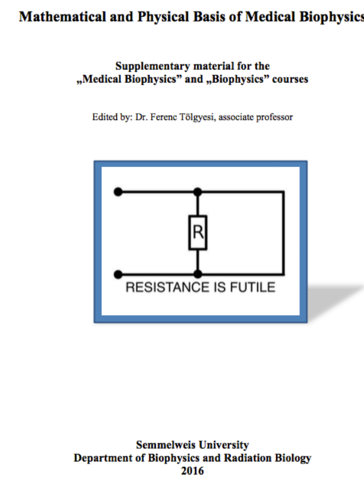
Physikalische Grundlagen der Biophysik

1. Vorlesung
Die mindestens nötige Mathe um Biophysik zu verstehen können
9. September 2019.
Gergely AGÓCS

Wie kann man sich vorbereiten?

- Universität = **selbstständiges Lernen**
- Quellen:
  - **deine** Notizen in der Vorlesung (nur in den ersten 4 Wochen)
  - Tölgyesi: *Physikalische Grundkenntnisse* (2015)
  - Webseite: biofiz.semmelweis.hu
    - Fachanforderungen
    - Vorlesungsfolien
    - Zusätzliche Hausaufgaben
    - Skript


Mathematical and Physical Basis of Medical Biophysics

Supplementary material for the „Medical Biophysics” and „Biophysics” courses

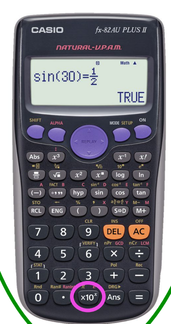
Edited by: Dr. Ferenc Tölgyesi, associate professor

Semmelweis University
Department of Biophysics and Radiation Biology
2016

Wissenschaftliche Schreibweise

mit dem Taschenrechner

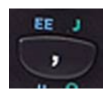
bester Taschenrechner für eine(n) Medizinstudent(in)



natürliche Anzeige

passt noch (aber nicht so praktisch)

lineare Eingabe



nicht erlaubt

programmierbar graphische Anzeige

Symbole in den Wissenschaften

In den Wissenschaften benutzt man zahlreiche lateinische und griechische Buchstaben (und ihre Kombinationen) als Symbole, deshalb ist es unabdingbar das griechische Alphabet zu lernen.

Aber die Anzahl der Größen und Einheiten ist viel größer als die Anzahl der erhältlichen Buchstaben, und das kann zur Verwirrung führen.
Was uns hilft: KONTEXT.

Mehrdeutigkeit! ← **VORSICHT!** → **Unbeständigkeit!**

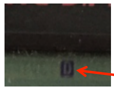
Beispiel: **c und C** → allgemeine Konstante, Celsius, Kohlenstoff, Kapazität und Kondensator, Wärmekapazität, Coulomb, Zenti-, Konzentration (verschiedene Arten), Schallgeschw., Lichtgeschw., spezifische Wärmekapazität

Beispiel:
- Dichte ← ρ [rho], d
- Geschwindigkeit ← v, c
- Multiplikation ← ×, ·, *
- Frequenz ← f, ν [ny]
- Proportionalität ← ∝, ~

Winkel

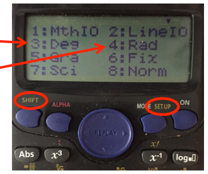
– shift
– setup
– 3 (für Grad)
– 4 (für Radian)

D: Grad-modus



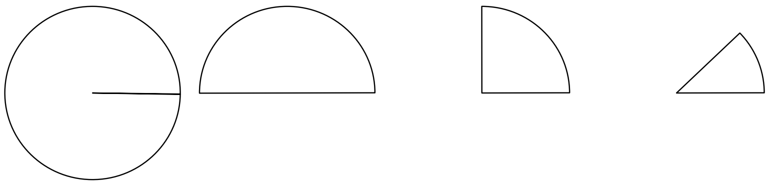
R: Radiant-modus

Umdrehung
Grad: praktische, traditionelle Einheit
Radiant: wissenschaftliche Einheit, Bogen/Radius



1 Umdrehung = 360° = 2π rad

1° = 60′ = 3600″



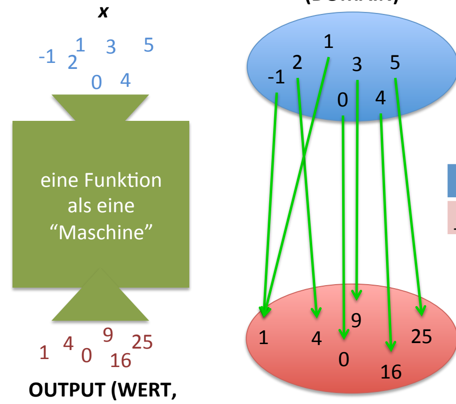
eine **Umdrehung**	½ **Umdrehung**	¼ **Umdrehung**	⅛ **Umdrehung**
360°	180°	90°	45°
2π **rad**	π **rad**	π/2 **rad**	π/4 **rad**

Was ist eine Funktion?

Die eindeutige Zuordnung einer Menge von Werten zu anderer Menge von Werten

INPUT (ARGUMENT, UNABHÄNGIGE VARIABLE)
x

DEFINITIONSMENGE (DOMAIN)



OUTPUT (WERT, ABHÄNGIGE VARIABLE)
f*(*x*) oder *y

ZIELMENGE (RANGE)

$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

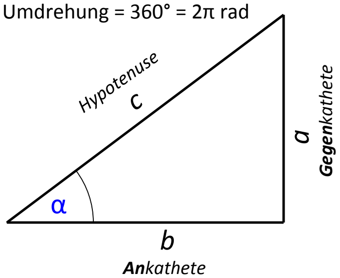
x	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0	1	4	9	16	25

$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

f symbolisiert die Funktion, die die Beziehung zwischen *x* und *f*(*x*) definiert

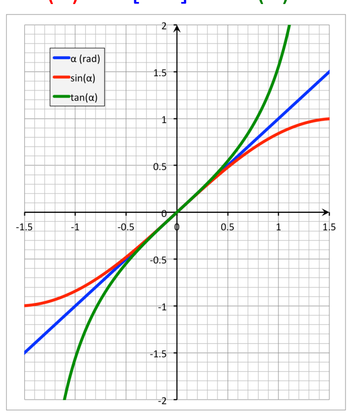
Trigonometrische Funktionen

Grad: praktische, traditionelle Einheit
Radiant: wissenschaftliche Einheit, Bogen/Radius
1 Umdrehung = 360° = 2π rad



Sinus: sin(α) = *a*/*c*
Kosinus: cos(α) = *b*/*c*
Tangens: tan(α) = tg(α) = *a*/*b*

für kleine Winkel: (<10° ≈ 0.2 rad):
sin(α) ≈ α [rad] ≈ tan(α)



Lineare Funktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$$y = a \cdot x + b$$

PARAMETER: Steigung (Anstieg) — y-Achsen-abschnitt

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

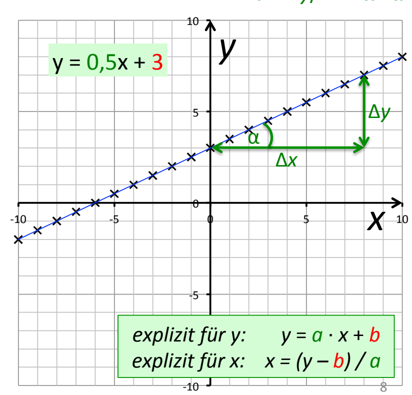
$$\Delta y \sim \Delta x$$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

wenn $x = 0$ dann $y = b$

wenn $\Delta x = 1$ dann $\Delta y = a$

$a = \Delta y/\Delta x = \tan\alpha$



Lineare Funktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Allgemeine Gasgleichung (I.35)

$pV = nRT$ (wenn n & V konstant sind)

$p = nR/V \cdot T + 0$

$y = a \cdot x + b$

#2: Lichtelektrischer Effekt (II.37)

$E_{kin} = hf - W_{em}$

$E_{kin} = \mathbf{h} \cdot f + (-W_{em})$

$y = a \cdot x + b$

#3: Schwächungsgesetz (II.85)

$\mu = \mu_m \cdot \rho$

$\mu = \mu_m \cdot \rho + 0$

$y = a \cdot x + b$

#4: Ohmsches Gesetz

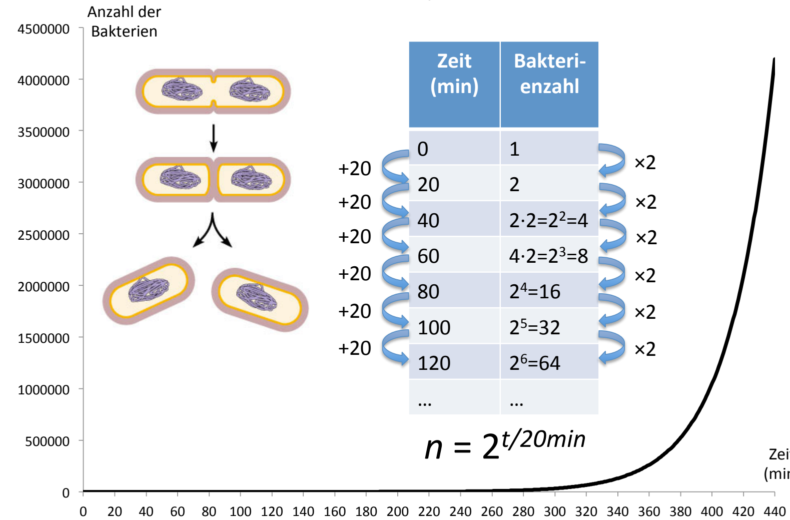
$R = U/I$

$I = 1/R \cdot U + 0$

$y = a \cdot x + b$

Exponentielle Funktionen

1. Beispiel

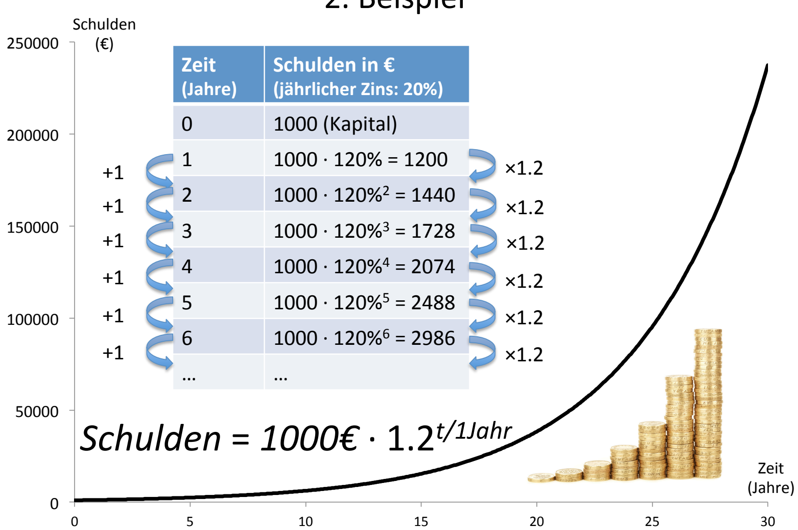


	Zeit (min)	Bakterienzahl	
	0	1	
+20	20	2	×2
+20	40	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$	×2
+20	60	$4 \cdot 2 = 2^3 = 8$	×2
+20	80	$2^4 = 16$	×2
+20	100	$2^5 = 32$	×2
+20	120	$2^6 = 64$	×2
	…	…	

$$n = 2^{t/20min}$$

Exponentielle Funktionen

2. Beispiel

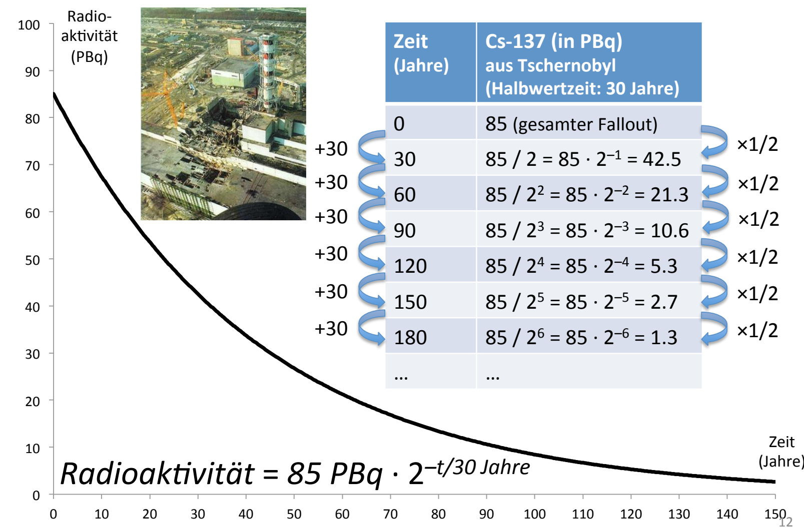


	Zeit (Jahre)	Schulden in € (jährlicher Zins: 20%)	
	0	1000 (Kapital)	
+1	1	1000 · 120% = 1200	×1.2
+1	2	$1000 \cdot 120\%^2 = 1440$	×1.2
+1	3	$1000 \cdot 120\%^3 = 1728$	×1.2
+1	4	$1000 \cdot 120\%^4 = 2074$	×1.2
+1	5	$1000 \cdot 120\%^5 = 2488$	×1.2
+1	6	$1000 \cdot 120\%^6 = 2986$	×1.2
	…	…	

$$Schulden = 1000€ \cdot 1.2^{t/1Jahr}$$

Exponentielle Funktionen

3. Beispiel



	Zeit (Jahre)	Cs-137 (in PBq) aus Tschernobyl (Halbwertzeit: 30 Jahre)	
	0	85 (gesamter Fallout)	
+30	30	$85 / 2 = 85 \cdot 2^{-1} = 42.5$	×1/2
+30	60	$85 / 2^2 = 85 \cdot 2^{-2} = 21.3$	×1/2
+30	90	$85 / 2^3 = 85 \cdot 2^{-3} = 10.6$	×1/2
+30	120	$85 / 2^4 = 85 \cdot 2^{-4} = 5.3$	×1/2
+30	150	$85 / 2^5 = 85 \cdot 2^{-5} = 2.7$	×1/2
+30	180	$85 / 2^6 = 85 \cdot 2^{-6} = 1.3$	×1/2
	…	…	

$$Radioaktivität = 85\ PBq \cdot 2^{-t/30\ Jahre}$$

Exponentielle Funktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM”)

$$y = b \cdot a^{x/k}$$

PRAKTISCHE ÄNDERUNGEN:

- sei die Basiszahl e (manchmal auch 2 oder 10)
- statt $/k$ kann man auch $\cdot p$ in den Exponenten schreiben (wo $p = 1/k$)
- sei das Exponentenvorzeichen negativ
- statt b schreiben wir y_0

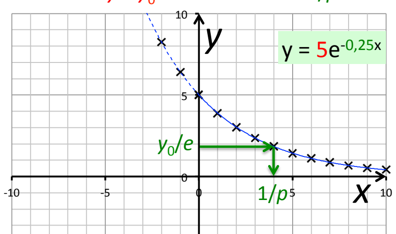
VARIABLEN: abhängige Variable, unabhängige Variable

$$y = y_0 \cdot e^{-px} = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

PARAMETER: pre-exponentieller Koeffizient, exponentielle Koeffizient

wenn $x = 0$ dann b $y = y_0$

wenn $y = y_0/e$ dann $x = 1/p = k$



explizit für y: $y = y_0 \cdot e^{-px}$

explizit für x: $x = \ln(y / y_0) / (-p)$

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM”)

$$\Delta y/y \sim \Delta x$$

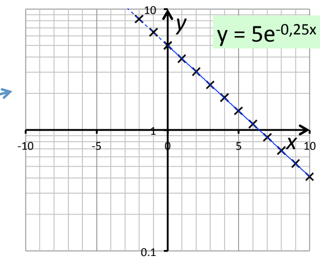
Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

Exponentielle Funktionen

Linearisierung

graphische Linearisierung:

Stelle y auf eine Log-Skala und x auf eine Lin-Skala dar. *Die Beziehung **erscheint** als linear, aber **ist** eigentlich immer noch exponentiell.*



INTEGRALFORM

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

$$\log y = \log\left(y_0 \cdot e^{-p \cdot x}\right)$$

$$\log y = \log y_0 + \log\left(e^{-p \cdot x}\right)$$

$$\log y = \log y_0 - p \cdot x \cdot \log e$$

$$\underbrace{\log y}_{y} = \underbrace{-p \cdot \log e}_{a} \cdot x + \underbrace{\log y_0}_{b}$$

y-Achsenabschnitt = $\log(y_0)$

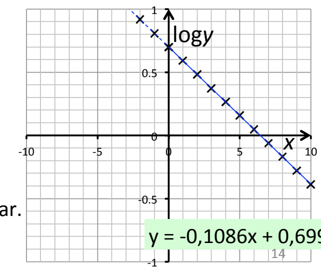
$\log(5) = 0{,}699$

Steigung = $-p \cdot \log(e)$

$-0{,}25 \cdot \log(e) = -0{,}1086$

arithmetische Linearisierung:

Stelle $\log(y)$ als Funktion von x dar. *Die Beziehung **ist** linear.*



14

Exponentielle Funktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Schwächungsgesetz (II.11)

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

#2: Boltzmannsche Verteilung (I.25)

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\Delta\varepsilon/(kT)}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

#3: Zerfallsgesetz (II.96)

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

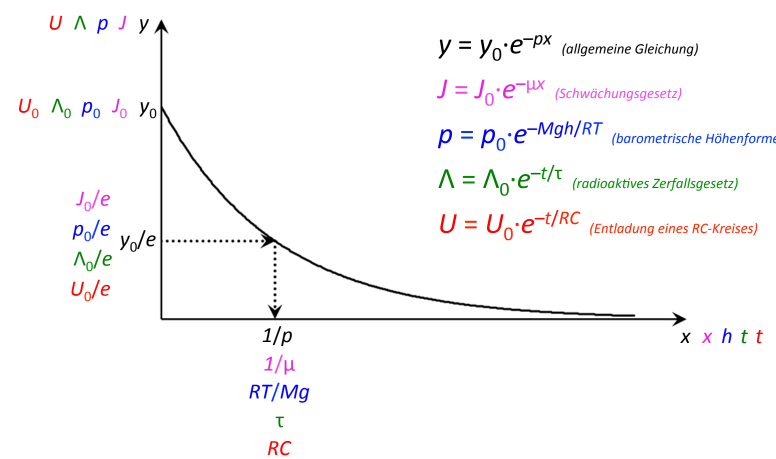
#4: Entladung eines RC-Kreises (VII.2)

$$U = U_0 \cdot e^{-t/(RC)}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

Graphik von exponentiellen Funktionen

aus der Biophysik-Formelsammlung



$y = y_0 \cdot e^{-px}$ *(allgemeine Gleichung)*

$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$ *(Schwächungsgesetz)*

$p = p_0 \cdot e^{-Mgh/RT}$ *(barometrische Höhenformel)*

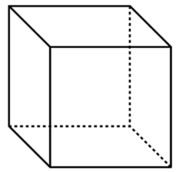
$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-t/\tau}$ *(radioaktives Zerfallsgesetz)*

$U = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ *(Entladung eines RC-Kreises)*

Potenzfunktionen

ein Beispiel

Masse ~ Volumen ~ [Körper]länge^3
Oberfläche ~ [Körper]länge^2



Potenzfunktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$$y = b \cdot x^a$$

PARAMETER: pre-exponentieller Koeffizient — Exponent

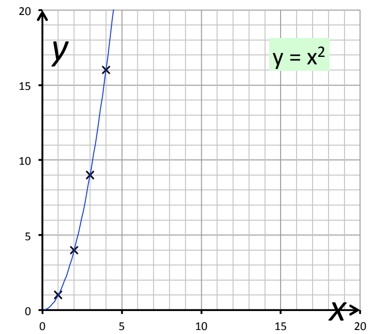
explizit für y: $y = b \cdot x^a$
explizit für x: $x = (y / b)^{1/a}$

DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

$$\Delta y/y \sim \Delta x/x$$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

wenn $x = 1$
dann $y = b$



die **indirekte Proportionalität** und die **Quadratwurzel-Funktion** sind auch Potenzfunktionen

$$y = \frac{b}{x} = b \cdot x^{-1}$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Potenzfunktionen

Linearisierung

graphische Linearisierung:
Stelle sowohl *y* als auch *x* auf Log-Skalen dar.
*Die Beziehung **erscheint** als linear aber **ist** eigentlich immer noch eine Potenzfunktion.*

INTEGRALFORM

$$y = b \cdot x^a$$

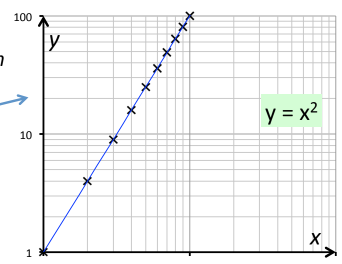
$$\log y = \log\left(b \cdot x^a\right)$$

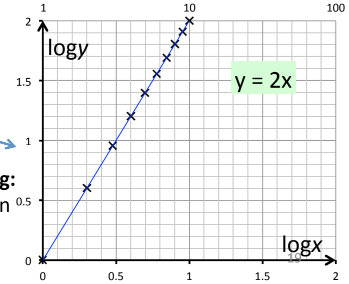
$$\log y = \log b + \log\left(x^a\right)$$

$$\log y = \log b + a \cdot \log x$$

$$\underbrace{\log y}_{y} = a \cdot \underbrace{\log x}_{x} + \underbrace{\log b}_{b}$$

y-Achsenabschnitt = log*b*
log1 = 0
Steigung = *a*
a = 2





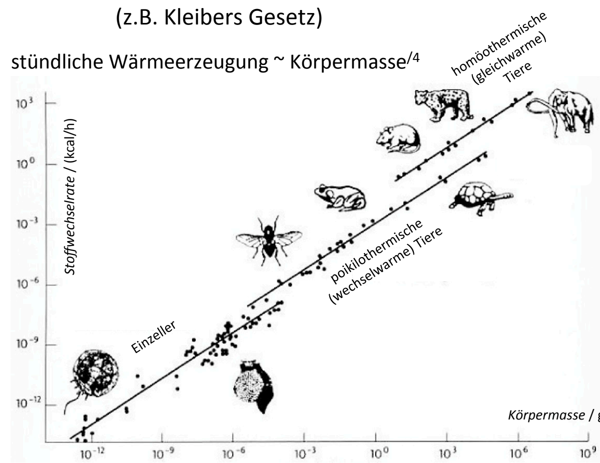
arithmetische Linearisierung:
Stelle log(*y*) als Funktion von log(*x*) dar.
*Die Beziehung **ist** linear.*

Potenzfunktionen

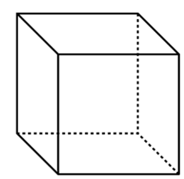
ein Beispiel

allometrisches Skalierungsgesetz
(z.B. Kleibers Gesetz)

stündliche Wärmeerzeugung ~ Körpermasse$^{3/4}$



Masse ~ Volumen ~ [Körper]länge^3
Oberfläche ~ [Körper]länge^2



Potenzfunktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung

#1: Die de Broglie-Wellenlänge (I.3)

$\lambda = h/p$

$\lambda = {\color{red}h} \cdot p^{\color{green}-1}$

$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$

#2: Stefan–Boltzmann-Gesetz (II.41)

$M_{\text{black}} = {\color{red}\sigma} \cdot T^{\color{green}4}$

$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$

#3: Duane–Hunt-Gesetz (II.80)

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_{\text{anode}}}$$

$\lambda_{\min} = {\color{red}hc/e} \cdot U^{\color{green}-1}$

$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$

#4: Die Massenabhängigkeit der Eigenfrequenz (Resonanz 6)

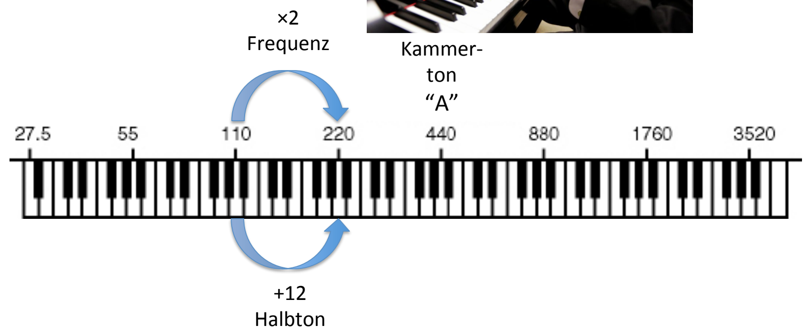
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$f_0 = {\color{red}k^{1/2}/(2\pi)} \cdot m^{\color{green}-1/2}$

$y = {\color{red}b} \cdot x^{\color{green}a}$

Logarithmusfunktionen

ein Beispiel



Logarithmusfunktionen

INTEGRALFORM („GLOBALE FORM")

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

PRAKTISCHE ÄNDERUNGEN:

- sei die Basis 10 (oder *e* oder 2)
- wenn die Basiszahl festgesetzt wird, der Faktorparameter muss so geändert werden:

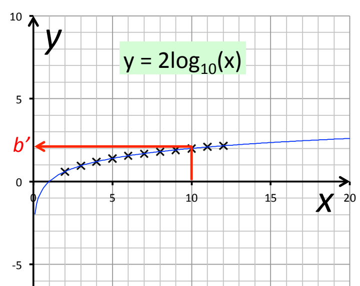
$${\color{red}b} \cdot \log_{\color{red}a}(x) = {\color{red}b/\log_{10}(a)} \cdot \log_{10}(x) = {\color{red}b'} \cdot \log_{10}(x)$$

VARIABLEN: abhängige Variable — unabhängige Variable

$$y = {\color{red}b'} \cdot \log_{10}(x)$$

PARAMETER: Faktor-parameter

wenn $x = 10$
dann $y = b'$



DIFFERENTIELLE FORM („LOKALE FORM")

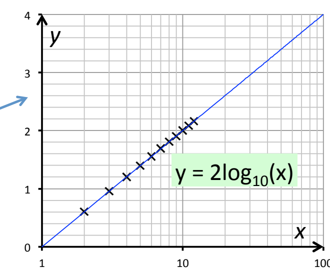
$$\Delta y \sim \Delta x / x$$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

Logarithmusfunktionen

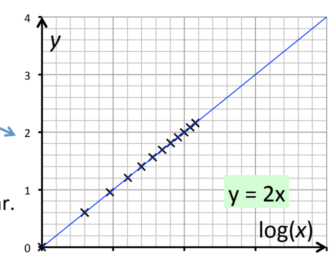
Linearisierung

grafische Linearisierung:
Stelle *y* auf eine Lin-, *x* auf eine Log-Skale dar.
*Die Beziehung **erscheint** als linear, aber **ist** eigentlich immer noch logarithmisch.*



INTEGRALFORM

$$y = b' \cdot \log_{10}(x)$$



arithmetical linearization:
Stelle *y* als Funktion von log(*x*) dar.
*Die beziehung **ist** linear.*

Logarithmusfunktionen

Beispiele aus der Biophysik-Formelsammlung ...und von woanders

#1: Die statistische Definition der Entropie
(III.72)
$S = k \ln \Omega$

$$S = k \cdot \log_e(\Omega)$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#2: Die Dezibel- (dB-) Skala
(VII.10)
$n = 10 \log A_p$

$$n = 10 \cdot \log_{10}(A_p)$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#3: Die Definition der Absorbanz
(VI.34)
$A = \lg(J_0/J)$

$$A = 1 \cdot \log_{10}\underbrace{(J_0/J)}$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

#4: Die pH-Skala

$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$

$$\mathrm{pH} = -1 \cdot \log_{10}\underbrace{([\mathrm{H}^+]/(1\ \mathrm{M}))}$$

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

Funktionen

Zusammenfassung

LINEARE FUNKTION

$\Delta y \sim \Delta x$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

y* vs. *x

EXPONENTIELLE FUNKTION

$\Delta y/y \sim \Delta x$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zu der **absoluten Änderung** der unabhängigen Variable

log*y* vs. *x*

Linearisierung

y* vs. log*x

LOGARITMUSFUNKTION

$\Delta y \sim \Delta x/x$

Die **absolute Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

log*y* vs. log*x*

POTENZFUNKTION

$\Delta y/y \sim \Delta x/x$

Die **relative Änderung** der abhängigen Variable ist proportional zur **relativen Änderung** der unabhängigen Variable

Ableitung und Integral

ein Beispiel

Δ Δ

x	y = x^2	y' = Δy/Δx	y'' = Δ(Δy/Δx)/Δx
0	0		
1	1	1	
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2

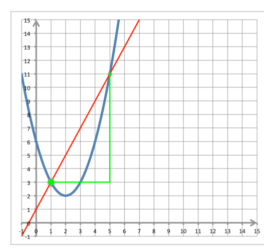
Σ Σ

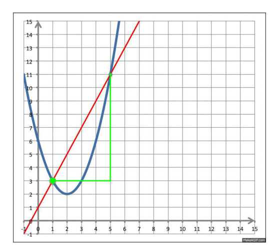
Ableitung: Steigung der Tangente

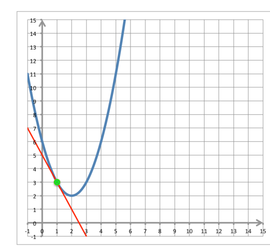
der Differenzenquotient:
$\Delta y/\Delta x$
die Steigung der **Sekante**

$\Delta \longrightarrow \mathrm{d}$

die Ableitung:
dy/dx
die Steigung der **Tangente**



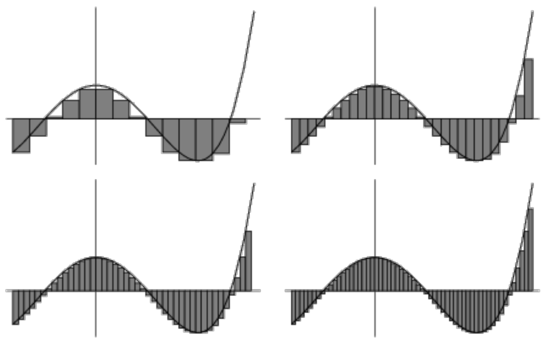




Integral: Die Fläche unter der Kurve

Area Under the Curve (AUC)

$$\Sigma \longrightarrow \int$$



Geradlinige Bewegungen

Größen, Einheiten und Gleichungen

zurückgelegte Strecke: $\Delta s = s_2 - s_1$ $[\Delta s]$ = m
Geschwingdigkeit: $v = ds/dt$ $[v]$ = m/s
Beschleunigung: $a = dv/dt$ $[a]$ = m/s²

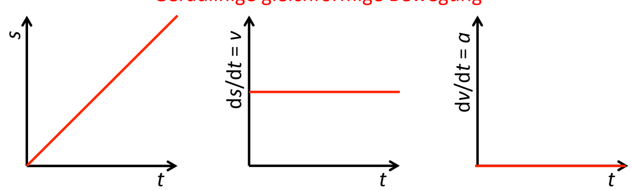
Geradlinige gleichförmige Bewegung
- $s_t = s_0 + v \cdot t$
- v = konstant
- $a = 0$

Geradlinige beschleunigte Bewegung
- $s_t = s_0 + v_0 \cdot t + a/2 \cdot t^2$
- $v_t = v_0 + a \cdot t$
- a = konstant

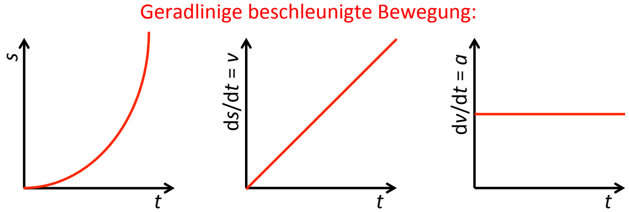
Ableitung und Integral: Anwendung

bei geradlinigen Bewegungen

Geradlinige gleichförmige Bewegung



Geradlinige beschleunigte Bewegung:

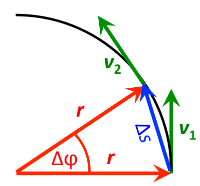


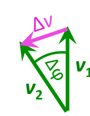
Kreisbewegung

Größen, Einheiten und Gleichungen

Winkelverschiebung: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ $[\Delta\varphi]$ = rad
Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz: $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ $[\omega]$ = rad/s
Tangentialgeschwindigkeit: $v = r \cdot \Delta\varphi/\Delta t = r \cdot \omega$ $[v]$ = m/s

Radialbeschleunigung: $a_{cp} = v^2/r = r \cdot \omega^2$ $[a]$ = m/s²





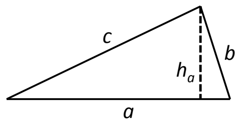
(1) Annäherung im Fall von kleinen Winkeln:
Verschiebung ≈ Bogenmaß = $v \cdot \Delta t \approx \Delta s$

(2) wegen der geometrischen Ähnlichkeit:
$\Delta v/v = \Delta s/r$

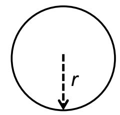
(1) + (2):
$\Delta v/v = v \cdot \Delta t/r$

$a_{cp} = v^2/r$

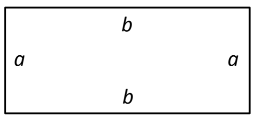
Umfang & Fläche



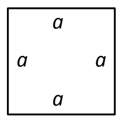
das Dreieck
Umfang: $a+b+c$
Fläche: $a*h_a/2$



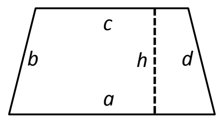
der Kreis
Umfang: $2r\pi$
Fläche: $r^2\pi$



das Rechteck
Umfang: $2*(a+b)$
Fläche: $a*b$

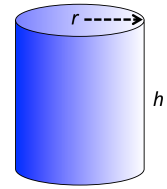


das Quadrat
Umfang: $4a$
Fläche: $a*a=a^2$



das Trapez
Umfang: $a+b+c+d$
Fläche: $(a+c)/2*h$

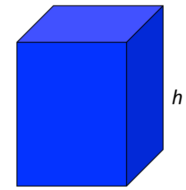
Oberfläche & Volumen



der Zylinder (offen):

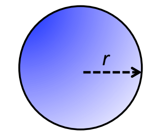
Oberfläche (nur Mantel): $2r\pi*h$

Volumen: $r^2\pi*h$



das Prisma (offen)
Oberfläche (nur Mantel):
(Umfang der Grundfläche)*h

Volumen: (Fläche der Grundfläche)*h



die Kugel:

Oberfläche: $4r^2\pi$

Volumen: $4r^3\pi/3$

Einheiten

SI Basis- & abgeleitete Einheiten

SI Basiseinheiten

Größe	Symbol	Einheit	Symbol
Länge	l, x, s, d	Meter	m
Masse	m	Kilogram	kg
Zeit (*time*)	t	Sekunde	s
Temperatur	T	Kelvin	K
el. Stromstärke	I	Ampere	A
Stoffmenge	n, N, ν [Ny]	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

SI abgeleitete Einheiten

Größe	Symbol	Einheit	Symbol	Ableitung
Geschwindigkeit	v, c	–	–	$m \cdot s^{-1}$
Beschleunigung	a	–	–	$m \cdot s^{-2}$
Kraft	F	Newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Energie	E	Joule	J	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Leistung	P	Watt	W	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Intensität	I	–	–	$kg \cdot s^{-3}$
Druck	p	Pascal	Pa	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

Einheiten – SI Vorsätze

Vorsatz	Symbol	Bedeutung	Herkunft
exa	E	$\times 10^{18} = \times 1000^6$	Gr. 6 (ἕξ = hex)
peta	P	$\times 10^{15} = \times 1000^5$	Gr. 5 (πέντε = pente)
tera	T	$\times 10^{12} = \times 1000^4$	Gr. 4 (τέτταρες = tettares), ursprünglich: Monstrum (τέρας = teras)
giga	G	$\times 10^9 = \times 1000^3$	Gr. riesig (γίγας = gigas)
mega	M	$\times 10^6 = \times 1000^2$	Gr. groß (μέγας = megas)
kilo	k	$\times 10^3 = \times 1000^1$	Gr. 1000 (χίλιοι = khilioi)
hekto	h	$\times 10^2$	Gr. 100 (ἑκατόν = hekaton)
deca	da (dk)	$\times 10^1$	Gr. 10 (δέκα = deka)
deci	d	$\times 10^{-1}$	Lat. 10 (decem)
zenti	c	$\times 10^{-2}$	Lat. 100 (centum)
milli	m	$\times 10^{-3} = \times 1000^{-1}$	Lat. 1000 (mille, *pl.* milia)
micro	µ	$\times 10^{-6} = \times 1000^{-2}$	Gr. klein (μικρός = mikros)
nano	n	$\times 10^{-9} = \times 1000^{-3}$	Gr. Zwerg (νᾶνος = nanos)
pico	p	$\times 10^{-12} = \times 1000^{-4}$	Sp. klein, bißchen (pico)
femto	f	$\times 10^{-15} = \times 1000^{-5}$	Dän. 15 (femten)
atto	a	$\times 10^{-18} = \times 1000^{-6}$	Dän. 18 (atten)

Einheiten
Umwandlungen

“mit Vorsatz” in “ohne Vorsatz”:
15 km = 15 $\cdot$ 10^3 m
15 cg = 15 $\cdot$ 10^{-2} g

“ohne Vorsatz” in “mit Vorsatz”:
15 m = 15 / 10^3 km
15 g = 15 / 10^{-2} cg

“mit Vorsatz” in “mit Vorsatz”:
15 km = 15 $\cdot$ 10^3 m = 15 $\cdot$ 10^3 / 10^{-2} cm

Einheiten mit Exponenten:
15 km^3 = 15 $\cdot$ $(10^3\ m)^3$ = 15 $\cdot$ $(10^3)^3$ m^3
15 m^3 = 15 / $(10^3)^3$ km^3

Liter in Kubikmeter und andersrum:
1 m^3 = 10 hL = 1000 L
1 dm^3 = 1 L
1 cm^3 = 1 mL
1 mm^3 = 1 µL

Zeit in Sekunden:
2 days 3 h 12 min 30 s = ((2·24+3)·60+12)·60+30 s

Grad, Bogenminute, Bogensekunde:
45° 40′ 30″ = $(45+40/60+30/60^2)°$

Grad in Radiant und andersrum:
1 rad = (360/2π)°
1° = (2π/360) rad

zusammengesetzte Einheiten:
15 kg/m^3 = 15 $\cdot$ 10^3 / $(1/(10^{-2})^3)$ g/cm^3
45 km/h = 45 $\cdot$ 10^3 / 3600 m/s

Grad Celsius in Kelvin und andersrum:
T = 15 °C = (15+273) K
T = 15 K = (15–273) °C
ΔT = 15 °C = 15 K
ΔT = 15 K = 15 °C