Physikalische Grundlagen der Biophysik

1. Vorlesung

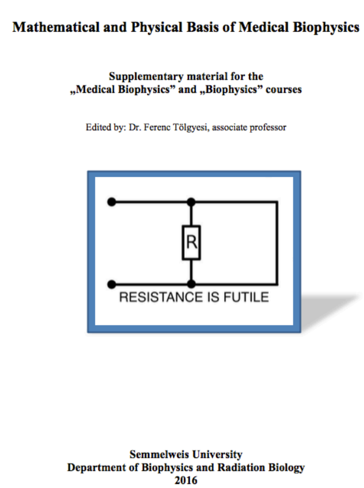
Die mindestens nötige Mathe um Biophysik zu verstehen können

10. September 2018.

Gergely AGÓCS

Wie kann man sich bereiten?

- Universität = **selbstständiges Lernen**
- Quellen:
  - **deine** Notizen in der Vorlesung *(montags 17^{35}–19^{05}; mittwochs 17^{40}–19^{10}; EOK Seminarraum 5 und 4; **nur während der ersten 4 Wochen**)*
  - Tölgyesi: *Physikalische Grundkenntnisse* (2015)
  - Webseite: biofiz.semmelweis.hu
    - Fachanforderungen
    - Vorlesungsfolien
    - Zusätsliche Hausaufgaben
    - Skript



Mathematical and Physical Basis of Medical Biophysics

Supplementary material for the „Medical Biophysics" and „Biophysics" courses

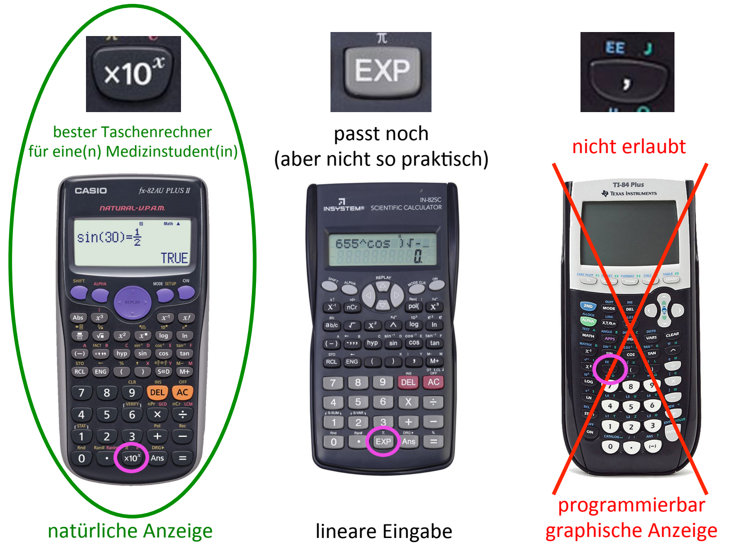
Edited by: Dr. Ferenc Tölgyesi, associate professor

RESISTANCE IS FUTILE

Semmelweis University
Department of Biophysics and Radiation Biology
2016

Wissenschaftliche Schreibweise

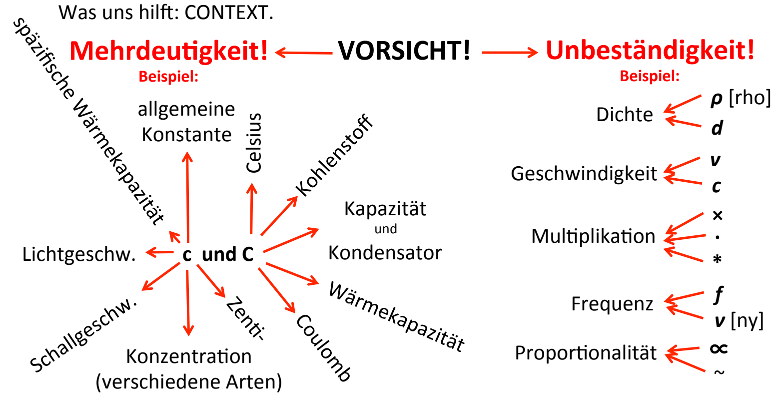
mit dem Taschenrechner



Symbole in den Wissenschaften

In den Wissenschaften benutzt man zahlreiche lateinische und griechische Buchstaben (und ihre Kombinationen) als Symbole, deshalb ist es unausbleiblich die Griechische Alphabet lernen.

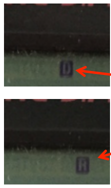
Aber die Anzahl der Größen und Einheiten ist viel größer als die Anzahl der erhältlichen Buchstaben, und das kann zur Verwirrung leiten.
Was uns hilft: CONTEXT.



Winkel

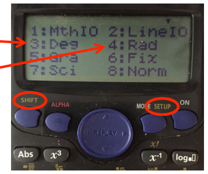
D:
Grad-
modus

R:
Radian-
modus



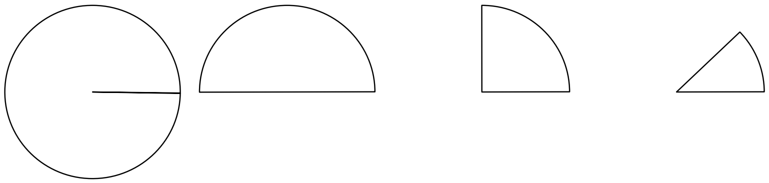
Umdrehung
Grad: praktische, traditionelle Einheit
Radian: wissenschaftliche Einheit, Bogen/Radius

– shift
– setup
– 3 (für Grad)
– 4 (für Radian)



1 Umdrehung = 360° = 2π rad

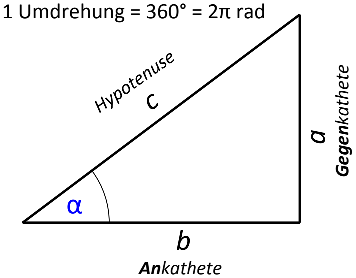
1° = 60′ = 3600″



eine **Umdrehung**	½ **Umdrehung**	¼ **Umdrehung**	⅛ **Umdrehung**
360°	180°	90°	45°
2π **rad**	π **rad**	π/2 **rad**	π/4 **rad**

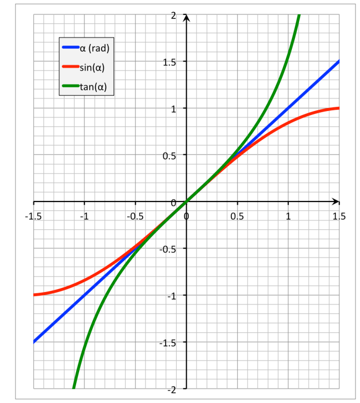
Trigonometrische Funktionen

Grad: praktische, traditionelle Einheit
Radian: wissenschaftliche Einheit, Bogen/Radius
1 Umdrehung = 360° = 2π rad



Sinus: $\sin(\alpha) = a/c$
Kosinus: $\cos(\alpha) = b/c$
Tangens: $\tan(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha) = a/b$

für kleine Winkel: (<10° ≈ 0.2 rad):
$\sin(\alpha) \approx \alpha\ [\mathrm{rad}] \approx \tan(\alpha)$



Was ist eine Funktion?

Die eindeutige Zuordnung einer Menge von Werten zu anderer Menge von Werten

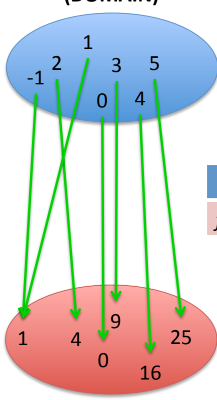
INPUT (ARGUMENT, UNABHÄNGIGE VARIABLE)
x

-1 1 2 3 5 0 4

1 4 0 9 16 25

OUTPUT (WERT, ABHÄNGIGE VARIABLE)
f*(*x*) oder *y

DEFINITIONSMENGE (DOMAIN)



ZIELMENGE (RANGE)

$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0	1	4	9	16	25

$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

f symbolisiert die Funktion, die den Beziehung zwischen *x* und *f*(*x*) definiert

Lineare Funktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$y = a \cdot x + b$

PARAMETER: Steigung (Anstieg) — y-Achsen-abschnitt

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

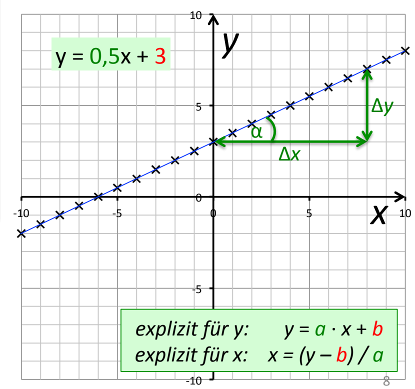
$\Delta y \sim \Delta x$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

wenn $x = 0$ dann $y = b$

wenn $\Delta x = 1$ dann $\Delta y = a$

$a = \Delta y/\Delta x = \tan\alpha$



explizit für y: $y = a \cdot x + b$
explizit für x: $x = (y - b) / a$

Lineare Funktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Allgemeine Gasgleichung
(I.35)
$pV = nRT$ (wenn n & V konstant sind)

$p = nR/V \cdot T + 0$

$y = a \cdot x + b$

#2: Lichtelektrischer Effekt
(II.37)
$E_{kin} = hf - W_{em}$

$E_{kin} = h \cdot f + (-W_{em})$

$y = a \cdot x + b$

#3: Schwächungsgesetz
(II.85)
$\mu = \mu_m \cdot \rho$

$\mu = \mu_m \cdot \rho + 0$

$y = a \cdot x + b$

#4: Ohmsches Gesetz

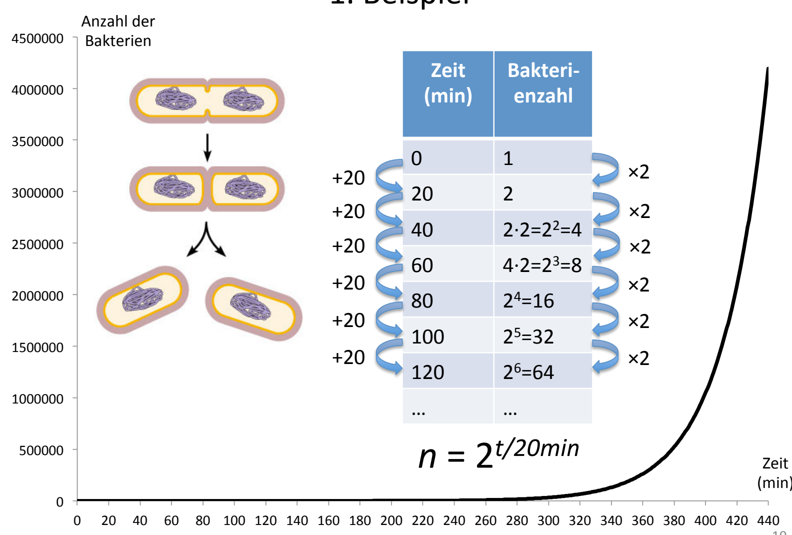
$R = U/I$

$I = 1/R \cdot U + 0$

$y = a \cdot x + b$

Exponentielle Funktionen

1. Beispiel



Zeit (min)	Bakterienzahl
0	1
20	2
40	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
60	$4 \cdot 2 = 2^3 = 8$
80	$2^4 = 16$
100	$2^5 = 32$
120	$2^6 = 64$
…	…

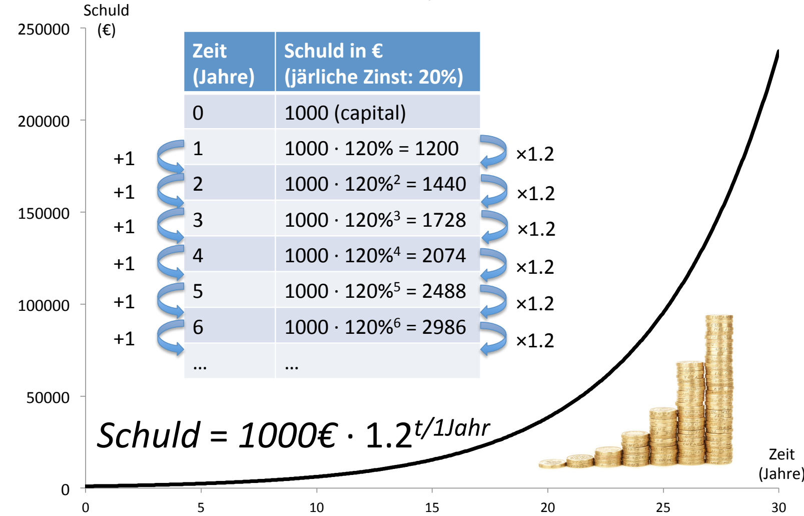
+20 +20 +20 +20 +20 +20

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

$n = 2^{t/20min}$

Exponentielle Funktionen

2. Beispiel



Zeit (Jahre)	Schuld in € (järliche Zinst: 20%)
0	1000 (capital)
1	$1000 \cdot 120\% = 1200$
2	$1000 \cdot 120\%^2 = 1440$
3	$1000 \cdot 120\%^3 = 1728$
4	$1000 \cdot 120\%^4 = 2074$
5	$1000 \cdot 120\%^5 = 2488$
6	$1000 \cdot 120\%^6 = 2986$
…	…

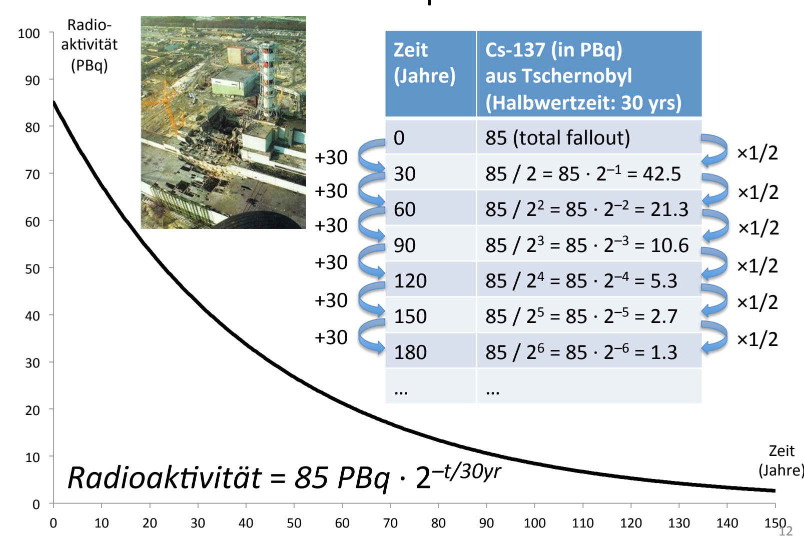
+1 +1 +1 +1 +1 +1

×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2

$Schuld = 1000€ \cdot 1.2^{t/1Jahr}$

Exponentielle Funktionen

3. Beispiel



Zeit (Jahre)	Cs-137 (in PBq) aus Tschernobyl (Halbwertzeit: 30 yrs)
0	85 (total fallout)
30	$85 / 2 = 85 \cdot 2^{-1} = 42.5$
60	$85 / 2^2 = 85 \cdot 2^{-2} = 21.3$
90	$85 / 2^3 = 85 \cdot 2^{-3} = 10.6$
120	$85 / 2^4 = 85 \cdot 2^{-4} = 5.3$
150	$85 / 2^5 = 85 \cdot 2^{-5} = 2.7$
180	$85 / 2^6 = 85 \cdot 2^{-6} = 1.3$
…	…

+30 +30 +30 +30 +30 +30

×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2

$Radioaktivität = 85\ PBq \cdot 2^{-t/30yr}$

Exponentielle Funktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM”)

$$y = b \cdot a^{x/k}$$

PRAKTISCHE ÄNDERUNGEN:

- sei die Basiszahl e (manchmal auch 2 oder 10)
- statt $/k$ kann man auch $\cdot p$ in den Exponenten schreiben (wo $p = 1/k$)
- sei das Exponentenvorzeichen negativ
- statt b schreiben wir y_0

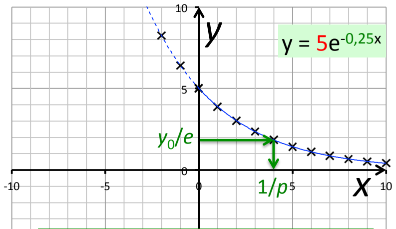
VARIABLEN: abhängige Variable, unabhängige Variable

$$y = y_0 \cdot e^{-px} = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

PARAMETER: pre-exponentieller Koeffizient, exponentielle Koeffizient

wenn $x = 0$ dann b $y = y_0$

wenn $y = y_0/e$ dann $x = 1/p = k$



explizit für y:	$y = y_0 \cdot e^{-px}$
explizit für x:	$x = \ln(y / y_0) / (-p)$

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM”)

$$\Delta y/y \sim \Delta x$$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportionell zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

Exponentielle Funktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Schwächungsgesetz (II.11)

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

#2: Boltzmannsche Verteilung (I.25)

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\Delta\varepsilon/(kT)}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

#3: Zerfallgesetz (II.96)

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

#4: Entladung eines RC-Kreises (VII.2)

$$U = U_0 \cdot e^{-t/(RC)}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

Exponentielle Funktionen

Linearisierung

grafische Linearisierung:

stelle y auf eine Log-Skala und x auf eine Lin-Skala dar: *die Beziehung **erscheint** als linear aber **ist** eigentlich immer noch exponentiell*

INTEGRALFORM

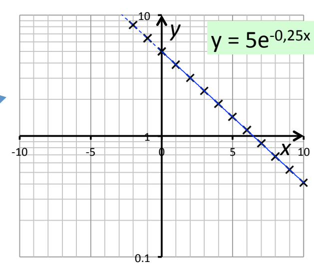
$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

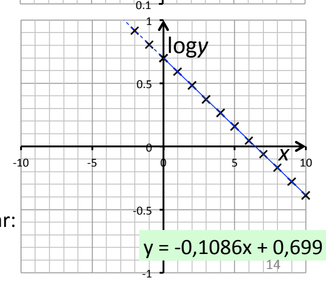
$$\log y = \log\left(y_0 \cdot e^{-p \cdot x}\right)$$

$$\log y = \log y_0 + \log\left(e^{-p \cdot x}\right)$$

$$\log y = \log y_0 - p \cdot x \cdot \log e$$

$$\underbrace{\log y}_{y} = \underbrace{-p \cdot \log e}_{a} \cdot x + \underbrace{\log y_0}_{b}$$





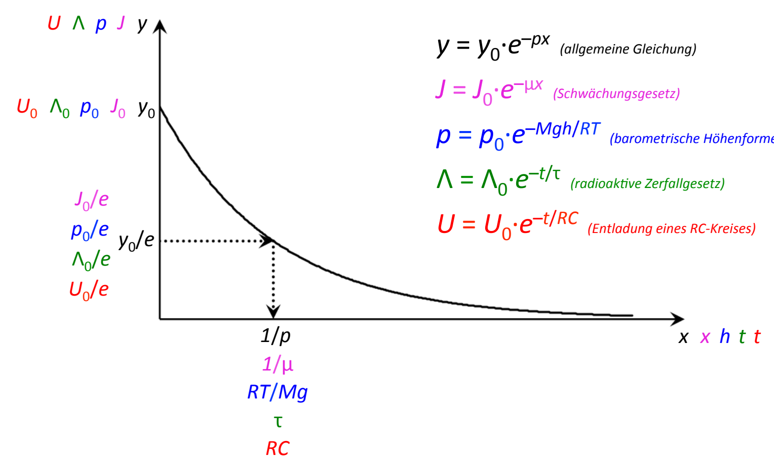
y-Achsenabschnitt = $\log(y_0)$
$\log(5) = 0{,}699$
Steigung = $-p \cdot \log(e)$
$-0{,}25 \cdot \log(e) = -0{,}1086$

arithmetische Linearisierung

stelle $\log(y)$ als Funktion von x dar: *die Beziehung **ist** linear*

Graphik von exponentiellen Funktionen

aus der Biophysik-Formelsammlung



$y = y_0 \cdot e^{-px}$ *(allgemeine Gleichung)*

$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$ *(Schwächungsgesetz)*

$p = p_0 \cdot e^{-Mgh/RT}$ *(barometrische Höhenformel)*

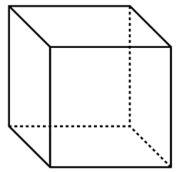
$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-t/\tau}$ *(radioaktive Zerfallgesetz)*

$U = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ *(Entladung eines RC-Kreises)*

Potenzfunktionen

ein Beispiel

Masse ~ Volumen ~ [Körper]länge^3
Oberfläche ~ [Körper]länge^2



Potenzfunktionen

Linearisierung

grafische Linearisierung:
stelle sowohl *y* als auch *x* auf Log-Skalen dar:
die Beziehung ***erscheint*** *als linear aber* ***ist*** *eigentlich immer noch Potenzfunktion*

INTEGRALFORM

$$y = b \cdot x^a$$

$$\log y = \log\left(b \cdot x^a\right)$$

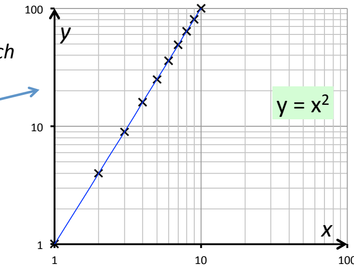
$$\log y = \log b + \log\left(x^a\right)$$

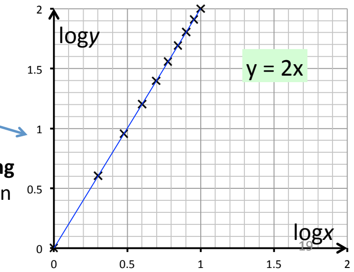
$$\log y = \log b + a \cdot \log x$$

$$\underbrace{\log y}_{y} = a \cdot \underbrace{\log x}_{x} + \underbrace{\log b}_{b}$$

y-Achsenabschnitt = log*b*
log1 = 0
Steigung = *a*
a = 2

arithmetische Linearisierung
stelle log(*y*) als Funktion von log(*x*) dar:
die Beziehung ***ist*** *linear*





Potenzfunktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$$y = b \cdot x^a$$

PARAMETER: pre-exponentieller Koeffizient — Exponent

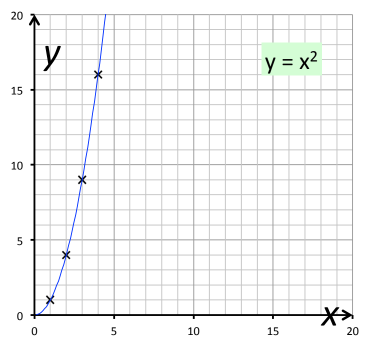
explizit für y: $y = b \cdot x^a$
explizit für x: $x = (y / b)^{1/a}$

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

$$\Delta y/y \sim \Delta x/x$$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

wenn *x* = 1
dann *y* = *b*



die **indirekte Proportionalität** und die **Quadratwurzel** Funktionen sind auch Potenzfunktionen

$$y = \frac{b}{x} = b \cdot x^{-1}$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

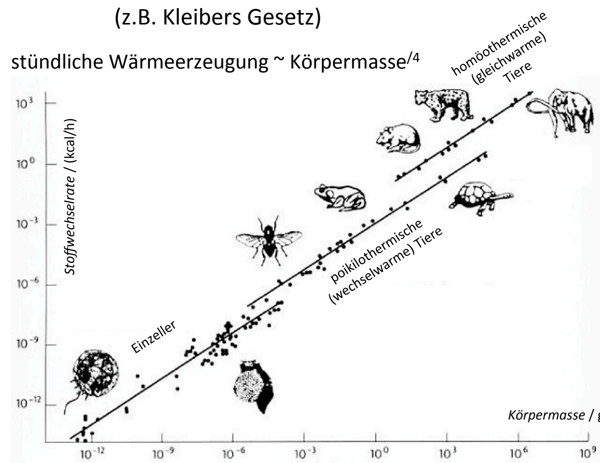
Potenzfunktionen

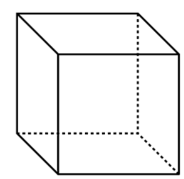
ein Beispiel

allometrisches Skalierungsgesetz
(z.B. Kleibers Gesetz)

Masse ~ Volumen ~ [Körper]länge^3
Oberfläche ~ [Körper]länge^2

stündliche Wärmeerzeugung ~ Körpermasse$^{3/4}$





Potenzfunktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Die de Broglie-Wellenlänge (I.3)

$\lambda = h/p$

$$\lambda = {\color{red}h} \cdot p^{\color{green}-1}$$

$$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$$

#2: Stefan–Boltzmann-Gesetz (II.41)

$$M_{black} = {\color{red}\sigma} \cdot T^{\color{green}4}$$

$$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$$

#3: Duane–Hunt-Gesetz (II.80)

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU_{anode}}$$

$$\lambda_{min} = {\color{red}hc/e} \cdot U^{\color{green}-1}$$

$$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$$

#4: Die Massenabhängigkeit der Eigenfrequenz (Resonanz 6)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_0 = {\color{red}k^{1/2}/(2\pi)} \cdot m^{\color{green}-1/2}$$

$$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$$

Logarithmusfunktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

PRAKTISCHE ÄNDERUNGEN:

- sei der Basis 10 (oder *e* oder 2)
- wenn die Basiszahl festgesetzt wird, der Faktorparameter muss so geändert werden:

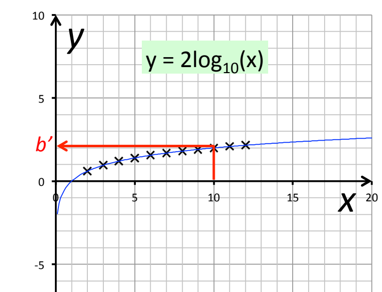
$$b \cdot \log_a(x) = b/\log_{10}(a) \cdot \log_{10}(x) = b' \cdot \log_{10}(x)$$

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$$y = {\color{red}b'} \cdot \log_{10}(x)$$

PARAMETER: Faktor-parameter

wenn $x = 10$
dann $y = b'$



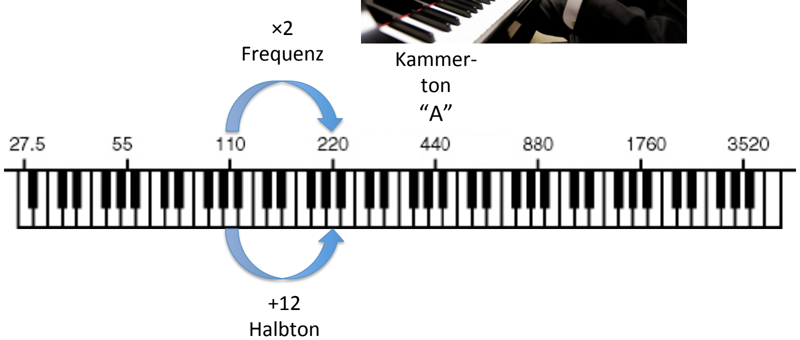
DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

$$\Delta y \sim \Delta x/x$$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

Logarithmusfunktionen

ein Beispiel



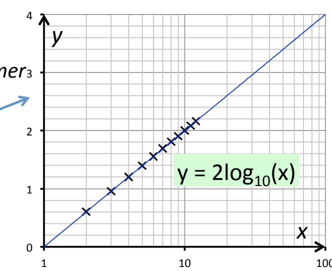
Logarithmusfunktionen

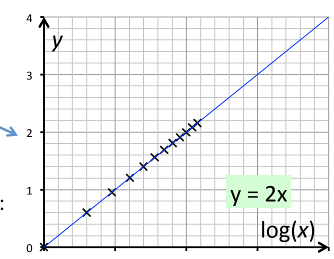
Linearisierung

grafische Linearisierung:
stelle *y* auf eine Lin-, *x* auf eine Log-Skale dar:
*die Beziehung **erscheint** als linear aber **ist** eigentlich immer noch logarithmisch*

INTEGRALFORM

$$y = b' \cdot \log_{10}(x)$$





arithmetical linearization
plot *y* as a function of log(*x*):
*the relationship **is** linear*

Logarithmusfunktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung ...und von woanders

#1: Die statistische Definition der Entropie (III.72)

$S = k \ln \Omega$

$$S = k \cdot \log_e(\Omega)$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#2: Die Dezibel- (dB-) Skala (VII.10)

$n = 10 \log A_p$

$$n = 10 \cdot \log_{10}(A_p)$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#3: Die Definition der Absorbanz (VI.34)

$A = \lg(J_0/J)$

$$A = 1 \cdot \log_{10}(\underbrace{J_0/J}_{})$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#4: Die pH-Skala

$pH = -\log[H^+]$

$$pH = -1 \cdot \log_{10}(\underbrace{[H^+]/(1\ M)}_{})$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

Funktionen

Zusammenfassung

LINEARE FUNKTION

$\Delta y \sim \Delta x$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

y* vs. *x

EXPONENTIELLE FUNKTION

$\Delta y/y \sim \Delta x$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportionell zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

log*y* vs. *x*

Linearisierung

y* vs. log*x

LOGARITMUSFUNKTION

$\Delta y \sim \Delta x/x$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

log*y* vs. log*x*

POTENZFUNKTION

$\Delta y/y \sim \Delta x/x$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

Ableitung und Integral

ein Beispiel

Δ Δ

x	$y = x^2$	$y' = \Delta y/\Delta x$	$y'' = \Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$
0	0		
1	1	1	
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2

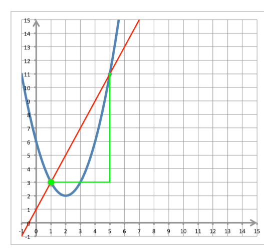
Σ Σ

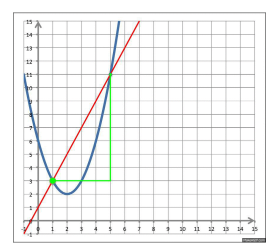
Ableitung: Steigung des Tangenten

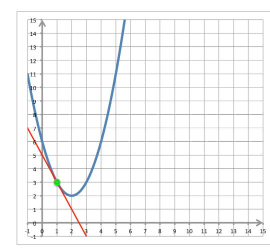
der Differenzenquotient:
$\Delta y/\Delta x$
die Steigung der **Sekante**

$$\Delta \longrightarrow d$$

die Ableitung:
dy/dx
die Steigung der **Tangente**



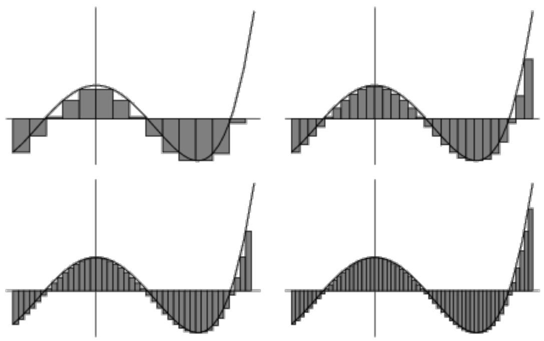




Integral: Die Fläche unter der Kurve

Area Under the Curve (AUC)

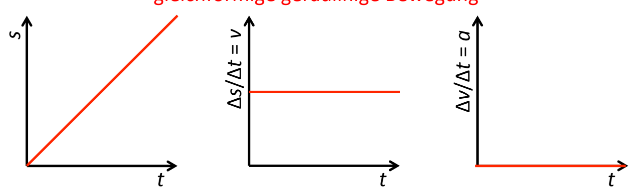
$$\Sigma \rightarrow \int$$



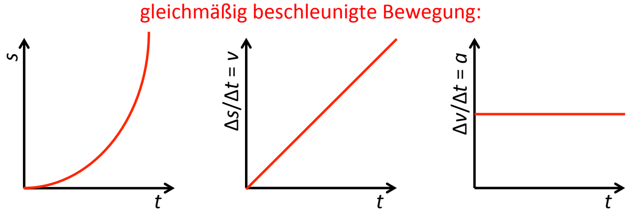
Derivative and Integral: Application

Rectilinear Motion

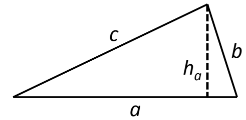
gleichförmige geradlinige Bewegung



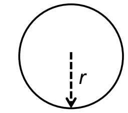
gleichmäßig beschleunigte Bewegung:



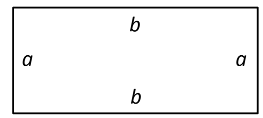
Umfang & Fläche



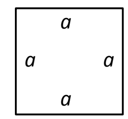
das Dreieck
Umfang: $a+b+c$
Fläche: $a*h_a/2$



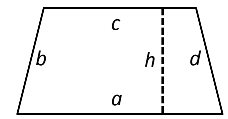
der Kreis
Umfang: $2r\pi$
Fläche: $r^2\pi$



das Rechteck
Umfang: $2*(a+b)$
Fläche: $a*b$

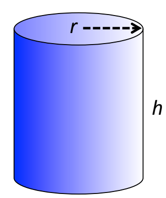


das Quadrat
Umfang: $4a$
Fläche: $a*a=a^2$

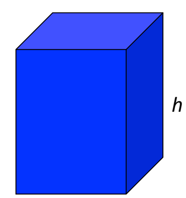


das Trapez
Umfang: $a+b+c+d$
Fläche: $(a+c)/2*h$

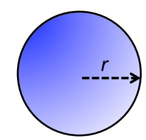
Oberfläche & Volumen



der Zylinder (offen)
Oberfläche (nur Mantel): $2r\pi*h$
Volumen: $r^2\pi*h$



das Prisma (offen)
Oberfläche (nur Mantel):
(Umfang der Grundfläche)*h
Volumen: (Fläche der Grundfläche)*h



die Kugel
Oberfläche: $4r^2\pi$
Volumen: $4r^3\pi/3$