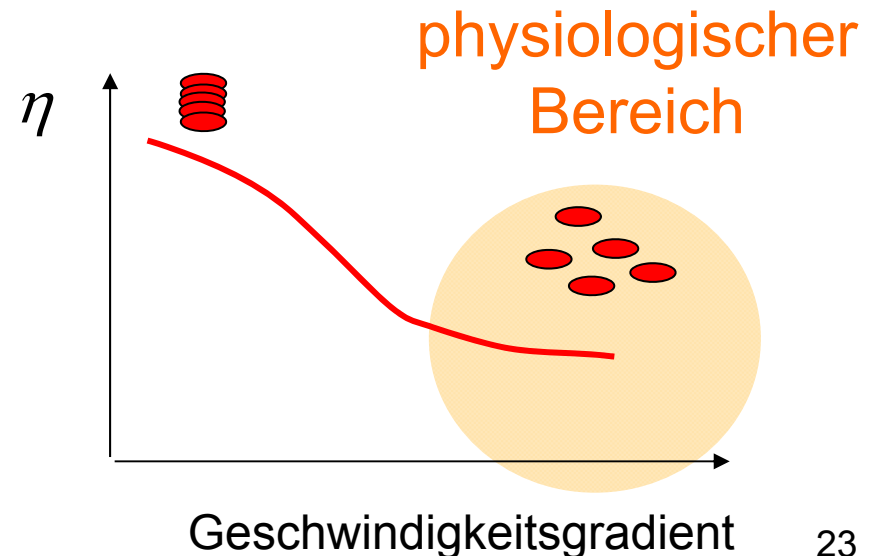
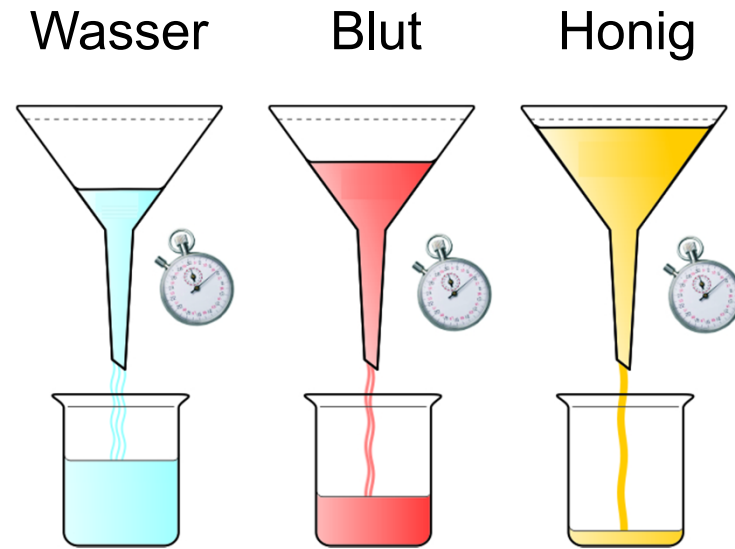
- $\Delta p$

- $\eta$

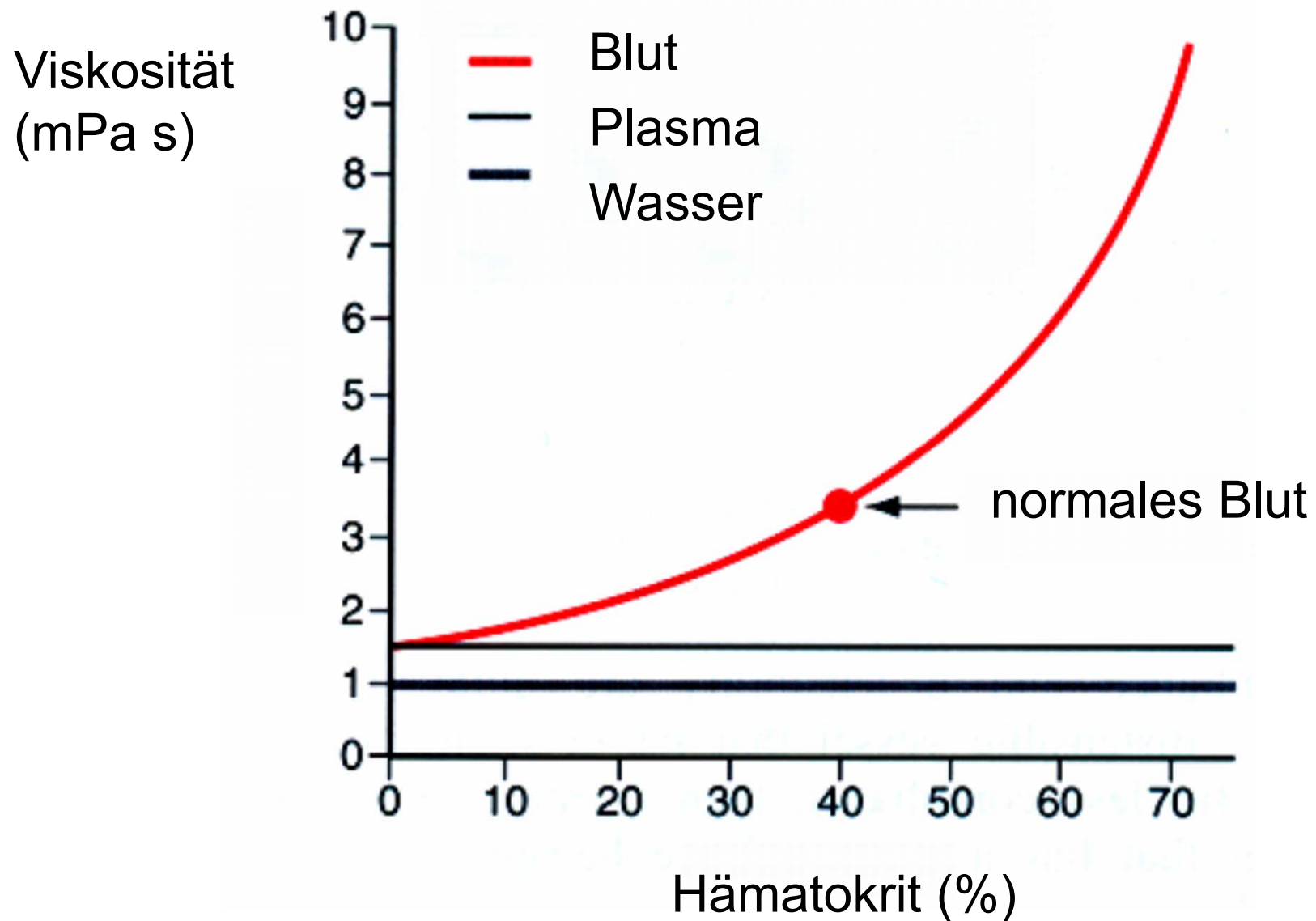
- $r^4!$

# Viskosität des Blutes

- $\eta_{\text{Wasser}} \cong 1 \text{ mPas} \rightarrow$   
 $\eta_{\text{Plasma}} \cong 1,5 \text{ mPas} \rightarrow$   
 $\eta_{\text{Blut}} \cong 1,5-4 \text{ mPas}$
- Hämatokritwert: Mass für die Zähflüssigkeit des Blutes
- Temperatur
- Geschwindigkeitsgradient:
  - ~ Geschwindigkeit
  - ~ Volumenstromstärke
  - ~ Druckabfall



# Viskosität von Blut, Plasma und Wasser





# Analogie zw. Strömung und elektr. Strom

Volumentransport

elektr. Ladungstransport

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} r^4 \frac{\Delta p}{\Delta \ell}$$



$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\sigma A \frac{\Delta \varphi}{\Delta \ell}$$

Was  
verursacht den  
Transport?

Druckgradient:  $\frac{\Delta p}{\Delta \ell}$



el. Pot.gradient:  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta \ell}$

$p$



$\varphi$

Was strömt?

Volumen:  $V$



el. Ladung:  $Q$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}$$



$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{1}{8\pi\eta} (r^2 \pi)^2 \frac{\Delta p}{\Delta \ell}$$

$A^2$



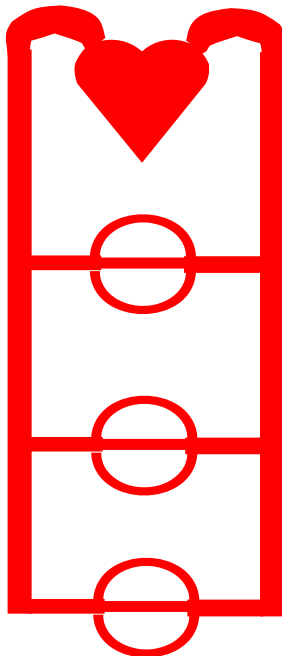
$A$

## Volumentransport

## elektr. Ladungstransport

$$\Delta p = -8\pi\eta \frac{\Delta \ell}{A^2} \frac{\Delta V}{\Delta t} \longleftrightarrow \Delta \varphi = U = -R \cdot I$$

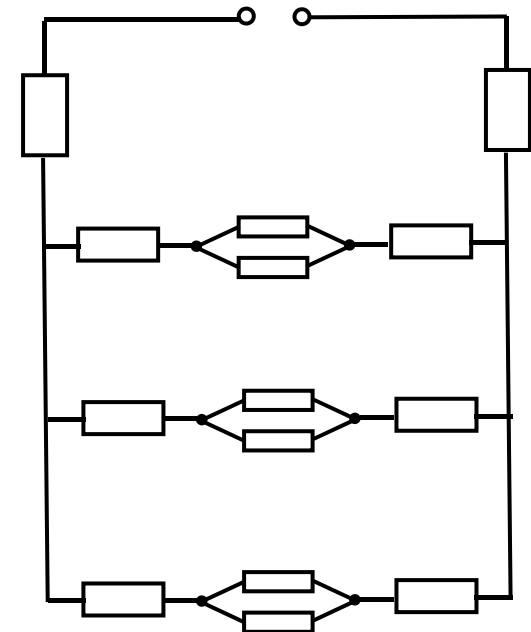
$$R_{\text{Strömung}} = 8\pi\eta \frac{\Delta \ell}{A^2} \longleftrightarrow R_{\text{elektr}} = \rho \frac{\Delta \ell}{A}$$



$A^2$



$A$

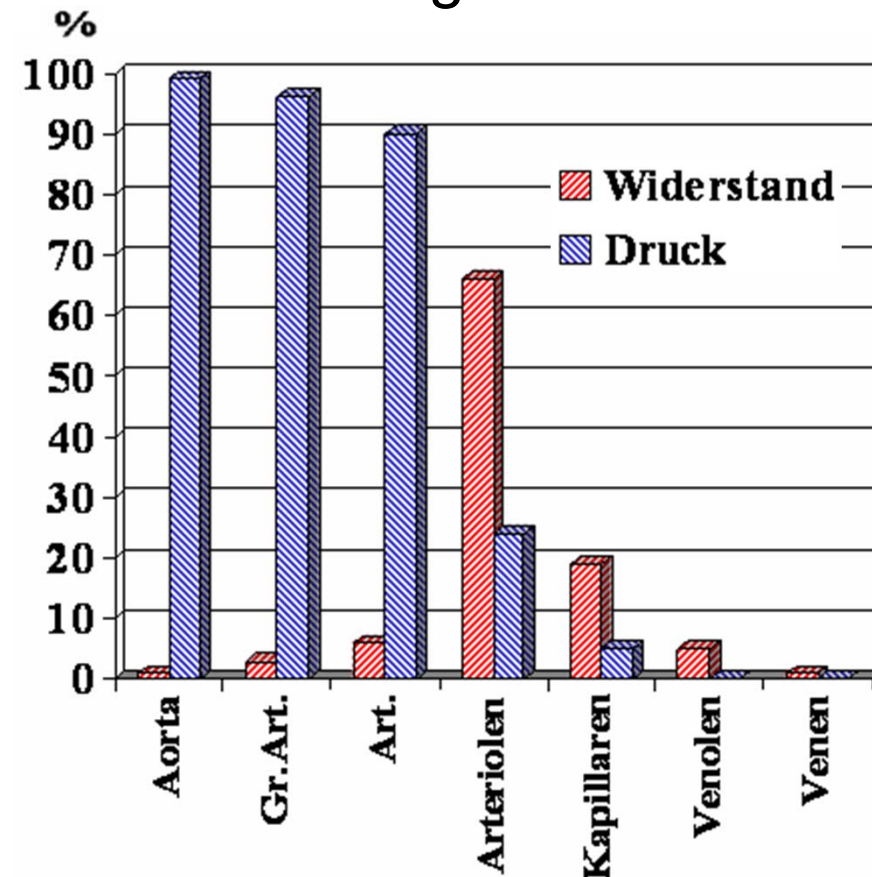


# Verteilung des Strömungswiderstandes und des Druckabfalles im dem Blutkreislauf

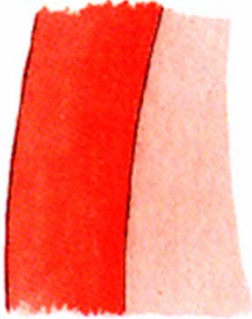
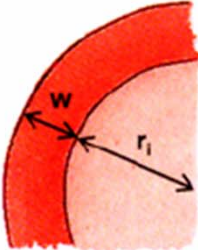


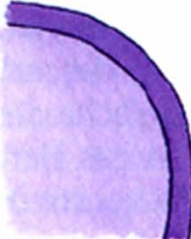
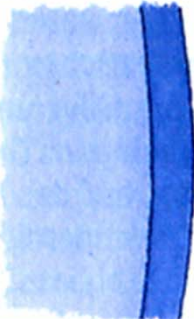
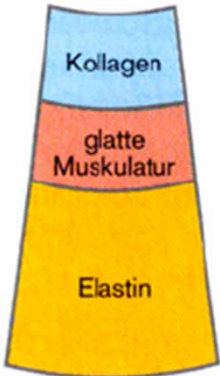
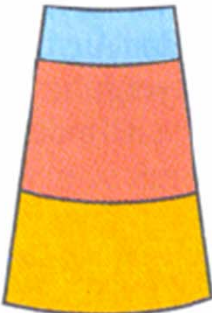
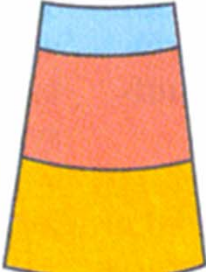


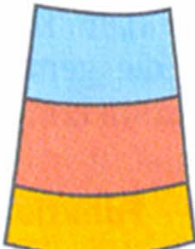
Daten:

Adertyp	Anzahl	Länge (cm)	Gesamt querschnitt (cm <sup>2</sup> )
Aorta	1	40	3
Großarterien	40	20	6
Arterien	2000	5	15
Arteriolen	$4 \cdot 10^7$	0,2	130
Kapillaren	$5 \cdot 10^9$	0,1	1500
Venolen	$8 \cdot 10^7$	0,2	600
Venen	1200	5	40

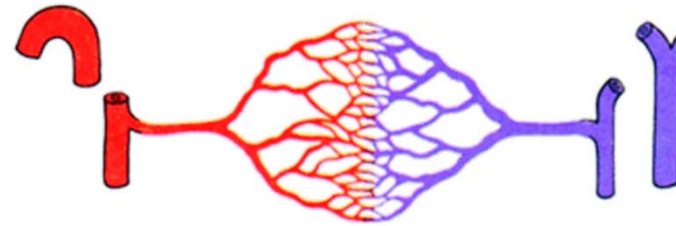
Ergebnis:



# Daten der Gefäßsegmente

	Aorta	Arterie	Arteriole	Venole	Vene	V. cava
Wandstärke (w)	2,5 mm	1 mm	20 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$	0,5 mm	1,5 mm
						
Innenradius ( $r_i$ )	12,5 mm	2 mm	20 $\mu\text{m}$	30 $\mu\text{m}$	2,5 mm	15 mm
relative Wanddicke ( $w/r_i$ )	0,2	0,5	1,0	0,3	0,2	0,1
relative Wandzusammensetzung						

# Verteilungen im dem Blutkreislauf



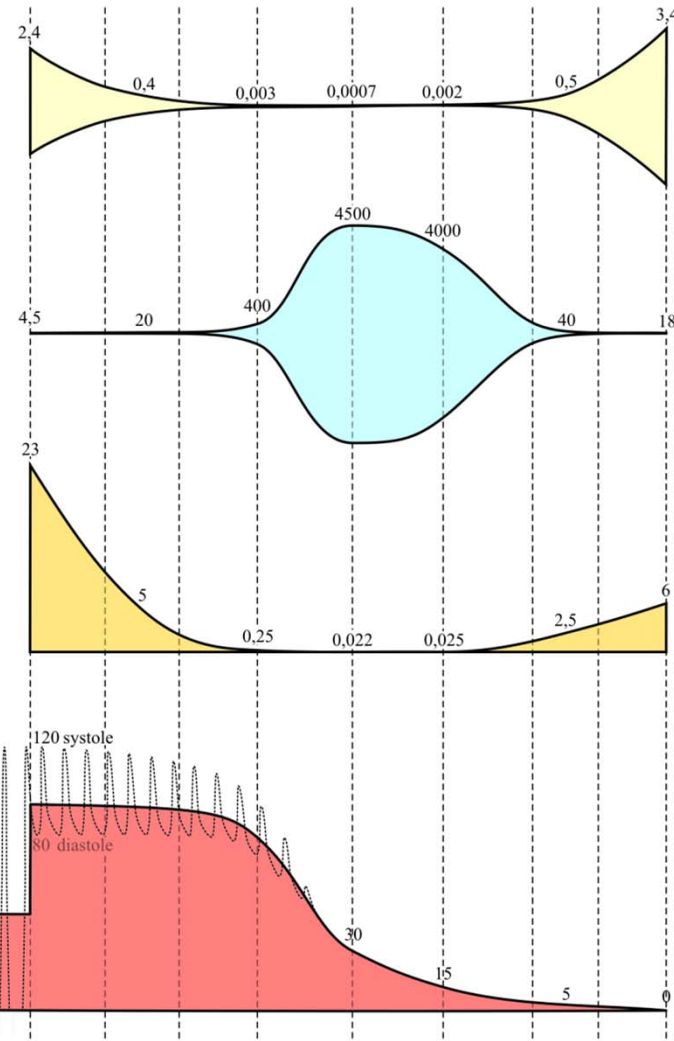
Querschnitt einer Ader (cm<sup>2</sup>)

Gesamtquerschnitt (cm<sup>2</sup>)

durchschnittliche Strömungs-  
geschwindigkeit (cm/s)

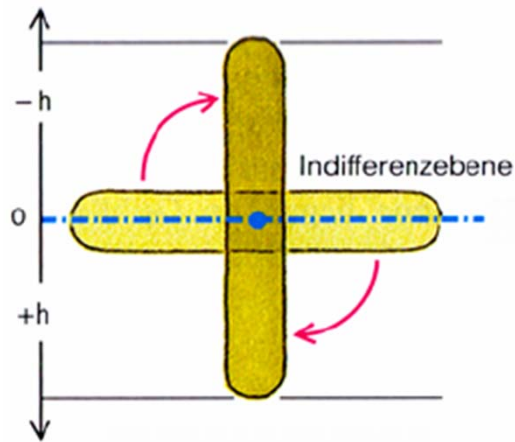
Zeitabhängigkeit  
des Blutdruckes

durchschnittlicher  
Blutdruck (Hgmm)

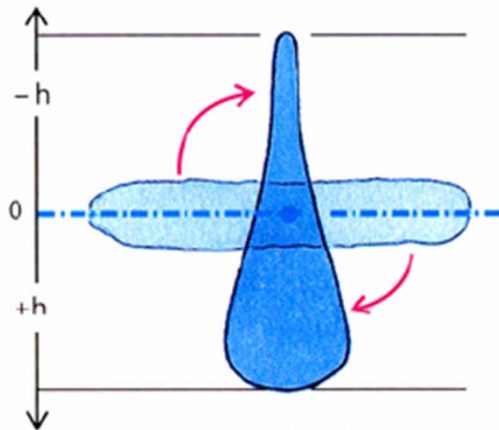


# Effekt der Schwere auf die Blutverteilung

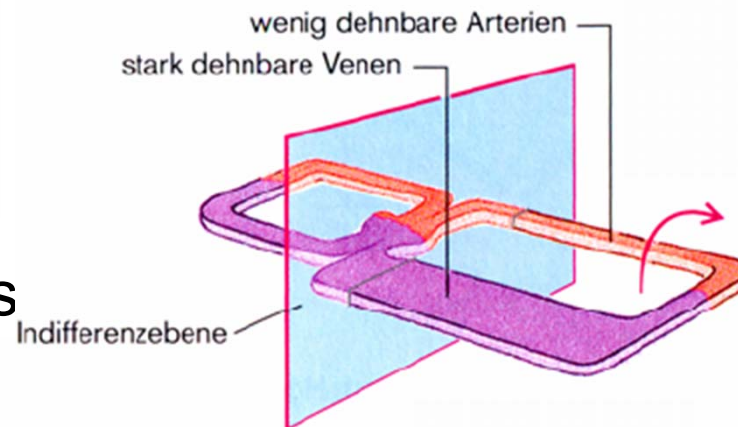
starres Gefäß



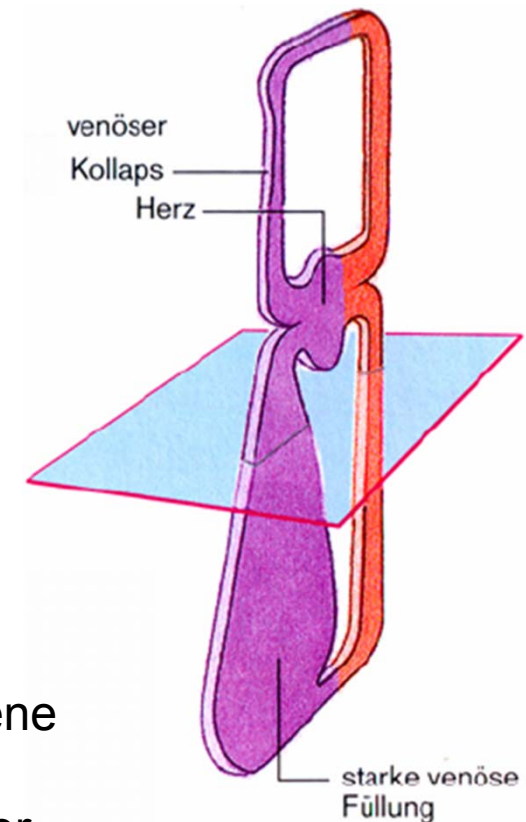
dehnbares Gefäß



Kreislaufsystem



(Hydrostatische) Indifferenzebene bezeichnet die Stelle im menschlichen Körper, an der der Blutdruck sowohl im Stehen wie auch im Liegen identisch ist.



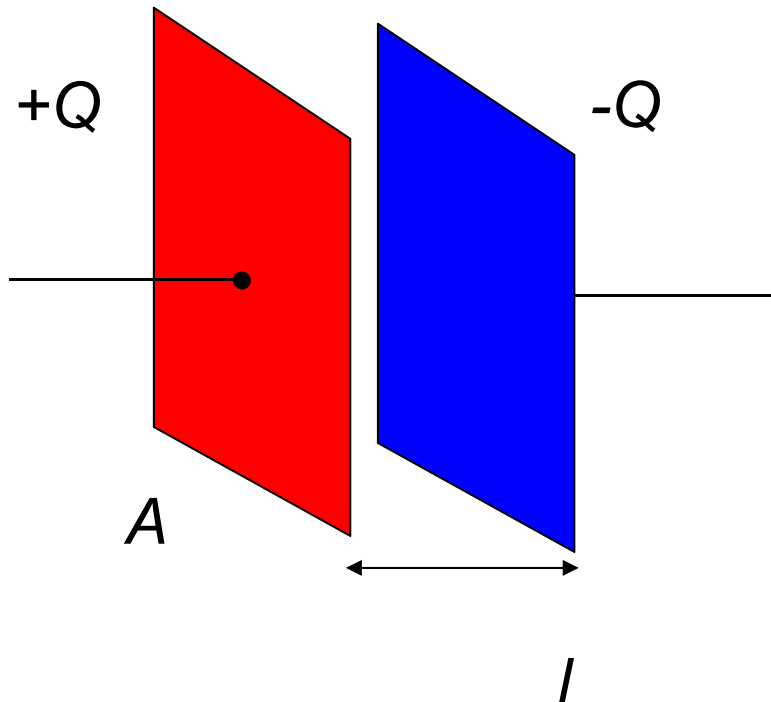


(Wiederholung)

## Kondensator und Kapazität

Kondensator (dichtgedrängt, bezogen auf die Ladungen):  
Bauelement, das die elektrische Ladungen und Energie  
speichern kann, Ladungsspeicher

### Plattenkondensator



### Kapazität des Kondensators

$$Q = C U$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

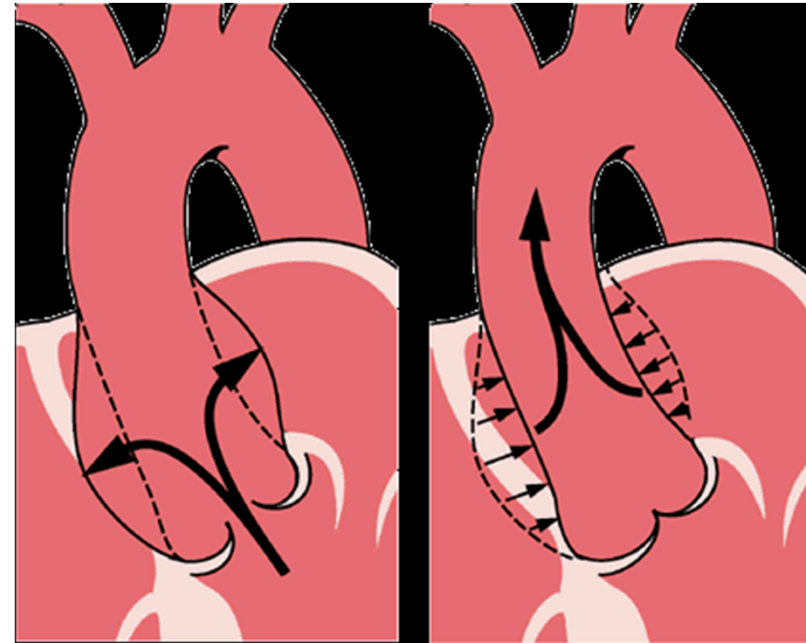
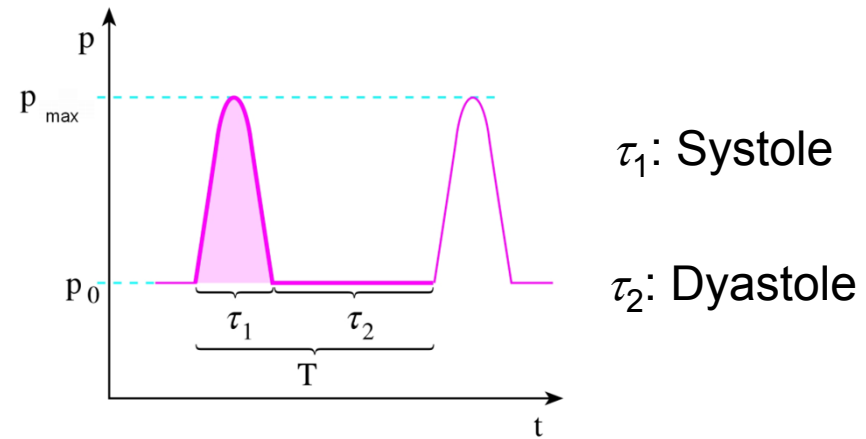
Ladungsspeicherungsfähigkeit

Einheit: farad  $1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$

Für Platten-  
kondensator:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

# Windkesselfunktion der Aorta



Kondensator: Ladungsspeicherungsfähigkeit

Windkessel: Volumenspeicherungsfähigkeit

elektr. Analogie