

### III. Diffusion (Stofftransport)

**0. Grundvoraussetzung:** thermische Molekularbewegung

**1. Grundbegriffe**

**2. Transportgesetz = 1. Ficksches Gesetz**

- O<sub>2</sub>-Diffusion Lunge-Blut
- Diffusion durch Membranen (passiver Transport)

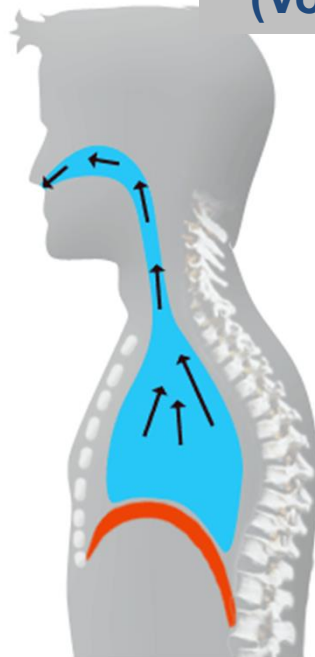
**3. Das 2. Ficksche Gesetz**

**4. Diffusion als *Random Walk***

**5. Vergleich der „Schnelligkeiten“ der Diffusion und Strömung**

# Transportprozesse

## I. Strömung (Volumentransport)



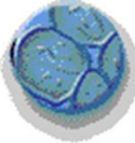
entspannt



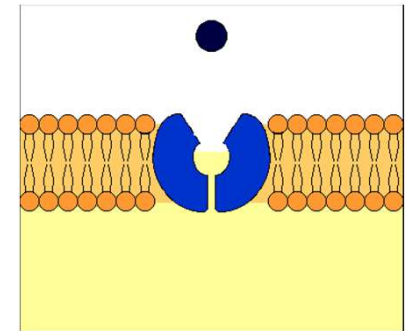
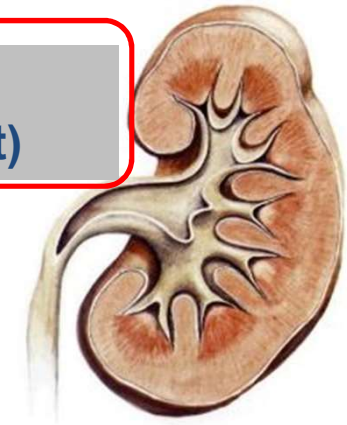
O O O

DIFFUSION

O<sub>2</sub> to  
cellular mitochondria



## III. Diffusion (Stofftransport)



## IV. Elektrischer Strom (el. Ladungstransport)

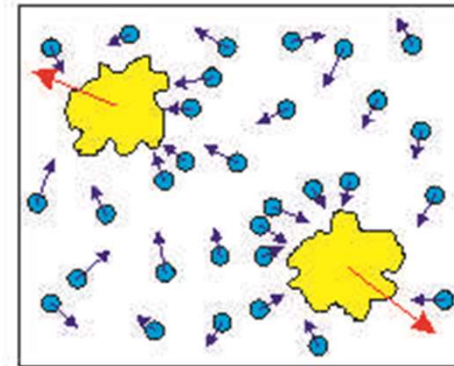
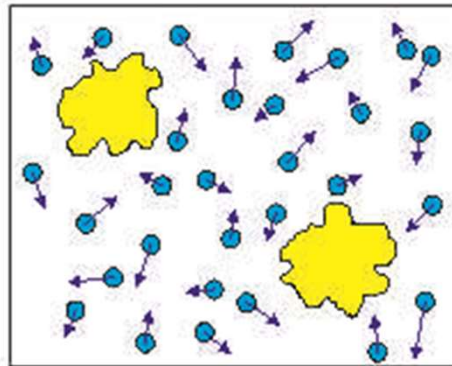
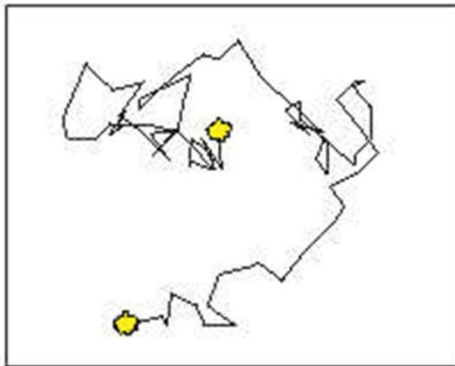


## II. Wärmeleitung (Energietransport)



## V. Verallgemeinerung

### III. Stofftransport (Diffusion)



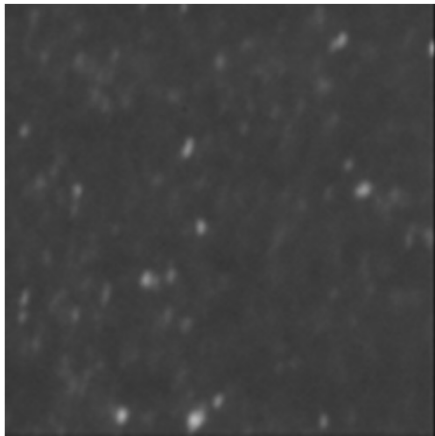
# III. Diffusion (Stofftransport)



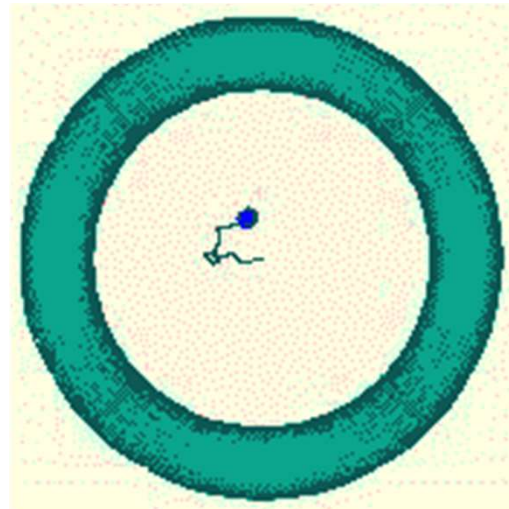
Diffusion: Tendenz zur gleichmäßigen Verteilung von Molekülen durch die thermische Bewegung

**0. Grundvoraussetzung:** thermische Molekularbewegung

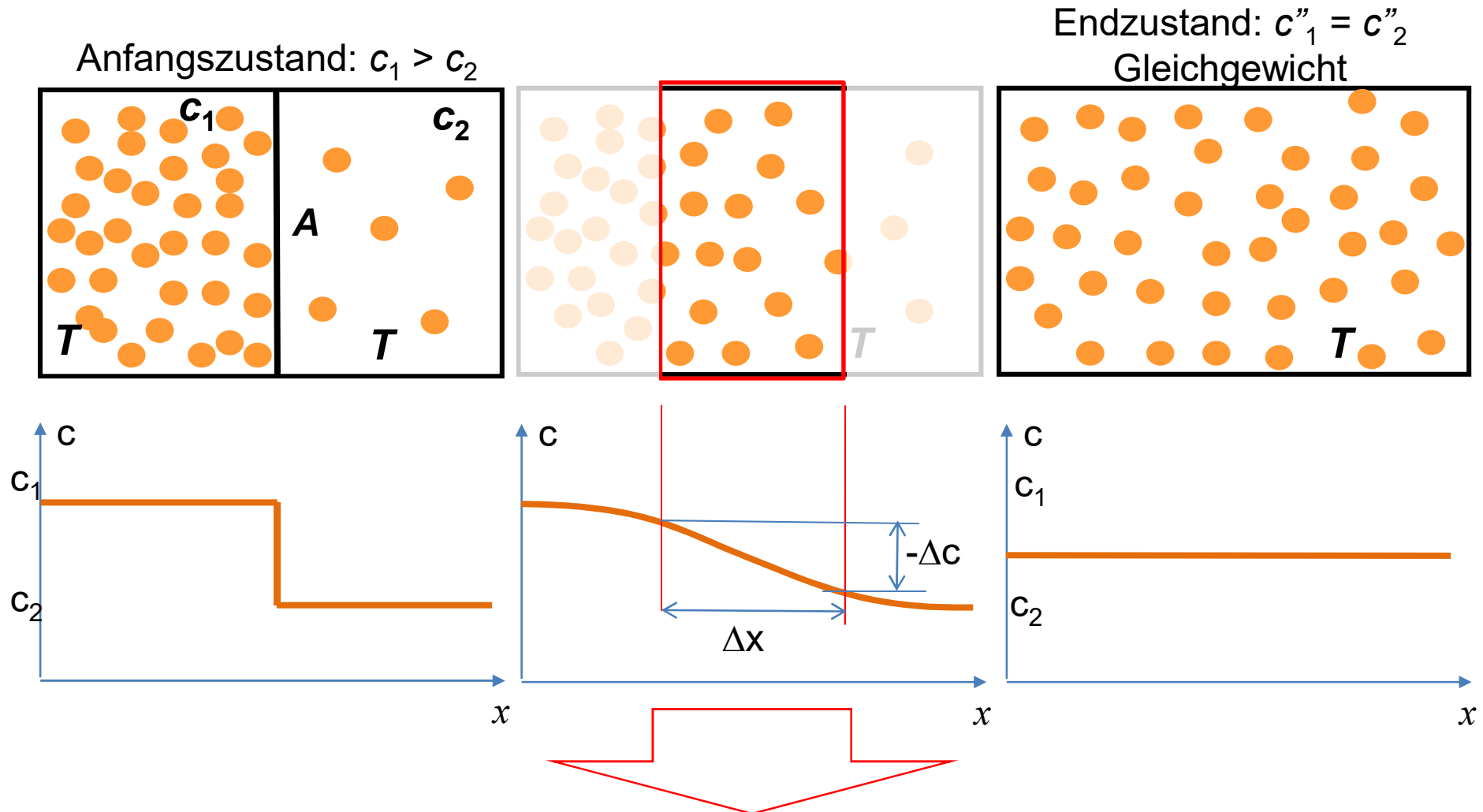
brownsche Bewegung



Molekularbewegung



- Diffusion: Tendenz zur gleichmäßigen Verteilung von Molekülen durch die thermische Bewegung

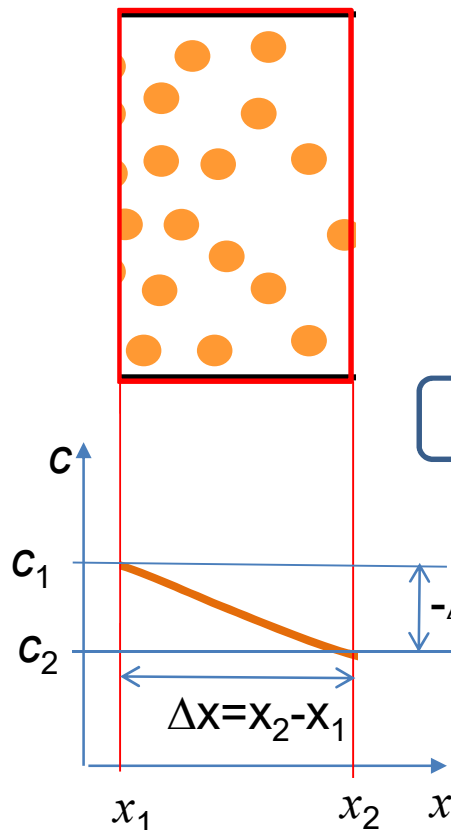


Bemerkung: thermisches Gleichgewicht

# 1. Grundbegriffe

- Stoffstromstärke ( $I$ ):  $I = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left( \frac{\text{mol}}{\text{s}} \right)$
- Stoffstromdichte ( $J$ ):  $J = \frac{\Delta v}{A \cdot \Delta t} \quad \left( \frac{\text{mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right)$
- stationäre Diffusion: zeitlich konstant

## 2. Transportgesetz – 1. Ficksches Gesetz



$$\Delta c = c_2 - c_1 < 0$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -DA \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$J = -D \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

Stromdichte

Diffusionskoeffizient

Konzentrationsgradient

für stationäre Diffusion!





# Analogie

	Was wurde transportiert?	Stärke?	Was treibt den Transport?	Zusammenhang?
<b>Volumen-transport</b>	$V$	$J_V = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta t}$	$p$	$J_V = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l}$
<b>Energie-transport</b>	$E$	$J_E = \frac{\Delta E}{A \cdot \Delta t}$	$T$	$J_E = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$
<b>Stoff-transport</b>	$v$	$J_v = \frac{\Delta v}{A \cdot \Delta t}$	$c$	$J_v = -D \frac{\Delta c}{\Delta x}$

- Diffusionskoeffizient:

- stoffspezifisch

- diffundierendes Molekül
    - Größe
    - Form
  - Medium ( $\eta$ )

- temperaturabhängig

➤ **Einstein-Stokes-Gleichung**

(Diffusionskoeffizient von kugelförmigen Teilchen):

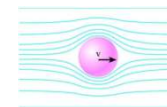
$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

Diagram illustrating the Einstein-Stokes equation with callouts for its variables:

- Temperatur** (Temperature) points to  $kT$ .
- Viskosität des Mediums** (Viscosity of the medium) points to  $\eta$ .
- Radius des Teilchens** (Radius of the particle) points to  $r$ .

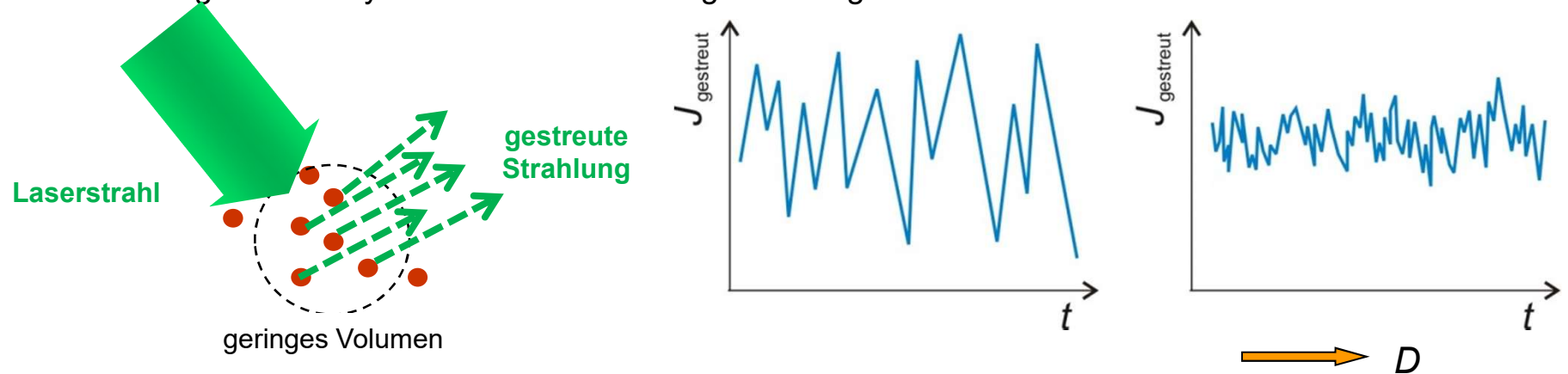
Diffundierendes Teilchen (Molmasse)	Medium	$D$ (m <sup>2</sup> /s)
H <sub>2</sub> (2)	Luft	6,4·10 <sup>-5</sup>
O <sub>2</sub> (32)	Luft	2·10 <sup>-5</sup>
CO <sub>2</sub> (44)	Luft	1,8·10 <sup>-5</sup>
H <sub>2</sub> O (18)	Wasser	2,2·10 <sup>-9</sup>
O <sub>2</sub> (32)	Wasser	1,9·10 <sup>-9</sup>
Glyzin (75)	Wasser	0,9·10 <sup>-9</sup>
Serum Albumin (69 000)	Wasser	6·10 <sup>-11</sup>
Tropomiozin (93 000)	Wasser	2,2·10 <sup>-11</sup>
Tabakmosaik-virus (40 000 000)	Wasser	4,6·10 <sup>-12</sup>

Zur Erinnerung: stokessches Reibungsgesetz:  $F_R = 6\pi\eta r v$

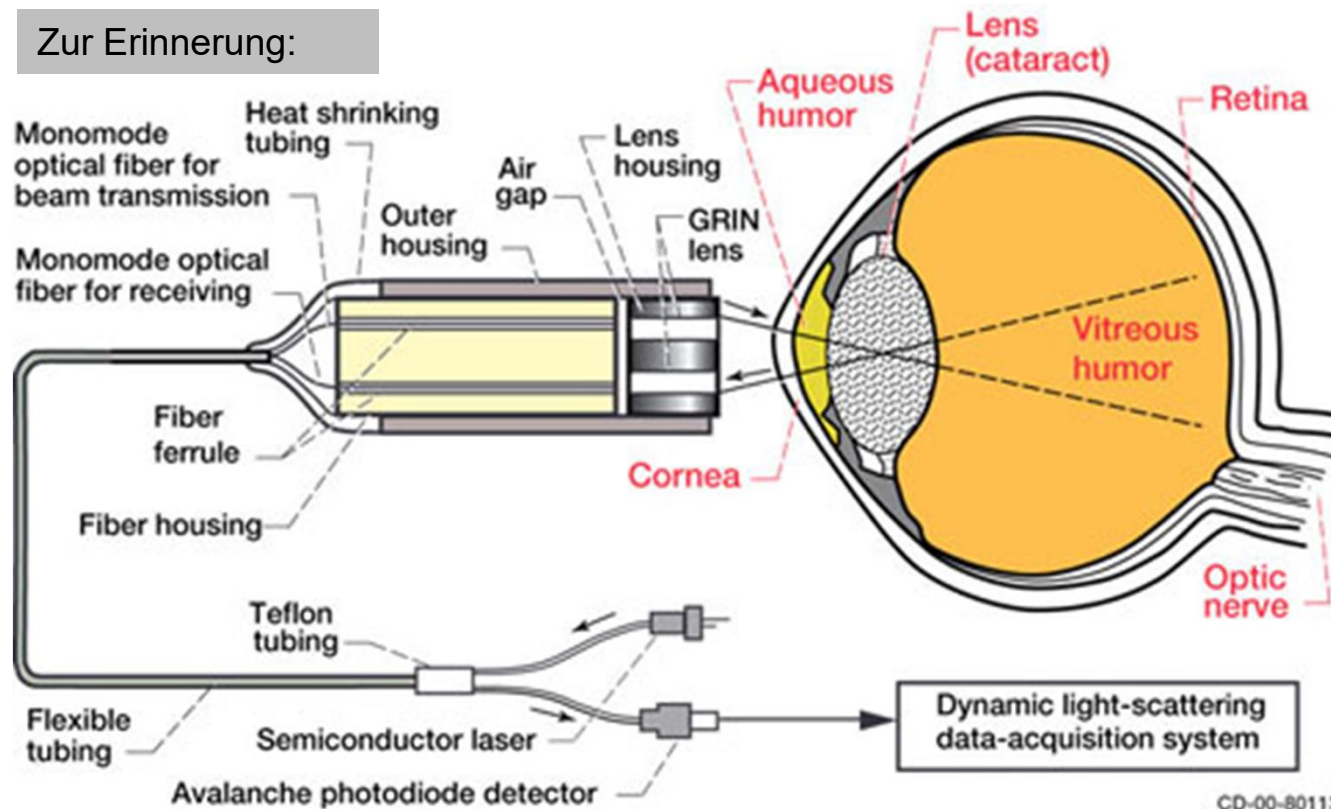




- Messung des Diffusionskoeffizienten:  
eine Möglichkeit – dynamische Lichtstreuungsmessung



Zur Erinnerung:

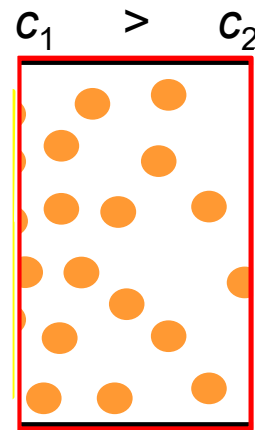


$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

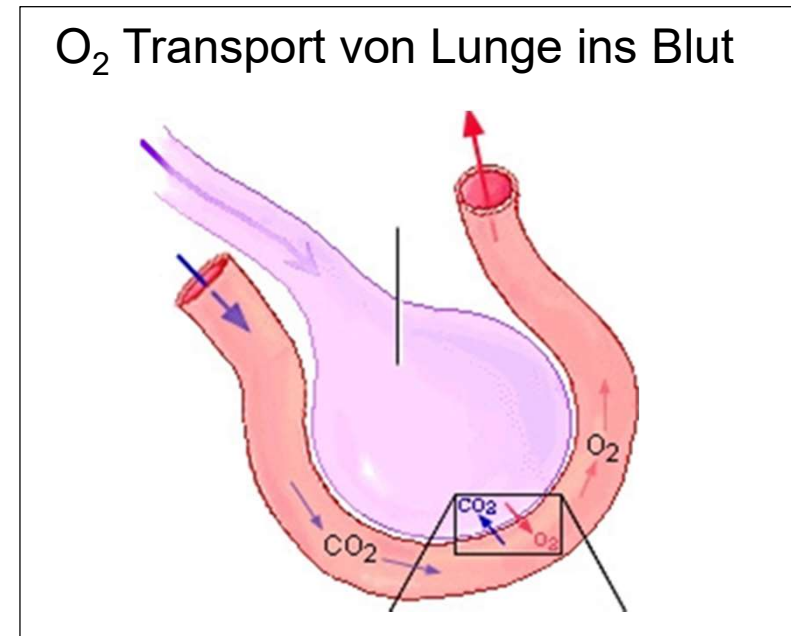
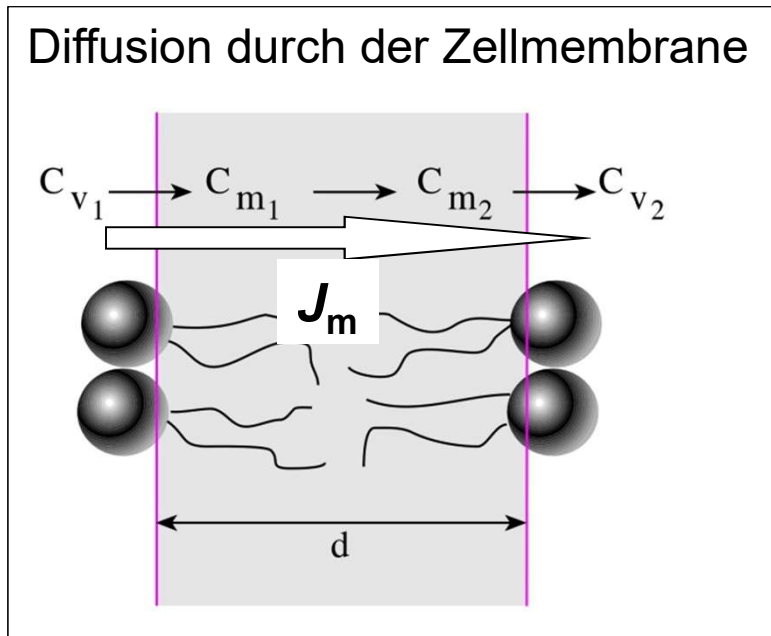
Teilchengröße

## Stationäre Diffusion?

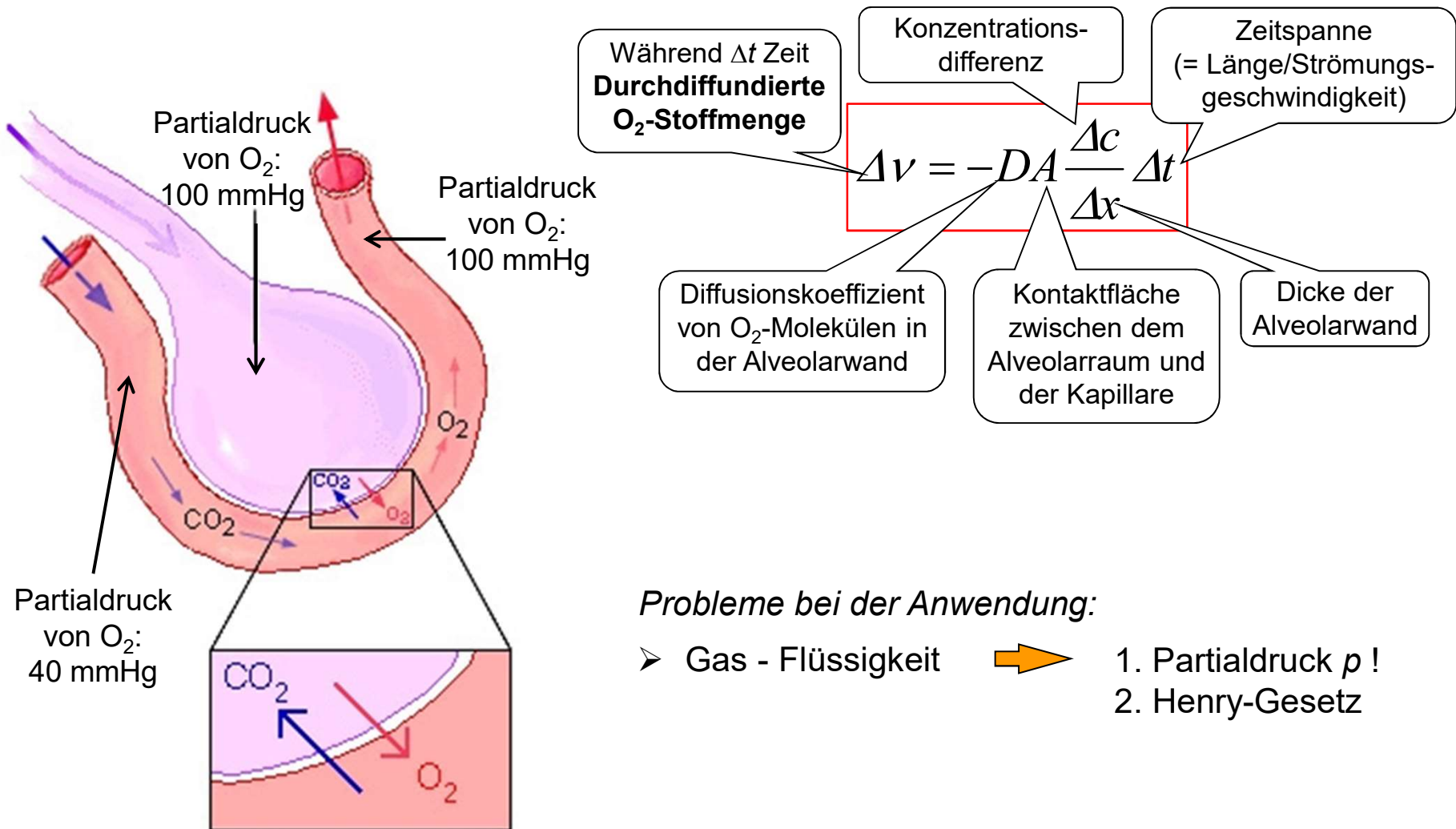
🇭🇺 Fából vaskarika?



Zwei Beispiele, wo die Diffusion ist zu gute Annäherung stationär:



# Anwendung des 1. Fickschen Gesetzes für O<sub>2</sub>-Diffusion von Lunge ins Blut



# Löslichkeit von Gasen in Flüssigkeiten

## Henry-Gesetz:

$$c = k_H \cdot p$$

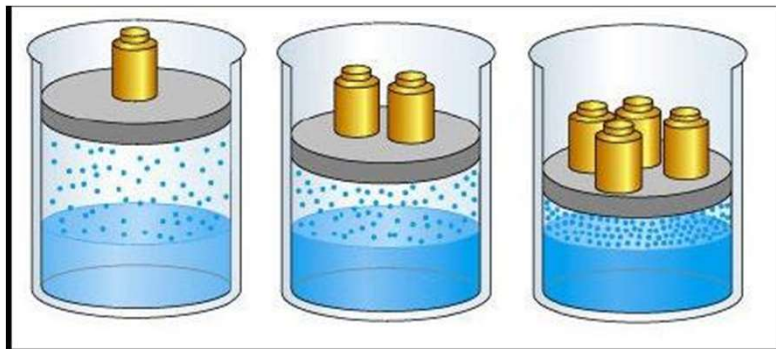
Konzentration in der Lösung

Partialdruck im Gas

Löslichkeitskoeffizient oder Henry-Konstante

Voraussetzungen:

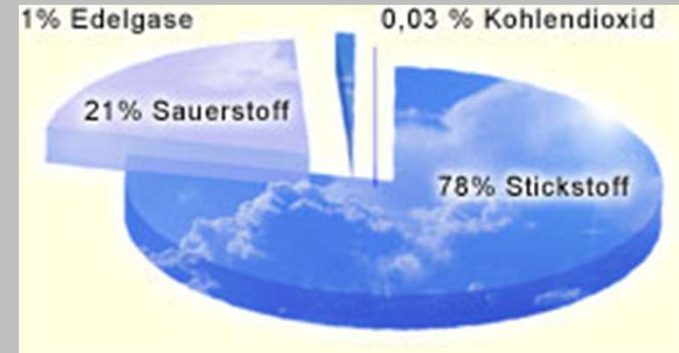
- Gleichgewicht
- Dünne Lösung
- Keine chemische Reaktion



z. B. bei 25°C:

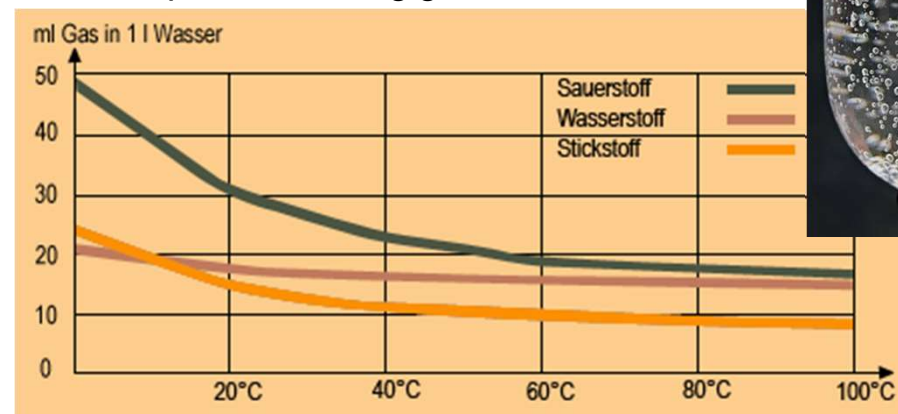
Gas	$k_H \left( \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{kPa}} \right)$
O <sub>2</sub>	$1,26 \cdot 10^{-5}$
N <sub>2</sub>	$0,64 \cdot 10^{-5}$
CO <sub>2</sub>	$33,2 \cdot 10^{-5}$

Der Partialdruck entspricht dem Druck, den eine einzelne Gaskomponente eines Gasgemisches bei alleinigem Vorhandensein im betreffenden Volumen ausüben würde.



Gesamtdruck:  $p = 101 \text{ kPa} = 760 \text{ mmHg}$ , daraus der Partialdruck von O<sub>2</sub>:  $p_{\text{O}_2} = 21,2 \text{ kPa} = 160 \text{ mmHg}$

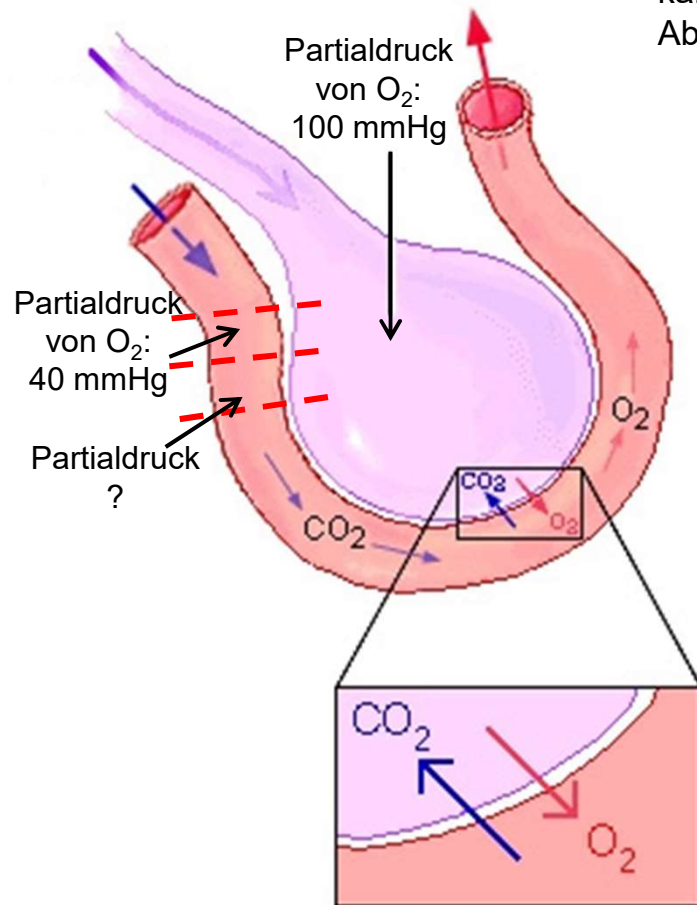
## Temperaturabhängigkeit:



➤ Partialdruck im Blut wo?

Die Kapillare wird auf so kleine Abschnitte aufgeteilt, dass innerhalb eines Abschnittes der Partialdruck schon als konstant betrachtet werden kann. Das 1. Ficksche Gesetz wird dann für diese Abschnitte nacheinander verwendet.

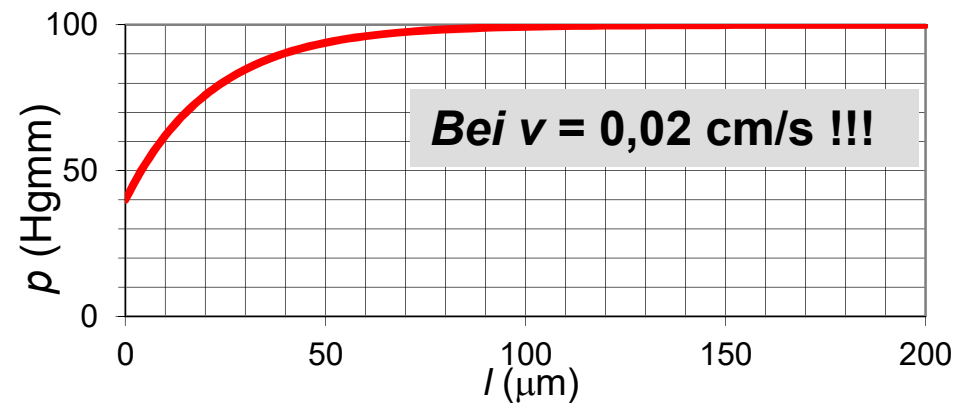
→ Excel



Bei welcher Blutgeschwindigkeit wird das Blut mit  $O_2$  gesättigt?



$O_2$ -Aufnahme in den Alveolarkapillaren



➤ Membran  $\approx$  Wasser

# Kontinuitätsgleichung im Blutkreislauf

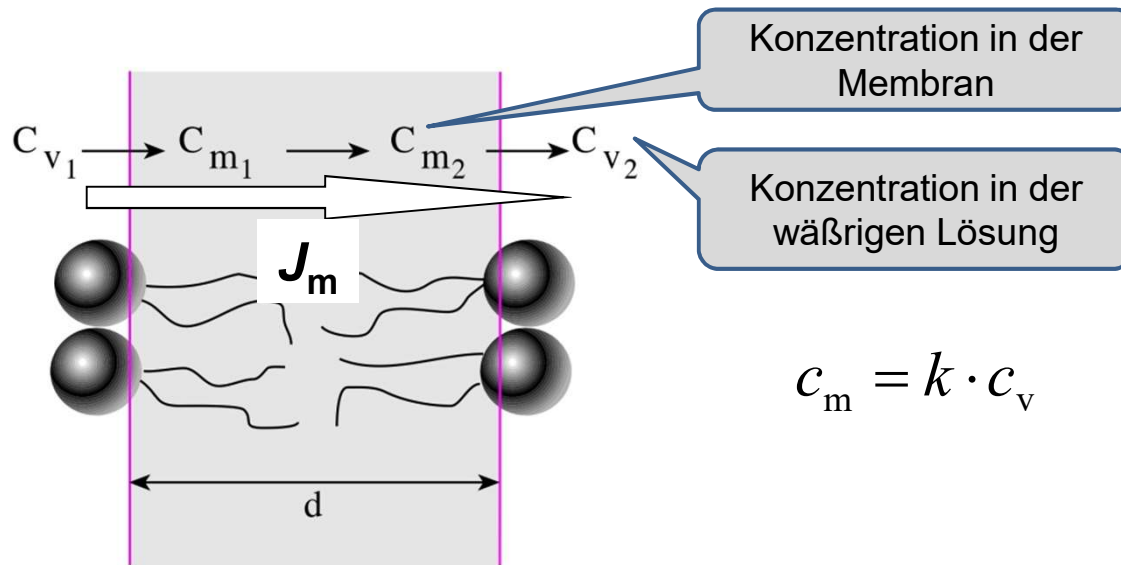
Zur Erinnerung



Gefäß	Aorta	Arterien	Arteriolen	Kapillaren	Venolen	Venen	Hohlvenen
$A \text{ (cm}^2\text{)}$	4,5	20	400	4500	4000	40	18
$v \text{ (cm/s)}$	23	5	0,25	0,022	0,025	2,5	6



## ■ Diffusion durch Membranen (passiver Transport)



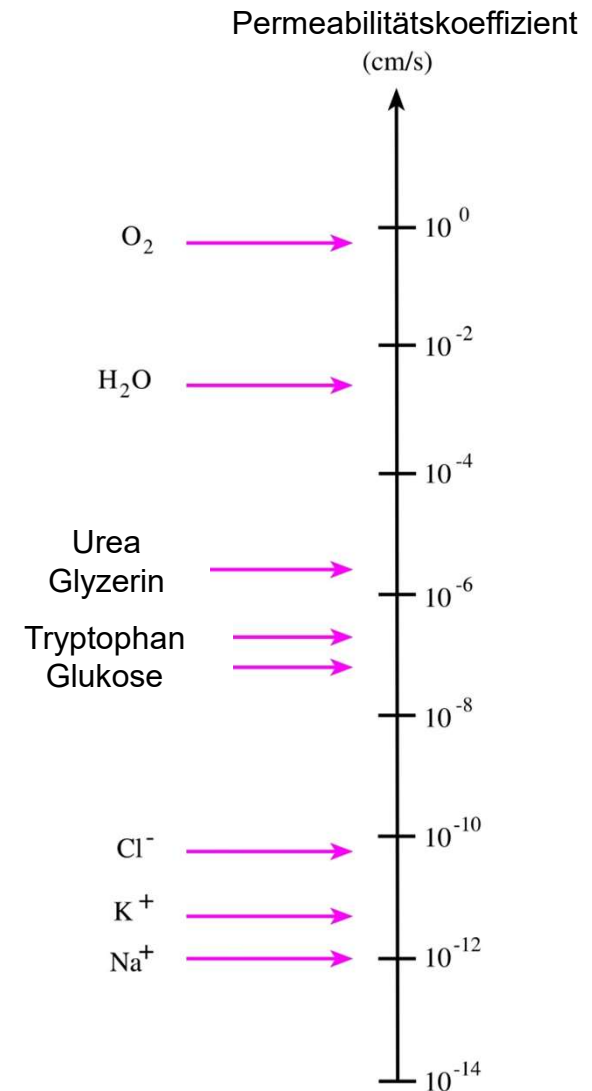
➤ 1. Ficksches Gesetz:

$$J_m = -D \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x} = -D \cdot \frac{c_{m2} - c_{m1}}{d} =$$

$$= -D \cdot k \cdot \frac{c_{v2} - c_{v1}}{d} = -p(c_{v2} - c_{v1})$$

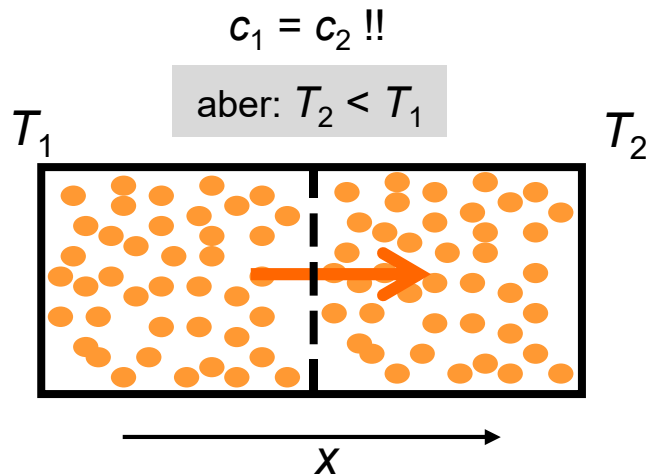
$$J_m = -p(c_{v2} - c_{v1})$$

Permeabilitätskoeffizient (m/s)





- Diffusion in Falle des thermisches Nichtgleichgewichtes:



Temperaturinhomogenitäten können zur Diffusion führen.  
Man braucht also zur allgemeineren Beschreibung der Diffusion statt der Konzentration eine Größe, die einerseits die Konzentration, andererseits aber auch die Temperatur enthält.

Konzentration ( $c$ )  $\Rightarrow$  chemisches Potenzial ( $\mu$ )

### chemisches Potenzial für Lösungen:

Referenzlösung



$c_0$

$\mu_0$

Normalpotenzial  
als Bezugswert



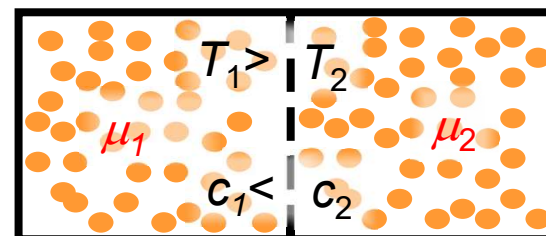
$c$

$\mu ?$

$$\mu = \mu_0 + RT \ln \frac{c}{c_0} \quad [\mu] = \frac{\text{J}}{\text{mol}}$$

Die Triebkraft der Diffusion im Allgemeinen:  $-\frac{\Delta\mu}{\Delta x}$

Endzustand der Diffusion (kein Stoffstrom)  
beim thermischen Nichtgleichgewicht:



$$\mu_1 = \mu_2$$

# Analogie

	Was wurde transportiert?	Stärke?	Was treibt den Transport?	Zusammenhang?
<b>Volumen-transport</b>	$V$	$J_V = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta t}$	$p$	$J_V = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l}$
<b>Energie-transport</b>	$E$	$J_E = \frac{\Delta E}{A \cdot \Delta t}$	$T$	$J_E = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$
<b>Stoff-transport</b>	$v$	$J_v = \frac{\Delta v}{A \cdot \Delta t}$	$\left( c \right)$ $\left( \mu \right)$	$\left( -\frac{\Delta c}{\Delta x} \right)$ $\left( -\frac{\Delta \mu}{\Delta x} \right)$

### 3. Das 2. Ficksche Gesetz: Allgemeine Beschreibung der Diffusion $c(x,t)$

$$D \frac{\Delta \left( \frac{\Delta c}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

bisshen  
anschaulichere Form

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

exakte  
mathematische Form

- Partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung
- Lösung: die Funktion  $c(x, t)$

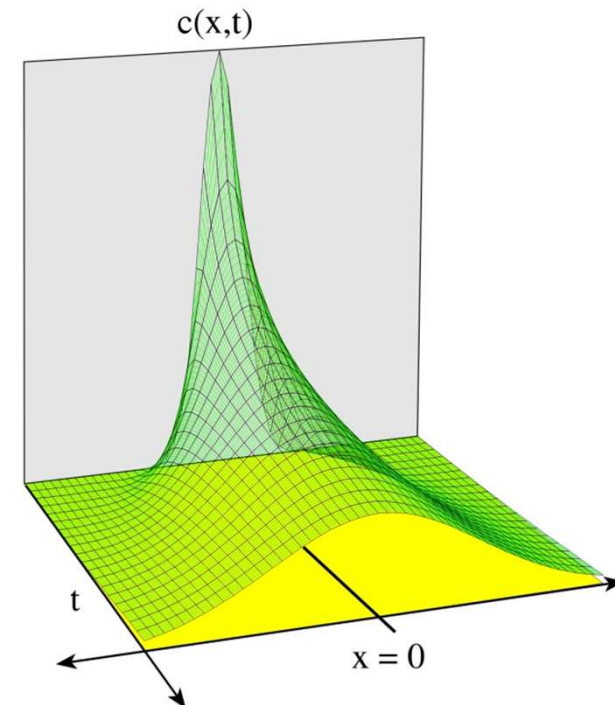
Beispiele für Lösungen:

➤ Für eindimensionale Diffusion:

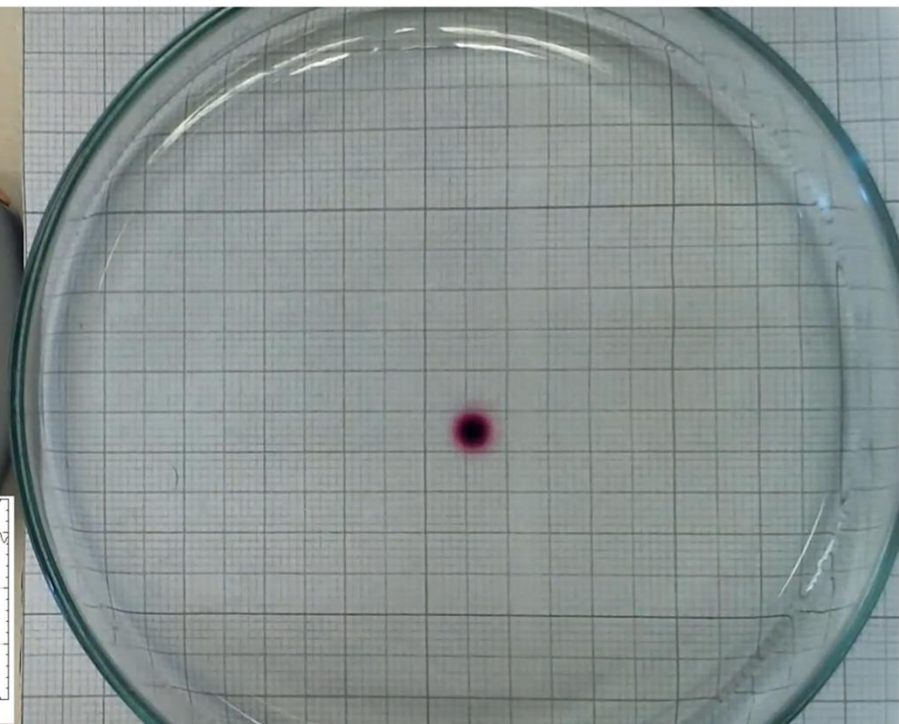
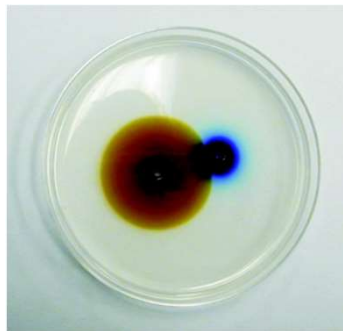
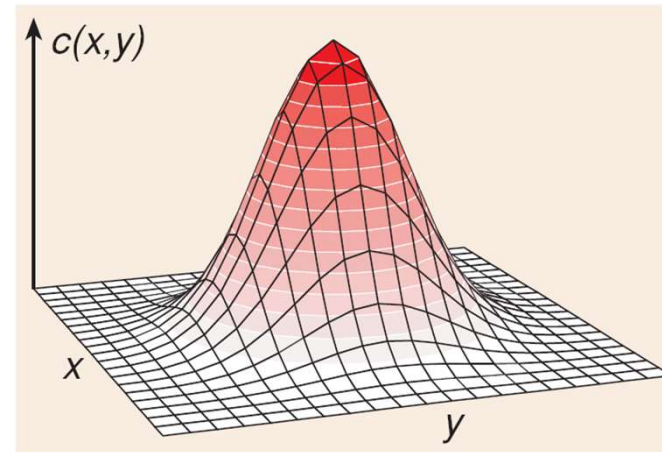
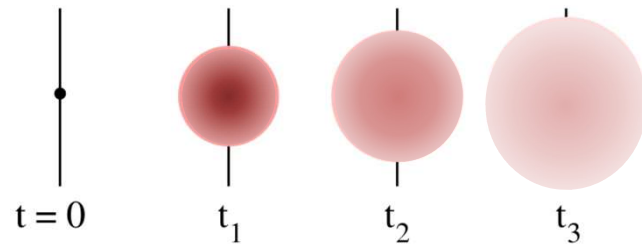
anim

$$c(x) = \frac{c_0 \Delta x}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\sigma_x = \sqrt{2Dt}$$

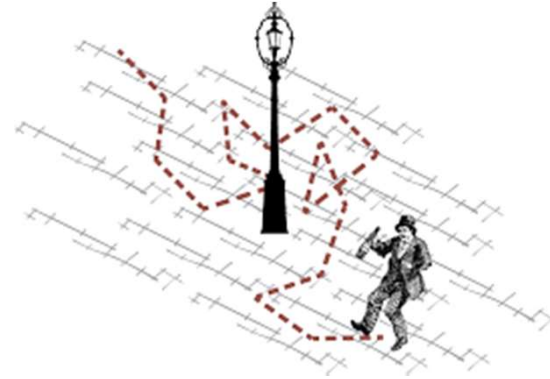
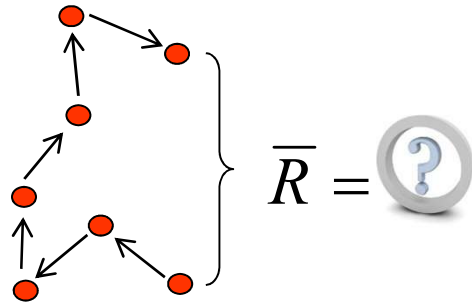


➤ Für zweidimensionale Diffusion:

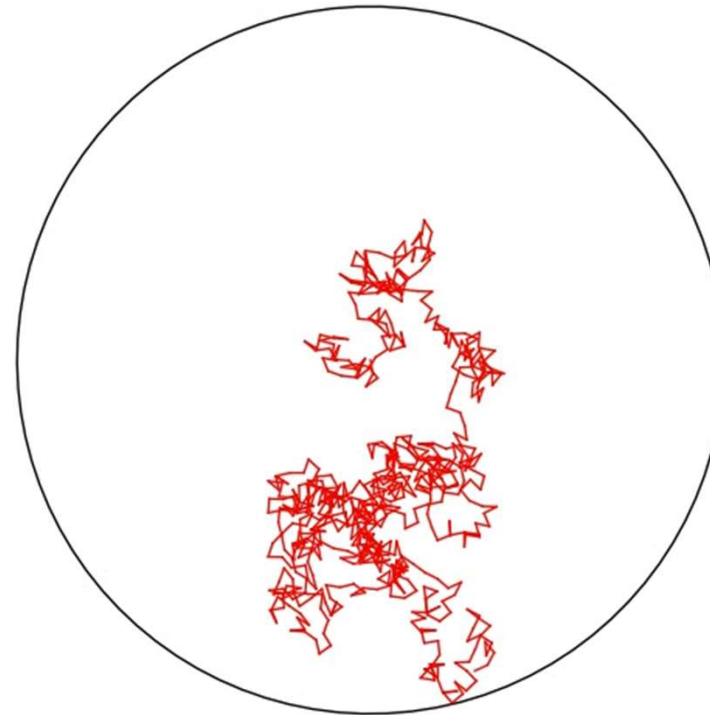


Siehe auch Praktikum!

## 4. Diffusion als *Random Walk*

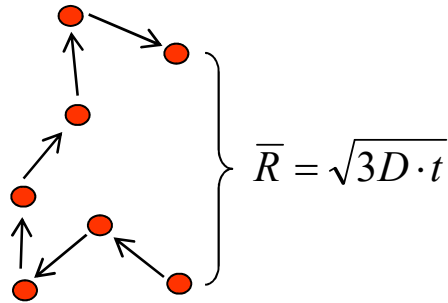


$$\bar{R} = \sqrt{3D \cdot t}$$



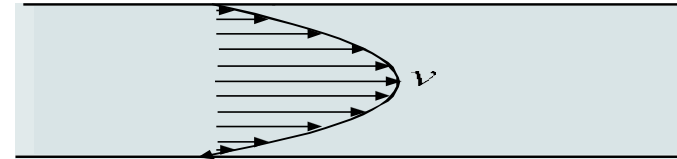
Die detaillierte Ableitung finden Sie im Buch  
*Biophysik für Mediziner* S226-227.

## 5. Welcher Transportprozess ist „schneller“ für O<sub>2</sub>-Transport?



$$\bar{R} = \sqrt{3D \cdot t} \quad D = 2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$\bar{R}$	$t$	Durchschnittliche Geschwindigkeit der Diffusion
1 $\mu\text{m}$		
30 $\mu\text{m}$		
1 cm		
1 m		

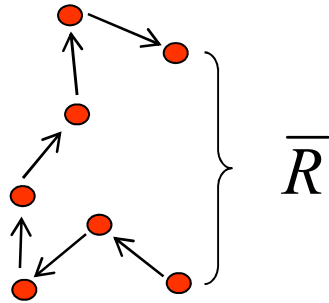


Geschwindigkeit der Blutströmung:

Gefäß	Kapillaren
A (cm <sup>2</sup> )	4500
v (cm/s)	0,022

## Zusammenfassend über die „Schnelligkeit“ der Diffusion

Gefäß	Kapillaren
A (cm <sup>2</sup> )	4500
v (cm/s)	0,022

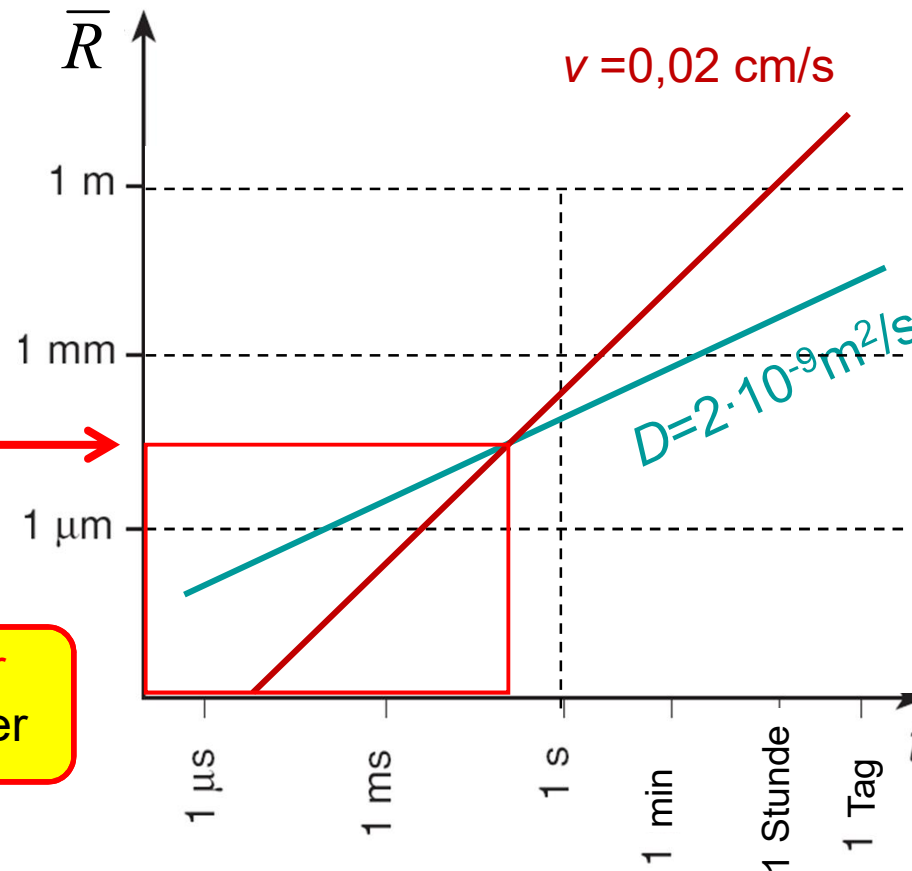


Diff:  $\bar{R} \sim \sqrt{t}$

Strömung:  $s = v \cdot t$

30  $\mu\text{m}$

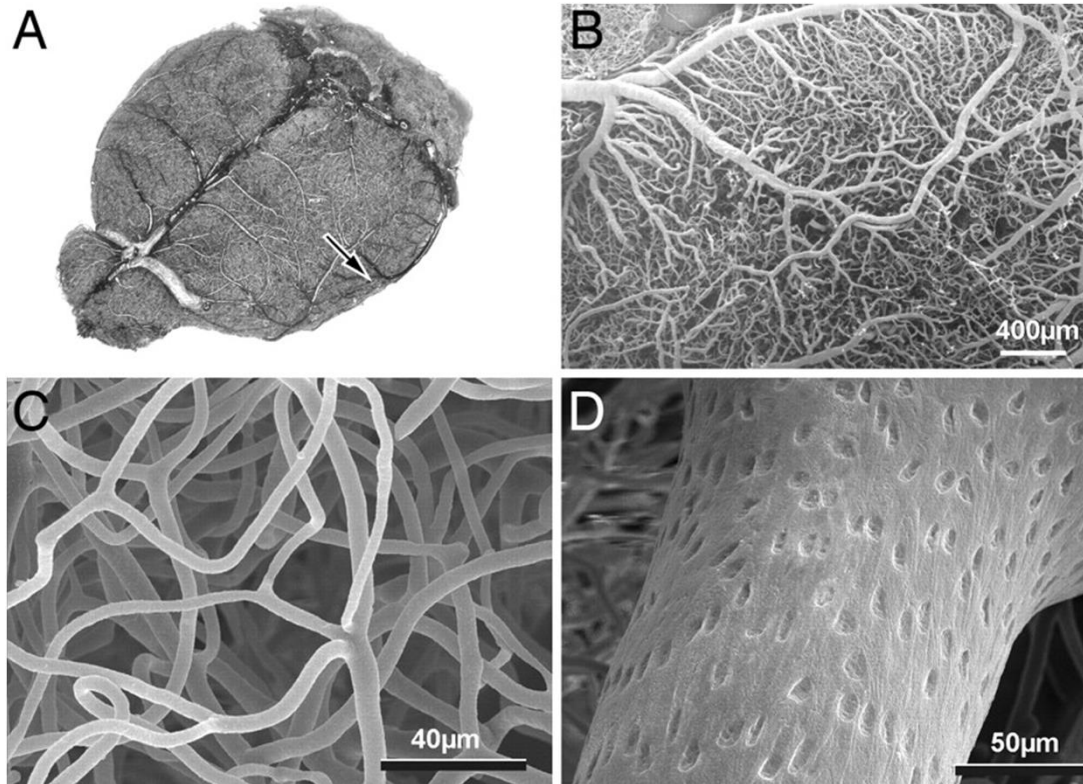
<30  $\mu\text{m}$ : Diffusion ist schneller  
>30  $\mu\text{m}$ : Strömung ist schneller





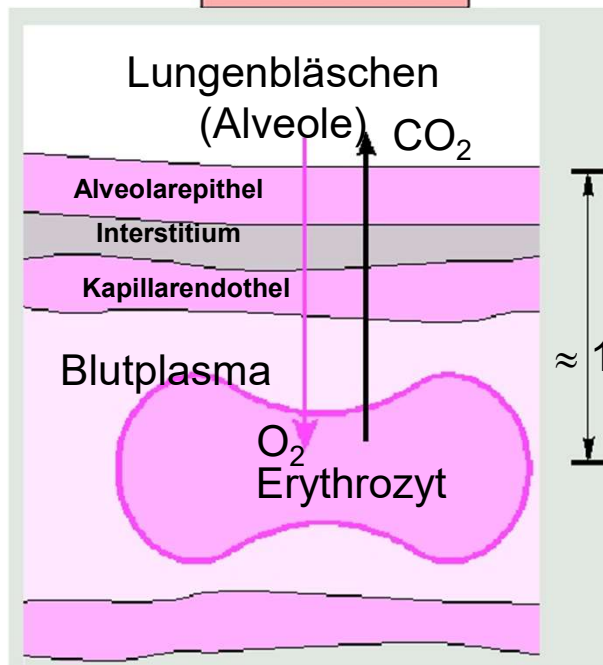
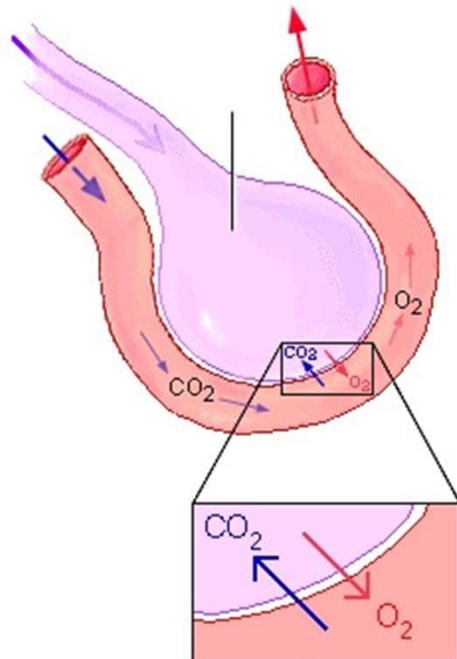
# Welcher Transportprozess ist „schneller“ für O<sub>2</sub>-Transport?

- bis 30  $\mu\text{m}$  : Diffusion
- über 30  $\mu\text{m}$  : Blutströmung

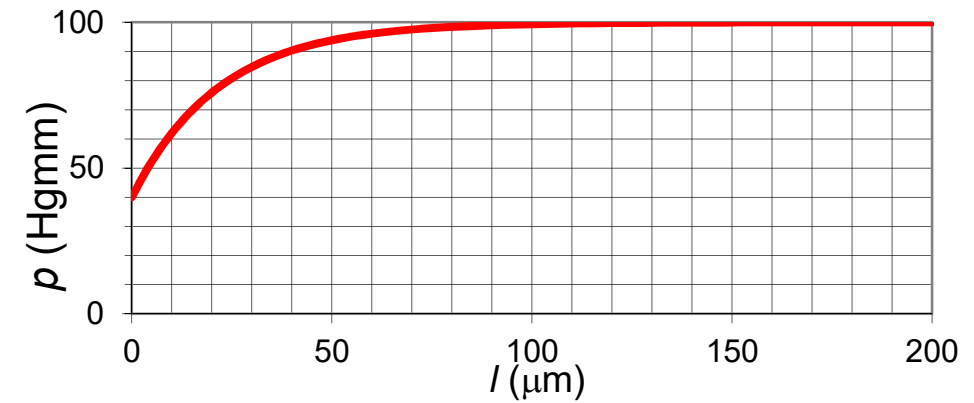


(C) SEM image of cortical capillaries. Capillary diameters range from 4 to 6  $\mu\text{m}$  and intercapillary distances are  $\approx 30 \mu\text{m}$ .

- O<sub>2</sub>-Diffusion Lunge-Blut als *Random Walk*



O<sub>2</sub> Aufnahme in den Alveolarkapillaren



➤ Random Walk:

Wie viel Zeit brauchen die O<sub>2</sub>-Moleküle dazu im Durchschnitt?



$$\bar{R} = \sqrt{3D \cdot t}$$

$D$  für O<sub>2</sub> im Wasser:

$$1,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

# Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Hausaufgaben:

3.12, 15-18

