Aufgaben zur medizinischen Biophysik

Zusammengestellt von
Ferenc Tölgyesi

Semmelweis Universität, Institut für Biophysik und Strahlenbiologie
Budapest, 2015

Vorwort

Aufgaben- und Problemlösung sind wichtige Bestandteile des Biophysikunterrichts. Sie dienen der Vertiefung des Lehrmaterials und auch um zu überprüfen, ob man alles verstanden hat.

Die Einteilung der Aufgaben in 11 Kapitel folgt der Gliederung des Lehrbuches „Biophysik für Mediziner”. (Der Aufbau der Biophysikvorlesungen unterscheidet sich von dieser Reihenfolge.) Das 11. Kapitel enthält weitere Aufgaben in erster Linie zu solchen Praktikumsthemen, die in dem Lehrbuch nicht zu finden sind. Am Ende der Aufgabensammlung findet man die zur Lösung der Aufgaben nötigen Daten und physikalischen Konstanten.

Innerhalb eines Themas wurden die Aufgaben etwa in steigendem Schwierigkeitsgrad aufgeführt. Die ungeraden Seiten enthalten die Aufgaben, die geraden Seiten ihre Lösungen. Ausführliche Lösungswege findet man nur bei den mit dem Symbol gekennzeichneten Aufgaben. Bei den anderen sind nur die Endergebnisse angegeben.

Diese Aufgabensammlung ist das Geistesprodukt des Autorenkollektivs des Instituts für Biophysik und Strahlenbiologie.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Karim Kouz - unserem früheren Studenten - für die sprachliche Korrektur.

Die Autoren sind für jede kritische Bemerkung dankbar: tolgyesi.ferenc@med.semmelweis-univ.hu.

Budapest, 31. August 2015 Ferenc Tölgyesi

Inhaltsverzeichnis

1. Struktur der Materie

Grundbegriffe der Wechselwirkungen — Kraft, Arbeit, Energie, Leistung, Druck

1.1. Peter zieht einen mit Wasser gefüllten Eimer (m = 12 kg) aus einem 12 m tiefen Brunnen gleichmäßig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0,5 m/s. (Alle Reibungen können vernachlässigt werden.) Wie groß ist
a) die auf den gefüllten Eimer wirkende Schwerkraft,
b) die Kraft, mit der der Eimer hinaufgezogen wird,
c) die beim Ziehen verrichtete Arbeit,
d) die Leistung?

1.2. Ein Gewichtheber hebt ein Gewicht mit einer Masse von 140 kg vom Boden aus 240 cm mit einer konstanten Geschwindigkeit in einer halben Sekunde hoch. Berechnen Sie
a) die auf das Gewicht wirkende Schwerkraft,
b) die Kraft, mit der das Gewicht gehoben wird,
c) die beim Heben verrichtete Arbeit,
d) die Leistung.

1.3. Man zieht einen Schlitten gegen eine Reibungskraft mit einer konstanten Kraft von 32 N. Als Ergebnis bewegt sich der Schlitten gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m/s. Berechnen Sie
a) die in der Zeit von 10 Minuten verrichtete Arbeit,
b) die Leistung.

1.4. Berechnen Sie den Teil der Gesamtarbeit des menschlichen Herzens, der in Form von Hubarbeit verrichtet wird, wenn der linke Ventrikel während einer Kontraktion etwa 60 cm^3 Blut bis zu dem höchsten Punkt des Aortenbogens (etwa 15 cm über dem linken Ventrikel) hebt.

1.5. Während einer Kontraktion verrichtet das Herz insgesamt eine Arbeit von etwa 1,2 J. Die Kontraktion dauert etwa 0,2 s, und die Pulszahl ist 75/Minute. Berechnen Sie
a) die Gesamtarbeit des Herzens, die in einer Minute verrichtet wird,
b) die Leistung des Herzens während der Kontraktion,
c) die durchschnittliche Leistung.

1.6. Die durchschnittliche Leistung des menschlichen Herzens ist etwa 1,5 W. Wie viel Arbeit verrichtet das Herz im Laufe eines Lebens, unter der Annahme einer durchschnittlichen Lebensdauer von 70 Jahren?

1.7. Während der Einatmung wird mechanische Arbeit von etwa 0,2 J verrichtet. Die Zahl der Atemzüge sei 12/Minute. Berechnen Sie
a) die Gesamtarbeit, die ein einer Minute verrichtet wird,
b) die durchschnittliche Leistung.
c) Vergleichen Sie die Werte mit den Werten für das Herz (siehe Aufgabe 1.5).

1.8. Ausgehend von Katmandu (h = 1355 m) steigt eine Person (m = 70 kg) auf den Mount Everest (h = 8848 m). Berechnen Sie
a) die Hubarbeit des Bergsteigers (ohne Rucksack),
b) seine potenzielle Energieänderung,
c) seine potenzielle Energie auf der Spitze in Bezug auf Katmandu,
d) seine potenzielle Energie auf der Spitze in Bezug auf den Meeresspiegel.

1.1. a) Die Schwerkraft ist die Gravitationskraft, die die Erde auf den Eimer ausübt. Sie ist $F_\mathrm{S} = mg = 12 \cdot 9{,}81 = 118\ \mathrm{N}$ groß.

b) Nach der Aufgabenstellung bewegt sich der Eimer gleichmäßig, seine Beschleunigung ist gleich „0”. Nach der Grundgleichung der Mechanik (2. newtonsches Axiom) ist die Summe der auf den Eimer wirkenden Kräfte auch „0”. Deshalb muss die nach oben wirkende Zugkraft genauso groß sein, wie die nach unten wirkende Schwerkraft: $F_\mathrm{Zug} = F_\mathrm{S} = 118\ \mathrm{N}$.

c) Die Bewegungsrichtung des Eimers und die Richtung der Zugkraft stimmen überein, in diesem Fall ist die Arbeit einfach $W = F_\mathrm{Zug} \cdot s = 118 \cdot 12 = 1420$ J.

d) Zur Berechnung der Leistung braucht man noch die Zeit, während der die obige Arbeit verrichtet wurde. Die Zeit erhält man aus der zurückgelegten Strecke und der Geschwindigkeit: $t = \frac{s}{v} = \frac{12}{0{,}5} = 24$ s. Nach der Definitionsformel der Leistung ergibt sich dann $P = \frac{W}{t} = \frac{1420}{24} = 59{,}2$ W.

1.2. a) 1370 N; b) 1370 N; c) 3290 J; d) 6580 W

1.3. a) 28,8 kJ; b) 48 W

1.4. Zum ersten braucht man die Masse der angegebenen Blutmenge: $m = \rho \cdot V$, wobei V das gegebene Volumen der Blutmenge und ρ die Dichte des Blutes bezeichnen. Die Dichte entnimmt man dem Anhang: 1,05 g/cm^3. Mit diesen Werten ist die Masse: $m = \rho \cdot V = 1{,}05 \cdot 60 = 63\ \mathrm{g} = 0{,}063\ \mathrm{kg}$. Jetzt kann die Hubarbeit berechnet werden: $W_\mathrm{Hub} = mgh = 0{,}063 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 = 0{,}093$ J.

1.5. a) Da das Herz in einer Minute 75-mal schlägt, beträgt die Gesamtarbeit: $W_\mathrm{Gesamt} = 75 \cdot 1{,}2 = 90$ J.

b) Die Kontraktion dauert 0,2 s, somit ist die Leistung: $P = \frac{W}{t} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6$ W. Der Kontraktion folgt eine Pause, in der das Herz nicht arbeitet und seine Leistung auch „0” ist.

c) Die durchschnittliche Leistung erhält man, wenn man die Gesamtarbeit für eine Minute (aus dem Aufgabenteil a) durch die Gesamtzeit t_Gesamt = 1 Minute – die sowohl die aktiven als auch die passiven Zeitspannen enthält – dividiert: $\bar{P} = \frac{W_\mathrm{Gesamt}}{t_\mathrm{Gesamt}} = \frac{90}{60} = 1{,}5$ W.

1.6. 3,3 GJ (mit 70 Jahren gerechnet)

1.7. a) 2,4 J; b) 0,04 W; c) Die Werte für das Herz sind rund 40-mal größer.

1.8. a) 5,15 MJ; b) 5,15 MJ; c) 5,15 MJ; d) 6,08 MJ

1.9. Bei Zimmertemperatur bewegen sich O_2-Moleküle in der Luft mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von etwa 400 m/s. Berechnen Sie

a) die durchschnittliche kinetische Energie eines O_2-Moleküls in aJ,

b) die Lageenergie eines O_2-Moleküls in einer Höhe von 8000 m in aJ.

1.10. Betrachten wir die Achilles-Sehne als eine Schraubenfeder, deren Federkonstante $3 \cdot 10^5$ N/m beträgt.

a) Welche Kraft ist erforderlich, um die Sehne um 2 mm zu verlängern?

b) Wie viel elastische Energie wird in der Sehne gespeichert?

1.11. Beim Kauen treten relativ große Kräfte im Bereich von ca. 100 N auf. Setzen wir voraus, dass man auf einen winzigen harten Kern beißt und so diese Druckkraft auf eine kleine Fläche von 1 mm^2 ausgeübt wird. Welcher Druck entsteht dabei?

1.12. a) Berechnen Sie den hydrostatischen Druck des Wassers 10 m tief im Meer, wenn die Dichte des Meerwassers überall 1,03 g/cm^3 ist.

b) Wie groß ist der Gesamtdruck, wenn der atmosphärische Druck 101 kPa beträgt?

1.13. Ein Druck von 200 kPa wirkt auf das Trommelfell (Fläche etwa 55 mm^2) eines Tauchers etwa 10 m tief im Meer. Welche Druckkraft belastet dabei das Trommelfell?

1.14. Berechnen Sie den Schweredruck einer Quecksilbersäule mit einer Höhe von 1 mm. (Diesen Druckwert nennt man 1 mmHg.)

1.15. Wandeln Sie den Druckwert von 120 mmHg in hPa um. Benutzen Sie dazu das Ergebnis der Aufgabe 1.14.

Atomare, molekulare Wechselwirkungen

1.16. Die Energie der anziehenden Wechselwirkung zwischen einem Na^+-Ion und einem Cl^--Ion kann mit der Formel $E_{\text{anziehend}} = -\frac{1{,}436}{r}$ beschrieben werden, wobei *r* den Abstand zwischen den Ionen bezeichnet. Für die Energie der abstoßenden Wechselwirkung zwischen den zwei Teilchen gilt die Formel $E_{\text{abstoßend}} = +\frac{7{,}32 \cdot 10^{-6}}{r^8}$. In beiden Formeln ist *r* in nm einzusetzen, damit man die Energie in eV erhält. Die Gesamtenergie ist die Summe der zwei Energiewerte.

a) Stellen Sie die zwei Funktionen und die Gesamtenergie (z. B. mit Hilfe von Excel) von *r* = 0,16 nm bis *r* = 1 nm in Schritten von 0,02 nm dar.

b) Lesen Sie das Minimum der Gesamtenergiekurve ab. Wandeln Sie den Wert in aJ um.

c) Lesen Sie den Abstand ab, der zum Minimum gehört.

1.9. a) Bei dieser Aufgabe besteht die einzige „Schwierigkeit" in der Bestimmung der Masse eines einzigen O_2-Moleküls. Man kann von der durchschnittlichen molaren Masse von Sauerstoff (O_2!) ausgehen, die in jedem Periodensystem zu finden ist: $M = 2\cdot 16 = 32$ g/mol. Das ist also die Masse von einem Mol Sauerstoffmolekülen. Ein Mol enthält aber $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ Moleküle (Avogadro-Konstante). Deshalb ergibt sich die Masse eines Moleküls als $m = M/N_A$. Mit dieser kann die kinetische Energie berechnet werden:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{N_A}v^2 = \frac{1}{2}\frac{0{,}032}{6{,}02\cdot 10^{23}}400^2 = 4{,}25\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J} = 0{,}00425\ \mathrm{aJ}.$$

b) Die Lageenergie eines Moleküls ist:

$$E_{pot} = mgh = \frac{M}{N_A}gh = \frac{0{,}032}{6{,}02\cdot 10^{23}}9{,}81\cdot 8000 = 4{,}17\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J} = 0{,}00417\ \mathrm{aJ},$$ also etwa genauso groß, wie die kinetische Energie.

1.10. a) 600 N; b) 0,6 J

1.11. 100 MPa (also etwa das 1000-fache des Normaldruckes!)

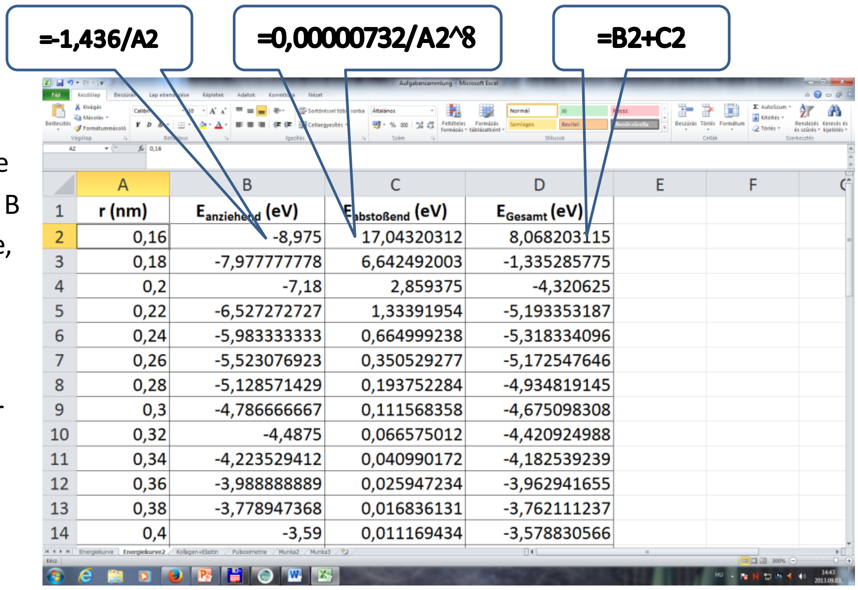
1.12. a) Zuerst soll die Dichte in die Grundeinheit umgewandelt werden: $\rho = 1{,}03$ g/cm^3 = 1030 kg/m^3. Der hydrostatische Druck ergibt sich dann als $p = \rho g h = 1030\cdot 9{,}81\cdot 10 = 101$ kPa.
b) Die freie Wasseroberfläche übermittelt den Druck der Atmosphäre ungehindert, so dass der Gesamtdruck gleich der Summe der zwei Druckwerte ist: $p_{\mathrm{Gesamt}} = p + p_{\mathrm{atm}} = 101 + 101 = 202$ kPa.

1.13. 11 N

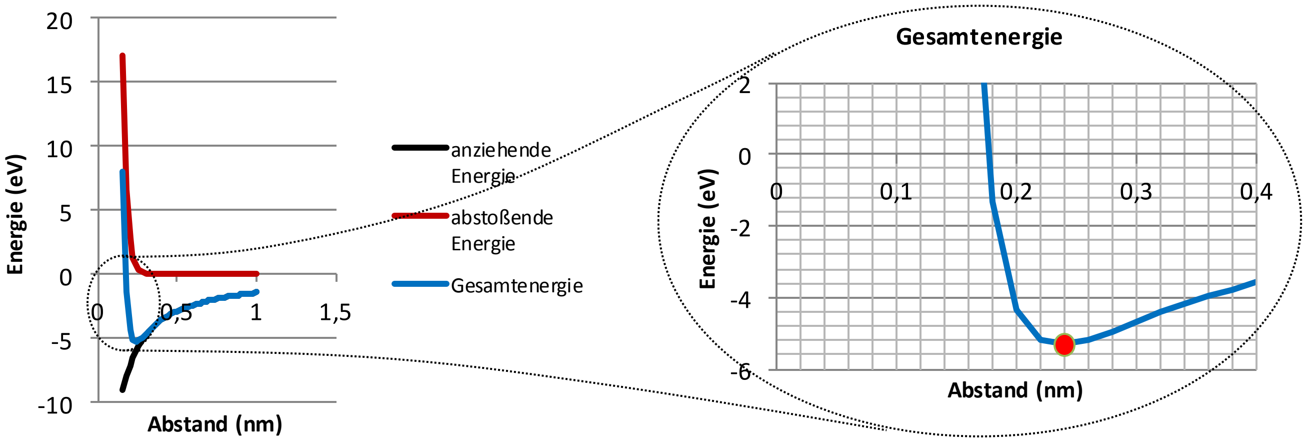
1.14. 133 Pa

1.15. 16 hPa

1.16. a) In die Spalte A einer Excel-Tabelle wurden die Abstandwerte, in die Spalte B die Funktion für die anziehende Energie, in die Spalte C die Funktion für die abstoßende Energie und in die Spalte D die Summe der zwei Energiewerte eingetragen, wie die Erklärungen zu der Tabelle zeigen. Die Werte können dann in einem xy-Diagramm dargestellt werden. Wenn man nur die Gesamtenergiekurve nahe dem Minimum darstellt (vergrößert), kann man die Koordinaten des Minimums ablesen.



	A	B	C	D
1	r (nm)	$E_{\mathrm{anziehend}}$ (eV)	$E_{\mathrm{abstoßend}}$ (eV)	E_{Gesamt} (eV)
2	0,16	-8,975	17,04320312	8,068203115
3	0,18	-7,977777778	6,642492003	-1,335285775
4	0,2	-7,18	2,859375	-4,320625
5	0,22	-6,527272727	1,33391954	-5,193353187
6	0,24	-5,983333333	0,664999238	-5,318334096
7	0,26	-5,523076923	0,350529277	-5,172547646
8	0,28	-5,128571429	0,193752284	-4,934819145
9	0,3	-4,786666667	0,111568358	-4,675098308
10	0,32	-4,4875	0,066575012	-4,420924988
11	0,34	-4,223529412	0,040990172	-4,182539239
12	0,36	-3,988888889	0,025947234	-3,962941655
13	0,38	-3,778947368	0,016836131	-3,762111237
14	0,4	-3,59	0,011169434	-3,578830566



b) –5,3 eV = –0,848 aJ (die „Bindungsenergie"); c) 0,24 nm (die „Bindungslänge") (*siehe auch Aufgabe 1.17*)

1.17. Die Bindungsenergie eines NaCl-Kristalls beträgt 640 kJ/mol.

a) Wie viel Energie fällt im Durchschnitt auf eine „einzige Bindung”?

b) Berechnen Sie die elektrische potenzielle Energie der anziehenden Wechselwirkung zwischen dem Na^+-Ion und dem Cl^--Ion, wenn der mittlere Abstand zwischen ihnen 0,24 nm beträgt.

1.18. Die Bindungsenergie der H-Brücken im Wasser beträgt 23 kJ/mol. Wie viel Energie fällt im Durchschnitt auf eine einzige H-Brücke?

1.19. Die molare Ionisationsenergie von Na-Atomen beträgt 496 kJ/mol. Wie groß ist die Ionisationsenergie für ein einziges Atom in eV?

1.20. Die Elektronenaffinität von Fluor beträgt –328 kJ/mol. Wie viel Energie (in eV) wird freigesetzt, wenn ein Fluoratom ein Elektron aufnimmt?

1.21. Bestimmen Sie die mittlere Elektronegativität und die Differenz der Elektronegativitäten der Bauatome für die folgenden Verbindungen und schätzen Sie den Bindungstyp mit Hilfe der Pauling-Skala (siehe Tabelle):

a) Cäsiumfluorid (CsF),

b) Fluor (F_2),

c) Cäsium-Metall (Cs),

d) Wasserstoff (H_2),

e) Fluorwasserstoff oder Hydrogenfluorid (HF),

f) Wasser (H_2O).

H 2,1																
Li 1,0	Be 1,5											B 2,0	C 2,5	N 3,0	O 3,5	F 4,0
Na 0,9	Mg 1,2											Al 1,5	Si 1,8	P 2,1	S 2,5	Cl 3,0
K 0,8	Ca 1,0	Sc 1,3	Ti 1,5	V 1,6	Cr 1,6	Mn 1,5	Fe 1,8	Co 1,9	Ni 1,8	Cu 1,9	Zn 1,6	Ga 1,6	Ge 1,8	As 2,0	Se 2,4	Br 2,8
Rb 0,8	Sr 1,0	Y 1,2	Zr 1,4	Nb 1,6	Mo 1,8	Tc 1,9	Ru 2,2	Rh 2,2	Pd 2,2	Ag 1,9	Cd 1,7	In 1,7	Sn 1,8	Sb 1,9	Te 2,1	I 2,5
Cs 0,7	Ba 0,9		Hf 1,3	Ta 1,5	W 1,7	Re 1,9	Os 2,2	Ir 2,2	Pt 2,2	Au 2,4	Hg 1,9	Tl 1,8	Pb 1,9	Bi 1,9	Po 2,0	At 2,2
Fr 0,7	Ra 0,9															

1.17. a) Die angegebene molare Bindungsenergie entspricht einer Gesamtenergie von $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Bindungen (Avogadro-Konstante: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mol!). Auf eine Bindung fällt somit im Durchschnitt eine Energie von $\frac{640\,000}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}06$ aJ;

b) Die elektrische potenzielle Energie ist durch die Formel $E_{\mathrm{pot}} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r}$ gegeben. Setzt man die Ladungen des Protons bzw. des Elektrons und den angegebenen Abstand ein, erhält man im absoluten Betrag eine Energie von $E_{\mathrm{pot}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{0{,}24 \cdot 10^{-9}} = 0{,}96$ aJ (*siehe auch Aufgabe 1.16*).

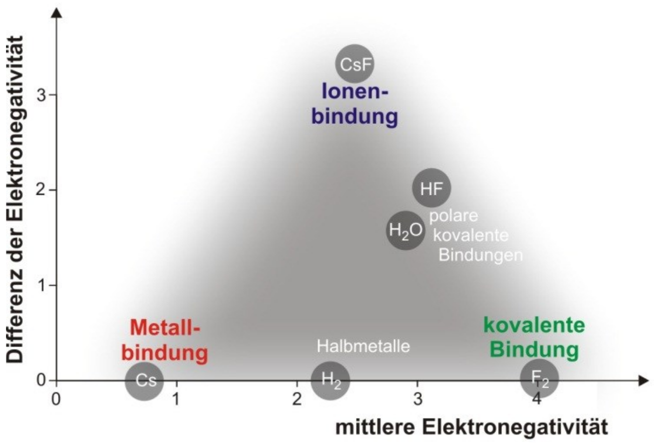
1.18. 0,0382 aJ = 0,239 eV

1.19. 5,15 eV

1.20. 3,41 eV

1.21.

a) Cäsiumfluorid (CsF):	$\overline{\mathrm{EN}} = 2{,}35$,	ΔEN = 3,3,	Ionenbindung
b) Fluor (F_2):	$\overline{\mathrm{EN}} = 4$,	ΔEN = 0,	kovalente Bindung
c) Cäsium-Metall (Cs):	$\overline{\mathrm{EN}} = 0{,}7$,	ΔEN = 0,	Metallbindung
d) Wasserstoff (H_2):	$\overline{\mathrm{EN}} = 2{,}1$,	ΔEN = 0,	gemischt kovalent und metallisch
e) Fluorwasserstoff (HF):	$\overline{\mathrm{EN}} = 3{,}05$,	ΔEN = 1,9,	gemischt kovalent und ionisch
f) Wasser (H_2O):	$\overline{\mathrm{EN}} = 2{,}8$,	ΔEN = 1,4,	gemischt kovalent und ionisch (*s. Abbildung*)



Grundeigenschaften eines Körpers — Masse, Stoffmenge, Teilchenzahl, Dichte

1.22. CO_2-Gas befindet sich in einem Behälter. Die Anzahl der Moleküle beträgt $3{,}6 \cdot 10^{21}$. Berechnen Sie
a) die Stoffmenge,
b) die Masse des Gases.

1.23. Ein Luftballon wurde mit Heliumgas mit einer Masse von 5 g gefüllt. Wie viele He-Atome befinden sich in dem Ballon?

1.24. Ein radioaktives Präparat enthält $5{,}4 \cdot 10^{19}$ radioaktive ^{59}Fe-Atome. Berechnen Sie die Gesamtmasse dieser Atome.

1.25. Ein radioaktives Jod-Präparat enthält 3 μg von einem ^{131}I-Isotop. Berechnen Sie die Anzahl der ^{131}I-Atome.

1.26. Wie viele Wassermoleküle enthält ein Glas Wasser mit einem Volumen von 2 dl bei 4°C?

1.27. Das Volumen einer Amalgamplombe beträgt 12 mm^3. Berechnen Sie ihre Masse!

1.28. Wie viele Kupferatome befinden sich in einer Kupferkugel mit einem Durchmesser von 2 cm?

1.29. Ein Gefäß enthält 5 kg Wasser. Um wie viel cm^3 und um wie viel % erhöht sich das Volumen des Wassers beim Frieren? (Als Dichte des Wassers bei 0°C kann der Wert von 1 g/cm^3 genommen werden.)

1.30. Wie viel kg wiegen 10 Liter Wasser bei 4°C und bei 80°C? (Die Dichte des Wassers beträgt 1 g/cm^3 bei 4°C und 0,97 g/cm^3 bei 80°C.)

1.31. Das Volumen eines Körpers nimmt bei Erwärmung um 20% zu. Wie und um wie viel % ändert sich seine Dichte?

1.32. Das Volumen eines Körpers nimmt beim Abkühlen um 30% ab. Wie und um wie viel % ändert sich seine Dichte?

Aggregatzustände — Gase, Flüssigkeiten, Festkörper

1.33. In einem Behälter wird Heliumgas gespeichert. Das Volumen beträgt 200 l (Liter), die Stoffmenge 24,7 mol. Berechnen Sie den in dem Behälter herrschenden Druck, wenn die Raumtemperatur 22°C beträgt. Das Wievielfache des Normaldruckes (101 kPa) entspricht dieser Druck?

1.34. Beim Einatmen atmet man etwa 0,5 l Luft ein. Wie viel Mol entspricht das, wenn der Luftdruck 101 kPa und die Temperatur 20°C betragen. (In der Rechnung kann die Luft als ideales Gas betrachtet werden.)

1.22. a) Der Zusammenhang zwischen der Zahl der Moleküle (N), der Stoffmenge (oder Molzahl, ν) und der Avogadro-Konstante ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mol — die Zahl der Moleküle in einem Mol) ist: $N = \nu \cdot N_A$. Daraus ergibt sich die Stoffmenge in Mol: $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{21}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 5{,}98$ mmol.

b) Die molare Masse von CO_2 beträgt M = 44 g/mol (s. Periodensystem). Die Masse des Gases ist: $m = \nu \cdot M = 0{,}00598 \cdot 44 = 0{,}263$ g = 263 mg.

1.23. $7{,}53 \cdot 10^{23}$

1.24. Die molare Masse des ^{59}Fe-Isotops entnimmt man der gezeigten Massenzahl: 59 g/mol. Dann ist die Lösung, ähnlich zu den früheren Aufgaben, wie folgt: $m = \nu \cdot M = \frac{N}{N_A} \cdot M = \frac{5{,}4 \cdot 10^{19}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \cdot 59 = 5{,}29$ mg.

1.25. $1{,}38 \cdot 10^{16}$

1.26. Das Volumen ist V = 2 dl = 200 ml = 200 cm^3. Die Dichte des Wassers ist ρ = 1 g/cm^3 bei 4°C. Daraus ergibt sich die Masse des angegebenen Wasservolumens: $m = \rho \cdot V = 1 \cdot 200 = 200$ g.
Die Stoffmenge (Molzahl, ν) ist $\nu = \frac{m}{M} = \frac{200}{18} = 11{,}1$ mol, da die molare Masse von H_2O 18 g/mol beträgt. Schließlich ergibt sich die Zahl der Moleküle aus $N = \nu \cdot N_A = 11{,}1 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 6{,}68 \cdot 10^{24}$.

1.27. 0,144 g

1.28. $3{,}56 \cdot 10^{23}$

1.29. Um 435 cm^3, d. h. um 8,7%

1.30. 10 kg bei 4°C und 9,7 kg bei 80°C

1.31. Das Volumen des Körpers nach der Erwärmung (V_2) ist also $V_2 = 1{,}2 \cdot V_1$, wobei V_1 das Volumen vor der Erwärmung ist. Damit kann man das Verhältnis der Dichtewerte nach und vor der Erwärmung wie folgt darstellen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{m}{V_2}}{\frac{m}{V_1}} = \frac{m}{V_2} \cdot \frac{V_1}{m} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{1{,}2 \cdot V_1} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833.$$

Dieses Ergebnis kann auch in der folgenden Form geschrieben werden: $\rho_2 = 0{,}833 \cdot \rho_1$. Man sieht, dass die Dichte abnimmt; um 16,7%.

1.32. Die Dichte nimmt um 42,9% zu.

1.33. Für eine einfache Lösung muss man das Gas als ideales Gas betrachten, für das das Gesetz $p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$ gilt, wobei R = 8,31 J/(mol·K) die universelle Gaskonstante ist. Daraus ergibt sich der gefragte Druck nach dem Einsetzen der Werte: $p = \frac{\nu \cdot R \cdot T}{V} = \frac{24{,}7 \cdot 8{,}31 \cdot (273+22)}{0{,}2} = 303$ kPa.
Beim Einsetzen muss man darauf achten, dass die Temperatur in Kelvin und das Volumen in m^3 eingesetzt werden. Da der Normaldruck 101 kPa beträgt, ist der erhaltene Druckwert das 3-fache des Normaldruckes.

1.34. 20,7 mmol

1.35. Wie groß wären die Geschwindigkeiten

a) der Sauerstoffmoleküle bzw.

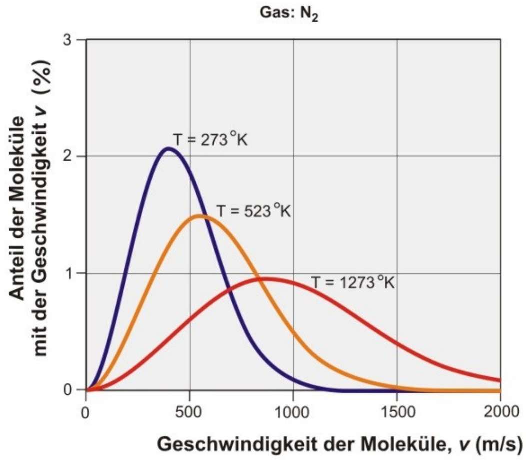
b) der Stickstoffmoleküle

der Luft im Normalzustand, wenn alle die gleiche kinetische Energie besitzen würden?

1.36. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle in Stickstoffgas (unter der Vereinfachung, dass $\overline{v^2} = \bar{v}^2$) und lesen Sie die Modalwerte für die Geschwindigkeit in der Abbildung bei einer Temperatur von

a) 273 K,

b) 1273 K ab.



1.37. Die durchschnittliche kinetische Energie der Moleküle eines Gases beträgt 0,005 aJ bei –23°C. Das Gas wird von –23°C auf 227°C erwärmt. Auf welchen Wert erhöht sich dabei die durchschnittliche kinetische Energie?

1.38. Die Temperatur eines Gases wird von –23°C auf 227°C erhöht. Um wie viel % wächst

a) die durchschnittliche kinetische Energie,

b) die durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle (unter der Vereinfachung, dass $\overline{v^2} = \bar{v}^2$)?

1.39. Wie groß ist die molare thermische Energie bei Raumtemperatur (22°C)? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Bindungsenergie der H-Brücken im Wasser (23 kJ/mol).

1.40. Angenommen die Atmosphäre wäre ruhig und ihre Temperatur überall 5°C. In welcher Höhe würde die Sauerstoffkonzentration

a) auf die Hälfte,

b) auf den *e*-ten Teil sinken?

1.41. Die Konzentrationen von zwei Molekülen sind am Meeresspiegel gleich. Die molaren Massen sind: 80 g/mol bzw. 20 g/mol. Angenommen die Atmosphäre wäre ruhig und ihre Temperatur überall 0°C. Wie groß wäre das Konzentrationsverhältnis der zwei Moleküle auf der Zugspitze in einer Höhe von 2962 m?

1.42. In einem Flammenphotometer beträgt die Temperatur der Flamme 800°C. Welcher Prozentsatz der in die Flamme injektierten Na-Atome wird angeregt, wenn die Wellenlänge des von ihnen emittierten gelben Lichtes 590 nm ist?

1.35. Nach der kinetischen Gastheorie gilt für ein Molekül: $\overline{E_{\mathrm{kin}}} = \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$, wobei *m* die Masse eines einzigen Moleküls und *k* die Boltzmann-Konstante bezeichnen, oder für ein Mol: $\overline{E_{\mathrm{kin,\,mol}}} = \frac{1}{2} M\overline{v^2} = \frac{3}{2} RT$, wobei *M* die molare Masse und *R* die universelle Gaskonstante bezeichnen. Da man die molaren Massen schneller erhalten kann als die Massen der einzelnen Moleküle, ist die Benutzung der zweiten Formel günstiger. Die Formel kann, laut der Aufgabenstellung, vereinfacht werden: Da alle Moleküle die gleiche kinetische Energie besitzen, können die Durchschnittzeichen weggelassen werden. Nach dem Auflösen der Formel nach *v* erhält man $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

In diese Formel können die Werte für O_2 (*M* = 32 g/mol = 0,032 kg/mol) bzw. für N_2 (*M* = 28 g/mol = = 0,028 kg/mol) eingesetzt werden. Die Temperatur im Normalzustand beträgt 0°C = 273 K.

a) $v = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{0{,}032}}$ =461 m/s;

b) 493 m/s

1.36. a) Mittelwert: 493 m/s, Modalwert: ≈ 400 m/s; b) Mittelwert: 1060 m/s, Modalwert: ≈ 800 m/s (Der Modalwert ist kleiner als der Mittelwert, da die in der Abbildung dargestellte maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle rechtsschief ist.)

1.37. 0,01 aJ

1.38. a) um 100%; b) um 41%

1.39. 2450 J/mol, also etwa 1/10 der Bindungsenergie der H-Brücken.

1.40. Nach der barometrischen Höhenformel gilt für die Teilchenkonzentration (*n*): $n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$, wobei n_0 die Teilchenkonzentration bei einer willkürlich festgelegten Nullhöhe bezeichnet.

a) Nach der Aufgabenstellung ist $n = \frac{n_0}{2}$. Setzt man diesen Ausdruck in die barometrische Höhenformel ein, lässt sich die Gleichung vereinfachen (der konkrete Wert von n_0 spielt also keine Rolle): $\frac{1}{2} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$. Nachdem man den reziproken Wert der Gleichung genommen und die Gleichung logarithmiert hat (die Verwendung des natürlichen Logarithmus ist günstiger!), erhält man $\ln 2 = \ln e^{\frac{Mgh}{RT}} = \frac{Mgh}{RT}$.

Die Gleichung kann nach *h* aufgelöst und anschließend die Werte eingesetzt werden:

$h = \ln 2 \cdot \frac{RT}{Mg} = \ln 2 \cdot \frac{8{,}31 \cdot (273+5)}{0{,}032 \cdot 9{,}81} = 5{,}1$ km.

b) Nach der Aufgabenstellung ist $n = \frac{n_0}{e}$. Nach ähnlichen Schritten (s.o.) erhält man:

$\frac{1}{e} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ und $1 = \ln e = \ln e^{\frac{Mgh}{RT}} = \frac{Mgh}{RT}$.

Nach dem Auflösen und Einsetzen: $h = \frac{RT}{Mg} = \frac{8{,}31 \cdot (273+5)}{0{,}032 \cdot 9{,}81} = 7{,}36$ km

1.41. 1 (schwereres Molekül) zu 2,16 (leichteres Molekül)

1.42. Laut der Boltzmann-Verteilung gilt: $n_2 = n_1 e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}$, wobei n_1 die Zahl der nicht angeregten und n_2 die Zahl der angeregten Atome bezeichnen. $\Delta\varepsilon$ ist die zur Anregung benötigte Energie für ein Atom, die aus der Wellenlänge (λ) des nach der Anregung emittierten Lichtes berechnet werden kann: $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{emittiertes Photon}} = h\frac{c}{\lambda}$, wobei *h* die plancksche Konstante und *c* die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnen. Wenn man die zwei Formeln kombiniert, erhält man den Quotienten

$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{h\frac{c}{\lambda}}{kT}} = e^{-\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{590 \cdot 10^{-9}}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (273+800)}} = 1{,}3 \cdot 10^{-10} = 1{,}3 \cdot 10^{-8}\%$. (Eigentlich bedeutet n_1 nicht die Zahl von allen Atomen, sondern nur die Zahl der nicht angeregten Atome. Die zwei Werte sind aber praktisch gleich.)

1.43. Man pustet Seifenblasen. Die Oberflächenspannung des Seifenwassers beträgt 24 mJ/m^2.

a) Wie viel Energie ist zur Vergrößerung der Oberfläche beim Pusten nötig, während der Radius der Blase von 1 mm auf 10 cm wächst?

b) Wie viel Mal größer wäre diese Energie, wenn man mit reinem Wasser Blasen pusten könnte?

1.44. Die Oberfläche eines Wassertropfens beträgt 150 mm^2. Welche Energie ist nötig zur Vergrößerung der Oberfläche um 10%?

1.45. Tausend winzige kugelförmige Quecksilbertropfen mit einem Radius von 1 mm vereinigen sich zu einem großen kugelförmigen Tropfen. Um wie viel Millijoule nimmt dabei die Oberflächenenergie ab?

1.46. In der Luft schwebt ein kugelförmiger Wassertropfen mit einem Durchmesser von 10 mm. Um wie viel Mikrojoule würde die Oberflächenenergie zunehmen, wenn die Wassermenge des Tropfens in 10 gleich kleine kugelförmige Tropfen verteilt werden würde?

1.47. Zur Bildung einer Leerstelle in Kupfer ist eine Energie von 0,9 eV nötig.

a) Wie hoch ist der prozentuelle Anteil der Leerstellen bei einer Temperatur von 1000°C?

b) Wie viele Leerstellen gibt es bei dieser Temperatur in einer Kupferkugel, deren Durchmesser bei Raumtemperatur 2 cm beträgt?

1.48. Wie groß ist die Aktivierungsenergie der Leerstellenbildung in Silber in eV, wenn bei einer Temperatur von 800°C die Zahl der Leerstellen pro Kubikmeter $3{,}6 \cdot 10^{23}$ beträgt? Die Dichte von Silber beträgt 9,5 g/cm^3 bei 800°C.

1.49. In einem Kristall ist 1% der Gitterstellen bei einer gegebenen Temperatur leer. Wie viel % wäre der Anteil der Vakanzen ungefähr, wenn die Aktivierungsenergie der Vakanzbildung das Doppelte wäre?

1.50. Wie viele thermische Fehlstellen sind in einem Eiweißmolekül, das 1400 Wasserstoffbrückenbindungen enthält bei Temperaturen von a) 37°C bzw. b) 70°C, wenn die Bindungsenergie 18,8 kJ/mol beträgt?

1.51. Welcher Prozentsatz der Bindungen ist bei Körpertemperatur aufgespalten, wenn die Bindungsenergie

a) 200 kJ/mol,

b) 10 kJ/mol beträgt?

1.52. Wie groß ist die Bindungsenergie, wenn 99,9% der Bindungen bei Körpertemperatur intakt bleiben?

1.53. Bei welcher Temperatur verdoppelt sich in Bezug auf die Körpertemperatur die Zahl der thermischen Fehlstellen in den Wasserstoffbrückenbindungen der Eiweißmoleküle, wenn die Energie der Bindungen 18,8 kJ/mol ist?

1.43. a) Die zur Vergrößerung der Oberfläche benötigte Energie erhält man als $\Delta E = \sigma \cdot \Delta A$, wobei σ die Oberflächenspannung bezeichnet. Die Zunahme der Oberfläche (ΔA) erhält man als Differenz der Oberflächen der größeren und der kleineren Kugel: $\Delta A = 2 \cdot (4R^2\pi - 4r^2\pi)$. (Die 2 erscheint in der Formel, da die Blase eine innere und eine äußere Oberfläche hat!)
Setzt man die Werte ein, erhält man:
$\Delta E = \sigma \cdot \Delta A = \sigma \cdot 2 \cdot (4R^2\pi - 4r^2\pi) = 0{,}024 \cdot 2 \cdot 4\pi(0{,}1^2 - 0{,}001^2) =$ 6,03 mJ.
b) Die Oberflächenspannung von Wasser beträgt 73 mJ/m^2 (s. „Konstanten und Daten”).
Dementsprechend wäre die benötigte Energie etwa 3-mal größer.

1.44. 1,1 µJ

1.45. Die Änderung der Oberflächenenergie ist $\Delta E = \sigma \cdot \Delta A = \sigma \cdot (4R^2\pi - 1000 \cdot 4r^2\pi)$. Die Oberflächenspannung von Quecksilber beträgt 484 mJ/m^2 (s. „Konstanten und Daten”). Den Radius des großen Tropfens erhält man aus der Erhaltung des Quecksilbervolumens: $\frac{4}{3}R^3\pi = 1000 \cdot \frac{4}{3}r^3\pi$.
Der Radius des großen Tropfens ist also $R = \sqrt[3]{1000} \cdot r = \sqrt[3]{1000} \cdot 1 = 10 \text{ mm} = 0{,}01 \text{ m}$.
Nach dem Einsetzen der Werte in die erste Gleichung erhält man:
$\Delta E = 0{,}484 \cdot (4 \cdot 0{,}01^2\pi - 1000 \cdot 4 \cdot 0{,}001^2\pi) =$ –5,47 mJ.

1.46. 26,5 µJ

1.47. a) Der Anteil der Leerstellen (Schottky-Defekte) ist
$\frac{n_S}{N} = e^{-\frac{\varepsilon_S}{k \cdot T}} = e^{-\frac{0{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1273}} = 0{,}000275 = 0{,}0275\%$. (Die Aktivierungsenergie muss in J und die Temperatur in K umgewandelt werden!).
b) Das Volumen der Kupferkugel ist: $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}1^3\pi = 4{,}189 \text{ cm}^3$.
Ihre Masse ist: $m = \rho \cdot V = 8{,}96 \cdot 4{,}189 = 37{,}53$ g (die Dichte von Kupfer beträgt nämlich 8,96 g/cm^3).
Die Stoffmenge in der Kugel ist: $\nu = \frac{m}{M} = \frac{37{,}53}{63{,}5} = 0{,}5910$ mol (die molare Masse von Kupfer beträgt 63,5 g/mol).
Letztlich ist die Zahl der Atome: $N = \nu \cdot N_A = 0{,}591 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 3{,}558 \cdot 10^{23}$.
Die Zahl der Leerstellen beträgt 0,0275% dieser Zahl, also: $n_S = 0{,}000275 \cdot 3{,}558 \cdot 10^{23} = 9{,}78\ 10^{19}$.

1.48. 1,1 eV

1.49. Nach der Aufgabenstellung ist $e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}} = 0{,}01$. Wenn die Aktivierungsenergie verdoppelt wird, ändert sich der Ausdruck wie folgt: $e^{-\frac{2 \cdot \Delta\varepsilon}{kT}} = \left(e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}\right)^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001 =$ 0,01%.

1.50. Die Zahl der Fehlstellen (Schottky-Defekte) ist $n_S = N \cdot e^{-\frac{\Delta E}{RT}}$. Setzt man die Werte ein, so erhält man
a) $n_S = 1400 \cdot e^{-\frac{18\,800}{8{,}31 \cdot 310}} = 0{,}9477 \approx 1$,
b) $n_S = 1400 \cdot e^{-\frac{18\,800}{8{,}31 \cdot 343}} = 1{,}9127 \approx 2$.

1.51. a) $1{,}9 \cdot 10^{-32}$%; b) 2,1%

1.52. 17,8 kJ/mol oder 0,0297 aJ/Bindung

1.53. 343 K

Thermische, mechanische und elektrische Eigenschaften der Stoffe

1.54. Man erwärmt 2 Liter Wasser von 4°C auf 100°C. Wie viel Energie ist dazu nötig?

1.55. Wasser mit einem Volumen von 6 dl wird von 70°C auf 35°C abgekühlt. Wie viel Wärme gibt das Wasser dabei ab?

1.56. Ein durchschnittlicher menschlicher Körper (m = 70 kg) produziert in einer Stunde 300 kJ Wärme. Um wie viel °C würde die Körpertemperatur innerhalb einer Stunde ansteigen, wenn diese Wärmemenge nicht abgegeben werden könnte?

1.57. Man wirft eine kalte Glaskugel (–20°C) in ein Glas heißen Tee (90°C). Wie groß wird die gemeinsame Temperatur im Gleichgewicht sein? Die Masse der Glaskugel beträgt 200 g, das Volumen des Tees ist 0,5 Liter. Die Dichte von Tee beträgt 0,98 g/cm^3, die spezifischen Wärmekapazitäten sind 800 J/(kg·K) für das Glas bzw. 4,2 kJ/(kg·K) für den Tee.

1.58. Ein Thermometer mit einer Wärmekapazität von 15 J/K liegt im Labor, in dem eine Temperatur von 20°C herrscht. Es wird zur Temperaturmessung in 50 ml Ethanol gestellt. Welche Temperatur zeigt das Thermometer an, wenn das Ethanol gerade vor der Messung aus dem Kühlschrank genommen wurde, in dem eine Temperatur von –25°C herrscht und das thermische Gleichgewicht zwischen Ethanol und Thermometer schnell erreicht wird.

1.59. Wie viel Wärme ist nötig zur Verdampfung von 2 ml Wasser bei 30°C?

1.60. Zwei Eiswürfel (je 20 g) mit einer Temperatur von –18°C werden in 3 dl heißes Wasser mit einer Temperatur von 95°C geworfen. Wie groß wird die Gleichgewichtstemperatur sein?

1.61. Um wie viel Zentimeter dehnt sich eine 120 m lange Eisenbahnschiene an einem heißen Sommertag aus, wenn sich ihre Temperatur von 18°C auf 63°C erhöht?

1.62. Um wie viel Millimeter verkürzt sich eine 2,5 m lange Aluminiumstange, wenn man sie aus einem warmen Haus (24°C) in die Kälte (–21°C) bringt?

1.63. Um wie viel Prozent ändert sich die Länge einer Teflonstange bei einer Temperaturänderung von 60°C?

1.64. Ein Stahlring mit einem inneren Durchmesser von 849,2 mm soll auf eine Trommel von 850 mm Durchmesser passend gelegt werden. Um wie viel °C muss der Ring mindestens erwärmt werden, um ihn kraftfrei auflegen zu können?

1.65. Um wie viel Prozent ändert sich das Volumen einer Amalgamplombe im Mund bei einer Temperaturänderung von 60°C?

1.66. Wie groß ist die relative Volumenänderung eines Eiswürfels, wenn er von 0°C auf –20°C abgekühlt wird?

1.54. Die Dichte von Wasser ist ρ = 1 g/cm^3 bei 4°C. Da das Volumen des Wassers V = 2 l = 2000 cm^3 ist, ist die Masse: $m = \rho \cdot V = 1 \cdot 2000 = 2000$ g $= 2$ kg. Die spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt 4180 J/(kg·K). Die zur Erwärmung nötige Wärme ist $Q = cm\Delta T = 4180 \cdot 2 \cdot 96 =$ 803 kJ. (Wenn es sich um Temperaturdifferenzen handelt, müssen die Temperaturwerte nicht in Kelvin umgewandelt werden — die Differenz ist nämlich sowohl in Celsius als auch in Kelvin gleich.)

1.55. 87,8 kJ

1.56. 1,22°C

1.57. Zunächst berechnen wir die Masse des Tees: $m = \rho \cdot V = 0{,}98 \cdot 500 = 490$ g $= 0{,}49$ kg. Wir bezeichnen die gemeinsame Endtemperatur mit T. Es gilt, dass die durch den heißen Tee beim Abkühlen abgegebene Wärme gleich der durch die Glaskugel bei Erwärmung aufgenommenen Wärme ist:
$c_{\text{Tee}} \cdot m_{\text{Tee}} \cdot (T_{\text{Tee}} - T) = c_{\text{Kugel}} \cdot m_{\text{Kugel}} \cdot \left(T - T_{\text{Kugel}}\right)$.
Nun setzen wir die Werte ein und lösen die Gleichung nach T auf:
$4{,}2 \cdot 0{,}49 \cdot (90 - T) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot (T - (-20))$
$185{,}22 - 2{,}058 \cdot T = 0{,}16 \cdot T + 3{,}2$
$182{,}02 = 2{,}218 \cdot T$ und dann T = 82,1°C.

1.58. –18,9°C

1.59. Das angegebene Volumen ist: V = 2 ml = 2 cm^3. Wenn man vereinfacht mit der Dichte von Wasser bei 4°C (d. h. mit 1 g/cm^3) rechnet, erhält man eine Masse von: $m = \rho \cdot V = 1 \cdot 2 = 2$ g $= 0{,}002$ kg.
Die spezifische Verdampfungswärme ($q_{\text{Verdampfung}}$) von Wasser beträgt 2400 kJ/kg bei 30°C (s. „Konstanten und Daten”). Die zur Verdampfung nötige Wärme ist dann:
$Q_{\text{Verdampfung}} = q_{\text{Verdampfung}} \cdot m = 2400 \cdot 0{,}002 =$ 4,8 kJ.

1.60. 73,4°C

1.61. Die Längenänderung der Schiene ergibt sich aus $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$, wobei l die ursprüngliche Länge, α den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten und ΔT die Temperaturänderung bezeichnen. Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient von Stahl beträgt 12·10^{-6} 1/K (s. „Konstanten und Daten“). Mit diesem Wert ergibt sich die Längenänderung: $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T = 120 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 45 =$ 6,48 cm.

1.62. 2,7 mm

1.63. Die relative Längenänderung der Stange ergibt sich als $\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 0{,}012 =$ 1,2%. (Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient von Teflon beträgt 200·10^{-6} 1/K, s. „Konstanten und Daten“.)

1.64. Bei der thermischen Ausdehnung können die Änderungen von allen linearen Größen eines Körpers wie Länge, Umfang, Durchmesser etc. mit der Formel $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$ beschrieben werden. Damit der Stahlring kraftfrei auf die Trommel aufgelegt werden kann, muss sein Durchmesser von 849,2 mm auf 850 mm erhöht werden. Aus der zitierten Formel ergibt sich dann eine Temperaturerhöhung von
$\Delta T = \frac{\Delta l}{l \cdot \alpha} = \frac{850 - 849{,}2}{849{,}2 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}$ = 78,5°C.

1.65. Die relative Volumenänderung ergibt sich aus dem Zusammenhang:
$\frac{\Delta V}{V} = \beta \cdot \Delta T = 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T = 3 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 0{,}0045 =$ 0,45%.
In der Formel bezeichnet β den räumlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten, der bei den meisten Stoffen annähernd gleich 3α ist. α von Amalgam beträgt 25·10^{-6} 1/K (s. „Konstanten und Daten“).

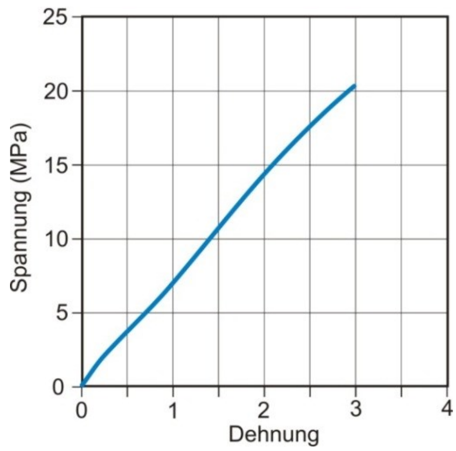
1.66. –0,00306 = –0,306%

1.67. Ein Polymethylmetacrylat(PMMA)-Stab mit einer Länge von 50 cm und einem kreisförmigen Querschnitt mit einem Radius von 5 mm wird in der Längsachse mit einer Kraft von 500 N gedehnt. Die Steifigkeit von PMMA beträgt 3 GPa, seine Zugfestigkeit ist 50 MPa.
a) Um wie viel Prozent wird der Stab gedehnt?
b) Wie lang ist der gedehnte Stab?
c) Welcher Kraft könnte der Stab, ohne zu reißen, widerstehen?

1.68. Welches Gewicht könnte man höchstens auf ein Nylonseil mit einem Durchmesser von 8 mm hängen, damit es nicht reißt? (Die Zugfestigkeit von Nylon beträgt 75 MPa.)

1.69. Einer der höchsten Zugfestigkeitswerte unter allen Stoffen wurde in den letzten Jahren für ein aus Kohlenstoffnanoröhren hergestelltes Seil gemessen. Der gemessene Wert betrug 3600 MPa. Mit welcher Kraft könnte man ein solches Seil zerreißen, wenn
a) die Querschnittsfläche des Seiles 1 mm^2 betragen würde,
b) das Seil den gleichen Durchmesser hätte wie das Nylonseil in der vorherigen Aufgabe (wenn man ein so dickes Seil aus Nanoröhren produzieren könnte!)?

1.70. In der Abbildung ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Gummisaite bis zum Reißen zu sehen. Die ursprüngliche Länge ist 20 cm. Die Verformung kann bis zum Reißen (d. h. bis zum Ende der Kurve) als elastisch betrachtet werden. Berechnen oder lesen Sie von der Abbildung ab:
a) das Young-Modul von Gummi,
b) die Zugfestigkeit,
c) die maximale Dehnung unmittelbar vor dem Reißen,
d) die Länge der Saite vor dem Moment des Reißens,
e) die Zähigkeit (spezifische Brucharbeit) von Gummi,
f) die Arbeit, die man bis zum Reißen leistet, wenn die ursprüngliche Querschnittsfläche der Saite 0,2 cm^2 beträgt.



1.71. Ein Germaniumkristall wird von Raumtemperatur (22°C) auf 28°C erwärmt. Die Breite der Bandlücke beträgt 0,7 eV.
a) Um wie viel Prozent steigt seine elektrische Leitfähigkeit?
b) Um wie viel Prozent sinkt sein spezifischer Widerstand?

1.72. Der spezifische Widerstand eines Halbleiterkristalls nimmt um 69,1% zu, wenn er von Raumtemperatur (22°C) auf 15°C abgekühlt wird. Berechnen Sie die Breite der Bandlücke in der Energiebandstruktur des untersuchten Halbleiterkristalls in eV.

1.67. a) Die Zugspannung ist bei der angegebenen Belastung:
$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{r^2\pi} = \frac{500}{0{,}005^2\pi} = 6{,}37\ \text{MPa} = 0{,}00637\ \text{GPa}.$
Die Dehnung (relative Längenänderung) ist nach dem hookeschen Gesetz:
$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{0{,}00637}{3} = 0{,}00212 = 0{,}212\%.$
b) Die Definition der Dehnung ist $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Daraus ergibt sich die Verlängerung:
$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 0{,}00212 \cdot 50 = 0{,}106\ \text{cm}.$
Die Länge des gedehnten Stabes ist 50 + 0,106 = 50,106 cm ≈ 50,1 cm.
c) Die Zugfestigkeit (Bezeichnungen: $\sigma_{\max}$ oder σ_{Zug}) ist die Spannung, bei der der ausgedehnte Körper gerade reißt. Aus dieser maximalen Spannung ergibt sich die maximale Kraft:
$F_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A = \sigma_{\max} \cdot r^2\pi = 50 \cdot 10^6 \cdot 0{,}005^2\pi = 3930$ N. Der Stab kann also, ohne zu reißen, nur Kräften, die kleiner als 3930 N sind, widerstehen.

1.68. Wie bei einer früheren Aufgabe ergibt sich die maximale Kraft, der das Nylonseil, ohne zu reißen, widerstehen kann:
$F_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A = \sigma_{\max} \cdot r^2\pi = 75 \cdot 10^6 \cdot 0{,}004^2\pi = 3770$ N.
Zwischen Masse und Gewichtskraft besteht der Zusammenhang:
$F = mg$, wobei g die Beschleunigung des freien Falls bezeichnet (g = 9,81 m/s^2).
Mit Hilfe dieses Zusammenhanges ergibt sich die Masse:
$m = \frac{F_{\max}}{g} = \frac{3770}{9{,}81} = 384$ kg.

1.69. a) 3600 N; b) 181 kN (Diese Kraft entspricht einem Gewicht der Masse von 18 400 kg = 18,4 Tonnen!)

1.70. a) Wenn man die Kurve als Gerade annimmt, für die die Gleichung $\sigma = E \cdot \varepsilon$ gilt, kann das Young-Modul E (auch Steifigkeit des Stoffes genannt) als $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ aus jedem beliebigen Punkt der Gerade bestimmt werden. Benutzen wir dafür den letzten Punkt mit den Koordinaten: σ = 20 MPa und ε = 3. Nach dem Einsetzen dieser Werte ergibt sich E: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{20}{3} = 6{,}67$ MPa.
b) Die Zugfestigkeit ist die Spannung, bei der das Reißen erfolgt (Ende der Kurve): $\sigma_{\max} = 20$ MPa.
c) $\varepsilon_{\max} = 3$.
d) Die absolute Längenänderung ergibt sich aus der Dehnung: $\Delta l = \varepsilon_{\max} \cdot l = 3 \cdot 20 = 60\ \text{cm}.$
Somit ist die Länge der gedehnten Saite: 20 + 60 = 80 cm.
e) Die Zähigkeit ergibt sich als das Flächenstück unter der Kurve. Wenn man die Kurve als Gerade annimmt, ist dieses Flächenstück: $w_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_{\max} \cdot \varepsilon_{\max} = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^6 \cdot 3 = 30 \cdot 10^6$ J/m^3.
f) Die Arbeit ergibt sich als Produkt von der Zähigkeit und dem Volumen der Saite:
$W = w_{\max} \cdot V = w_{\max} \cdot l \cdot A = 30 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4} = 120$ J.

1.71. Die elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern, wie Germanium, hängt exponentiell von der Temperatur ab: $\sigma \sim e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{2kT}}$, wobei σ die Leitfähigkeit und $\Delta\varepsilon$ die Breite der Bandlücke sind.
a) Das Verhältnis der zwei Leitfähigkeitswerte (σ_1 bei der niedrigeren und σ_2 bei der höheren Temperatur) ergibt sich als:
$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{2kT_2}}}{e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{2kT_1}}} = e^{\frac{\Delta\varepsilon}{2k}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)} = e^{\frac{0{,}7\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{295}-\frac{1}{301}\right)} = 1{,}315 = 131{,}5\%.$ Die Zunahme ist also 31,5%.
b) Der spezifische Widerstand ist der Kehrwert der Leitfähigkeit. Das Verhältnis von den zwei Widerstandwerten ist: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{1{,}315} = 0{,}76 = 76\%$. Die Abnahme ist also 24%.

1.72. 1,1 eV

2. Strahlungen und ihre Wechselwirkungen mit der Materie

Allgemeine Eigenschaften der Strahlungen — Strahlungsleistung, Strahlungsintensität, Bestrahlungsstärke

2.1. Eine punktförmige Lampe leuchtet mit einer Leistung von 100 W isotrop gleichmäßig in jede Richtung. Wie groß ist die Intensität bei einem Abstand von
a) 2 m,
b) 20 m?

2.2. Wie groß muss die Leistung einer punktförmigen isotropen Lichtquelle sein, damit bei einem Abstand von 3 m die Lichtintensität 15 W/m^2 beträgt?

2.3. Eine punktförmige Lichtquelle strahlt gleichmäßig in den Halbraum (d. h. in den Raumwinkel von 2π). Berechnen Sie die Intensität 1,5 m weit entfernt von der Quelle, wenn die ausgestrahlte Leistung 300 W beträgt.

2.4. Eine lange zylindrische Solariumlampe mit einer Länge von 2,5 m leuchtet mit einer Leistung von 100 W. Wie groß ist etwa die Intensität bei einem Abstand von
a) 1 m,
b) 2 m?

2.5. Das infrarote Licht eines CO_2 Lasers mit einer Leistung von 20 W wird senkrecht auf eine Kreisfläche von 0,1 mm Durchmesser fokussiert. Wie hoch ist dort die Intensität (Leistungsdichte) des Laserstrahls?

2.6. Eine lichtpolymerisierende Füllung wurde beim Zahnarzt mit einem Lichtstrahl der Intensität von $4{\cdot}10^3$ W/m^2 1,5 Minuten lang beleuchtet. Die auf der Strahlung senkrecht stehende beleuchtete Fläche beträgt 3 mm^2. Wie viel Energie fiel bei der Beleuchtung insgesamt auf die Füllung?

2.7. In einer strahlentherapeutischen Behandlung wird ein Röntgenstrahl der Intensität von 1,4 W/m^2 auf einen Tumor senkrecht gerichtet. Die bestrahlte Fläche beträgt 1,2 cm^2, die Behandlung dauert 8 Minuten lang. Wie viel Energie fällt auf den Tumor während der Bestrahlung?

2.8. Ein Lichtbündel mit der Intensität von 400 W/m^2 fällt schräg auf eine Fläche. Die Richtung des Lichtbündels und die Normale der Fläche schließen einen Winkel von 80° ein. Wie groß ist die Bestrahlungsstärke auf der Fläche?

2.9. Die Intensität der Sonnenstrahlen an einem Strand beträgt 800 W/m^2. Ein Strandgast nimmt ein halbstündiges Sonnenbad. Dabei ist eine Hautoberfläche von 0,6 m^2 den Sonnenstrahlen ausgesetzt. Berechnen Sie die Bestrahlungsstärke auf der Hautoberfläche des Strandgastes und die einfallende Energie, wenn die Sonnenstrahlen mit der Körperoberfläche einen Winkel von
a) 90°,
b) 45°,
c) 0° bilden.

2.1. Laut der Aufgabenstellung verteilt sich die Strahlungsleistung gleichmäßig auf einer Kugelfläche, die man mit $A = 4\pi r^2$ berechnen kann. Diese Fläche ist in die Definitionsformel der Intensität einzusetzen.

a) $J = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta P}{4\pi r^2} = \frac{100}{4\pi \cdot 2^2} =$ 1,99 W/m^2.

b) $J = \frac{100}{4\pi \cdot 20^2} =$ 0,0199 W/m^2. Bei einem 10-fachen Abstand fällt die Intensität also auf 1/100.

2.2. 1700 W

2.3. 21,2 W/m^2

2.4. Die lange zylindrische Solariumlampe kann annähernd als Linienstrahler betrachtet werden, dessen ausgestrahlte Leistung sich auf die Mantelfläche eines Zylinders verteilt. Die Mantelfläche berechnet sich als: $A = 2\pi \cdot r \cdot l$. Diese Fläche ist in die Definitionsformel der Intensität einzusetzen.

a) $J = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta P}{2\pi \cdot r \cdot l} = \frac{100}{2\pi \cdot 1 \cdot 2{,}5} =$ 6,37 W/m^2.

b) $J = \frac{100}{2\pi \cdot 2 \cdot 2{,}5} =$ 3,18 W/m^2. Bei dem doppelten Abstand fällt die Intensität also auf die Hälfte.

2.5. $2{,}5 \cdot 10^9$ W/m^2 (!)

2.6. Die bestrahlte Fläche ist: ΔA = 3 mm^2 = $3 \cdot 10^{-6}$ m^2. Die Bestrahlungszeit ist: Δt = 1,5 min = 90 s. Laut der Definition der Strahlungsintensität (J) bzw. Strahlungsleistung (P) ist: $J = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta A}$. Diese Formel kann nach ΔE aufgelöst werden:

$\Delta E = J \cdot \Delta t \cdot \Delta A = 4 \cdot 10^3 \cdot 90 \cdot 3 \cdot 10^{-6} =$ 1,08 J.

2.7. 80,6 mJ

2.8. Die Bestrahlungsstärke ist gleich der Strahlungsintensität, falls die bestrahlte Fläche senkrecht zum Strahlungsbündel steht. Ist dies nicht so, dann ist die Bestrahlungsstärke kleiner: $E = J \cdot \cos a$, wobei α der Winkel zwischen der Strahlungsrichtung und der Normalen der Fläche ist. Nach dem Einsetzen der Werte erhält man: $E = J \cdot \cos a = 400 \cdot \cos 80° = 400 \cdot 0{,}17365 =$ 69,5 W/m^2.

2.9. a) Bestrahlungsstärke: 800 W/m^2, Energie: 864 kJ;

b) Bestrahlungsstärke: 566 W/m^2, Energie: 611 kJ;

c) Bestrahlungsstärke: 0, Energie: 0

Licht — geometrische Optik

2.10. Die Lichtgeschwindigkeit ist in einem Medium um 25% kleiner als im Vakuum. Berechnen Sie die absolute Brechzahl des Mediums.

2.11. Berechnen Sie die Lichtgeschwindigkeit in Diamant.

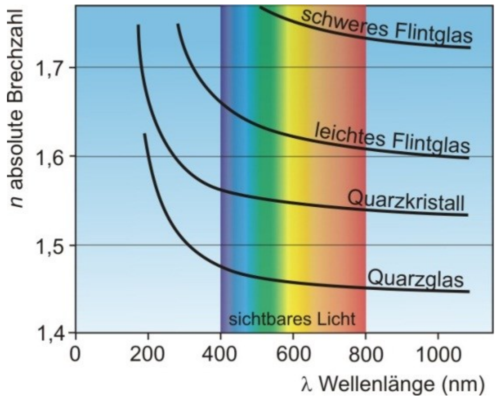
2.12. Ein Lichtstrahl fällt unter einem Einfallswinkel von 70° aus der Luft auf eine Wasseroberfläche. Ein Teil des Strahls dringt in das Wasser ein.
a) Berechnen Sie den Brechungswinkel dieses Strahls!
b) Welchen Winkel bilden der gebrochene Strahl und der reflektierte Strahl?

2.13. Ein Lichtstrahl fällt streifend (d. h. $\alpha = 90°$) aus der Luft auf eine Wasseroberfläche. Berechnen Sie den Brechungswinkel des in das Wasser eindringenden Lichtstrahls.

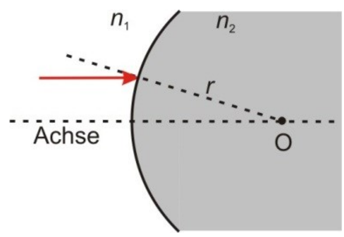
2.14. Bestimmen Sie den Winkel der Totalreflexion, wenn das Licht aus Glas (n_{Glas} = 1,5) in Wasser tritt.

2.15. Berechnen Sie den Grenzwinkel für die Grenzfläche Glas/Luft, wenn n_{Glas} = 1,5 ist.

2.16. Die Dispersion von verschiedenen Gläsern ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Weißes Licht fällt unter einem Einfallswinkel von 60° auf die Grenzfläche Luft/leichtes Flintglas. Berechnen Sie aufgrund der Daten der Abbildung die Differenz der Brechungswinkel von der violetten (λ = 400 nm) und der roten (λ = 800 nm) Komponente des einfallenden Lichtes.



2.17. Ein Lichtstrahl fällt parallel zur optischen Achse, 10 mm weit von ihr entfernt, auf eine gekrümmte konvexe Grenzfläche (n_1 = 1, und n_2 = 1,4). Der Krümmungsradius r beträgt 25 mm. Berechnen Sie
a) den Einfallswinkel,
b) den Brechungswinkel.
c) In welchem Medium liegt der Schnittpunkt des gebrochenen Strahls (oder seiner Fortsetzung) und der Achse (d. h. der Fokus)?
d) Wie weit liegt der Fokus vom Punkt O entfernt?
e) Berechnen Sie den Abstand des Fokus von der Grenzfläche (d. h. die Brennweite).
f) Berechnen Sie die Brechkraft der Grenzfläche (mit Hilfe der Formel für achsennahe Strahlen).
g) Berechnen Sie die Brennweite in dem zweiten Medium (mit Hilfe der Formel für achsennahe Strahlen). Um wie viel Prozent weicht diese Brennweite von dem Wert aus Teil e ab? Wie ist diese Differenz zu erklären?



2.10. Die absolute Brechzahl eines Mediums ist: $n = \frac{c}{c_M}$, wobei c die im Vakuum und c_M die in dem Medium geltende Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Nach der Aufgabenstellung ist: $c_M = 0{,}75c$. Nach dem Einsetzen der Werte: $n = \frac{c}{c_M} = \frac{c}{0{,}75c} = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}333$.

2.11. $1{,}24 \cdot 10^8$ m/s

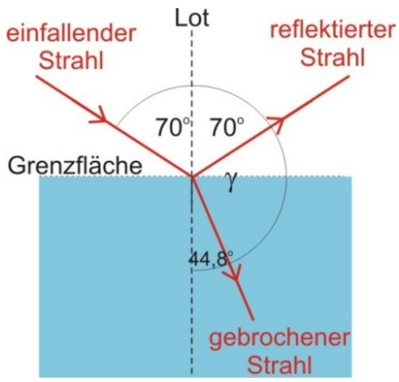
2.12. Die absoluten Brechzahlen sind praktisch 1 für Luft bzw. 1,333 für Wasser.

a) Nach dem Brechungsgesetz gilt: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$, wobei n_1 die absolute Brechzahl des ersten Mediums (in diesem Fall Luft) und n_2 die des zweiten Mediums (in diesem Fall Wasser) bezeichnen. Aus dem Gesetz ergibt sich der Brechungswinkel β:

$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha = \frac{1}{1{,}333}\sin 70° = \frac{1}{1{,}333}0{,}9397 = 0{,}70495$.

$\beta = \sin^{-1} 0{,}70495 = 44{,}8°$,

wobei $\sin^{-1}$ die inverse Funktion der Sinusfunktion ist.



b) Die drei Winkel (Reflexionswinkel, Brechungswinkel und γ) ergeben 180° (siehe Abbildung). Daraus folgt: $\gamma = 180° - 70° - 44{,}8° = 65{,}2°$.

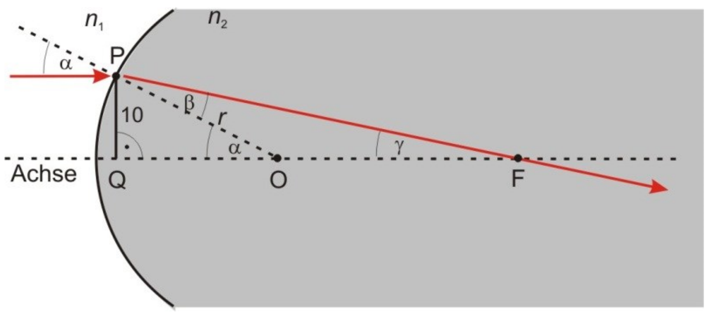
2.13. 48,6°

2.14. Der Winkel der Totalreflexion ist der Grenzwinkel (α_G). Wenn man das Brechungsgesetz für diese Situation (wenn also $\alpha = \alpha_G$ und $\beta = 90°$ sind) aufschreibt, erhält man: $\frac{\sin\alpha_G}{\sin 90°} = \frac{1{,}333}{1{,}5}$, da das zweite Medium Wasser mit einer Brechzahl von 1,333 ist. Aus der Gleichung erhält man den Grenzwinkel von:

$\sin\alpha_G = \frac{1{,}333}{1{,}5}\sin 90° = \frac{1{,}333}{1{,}5}\cdot 1 = 0{,}8887$ und $\alpha_G = \sin^{-1} 0{,}8887 = 62{,}7°$.

2.15. 41,8°

2.16. etwa 1,09°



2.17. a) Der Einfallswinkel α ist auch in dem rechtwinkligen Dreieck OPQ zu finden. Für dieses Dreieck kann man schreiben: $\sin\alpha = \frac{10}{r} = \frac{10}{25} = 0{,}4$.

Daraus ergibt sich: $\alpha = \sin^{-1} 0{,}4 = 23{,}6°$.

b) Aus dem Brechungsgesetz ergibt sich β:

$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha = \frac{1}{1{,}4}\cdot 0{,}4 = 0{,}2857$ und $\beta = \sin^{-1} 0{,}2857 = 16{,}6°$.

c) Da der Strahl zum Lot hin gebrochen wird, liegt der Schnittpunkt im zweiten Medium (Punkt F).

d) Den gefragten Abstand OF kann man aus dem Dreieck OPF erhalten. Bei diesem gilt: $\alpha = \beta + \gamma$, woraus sich γ ergibt: $\gamma = \alpha - \beta = 23{,}6° - 16{,}6° = 7°$. Nach dem Sinussatz ist: $\frac{\mathrm{OF}}{r} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Daraus ergibt sich OF:

$\mathrm{OF} = r \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 25 \cdot \frac{\sin 16{,}6°}{\sin 7°} = 25 \cdot \frac{0{,}28569}{0{,}12187} = 58{,}6$ mm.

e) Der Abstand des Punktes F von der Grenzfläche ist: 25 mm + 58,6 mm = 83,6 mm.

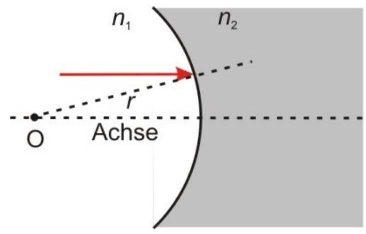
f) Für achsennahe Strahlen gilt: $D = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{1{,}4-1}{0{,}025} = 16$ dpt.

g) Für achsennahe Strahlen gilt: $f_2 = \frac{n_2}{D} = \frac{1{,}4}{16} = 0{,}0875\ \mathrm{m} = 87{,}5$ mm. Dieser Wert ist um 4,46% höher, als die im Punkt e) berechnete richtige Brennweite (83,6 mm). Die Erklärung für die Abweichung besteht darin, dass die von der Achse 10 mm weit entfernt laufenden Strahlen nicht mehr als achsennahe Strahlen betrachtet werden können. Unterschiedlich weit von der Achse laufende Strahlen haben unterschiedliche Brennweiten — diese Beobachtung nennt man sphärische Aberration.

2.18. Ein Lichtstrahl fällt parallel zur optischen Achse — 2 mm weit von ihr entfernt — auf eine gekrümmte konkave Grenzfläche (n_1 = 1 und n_2 = 1,4). Der Krümmungsradius beträgt –25 mm. Berechnen Sie

a) den Einfallswinkel,

b) den Brechungswinkel.



c) In welchem Medium liegt der Schnittpunkt des gebrochenen Strahls (oder seiner Fortsetzung) und der Achse (d. h. der Fokus)?

d) Wie weit liegt der Fokus vom Punkt O entfernt?

e) Berechnen Sie den Abstand des Fokus von der Grenzfläche (d. h. die Brennweite).

f) Berechnen Sie die Brechkraft der Grenzfläche (mit Hilfe der Formel für achsennahe Strahlen).

g) Berechnen Sie die Brennweite in dem ersten Medium (mit Hilfe der Formel für achsennahe Strahlen). Um wie viel Prozent weicht diese Brennweite von dem Wert aus Teil e ab? Wie ist diese Differenz zu erklären?

2.19. Lösen Sie die vorherige Aufgabe mit den ausgetauschten Medien und Brechzahlwerten, also n_1 = 1,4 und n_2 = 1.

2.20. a) Berechnen Sie die Brechkraft der Luft/Wasser-Grenzfläche eines kugelförmigen Wassertropfens mit einem Durchmesser von 1 cm (für achsennahe Strahlen).

b) Wie groß wäre die Brennweite dieser Grenzfläche in dem Wassertropfen?

2.21. a) Wie groß ist die Brechzahl einer Glaskugel, wenn die Brennweite der Grenzfläche Luft/Glas im Glas (für achsennahe Strahlen) gerade gleich dem Durchmesser der Glaskugel ist?

b) Wie groß müsste die Brechzahl sein, damit der Brennpunkt innerhalb der Glaskugel liegt?

2.22. Lichtstrahlen fallen aus der Luft auf eine konkave sphärische Glasfläche mit einem Radius von 12 cm. Der Brechungsindex von Glas beträgt 1,6. Berechnen Sie die Brechkraft der Grenzfläche.

2.23. Eine symmetrische Konvexlinse besitzt einen Krümmungsradius von 25 cm. Der Brechungsindex des Linsenstoffes beträgt 1,4. Berechnen Sie

a) die Brechkraft,

b) die Brennweite.

2.24. Aus Flintglas (n = 1,6) möchte man eine starke symmetrische Konvexlinse mit einer Brechkraft von 25 dpt schleifen. Wie groß muss der Krümmungsradius der Linse sein?

2.25. Eine Brillenlinse ist 5 dpt "stark". Geben Sie die Brennweite der Linse in cm an!

2.26. Die Brechkraft einer bikonvexen Glaslinse (n_{Glas} = 1,5) hat einen Wert von 12 dpt in Luft. Welchen Wert nimmt die Brechkraft an, wenn die Linse unter Wasser (n_{Wasser} = 1,333) gehalten wird?

2.27. Eine symmetrische Konvexlinse besitzt einen Krümmungsradius von 5 cm. Die Linse besteht aus leichtem Flintglas, dessen Dispersion in der Abbildung von der Aufgabe 2.16 zu sehen ist. Diese Dispersion führt zu einem Linsenfehler, der sog. chromatischen Aberration. Berechnen Sie mit Hilfe der Brechzahlwerte aus der Abbildung die Brennweite

a) für blaues Licht (λ = 400 nm),

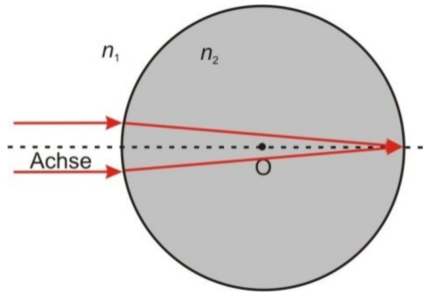
b) für rotes Licht (λ = 800 nm).

2.18. a) 4,59°; b) 3,28°; c) Der Schnittpunkt der Fortsetzung des gebrochenen Strahls mit der Achse liegt in dem ersten Medium; d) 62,6 mm; e) 87,6 mm; f) –16 dpt; g) –87,5 mm; abgesehen von dem Vorzeichen, liegen die zwei Werte innerhalb des Rundungsfehlers. Es gibt also praktisch keine Differenz, da die von der Achse 2 mm weit entfernt laufenden Strahlen schon als achsennahe Strahlen betrachtet werden können.

2.19. a) 4,59°; b) 6,43°; c) in dem zweiten Medium; d) 87,2 mm; e) 62,2 mm; f) +16 dpt; g) 62,5 mm; die zwei Werte liegen also innerhalb des Rundungsfehlers. Es gibt praktisch keine Differenz, da die von der Achse 2 mm weit entfernt laufenden Strahlen schon als achsennahe Strahlen betrachtet werden können.

2.20. a) 66,6 dpt; b) 2 cm (Das ist aber unmöglich, da dieser Wert größer ist, als der Durchmesser des Tropfens. Der Fokus kann sich also nicht in der Kugel befinden.)

2.21. a) Die Brechkraft der Luft/Glas-Grenzfläche ist:



$D = \frac{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}}{r}$ und die Brennweite im Glas:

$f_{\text{Glas}} = \frac{n_{\text{Glas}}}{D} = \frac{n_{\text{Glas}}}{\frac{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}}{r}} = \frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}} \cdot r.$

Nach der Aufgabenstellung ist diese Brennweite gleich dem Durchmesser: $\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}} \cdot r = 2r.$

In der Gleichung kann man *r* kürzen:

$\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}} = 2$. Wenn man die Brechzahl von Luft (1) einsetzt, erhält man: $\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - 1} = 2$

$n_{\text{Glas}} = 2(n_{\text{Glas}} - 1) = 2n_{\text{Glas}} - 2$

$n_{\text{Glas}} = 2.$

Eine Glaskugel kann die aus der Luft parallel eintretenden Lichtstrahlen nur dann gerade auf die innere Fläche der Kugel fokussieren, wenn ihre Brechzahl 2 beträgt. Falls ihre Brechzahl kleiner als 2 ist, werden die Lichtstrahlen weniger stark gebrochen und schneiden weder die Achse, noch schneiden sie einander in der Kugel, sondern nur außerhalb der Kugel.

b) Damit der Brennpunkt innerhalb der Glaskugel liegt, muss die Brennweite kleiner sein als der Durchmesser: $\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}} \cdot r < 2r$. Wie in ähnlichen Schritten früher folgt: $\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}}} < 2$

$\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Glas}} - 1} < 2$

$n_{\text{Glas}} < 2n_{\text{Glas}} - 2$

$2 < n_{\text{Glas}}$. Damit der Brennpunkt also nicht gerade auf der inneren Fläche der Kugel, sondern innerhalb der Kugel, liegt, müsste ihre Brechzahl größer sein als 2.

2.22. –5 dpt

2.23. a) Die Linsenschleiferformel ist für eine symmetrische Linse: $D = (n-1) \cdot \frac{2}{r}$, wobei *n* die absolute Brechzahl des Linsenmaterials ist und *r* den Krümmungsradius bezeichnet. Nach dem Einsetzen der Werte erhält man:

$D = (n-1) \cdot \frac{2}{r} = (1{,}4 - 1) \cdot \frac{2}{0{,}25} = 3{,}2$ dpt.

b) Die Brennweite ist bei einer symmetrischen Linse einfach gleich dem reziproken Wert der Brechkraft:

$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{3{,}2} = 0{,}313\ \text{m} = 31{,}3$ cm.

2.24. 4,8 cm

2.25. 20 cm

2.26. 4 dpt

2.27. a) $n = 1{,}66$, daraus $f = 3{,}79$ cm; b) $n = 1{,}61$, daraus $f = 4{,}1$ cm

2.28. Eine Konvexlinse der Brechkraft von 3,33 dpt entwirft ein Bild von einem 70 cm entfernten und 10 cm großen Gegenstand.

a) Berechnen Sie die Brennweite.

b) Ermitteln Sie die Bildweite und -größe durch Berechnung.

c) Ermitteln Sie die Bildweite und -größe durch maßstäbliche Konstruktion.

d) Berechnen Sie die Vergrößerung.

2.29. Vor eine konvexe Linse wird in einem Abstand von 12 cm ein Gegenstand gestellt. Das Bild entsteht hinter der Linse in einem Abstand von 36 cm. Berechnen Sie

a) die Brennweite der Linse,

b) ihre Brechkraft,

c) die Vergrößerung.

d) Konstruieren Sie maßstäblich den Verlauf der ausgezeichneten Strahlen.

2.30. Durch eine Lupe der Brechkraft von 10 dpt beobachtet man einen 3 mm großen Gegenstand. Die Lupe steht 5 cm weit entfernt vom Gegenstand. Berechnen Sie

a) die Brennweite der Lupe,

b) die Bildweite,

c) die Größe des Bildes,

d) die Vergrößerung.

e) Konstruieren Sie maßstäblich die Bildentstehung.

f) In welchem Abstand (ausgehend vom Gegenstand) müsste man die Lupe halten, damit man den Gegenstand 5mal größer sieht?

Licht — Wellencharakter, Teilchencharakter

2.31. Berechnen Sie die Frequenzgrenzen des sichtbaren Bereiches in THz!

2.32. Blaues Licht der Frequenz von 720 THz dringt aus der Luft ins Wasser. Berechnen Sie

a) die Wellenlänge des Lichtes in der Luft,

b) die Frequenz im Wasser,

c) die Wellenlänge im Wasser.

d) Was für eine Farbe hat dieses Licht für einen Beobachter im Wasser?

2.28. a) Die Brennweite ergibt sich aus der Formel: $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{3{,}33} = 0{,}300\ \mathrm{m} = 30$ cm.

b) Die Linsengleichung besagt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

Die Bildweite b kann man aus dieser Gleichung, wie die folgenden Schritte zeigen, erhalten:

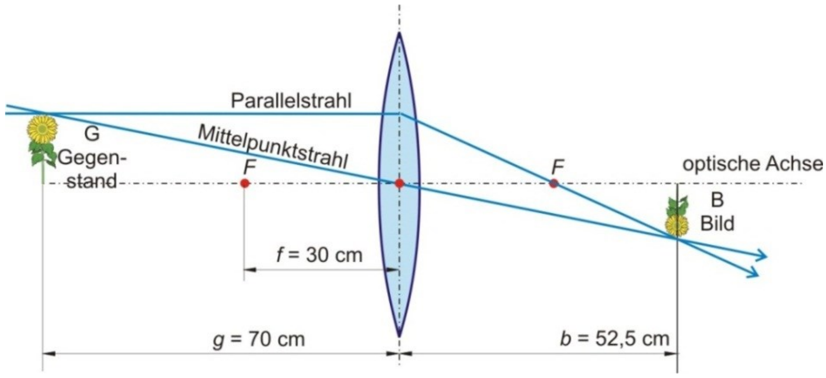
$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g-f}{f \cdot g}$

$b = \frac{f \cdot g}{g-f} = \frac{30 \cdot 70}{70-30} = 52{,}5$ cm.

Der Quotient aus der Bildweite und der Gegenstandweite ist gleich dem Quotienten aus der Bildgröße und der Gegenstandgröße: $\frac{b}{g} = \frac{B}{G}$.

Daraus ergibt sich die Größe des Bildes: $B = G \cdot \frac{b}{g} = 10 \cdot \frac{52{,}5}{70} = 7{,}5$ cm.

c) Zur Konstruktion des Bildes können von den drei ausgezeichneten Strahlengängen, d. h. Parallelstrahl, Mittelpunktstrahl und Brennpunktstrahl, zwei beliebige verwendet werden. In der folgenden Abbildung werden die ersten zwei benutzt:



d) $V = \frac{B}{G} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75$. Es handelt sich also eigentlich um eine Verkleinerung (s. Abbildung).

2.29. a) 9 cm; b) 11,1 dpt; c) 3

2.30. a) 10 cm; b) –10 cm; c) 6 mm; d) –2; f) 8 cm

2.31. Der sichtbare Bereich ist der Wellenlängenbereich 400 nm – 800 nm. Die entsprechenden Frequenzwerte ergeben sich aus dem Zusammenhang: $c = \lambda \cdot f$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die Frequenz ergibt sich also: $f = \frac{c}{\lambda}$. Einerseits: $\frac{3 \cdot 10^8}{800 \cdot 10^{-9}} = 3{,}75 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz} = 375$ THz, andererseits: $\frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} = 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz} = 750$ THz.

2.32. a) 417 nm; b) 720 THz; c) 313 nm; d) Blau

2.33. Zwei Lichtwellen der gleichen Frequenz und der gleichen Amplitude (A) interferieren miteinander. Wie groß ist die resultierende Amplitude, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Wellen 90° beträgt?

2.34. Zwei Lichtwellen der gleichen Frequenz und der gleichen Amplitude (A) interferieren miteinander. Wie groß ist die resultierende Amplitude, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Wellen $\pi/2$ beträgt?

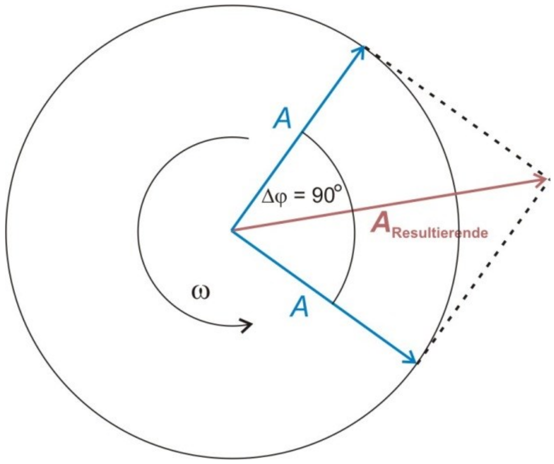
2.35. Zwei Lichtwellen der gleichen Frequenz und der gleichen Amplitude (A) interferieren miteinander. Wie groß ist die resultierende Amplitude, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Wellen 0 beträgt?

2.36. Zwei Lichtwellen der gleichen Frequenz und der gleichen Amplitude (A) interferieren miteinander. Wie groß ist die resultierende Amplitude, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Wellen 2π beträgt?

2.37. Zwei Lichtwellen der gleichen Frequenz und der gleichen Amplitude von (A) interferieren miteinander. Wie groß ist die resultierende Amplitude, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Wellen 180° beträgt?

2.38. Ein optisches Gitter wird mit einem Laserstrahl mit einer Wellenlänge von 514 nm beleuchtet. Das dabei entstehende Beugungsbild wird an einem 2 m entfernten Schirm beobachtet. Der Abstand zwischen dem Hauptmaximum und dem Nebenmaximum 1-ter Ordnung beträgt 10,3 cm. Berechnen Sie die Gitterkonstante des Gitters.

2.33. Die zwei Wellen können am Ort der Interferenz als zwei sinusförmige Schwingungen behandelt werden. Somit handelt es sich in der Aufgabe um die Addierung von zwei Schwingungen mit den gleichen Frequenzen und den gleichen Amplituden, aber mit unterschiedlichen Phasen. Zur einfachen Lösung der Aufgabe kann man die eine Definition der Sinusfunktion benutzen: Sie ist die Projektion des gleichförmig drehenden Einheitsvektors auf die y-Achse (s. Abb. II.17 in dem Lehrbuch). Aufgrund dieser Definition kann man jeder harmonischen Schwingung einen sich gleichmäßig drehenden Vektor zuordnen, wobei die Vektorlänge gleich der Schwingungsamplitude A und die Drehgeschwindigkeit gleich der Kreisfrequenz der Schwingung sind. (Die Kreisfrequenz ω ist proportional zur Frequenz f: $\omega = 2\pi f$.) In der Aufgabe handelt es sich also um zwei Vektoren mit den gleichen Längen (A), den gleichen Drehgeschwindigkeiten ($2\pi f$) und mit einer konstanten Phasenverschiebung von 90° (s. nebenstehende Abbildung). Die resultierende Amplitude erhält man durch die vektorielle Addition der zwei Vektoren. Mit Hilfe des Pythagoras-Satzes ergibt sich der Zusammenhang:



$A^2_{\text{Resultierende}} = A^2 + A^2$,

$A^2_{\text{Resultierende}} = 2A^2$ und

$A_{\text{Resultierende}} = \sqrt{2} \cdot A$.

(Im Allgemeinen ergibt sich die resultierende Amplitude für eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ aus

$A_{\text{Resultierende}} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$.

In unserem Fall ist $\Delta\varphi$ = 90° und somit ist die resultierende Amplitude

$A_{\text{Resultierende}} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{90°}{2}\right) = 2A\cos 45° = 2A\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot A$.)

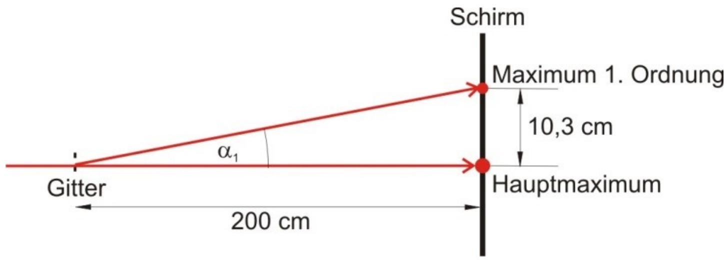
2.34. Die Phasenverschiebung ist in Radiant angegeben. Diese kann in Grad umgewandelt werden: $\pi/2$ = 90°. Somit ist die Aufgabe gleich der Aufgabe 2.33 und die Lösung ist auch hier $\sqrt{2} \cdot A$.

2.35. 2A

2.36. 2A

2.37. 0

2.38. Die Abbildung skizziert die Situation (nicht maßstäblich).



Der Beugungswinkel α_1 ergibt sich folgenderweise:

$\tan\alpha_1 = \frac{10{,}3}{200} = 0{,}0515$ und

$\tan^{-1} 0{,}0515 = 2{,}948°$.

Bei der Beugung an einem optischen Gitter erscheinen die Maxima unter den α_k Winkeln, die die Gleichung erfüllen: $d \cdot \sin\alpha_k = k \cdot \lambda$, wobei d die Gitterkonstante und k eine ganze Zahl bezeichnen. Wenn man die Formel für das Maximum 1. Ordnung verwendet, setzt man für k „1" ein; so erhält man:

$d = \frac{1 \cdot \lambda}{\sin\alpha_1} = \frac{514}{\sin 2{,}948°} = \frac{514}{0{,}0514} = 10\,000 \text{ nm} = 10 \text{ µm}$.

2.39. Ein optisches Gitter mit einer Gitterkonstanten von 5 μm wird mit einem Laserstrahl beleuchtet. Das dabei entstehende Beugungsbild wird an einem 3 m entfernten Schirm beobachtet. Der Abstand zwischen dem Hauptmaximum und dem Nebenmaximum 1-ter Ordnung beträgt 40,2 cm. Berechnen Sie die Wellenlänge des Laserlichtes.

2.40. Die Austrittsarbeit von Natrium beträgt 2,55 eV.
a) Wie groß ist die minimale Frequenz des Lichtes, mit der man aus Natrium-Metall gerade noch Elektronen herauslösen kann?
b) Welche Wellenlänge und welche Farbe entsprechen dieser minimalen Frequenz?

2.41. Die Austrittsarbeit von Aluminium beträgt 4,25 eV.
a) Wie groß ist die minimale Frequenz des Lichtes, mit der man aus Aluminium-Metall gerade noch Elektronen herauslösen kann?
b) Welche Wellenlänge und welche Farbe entsprechen dieser minimalen Frequenz?

2.42. Ein 2,5 mm^2 großer Bereich einer aus Cäsium hergestellten Photokathode eines Photomultipliers wird mit einem senkrecht einfallenden monochromatischen Lichtstrahl (Wellenlänge: 514 nm und Intensität: $2{,}4 \cdot 10^{-7}$ W/m^2) 100 ms lang beleuchtet. Die Austrittsarbeit von Cäsium beträgt 2,1 eV. Setzen wir voraus, dass 0,8% der einfallenden Lichtphotonen den lichtelektrischen Effekt auslösen. Berechnen Sie
a) die Anzahl und
b) die Geschwindigkeit der ausgelösten Elektronen.

2.43. Natrium wird mit einem monochromatischen Lichtstrahl beleuchtet. Die Austrittsarbeit von Natrium beträgt 2,55 eV. Wie groß muss die Wellenlänge sein, damit die Geschwindigkeit der ausgelösten Elektronen einen Wert von 200 000 m/s erreicht?

2.44. Eine aus Cäsium hergestellte Photokathode wird mit einem senkrecht einfallenden monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge von 541 nm beleuchtet. Die beleuchtete Fläche der Photokathode ist 0,4 cm^2 groß. Die Austrittsarbeit von Cäsium beträgt 2,1 eV. Setzen wir voraus, dass 1,2% der einfallenden Lichtphotonen den lichtelektrischen Effekt auslösen. Wie groß muss die Intensität mindestens sein, damit 1000 Elektronen pro Sekunde herausgelöst werden?

2.45. Der sichtbare Bereich des elektromagnetischen Spektrums liegt zwischen den Wellenlängen von 400 und 800 nm. Welchem Energiebereich (in eV) entspricht dieser Wellenlängenbereich?

2.46. Der Brechungsindex der Augenlinse beträgt 1,41. Grünes Licht mit einer Frequenz von $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Hz erreicht das Auge. Bestimmen Sie:
a) die Wellenlänge des Lichts in der Luft,
b) die Frequenz des Lichts in der Augenlinse,
c) die Wellenlänge des Lichts in der Augenlinse,
d) die Energie eines Lichtphotons dieses Lichts.

2.39. 664 nm

2.40. a) Die Austrittsarbeit muss zuerst in Joule umgerechnet werden:
A = 2,55 eV = 2,55·1,6·10^{-19} J = 4,08·10^{-19} J. Die Energie des Photons muss minimal die Austrittsarbeit für das Elektron decken: $h \cdot f_{\text{min}} = A$. Daraus ergibt sich die gefragte Frequenz:
$f_{min} = \frac{A}{h} = \frac{4{,}08 \cdot 10^{-19}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 6{,}15 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 615$ THz.
b) Die Wellenlänge ergibt sich aus dem allgemeinen Zusammenhang:
$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{6{,}15 \cdot 10^{14}} = 4{,}88 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 488$ nm. Dieser Wellenlänge entspricht blaues Licht.

2.41. a) 1026 THz; b) 293 nm, d. h. kein sichtbares, sondern UV-Licht

2.42. a) Die Gesamtlichtenergie, die auf die beleuchtete Fläche trifft, ist:
$\Delta E = J \cdot \Delta A \cdot \Delta t = 2{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1 = 6 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$
Die Energie eines einzigen Photons des verwendeten monochromatischen Lichts ist:
$\varepsilon = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^{8}}{514 \cdot 10^{-9}} = 3{,}87 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$
Aus den zwei Energiewerten ergibt sich die Anzahl der während der Beleuchtungszeit auf die Kath ode fallenden Photonen: $N_{\text{Photonen}} = \frac{\Delta E}{\varepsilon} = \frac{6 \cdot 10^{-14}}{3{,}87 \cdot 10^{-19}} = 155\,000$. Laut der Aufgabenstellung lösen 0,8% der Photonen Elektronen aus, deshalb ist: $N_{\text{Elektronen}} = 0{,}008 \cdot N_{\text{Photonen}} = 1240$.
b) Aus der Energieerhaltung folgt, dass: $\frac{1}{2}mv^2 = \varepsilon - A$.
Die Austrittsarbeit ist in Joule umzuwandeln: A = 2,1 eV = 2,1·1,6·10^{-19} = 3,36·10^{-19} J. Aus der obigen Formel folgt:
$v = \sqrt{\frac{2(\varepsilon - A)}{m}} = \sqrt{\frac{2(3{,}87 \cdot 10^{-19} - 3{,}36 \cdot 10^{-19})}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}}$ = 3,35·10^{5} m/s.

2.43. 467 nm

2.44. 7,66·10^{-10} W/m^2

2.45. 1,55 – 3,1 eV

2.46. a) 556 nm; b) 5,4·10^{14} Hz; c) 394 nm; d) 3,58·10^{-19} J = 2,24 eV

Temperaturstrahlung

2.47. Bei welcher Wellenlänge ist die spektrale spezifische Ausstrahlung des absolut schwarzen Strahlers maximal, wenn seine Temperatur
a) 4 K,
b) 37°C,
c) 6000 K beträgt?

2.48. Ein Körper (annähernd absolut schwarz) strahlt bei einer Wellenlänge von 4200 nm am stärksten. Wie groß ist in etwa seine Temperatur in °C?

2.49. a) Berechnen Sie die spezifische Ausstrahlung des absolut schwarzen Strahlers bei 20°C.
b) Berechnen Sie die in einer Stunde ausgestrahlte Energie, wenn die Oberfläche des Strahlers 5 m^2 beträgt.

2.50. Der absolut schwarze Strahler mit einer Temperatur *T* strahlt bei einer gewissen Wellenlänge am stärksten. Die Temperatur des Strahlers erhöht sich um 40%.
a) Um wie viel Prozent verschiebt sich die Wellenlänge der maximalen Emission?
b) Um wie viel Prozent erhöht sich die spezifische Ausstrahlung des Körpers?

2.51. Wie hoch müsste die Umgebungstemperatur sein, dass man die Hälfte der Energie, die man bei einer Hautoberflächentemperatur von 28°C abstrahlt, durch Strahlung der Umgebung zurückbekommt? (Körper und Umgebung sind hier beide als absolut schwarze Strahler anzunehmen.)

2.52. Wie groß ist die Nettoabstrahlung des menschlichen Körpers in einer Stunde bei einer Umgebungstemperatur von 20°C? Die Temperatur der Hautoberfläche ist 27°C, die Körperoberfläche beträgt 1,8 m^2. (Körper und Umgebung sind hier beide als absolut schwarze Strahler anzunehmen.)

2.53. In einer bestimmten Situation empfindet es jemand angenehm, wenn er gerade 40 J Wärme pro Sekunde abgeben kann. Bei welcher Umgebungstemperatur wäre die Nettoabstrahlung des Körpers gerade 40 J in einer Sekunde? (Die Temperatur der Hautoberfläche sei 30°C und die Körperoberfläche 1,5 m^2. Körper und Umgebung sind hier beide als absolut schwarze Strahler anzunehmen.)

2.54. Jemand arbeitet an einem extrem warmen Arbeitsplatz mit einer Umgebungstemperatur von 45°C.
a) Wie viel Strahlungsenergie nimmt er netto aus der Umgebung pro Stunde durch Strahlung auf, wenn seine Körperoberfläche 1,2 m^2 und seine Hauttemperatur 30°C sind? (Körper und Umgebung sind hier beide als absolut schwarze Strahler anzunehmen.)
b) Um wie viel °C würde sich seine Körpertemperatur in einer Stunde erhöhen, wenn keine anderen Wärmetransportmechanismen vorhanden wären? (Masse des Körpers = 84 kg.)
c) Durch die Verdampfung von wie viel Milliliter Wasser könnte man die Netto-Wärmeaufnahme gerade kompensieren? (Die spezifische Verdampfungswärme von Wasser beträgt 2400 kJ/kg bei 30°C.)

2.55. Im Körper eines Marathonläufers wird Wärme mit einer Leistung von 1020 W produziert.
a) Wie groß ist die durch Strahlung abgegebene Wärme in einer Minute? (Die Temperaturwerte sind: Hauttemperatur des Läufers: 30°C, Umgebungstemperatur: 25°C. Die Körperoberfläche ist etwa 18 000 cm^2 groß. Körper und Umgebung sind hier beide als absolut schwarze Strahler anzunehmen. Von der Kleidung kann abgesehen werden.)
b) Vorausgesetzt, dass durch Wärmeleitung bei den gegebenen Umständen noch eine Wärmemenge von etwa 1000 J pro Minute abgegeben werden kann, wie viel Milliliter Wasser müssen noch verdampfen, damit alles an im Körper entstehender Wärme abgegeben wird? (Die spezifische Verdampfungswärme beträgt 2400 kJ/kg bei Körpertemperatur.)

2.47. Laut des wienschen Verschiebungsgesetzes ist: $\lambda_{\max} \cdot T = \text{konstant} = 2880\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$, wobei $\lambda_{\max}$ den Wellenlängenwert bezeichnet, bei der die Ausstrahlung des Körpers maximal ist.

a) $\lambda_{\max} = \frac{2880}{T} = \frac{2880}{4} = 720$ µm = 0,72 mm. (Diese Wellenlänge fällt in den ferneren Infrarotbereich.)

b) $\lambda_{\max} = \frac{2880}{310} = 9{,}29$ µm. (Diese Wellenlänge fällt in den näheren Infrarotbereich.)

c) $\lambda_{\max} = \frac{2880}{6000} = 0{,}48$ µm = 480 nm. (Diese Wellenlänge fällt in den sichtbaren Bereich.)

2.48. 686 K = 413°C

2.49. a) Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die spezifische Ausstrahlung des absolut schwarzen Körpers: $M = \sigma \cdot T^4 = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot (20 + 273)^4 = 420\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. (Die Temperatur muss in Kelvin eingesetzt werden!)

b) Nach der Definitionsformel der spezifischen Ausstrahlung ergibt sich die gefragte Energie als $\Delta E = M \cdot \Delta t \cdot \Delta A = 420 \cdot 3600 \cdot 5 = 7{,}56\ \text{MJ}$.

2.50. a) um 28,6%; b) um 284%

2.51. Laut der Aufgabenstellung ist die spezifische Ausstrahlung der Umgebung gleich der Hälfte der spezifischen Ausstrahlung des Körpers: $M_\text{U} = \frac{1}{2} M_\text{K}$, wobei der Index K den Körper und der Index U die Umgebung bezeichnen. Mit Hilfe des Stefan-Boltzman-Gesetzes ergibt sich die Gleichung: $\sigma \cdot T_\text{U}^4 = \frac{1}{2} \sigma \cdot T_\text{K}^4$. Daraus ergibt sich die gesuchte Umgebungstemperatur:

$T_U = \sqrt[4]{\frac{1}{2} T_\text{K}^4} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} 301^4} = 253\ \text{K} = -20°\text{C}$.

2.52. Die Nettoabstrahlung ist:

$\Delta E = \sigma \cdot \left(T_\text{K}^4 - T_\text{U}^4\right) \cdot \Delta t \cdot \Delta A = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot (300^4 - 293^4) \cdot 3600 \cdot 1{,}8 = 270$ kJ.

2.53. 25,7°C

2.54. a) Die aufgenommene Netto-Energie ist:

$\Delta E = \sigma \cdot \left(T_\text{U}^4 - T_\text{K}^4\right) \cdot \Delta t \cdot \Delta A = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot (318^4 - 303^4) \cdot 3600 \cdot 1{,}2 = 443$ kJ.

b) Wenn die aufgenommene Netto-Energie als Wärme im Körper „bleiben" würde, könnte man für die Temperaturerhöhung die folgende Gleichung aufschreiben: $\Delta E = c \cdot m \cdot \Delta T$, wobei m die Masse des Körpers und c seine mittlere spezifische Wärmekapazität (siehe Anhang) bezeichnen. Daraus ergibt sich die Temperaturzunahme: $\Delta T = \frac{\Delta E}{c \cdot m} = \frac{443\,000}{3500 \cdot 84} = 1{,}51\ \text{K} = 1{,}51°\text{C}$.

c) Die aufgenommene Netto-Energie ist also gleich der Verdampfungswärme:

$\Delta E = Q_{Verdampfung} = q_{\text{Verdampfung}} \cdot m_{\text{verdampft}}$, wobei $q_{\text{Verdampfung}}$ die spezifische Verdampfungswärme und $m_{\text{verdampft}}$ die verdampfte Wassermasse bezeichnen. Daraus ergibt sich die Masse:

$m_{\text{verdampft}} = \frac{\Delta E}{q_{\text{Verdampfung}}} = \frac{443}{2\,400} = 0{,}185\ \text{kg}$. Diese Masse entspricht einem Volumen von 0,185 l = 185 ml.

2.55. a) 3341 J; b) 23,7 ml

Lumineszenz

2.56. Das Emissionsspektrum der thermisch angeregten Natriumatome besteht praktisch aus einer starken gelben Linie bei einer Wellenlänge von 589 nm. Berechnen Sie die Energiedifferenz (in eV) zwischen dem angeregten und dem Grundzustand des Natriumatoms.

2.57. Das Emissionsspektrum von Lithiumatomen enthält praktisch eine rote Linie bei einer Wellenlänge von 671 nm. Berechnen Sie die Energiedifferenz (in eV) zwischen dem angeregten und dem Grundzustand des Lithiumatoms.

2.58. In einem angeregten H-Atom fällt das Elektron von der M-Schale im ersten Schritt auf die L-, danach auf die K-Schale zurück, wobei jedes Mal ein Lichtquant emittiert wird. Berechnen Sie die Wellenlängen des emittierten Lichtes. (Die möglichen Energiewerte des Elektrons in dem H-Atom sind in der Abb.I.9. des Lehrbuches zu sehen.) Was für ein Licht kann diesen Wellenlängen zugeordnet werden?

2.59. Berechnen Sie die Wellenlänge des Lichtes, das aus dem Elektronenübergang zwischen den beiden Tallium-Niveaus in dem NaI(Tl)-Kristall entsteht (siehe Abb.3 des Kapitels 9. „Nukleare Grundmessung" im Praktikumsbuch). Welcher Farbe entspricht diese Wellenlänge?

2.60. Die Fluoreszenzlebensdauer eines Moleküls beträgt 12 ns. In welcher Zeit nach der Anregung sinkt die emittierte Intensität des Lumineszenzlichtes auf 1% des Anfangswertes?

2.61. Die Phosphoreszenzlichtintensität eines Kristalls fällt in 5,2 s nach der Anregung gerade auf ein Zehntel der Anfangsintensität. Berechnen Sie die Phosphoreszenzlebensdauer des Kristalls.

Wechselwirkungen des Lichts mit der Materie

2.62. a) Berechnen Sie die Reflektanz einer Wasseroberfläche beim senkrechten Einfall.
b) Wie groß ist die in das Wasser eindringende Lichtintensität, wenn die einfallende Intensität 1300 W/m^2 beträgt?

2.63. Berechnen Sie die Reflektanz von Diamant in Luft beim senkrechten Einfall.

2.64. Die Reflektanz von Silber ist etwa 0,9 in dem kompletten sichtbaren Bereich. Wie groß ist die in eine Silberplatte eindringende Lichtintensität, wenn die einfallende Intensität 250 W/m^2 beträgt?

2.65. Wievielmal größer ist der spektrale Streuungskoeffizient bei der Rayleigh-Streuung für blaues Licht (z. B. $\lambda = 430$ nm) als für rotes Licht (z. B. $\lambda = 645$ nm)?

2.66. Das Intensitätsverhältnis von der blauen ($\lambda = 488$ nm) und der grünen Linie ($\lambda = 514$ nm) in dem Argonlaser ist etwa 1 zu 1. Der Lichtstrahl dieses Lasers fällt auf eine kolloidale Lösung, wobei Rayleigh-Streuung auftritt.
a) Wird das blaue oder das grüne Licht stärker gestreut?
b) Um wie viel Prozent ist die Intensität des stärker gestreuten Lichtes größer, als die des anderen?

2.67. Wasserstoffgas (H_2) wird mit einem monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge von 550 nm durchleuchtet. In dem gestreuten Licht (in dem Rotations-Raman-Spektrum) ist neben der ursprünglichen Wellenlänge von 550 nm auch Licht mit einer Wellenlänge von 542,5 nm zu beobachten. Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen den Rotationszuständen in dem H_2-Molekül in eV.

2.56. Die Energiedifferenz ist gleich der emittierten Photonenenergie:

$\Delta E = \varepsilon = hf = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{589 \cdot 10^{-9}} = 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}11\ \mathrm{eV}$.

2.57. 1,85 eV

2.58. Die Energie der M-Schale mit der Hauptquantenzahl von 3 ist: E_M = –1,5 eV. Die Energie der L-Schale mit der Hauptquantenzahl von 2 ist: E_L = –3,4 eV. Die Differenz ist 1,9 eV = $3{,}04 \cdot 10^{-19}$ J. Daraus ergibt sich die Wellenlänge: $\lambda = h\frac{c}{\varepsilon} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{3{,}04 \cdot 10^{-19}}$ = 654 nm. Diese Wellenlänge entspricht sichtbarem roten Licht. Auf ähnliche Weise kann man das emittierte Licht aus dem L→K-Übergang berechnen: E_L = –3,4 eV, E_K = –13,6 eV, die Differenz ist 10,2 eV, λ = 122 nm, d. h. fernes UV-Licht.

2.59. 414 nm; blau

2.60. Die Intensität klingt exponentiell ab: $J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, wobei τ die Lumineszenzlebensdauer bezeichnet. Laut der Aufgabenstellung ist J = 0,01·J_0. Die Lösung der Gleichung mit dieser Information ist:

$0{,}01 \cdot J_0 = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\quad 0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\quad \ln 0{,}01 = -\frac{t}{\tau}$ und $\quad t = -\tau \cdot \ln 0{,}01 = 55{,}3$ ns.

2.61. 2,26 s

2.62. a) Die Reflektanz ρ kann beim senkrechten Einfall durch die folgende Formel berechnet werden:

$\rho = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{1{,}333 - 1}{1{,}333 + 1}\right)^2$ = 0,0204 = 2,04%.

(n_2 = 1,333 ist die Brechzahl von Wasser und n_1 = 1 die Brechzahl von Luft.)

b) Da die Reflektanz als $\rho = \frac{J_{\mathrm{refl}}}{J_{\mathrm{ein}}}$ definiert ist, ergibt sich die reflektierte Intensität als

$J_{\mathrm{refl}} = \rho \cdot J_{\mathrm{ein}} = 0{,}0204 \cdot 1300 = 26{,}5$ W/m². Die Differenz zwischen der einfallenden und der reflektierten Intensität entspricht der in das Wasser eindringenden Intensität: 1300 – 26,5 = 1273,5 W/m².

2.63. 17%

2.64. 25 W/m²

2.65. Da der spektrale Streuungskoeffizient bei der Rayleigh-Streuung zur vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional ist ($\sigma(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^4}$), kann man das Verhältnis der Streuungskoeffizienten folgenderweise schreiben: $\frac{\sigma(430)}{\sigma(645)} = \frac{645^4}{430^4} = 5{,}06$. Blaues Licht wird also etwa fünf Mal stärker gestreut, als rotes Licht.

2.66. a) das blaue Licht; b) um 23,1%

2.67. Die einfallenden Photonen besitzen eine Energie von

$\varepsilon_{\mathrm{ein}} = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{550 \cdot 10^{-9}} = 3{,}62 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}26\ \mathrm{eV}$.

Die Energie der nach Raman gestreuten Photonen ist:

$\varepsilon_{\mathrm{gestreut}} = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{542{,}5 \cdot 10^{-9}} = 3{,}67 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}29\ \mathrm{eV}$. Die Differenz beträgt 0,03 eV. Das entspricht der Energiedifferenz zwischen den Rotationszuständen in dem H_2 Molekül.

2.68. In dem (Vibrations-)Raman-Spektrum des Wassers erscheint neben der ursprünglichen Wellenlänge von 415 nm auch eine Wellenlänge mit 483 nm. Berechnen Sie die Vibrationsenergie in dem Wassermolekül in eV.

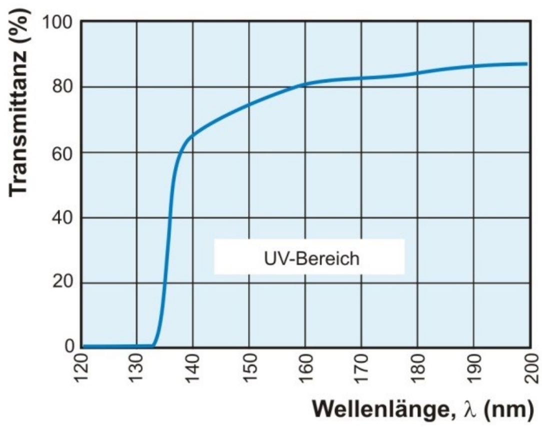
2.69. Die Vibrationsenergie in dem O_2 Molekül beträgt etwa 0,2 eV. Sauerstoffgas wird mit einem monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge von 532 nm durchleuchtet.
a) Bei welcher Wellenlänge erscheint die erste Stokes-Raman-Linie?
b) Bei welcher Wellenlänge erscheint die erste anti-Stokes-Raman-Linie?

2.70. Durch die Absorption eines Lichtquants wird das Elektron in dem H-Atom von der L-Schale auf die N-Schale gehoben. Die Energiedifferenz zwischen den zwei Schalen beträgt 2,55 eV. Berechnen Sie die Wellenlänge des absorbierten Lichtes. Was für Licht ist das?

2.71. Der Natriumjodid (NaI)-Kristall ist eine Keramik und ein elektrischer Isolator. Die verbotene Zone in der Energiebandstruktur ist 5 eV breit.
a) Welche Wellenlänge hat das Licht, dessen Photonenenergie gerade ausreicht, um Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband zu heben?
b) Was für Licht ist das?
c) Absorbiert NaI sichtbares Licht? Warum?

2.72. Der kubische Zirkonkristall (ZrO_2) ist transparent in dem sichtbaren Bereich und absorbiert nur in dem fernen UV-Bereich unter etwa 191 nm. Wie breit ist die verbotene Zone des Zirkonkristalls in eV?

2.73. In der Abbildung ist das Transmissionsspektrum von einem NaF-Einkristall zu sehen.
a) Entnehmen Sie dem Diagramm den Wellenlängenbereich, in dem der Kristall nahezu komplett durchsichtig ist. (Der Eindeutigkeit halber nennen wir den Kristall „durchsichtig", wenn seine Transmittanz 60% überschreitet.)
b) Berechnen Sie daraus die Breite der verbotenen Zone für NaF.



2.74. Der spektrale Absorptionskoeffizient eines Körpers beträgt 0,9 bei einer bestimmten Wellenlänge. Der Körper wird mit einem Lichtstrahl dieser Wellenlänge und einer Intensität von 200 W/m^2 beleuchtet. Setzen wir voraus, dass Reflexion und Streuung vernachlässigbar sind. Berechnen Sie
a) die im Körper absorbierte Intensität,
b) die durchgelassene Intensität,
c) die Absorbanz,
d) den spektralen Transmissionskoeffizienten des Körpers.

2.75. Ein Körper absorbiert 10 W/m^2 aus einer einfallenden Intensität von 200 W/m^2 bei der Beleuchtung mit einem monochromatischen Lichtstrahl. Setzen wir voraus, dass Reflexion und Streuung vernachlässigbar sind. Berechnen Sie
a) den spektralen Absorptionskoeffizienten und
b) die Absorbanz des Körpers bei der Wellenlänge des verwendeten Lichts.

2.68. 0,42 eV

2.69. a) 582 nm; b) 490 nm

2.70. 488 nm, blaues Licht

2.71. a) Zur Überwindung der verbotenen Zone muss die Photonenenergie mindestens 5 eV = $8\cdot10^{-19}$ J sein. Daraus ergibt sich die Wellenlänge: $\lambda = h\frac{c}{\varepsilon} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3\cdot10^{8}}{8\cdot10^{-19}} = 249$ nm.

b) Diese Wellenlänge fällt in den UV-Bereich.

c) Nein, da die Photonenenergie des sichtbaren Lichtes kleiner ist als 5 eV. Diese Energie reicht nicht aus, die verbotene Zone zu überwinden — die Elektronen absorbieren solche Photonen nicht.

2.72. 6,51 eV

2.73. a) ca. 137 nm; b) ca. 9,1 eV

2.74. a) Da der spektrale Absorptionskoeffizient als $\alpha(\lambda) = \frac{J_{\mathrm{abs}}}{J_{\mathrm{ein}}}$ definiert ist, ergibt sich die im Körper absorbierte Intensität als: $J_{\mathrm{abs}} = \alpha(\lambda) \cdot J_{\mathrm{ein}} = 0{,}9 \cdot 200 = 180$ W/m^2.

b) Die durchgelassene Intensität ist: $J_{\mathrm{durchgelassen}} = J_{\mathrm{ein}} - J_{\mathrm{abs}} = 200 - 180 = 20$ W/m^2, weil Reflexion und Streuung laut der Aufgabenstellung vernachlässigbar sind.

c) Die Definition der Absorbanz ist: $A = \lg\frac{J_0}{J}$, wobei J_0 die in den Körper eindringende Intensität ist, die in diesem Fall gleich der einfallenden Intensität ist, weil die Reflexion vernachlässigbar ist. J ist die durchgelassene Intensität. Mit diesen Werten ist die Absorbanz: $A = \lg\frac{J_0}{J} = \lg\frac{J_{\mathrm{ein}}}{J_{\mathrm{durchgelassen}}} = \lg\frac{200}{20} = 1.$

d) Laut der Definition des spektralen Transmissionskoeffizienten ist:
$\tau(\lambda) = \frac{J_{\mathrm{durchgelassen}}}{J_{\mathrm{ein}}} = \frac{20}{200} = 0{,}1 = 10\%.$

2.75. a) 0,05 = 5%; b) 0,0223

2.76. Eine 2 cm dicke Plexiglasplatte (Polymethylmethacrylat – PMMA) reduziert die eindringende Lichtintensität auf die Hälfte. Die Lichtstreuung in der Platte ist vernachlässigbar. Berechnen Sie
a) den linearen Absorptionskoeffizienten von PMMA für das gegebene Licht,
b) die Transmittanz und
c) die Absorbanz der Platte.

2.77. Eine Glasplatte lässt 90% des einfallenden Lichts durch. Wie viel % wird durch a) zwei, b) drei bzw. c) zehn solcher Platten zusammen durchgelassen?

2.78. Die Absorbanz einer Lösung beträgt 2. Berechnen Sie ihre Transmittanz. (Reflexion und Streuung sind vernachlässigbar.)

2.79. Berechnen Sie die Transmittanz einer Lösung, deren Absorbanz a) 0, b) 0,1, c) 0,8 bzw. d) 1 beträgt. (Reflexion und Streuung sind vernachlässigbar.)

2.80. Berechnen Sie die Absorbanz einer Lösung, deren Transmittanz a) 0, b) 0,1%, c) 0,1, d) 0,5 bzw. e) 100% beträgt. (Reflexion und Streuung sind vernachlässigbar.)

2.81. Der lineare Schwächungskoeffizient von Wasser beträgt 0,08 m^{-1} bei einer Wellenlänge von 540 nm. Licht dieser Wellenlänge und der Intensität von 300 W/m^2 dringt in Wasser ein. Berechnen Sie die
a) Halbwertsdicke,
b) Eindringtiefe,
c) Lichtintensität in einer Tiefe von 100 m im Wasser,
d) Transmittanz einer Wasserschicht mit einer Dicke von 100 m,
e) Absorbanz einer Wasserschicht mit einer Dicke von 100 m.

2.82. Der lineare Schwächungskoeffizient von gesundem Zahnschmelz beträgt 3,1 cm^{-1} für Infrarotlicht mit einer Wellenlänge von 1310 nm. Die 2 mm dicke Schmelzschicht wird mit diesem Licht der Intensität von 300 W/m^2 beleuchtet. (Die Reflexion ist zu vernachlässigen.) Berechnen Sie
a) die durchtretende Intensität,
b) die Transmittanz,
c) die Absorbanz,
d) die Halbwertsdicke,
e) die Eindringtiefe in den Zahnschmelz.

2.83. Die dekadische Extinktion (enthält die Absorption und Streuung) der Ozonschicht der Erdatmosphäre beträgt 2,5 für UV-Strahlen mit einer Wellenlänge von 300 nm.
a) Wie viel Prozent der einfallenden UV-Strahlung durchdringt die Ozonschicht?
b) Auf das Wievielfache erhöht sich die durchdringende Strahlungsintensität, wenn die Dicke der Ozonschicht um 20% abnimmt? (Betrachten wir die Ozonschicht als eine homogene Schicht, in der die Ozonkonzentration überall gleich groß ist.)

2.84. Der lineare Schwächungskoeffizient von Wasser hängt stark von der Wellenlänge ab – z. B. beträgt er 0,02 m^{-1} für violettes Licht der Wellenlänge von 400 nm bzw. 0,8 m^{-1} für rotes Licht der Wellenlänge von 700 nm. Die Intensität der zwei Farbkomponenten in dem einfallenden Licht ist gleich groß.
a) Wie groß ist das Intensitätsverhältnis in einer Tiefe von 4 m?
b) In welcher Tiefe wird das Intensitätsverhältnis für das violette Licht 100:1 sein?

2.85. Ein senkrecht einfallender Laserstrahl wird durch eine Kristallplatte um 40% abgeschwächt. Unter welchem Einfallswinkel soll der Laserstrahl auf die Platte fallen, damit seine Intensität um 64% reduziert wird? (Von der Reflexion soll abgesehen werden. Die Brechzahl des Kristalls beträgt 1,15.)

2.76. a) Laut der Aufgabenstellung ist die Halbwertsdicke (*D*) von PMMA für das gegebene Licht: *D* = 2 cm. Aus dem Zusammenhang zwischen dem linearen Absorptionskoeffizienten (*a*) und der Halbwertsdicke erhält man: $a = \frac{\ln 2}{D} = \frac{0{,}693}{2} = 0{,}347\ \text{cm}^{-1}$.

b) 50%

c) $A = \lg\frac{J_0}{J} = \lg\frac{J_0}{0{,}5J_0} = \lg\frac{1}{0{,}5} = \lg 2 = 0{,}301$.

2.77. a) 81%; b) 72,9%; c) 34,9%

2.78. Aus der Definitionsformel der Absorbanz kann die durchgelassene Intensität (*J*) ausgedrückt werden:

$A = \lg\frac{J_0}{J}$, $\quad 10^A = \frac{J_0}{J}$, $\quad J = \frac{J_0}{10^A} = \frac{J_0}{10^2} = 0{,}01 \cdot J_0$.

Nach der Definition der Transmittanz: $\tau = \frac{J_{\text{durchgelassen}}}{J_{\text{ein}}} = \frac{J}{J_0} = \frac{0{,}01 \cdot J_0}{J_0} = 0{,}01 = 1\%$. (Hier wurde berücksichtigt, dass Reflexion und Streuung vernachlässigbar sind.)

Wenn man in der dritten Gleichung den Zahlenwert für *A* nicht einsetzt, sondern die Lösung parametrisch fortsetzt, erhält man den Zusammenhang: $\tau = \frac{J_{\text{durchgelassen}}}{J_{\text{ein}}} = \frac{J}{J_0} = \frac{\frac{J_0}{10^A}}{J_0} = \frac{1}{10^A} = 10^{-A}$. Im Endergebnis also: $\tau = 10^{-A}$. Man könnte den Absorbanzwert direkt in diesen Zusammenhang einsetzen: $\tau = 10^{-2} = 0{,}01$.

2.79. a) 1 = 100%; b) 0,794 = 79,4%; c) 0,158 = 15,8%; d) 0,1 = 10%

2.80. In der Lösung der Aufgabe 2.78 ergab sich der einfache Zusammenhang zwischen Transmittanz und Absorbanz: $\tau = 10^{-A}$. Diese Gleichung kann nach *A* aufgelöst werden: $A = -\lg\tau$.

In diese Formel können die angegebenen Transmittanzwerte (bis auf 0!) eingesetzt werden:

a) unendlich groß; b) 3; c) 1; d) 0,301; e) 0

2.81. a) Die Halbwertsdicke ergibt sich aus dem Zusammenhang: $D = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{0{,}08} = 8{,}66$ m.

b) Die Eindringtiefe ergibt sich aus dem Zusammenhang: $\delta = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$ m.

c) Die Intensität 100 m tief im Wasser ist: $J = J_0 e^{-\mu x} = 300 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 100} = 0{,}1\ \text{W/m}^2$.

d) Die Transmittanz ist: $\tau = \frac{J}{J_0} = \frac{0{,}1}{300} = 0{,}000333 = 0{,}0333\%$.

e) Die Absorbanz ist: $A = \lg\frac{J_0}{J} = \lg\frac{300}{0{,}1} = \lg 3000 = 3{,}48$.

2.82. a) 161 W/m^2; b) 53,7%; c) 0,27; d) 2,24 mm; e) 3,23 mm

2.83. a) Die dekadische Extinktion (*E*) ist definiert wie die Absorbanz: $E = \lg\frac{J_0}{J}$. Eigentlich sind die zwei Größen gleich, wenn die Streuung vernachlässigbar ist und die Schwächung der Strahlung nur die Folge der Absorption ist. Die durchgelassene Intensität ist: $J = \frac{J_0}{10^E} = \frac{J_0}{10^{2,5}} = 0{,}00316 \cdot J_0$. Daraus folgt, dass $\frac{J}{J_0} = 0{,}00316 = 0{,}316\%$ der Strahlung durchgelassen wird. Nach dem Schwächungsgesetz ist die dekadische Extinktion einfach proportional zur Schichtdicke:

$E = \lg\frac{J_0}{J} = \lg\frac{J_0}{J_0 e^{-\mu x}} = \lg\frac{1}{e^{-\mu x}} = \lg e^{\mu x} = \mu x \lg e$. Wenn die Ozonschichtdicke laut der Aufgabenstellung um 20% abnimmt, wird auch die dekadische Extinktion um 20% kleiner: 0,8·2,5 = 2. Wenn dieser Extinktionswert in die frühere Gleichung eingesetzt wird, erhält man für die durchgelassene Intensität: $J = \frac{J_0}{10^E} = \frac{J_0}{10^2} = 0{,}01 \cdot J_0$. Wenn statt des früheren Wertes (0,316%) jetzt 1% durchgelassen wird, dann erhöht sich die durchgelassene Intensität auf das 1/0,316 = 3,16-fache.

2.84. a) 22,6:1 für violettes Licht; b) 5,9 m

2.85. 84,8°

Röntgenstrahlung

2.86. In einer Röntgenröhre mit einer Anodenspannung von 80 kV und einer Anodenstromstärke von 6 mA entsteht Röntgenstrahlung.
a) Wie groß ist die maximale Energie der Röntgenphotonen?
b) Wie groß ist die minimale Wellenlänge?
c) Wie groß ist die ausgestrahlte Leistung, wenn das Anodenmaterial Wolfram ist?
d) Wie groß ist der Wirkungsgrad?
e) Wie viel Wärme entsteht pro Minute?
f) Wie groß ist die Geschwindigkeit der beschleunigten Elektronen? (Die relativistische Massenzunahme ist zu vernachlässigen.)
g) Wie viele Elektronen erreichen pro Sekunde die Anode?

2.87. a) Wie groß ist die Beschleunigungsspannung in der Röntgenröhre, wenn die Grenzwellenlänge des Spektrums 10 pm beträgt?
b) Wie groß ist die Anodenstromstärke, wenn pro Minute $5 \cdot 10^{17}$ Elektronen auf die Anode treffen?
c) Wie groß ist die emittierte Gesamtleistung, wenn die Anode aus Wolfram besteht?

2.88. Wie groß ist die Intensität der Röntgenstrahlen in 1 m Entfernung von der Röntgenröhre, wenn die Röntgenstrahlung mit 50 kV Anodenspannung und 5 mA Anodenstromstärke erzeugt wird und der Wirkungsgrad 0,37% beträgt. Die Strahlung wird sich aus dem Fokus der Röntgenröhre ausgehend in einem Raumwinkel von 2π (also in einer Halbkugel) gleichmäßig verteilen.

2.89. Für eine mammografische Röntgenaufnahme braucht man ein Röntgenbündel mit den folgenden Parametern: Grenzwellenlänge = 40 pm und Intensität in 0,2 m Entfernung vom Fokus der Röhre ausgehend = 0,15 W/m^2. Welche Spannung und Anodenstromstärke sind einzustellen, wenn das Anodenmaterial Molybdän ist und sich die Strahlung aus dem Fokus der Röntgenröhre ausgehend in einem Raumwinkel von 2π gleichmäßig verteilt?

2.90. Wie dick muss eine Aluminiumplatte sein, um 90% der Röntgenstrahlung absorbieren zu können, wenn der Massenschwächungskoeffizient des Aluminiums, bezogen auf diese Strahlung, 0,171 cm^2/g ist?

2.91. Das Wievielfache der Halbwertsdicke reduziert die Intensität der Strahlung um 95%?

2.92. Auf wie viel Prozent wird die Intensität der Strahlung durch das 3,33-fache der Halbwertsdicke reduziert?

2.93. Man möchte bei einem Röntgengerät die schwere Bleischutzwand mit Aluminium ersetzen, aber so, dass die Strahlungsabschwächung dadurch nicht geändert wird.
a) Wievielmal dicker müsste die Aluminiumwand sein? (Die Schwächungskoeffizienten sind: 31,2 cm^{-1} für Blei, bzw. 0,56 cm^{-1} für Aluminium.)
b) Welche Wand wäre schwerer und wievielmal?
c) Wie groß ist das Verhältnis der zwei Massenschwächungskoeffizienten ($\mu_{m,Pb}/\mu_{m,Al}$)?
d) Welchen Wert würde man für das Verhältnis der zwei Massenschwächungskoeffizienten erwarten, wenn die Schwächung ausschließlich durch den Photoeffekt erfolgt?
e) Worauf kann man aus dem Vergleich der zwei Verhältniswerte von Frage c) und d) schließen?

2.86. a) Die maximale Energie ergibt sich, wenn die ganze kinetische Energie des beschleunigten und in der Anode abgebremsten Elektrons in einem einzigen Photon emittiert wird. Die kinetische Energie des Elektrons aber ergibt sich aus der elektrischen Arbeit des Feldes zwischen Kathode und Anode:
$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{1}{2} m_\text{e} v_\text{e}^2 = e \cdot U = 1\ \text{e} \cdot 80\ \text{kV} = 80\ \text{keV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 80\,000 = 1{,}28 \cdot 10^{-14}$ J,
wobei e die Elementarladung und U die Beschleunigungsspannung zwischen Kathode und Anode bezeichnen. Wenn man die Größe der Elementarladung nicht in Coulomb, sondern in einer relativen Einheit als 1 e in die Gleichung einsetzt, erhält man die Energie in eV. (Wird die Ladung in Coulomb — $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C — eingesetzt, ergibt sich die Energie in Joule.)
b) Das Röntgenphoton der maximalen Energie besitzt die minimale Wellenlänge:
$\lambda_{\text{min}} = h \frac{c}{\varepsilon_{\text{max}}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}28 \cdot 10^{-14}} = 15$ pm.
c) Die ausgestrahlte Gesamtröntgenleistung ist:
$P_{\text{Rtg}} = c_{\text{Rtg}} \cdot U^2 \cdot I \cdot Z = 1{,}1 \cdot 10^{-9} \cdot (8 \cdot 10^4)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 74 = 3{,}13$ W,
wobei c_{Rtg} die bei Röntgenröhren verwendete Konstante, I die Anodenstromstärke und Z die Ordnungszahl des Anodenmaterials bezeichnen. Die Ordnungszahl von Wolfram ist $Z = 74$.
d) Die bei der Funktion der Röntgenröhre aufgenommene elektrische Leistung ist:
$P_{\text{el}} = U \cdot I = 8 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 480$ W. Der Wirkungsgrad ergibt sich als Quotient der Röntgenleistung und der aufgenommenen elektrischen Leistung: $\eta = \frac{P_{\text{Rtg}}}{P_{\text{el}}} = \frac{3{,}13}{480} = 0{,}0065 = 0{,}65\%$.
e) Wenn der Anteil „$\eta \cdot P_{\text{el}}$" in Röntgenstrahlung umgewandelt wird, dann wird der Anteil „$(1-\eta) \cdot P_{\text{el}}$" als Wärme dissipiert. Unter Berücksichtigung der Zeitdauer ergibt sich die entstehende Wärme:
$Q = (1-\eta) \cdot P_{\text{el}} \cdot t = 0{,}9935 \cdot 480 \cdot 60 = 28{,}6$ kJ.
f) Aus der im Teil a) angegebenen Gleichung ergibt sich die Geschwindigkeit: $v_\text{e} = \sqrt{\frac{2eU}{m_\text{e}}} = 1{,}68 \cdot 10^8$ m/s.
g) Aus der Anodenstromstärke ergibt sich die in einer Sekunde auf die Anode auftreffende Ladungsmenge: $\Delta q = I \cdot \Delta t = 0{,}006 \cdot 1 = 0{,}006$ C. Die Zahl der Elektronen ergibt sich als Quotient dieser Menge und der Elementarladung: $N = \frac{\Delta q}{e} = \frac{0{,}006}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3{,}75 \cdot 10^{16}$.

2.87. a) 124 kV; b) 1,33 mA; c) 1,64 W

2.88. Laut der Definition der Strahlungsintensität: $J = \frac{P_{\text{Rtg}}}{A} = \frac{\eta \cdot P_{\text{el}}}{2r^2\pi} = \frac{\eta \cdot U \cdot I}{2r^2\pi} = \frac{0{,}0037 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1^2 \cdot \pi} = 0{,}147\ \text{W/m}^2$.

2.89. Spannung: $U = 31{,}1$ kV und Stromstärke: $I = 0{,}844$ mA

2.90. Der Schwächungskoeffizient μ ergibt sich aus dem Massenschwächungskoeffizienten μ_m und der Dichte ρ des Aluminiums: $\mu = \mu_\text{m} \cdot \rho = 0{,}171 \cdot 2{,}7 = 0{,}4617\ \text{cm}^{-1}$. Aus dem allgemeinen Schwächungsgesetz ($J = J_0 e^{-\mu x}$) und der Voraussetzung ($J = 0{,}1 \cdot J_0$) ergibt sich die Schichtdicke: $x = \frac{\ln \frac{J_0}{J}}{\mu} = 5$ cm.

2.91. Setzen wir voraus, dass die gesuchte Schichtdicke gleich dem n-fachen der Halbwertsdicke ist: $x = n \cdot D$. Aus dem Schwächungsgesetz und der Voraussetzung ($J = 0{,}05 \cdot J_0$) ergibt sich:
$0{,}05 = \frac{J}{J_0} = e^{-\mu x} = e^{-\mu n D} = (e^{-\mu D})^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = (0{,}5)^n$, da die Halbwertsdicke die Intensität gerade halbiert. Die Lösung dieser Gleichung ist: $n = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}5} = 4{,}33$.

2.92. 10%

2.93. a) 55,7; b) die Aluminiumwand und zwar 13,3-mal; c) 13,3; d) 251; e) Auch die Compton-Streuung spielt eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der Schwächung.

Radioaktivität, Kernstrahlungen

2.94. Welche Tochterkerne entstehen bei den folgenden Zerfällen?

a) $^{14}C \rightarrow$ ....+ β^-
b) $^{11}C \rightarrow$ ....+ β^+
c) $^{218}Po \rightarrow$ ....+ α
d) $^{99m}Tc \rightarrow$ ....+ γ

2.95. Welche Tochterkerne entstehen bei den folgenden Zerfällen?

a) $^{86}Rb \rightarrow$ ....+ β^-
b) $^{81}Rb \rightarrow$ ....+ β^+
c) $^{226}Ra \rightarrow$ ....+ α
d) $^{113m}In \rightarrow$ ....+ γ

2.96. Was sind die Mutterkerne bei den folgenden Zerfällen?

a) .... $\rightarrow {}^{3}He + \beta^-$
b) .... $\rightarrow {}^{15}N + \beta^+$
c) .... $\rightarrow {}^{218}Po + \alpha$

2.97. Um welchen Zerfallstyp handelt es sich bei den folgenden Kernumwandlungen?

a) $^{40}K \rightarrow {}^{40}Ca +$ ....
b) $^{13}N \rightarrow {}^{13}C +$ ....
c) $^{137}Cs \rightarrow {}^{137}Ba +$ ....
d) $^{238}U \rightarrow {}^{234}Th +$ ....
e) $^{131}I \rightarrow {}^{131}Xe +$ ....
f) $^{180m}Ta \rightarrow {}^{180}Ta +$ ....
g) $^{18}F \rightarrow {}^{18}O +$ ....

2.98. Wie hoch ist die höchstmögliche Energie des bei dem Zerfall des ruhenden Neutrons entstehenden β-Teilchens?

2.99. Nach welcher Zeit reduziert sich die Aktivität eines 2 MBq ^{32}P-Präparates auf den Wert von 0,1 kBq?

2.100. Bei dem Reaktorunfall in Tschernobyl 1986 verunreinigte eine große Menge von ^{131}I die Atmosphäre. Die durch den Regen ausgewaschenen Isotope verunreinigten auch den Boden in vielen Ländern Europas, wodurch die Milch von Kühen und auch der daraus hergestellte Käse eine erhöhte Radioaktivität aufzeigten. Vorausgesetzt, dass die ^{131}I-Aktivität den gewöhnlichen Wert etwa 20-fach überstieg, soll die Lagerungszeit der Käse berechnet werden, die nötig war, damit die Aktivität wieder auf den normalen Wert sinkt.

2.101. Vor 30 Stunden kam ein ^{24}Na-Isotop mit einer Aktivität von 0,5 GBq in einem Labor an. Nun werden davon 50 MBq zur Seite gelegt. Nach welcher Zeit nach Ankunft des Präparates wird die Aktivität des Restes 50 MBq sein?

2.102. Am Dienstag und am Donnerstag werden um 8 Uhr zur Untersuchung von je 5 Patienten 2 MBq ^{24}Na-Isotop pro Patient benötigt. Wie groß sollte die Aktivität des ankommenden ^{24}Na-Isotops sein, wenn die Isotopenfracht am Montag um 16 Uhr übernommen wird?

2.103. In einem radioaktiven Präparat sind zwei Isotope anwesend. Am Anfang der Beobachtung ist die Aktivität der zwei Isotope gleich groß. Die Halbwertszeit des einen Isotops ist 15 Stunden, die des anderen 2,5 Tage. Was wird das Verhältnis der Aktivitäten der zwei Isotope in 3 Tagen bzw. in 10 Tagen sein?

2.94. a) Die Ordnungszahlen der einzelnen Isotope können aus dem Periodensystem abgelesen werden, z. B. ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Bei dem β^--Zerfall wandelt sich ein Neutron in ein Proton und ein Elektron (das β^--Teilchen) um und das Elektron verlässt den Atomkern. Dabei wird die Ordnungszahl um 1 größer; die Massenzahl ändert sich nicht. Der entstehende und noch nicht identifizierte Kern hat also die folgenden „Parameter": ${}^{14}_{7}\mathrm{X}$. Laut des Periodensystems handelt es sich um Stickstoff: ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$. Zusammenfassend: ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \beta^- \ (+\bar{\nu})$.
In diesem Prozess entsteht noch ein Antineutrino ($\bar{\nu}$), das aber biologisch irrelevant ist.

b) Bei dem β^+-Zerfall hingegen wandelt sich ein Proton in ein Neutron und ein Positron (das β^+-Teilchen) um und das Positron verlässt den Atomkern. Dabei wird die Ordnungszahl um 1 kleiner; die Massenzahl ändert sich nicht: ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$. Zusammenfassend: ${}^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + \beta^+ \ (+\nu)$.
In diesem Prozess entsteht noch ein Neutrino (ν), das aber biologisch irrelevant ist.

c) Bei dem α-Zerfall werden die Ordnungszahl um 2 und die Massenzahl um 4 kleiner. (Das den Kern verlassende Alpha-Teilchen besteht nämlich aus vier Nukleonen – aus zwei Protonen und zwei Neutronen): ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$. Zusammenfassend: ${}^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + \alpha$.

d) Bei dem γ-Zerfall ändern sich weder die Ordnungszahl, noch die Massenzahl, der Kern wird nur aus einem energiereicheren Zustand in einen energieärmeren Grundzustand übergehen (isomerer Kernübergang), wobei noch ein Energiequant (γ-Teilchen) emittiert wird: ${}^{99}_{43}\mathrm{Tc}$. Zusammenfassend: ${}^{99\mathrm{m}}_{43}\mathrm{Tc} \rightarrow {}^{99}_{43}\mathrm{Tc} + \gamma$.

2.95. a) ${}^{86}\mathrm{Sr}$; b) ${}^{81}\mathrm{Kr}$; c) ${}^{222}\mathrm{Rn}$; d) ${}^{113}\mathrm{In}$

2.96. a) ${}^{3}\mathrm{H}$; b) ${}^{15}\mathrm{O}$; c) ${}^{222}\mathrm{Rn}$

2.97. a) β^-; b) β^+; c) β^-; d) α; e) β^-; f) γ; g) β^+

2.98. Die Masse des ruhenden Neutrons beträgt $1{,}675\cdot10^{-27}$ kg, während die Ruhemasse des aus dem zerfallenden Neutron entstehenden Protons nur $1{,}673\cdot10^{-27}$ kg beträgt. Es entstehen aber auch noch ein Elektron der Masse von $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg und ein Antineutrino, dessen Ruhemasse etwa 0 ist. Im Endergebnis ist die Massenabnahme (im absoluten Betrag): $\Delta m = m_{\mathrm{Neutron}} - m_{\mathrm{Proton}} - m_{\mathrm{Elektron}} = 1{,}09\cdot10^{-30}$ kg. Aus dieser Massenabnahme entsteht Energie nach der einsteinschen Masse-Energie-Äquivalenzformel:
$E = \Delta m \cdot c^2 = 1{,}09 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9{,}81\cdot10^{-14}$ J = 613 keV. Das Elektron kann höchstens diese Energiemenge mitnehmen.

2.99. Die Halbwertzeit von ${}^{32}\mathrm{P}$ beträgt 14,28 Tage. Die Zerfallskonstante ist dementsprechend:
$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{14{,}28} = 0{,}0485$ 1/Tag. Das Zerfallgesetz ist: $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t}$. Das Gesetz kann nach t aufgelöst werden: $t = \frac{\ln\frac{\Lambda_0}{\Lambda}}{\lambda} = \frac{\ln\frac{2000}{0{,}1}}{0{,}0485} = 204$ Tage. (Die Aktivitätswerte müssen in der gleichen Einheit — hier in kBq — eingesetzt werden!)

2.100. 34,7 Tage

2.101. 38,8 Stunden

2.102. 0,213 GBq

2.103. 12,1 : 1 bzw. 4070 : 1

2.104. Ein versteinertes Knochenstück eines Höhlenbärs enthält das ^{14}C-Isotop mit einer Aktivität von 0,006 Bq pro Gramm Kohlenstoff. Bestimmen Sie das Alter des Knochenstückes unter der Voraussetzung, dass die Aktivität in dem lebenden Bär noch 0,23 Bq pro Gramm Kohlenstoff war.

2.105. Wie groß ist die Aktivität von 1 μg des ^{131}I-Isotops?

2.106. Die menschliche Körpermasse setzt sich aus etwa 0,35% Kalium zusammen. Etwa 0,012% der Kaliumatome sind radioaktives ^{40}K. Berechnen Sie die Aktivität von ^{40}K für einen durchschnittlichen menschlichen Körper (70 kg).

2.107. a) Berechnen Sie die Aktivität von einem ^{226}Ra-Präparat mit einer Masse von 1 kg. (Setzen wir voraus, dass das Präparat nur ^{226}Ra-Atome enthält.)

b) Wie groß ist die ausgestrahlte Leistung, wenn beim Zerfall eines ^{226}Ra-Kernes ein α-Teilchen mit einer Energie von 4,2 MeV und ein γ-Teilchen mit einer Energie von 0,048 MeV emittiert werden?

2.108. Die Aktivität eines ^{131}I-Präparates beträgt 0,5 MBq.

a) Wie viel Mol radioaktive Jodatome enthält das Präparat?

b) Wie viele radioaktive Jodatome sind in dem Präparat?

2.109. Für isotopendiagnostische Zwecke wird ^{99m}Tc mit einer Aktivität von 400 MBq dem Patienten zugeführt. Wie viele radioaktive Technetiumatome enthält das Präparat?

2.110. Ein γ-Photon der Energie 0,66 MeV wird bei der Wechselwirkung mit Materie nach Compton gestreut. Die Austrittsarbeit der Materie beträgt 50 eV. Wie hoch ist die Energie und die Wellenlänge des gestreuten Photons, wenn die Geschwindigkeit des austretenden Compton-Elektrons $6 \cdot 10^7$ m/s beträgt? (Die relativistische Massenzunahme ist zu vernachlässigen.)

2.111. Ein γ-Photon des Isotops ^{137}Cs (E_γ = 661 keV) wird in der Luft durch den Photoeffekt absorbiert. Die Austrittsarbeit von Luft (etwa gleich der durchschnittlichen Ionisationsenergie von Luftmolekülen) beträgt 34 eV. Berechnen Sie

a) die Bewegungsenergie des ausgelösten Photoelektrons in eV und auch in fJ,

b) die maximale Anzahl der Ionenpaare, die das Photoelektron durch sekundäre Ionisation erzeugen kann.

2.112. Für eine γ-Strahlung beträgt die Halbwertsdicke von Blei 3 mm.

a) Wie groß ist der Schwächungskoeffizient von Blei in Bezug auf die obige Strahlung?

b) Mit welcher Bleiplattendicke wäre es möglich, die Strahlung auf 1/10 zu reduzieren?

2.113. Die Intensität einer β-Strahlung wird durch eine Aluminiumplatte um 29,3% reduziert. Wie viele Schichten dieser Platte sind nötig, um eine Halbwertsdicke zu erhalten?

2.114. Ein γ-strahlendes Präparat mit einer Aktivität von 50 kBq liegt so weit von dem Kristall eines Szintillationszählers entfernt, dass die γ-Strahlen mit guter Näherung parallel auf die Grundfläche des zylinderförmigen Kristalls treffen. Der Durchmesser der Grundfläche beträgt 5 cm, die Höhe des Zylinders 4 cm. Der Schwächungskoeffizient des Kristalls in Bezug auf die gegebene Strahlung beträgt $9 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}. Berechnen Sie den prozentualen Wirkungsgrad der Detektion der γ-Strahlung! (Der Wirkungsgrad ist definiert als das Verhältnis der detektierten (d. h. absorbierten) γ-Photonen und der einfallenden γ-Photonen.)

2.115. Zwei nebeneinander stehende Bleitürme enthalten je ein ^{24}Na-Präparat und einen Szintillationsmesskopf, der die γ-Strahlung des Präparates misst. Alle Parameter der zwei Messköpfe sind gleich. Die zwei Präparate besitzen die gleiche Aktivität. In beiden Bleitürmen liegen die Präparate 10 cm unter den Detektoren und die zwei Detektoren sind 30 cm voneinander entfernt. Bei welcher Wanddicke der Bleitürme wird der durch das andere Präparat verursachte Fehler kleiner sein als 1%?

2.104. 30 300 Jahre

2.105. Aus der Masse wird zuerst die Stoffmenge in Mol berechnet: $\nu = \frac{m}{M} = \frac{1\cdot 10^{-6}}{131} = 7{,}63 \cdot 10^{-9}$ mol, wobei M die molare Masse bezeichnet. Für ^{131}I ist die molare Masse: M = 131 g/mol.
Im zweiten Schritt wird die Zahl der radioaktiven Atome berechnet:
$N = \nu \cdot N_{\mathrm{A}} = 7{,}63 \cdot 10^{-9} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 4{,}59 \cdot 10^{15}$, wobei N_{A} die Avogadro-Konstante ist. Zur Berechnung der Aktivität braucht man noch die Halbwertszeit (T) und daraus die Zerfallskonstante (λ):
T = 8,04 Tage = $8{,}04 \cdot 24 \cdot 3600 = 6{,}95 \cdot 10^{6}$ s und
$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{6{,}95\cdot 10^{6}} = 9{,}97 \cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$. Schließlich ergibt sich die Aktivität aus der Formel:
$\Lambda = \lambda \cdot N = 9{,}97 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}59 \cdot 10^{15} =$ 4,58 GBq.

2.106. 7600 Bq

2.107. a) 36,2 TBq
b) In Form von dem α-Teilchen und dem γ-Teilchen wird insgesamt eine Energie von
E = 4,2 MeV + 0,048 MeV = 4,248 MeV = $4{,}248 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}8 \cdot 10^{-13}$ J in einem einzigen Zerfallsereignis emittiert. Wenn diese Energiemenge mit der Zahl der Zerfälle pro Sekunde (d. h. der Aktivität aus dem Aufgabenteil a)) multipliziert wird, erhält man die pro Sekunde ausgestrahlte Energie, d. h. die Leistung:
$P = E \cdot \Lambda = 6{,}8 \cdot 10^{-13} \cdot 3{,}62 \cdot 10^{13} =$ 24,6 W.

2.108. a) $8{,}3 \cdot 10^{-13}$ mol; b) $5 \cdot 10^{11}$

2.109. $1{,}25 \cdot 10^{13}$

2.110. Laut des Energieerhaltungssatzes gilt für die Compton-Streuung: $\varepsilon = A + \varepsilon' + E_{\mathrm{kin}}$, wobei ε die einfallende Photonenenergie, A die Austrittsarbeit, ε' die gestreute Photonenenergie und E_{kin} die kinetische Energie des Compton-Elektrons bezeichnen. Alle Energiewerte müssen in Joule in die Formel eingesetzt werden! Dann ergibt sich die gestreute Photonenenergie aus der Gleichung:
$\varepsilon' = \varepsilon - A - E_{\mathrm{kin}} = \varepsilon - A - \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{e}}^2$
$= 0{,}66 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} - 50 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} - \frac{1}{2} 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (6 \cdot 10^{7})^{2}$
$= 1{,}056 \cdot 10^{-13} - 8 \cdot 10^{-18} - 1{,}638 \cdot 10^{-15} = 1{,}04 \cdot 10^{-13}$ J.
Aus dieser Photonenenergie ergibt sich die Wellenlänge: $\lambda = h\frac{c}{\varepsilon'} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3\cdot 10^{8}}{1{,}04\cdot 10^{-13}} =$ 1,9 pm.

2.111. a) 661 000 eV – 34 eV ≈ 661 keV = 106 fJ; b) 19 400

2.112. a) Der Schwächungskoeffizient ist: $\mu = \frac{\ln 2}{D} = \frac{\ln 2}{3} =$ 0,231 mm^{-1}.
b) Aus dem Schwächungsgesetz und der Voraussetzung ($J = 0{,}1 \cdot J_0$) ergibt sich die Schichtdicke:
$x = \frac{\ln\frac{J_0}{J}}{\mu} = \frac{\ln 10}{0{,}231} =$ 9,97 mm.

2.113. 2

2.114. 30,3%

2.115. 4,07 cm

Dosimetrie der ionisierenden Strahlungen

2.116. Wir haben ein α-strahlendes Isotop mit einer konstanten Aktivität von 5 MBq. Die Energie der α-Teilchen ist 6,2 MeV. Die komplette beim Zerfall freiwerdende Energie lassen wir von 0,1 kg Wasser absorbieren. Um wie viel Grad erhöht sich die Temperatur des Wassers in einer halben Stunde?

2.117. Die letale Dosis für den Menschen beträgt etwa 8 Gy bei Ganzkörperbestrahlung. Um wie viel Grad „erwärmt" sich der Organismus in Folge dieser Dosis?

2.118. Die der Sonnenstrahlung ausgesetzte 0,4 m^2 große Hautoberfläche eines 70 kg wiegenden Strandgastes absorbiert pro Minute und pro Quadratzentimeter durchschnittlich eine Energie von 4,2 J aus der Sonnenstrahlung. In welcher Zeit absorbiert er so viel Energie, die in Form von γ-Strahlung der letalen Dosis (d. h. 8 Gy) gleich wäre?

2.119. Wie groß ist die aus der direkten Strahlung von dem Patienten aufgenommene Dosis bei einer Röntgendurchleuchtung, die eine Minute dauert, wenn die Durchleuchtung mit einer Strahlungsintensität von 0,5 W/m^2 durchgeführt wird? Die Dicke des durchleuchteten Körpers beträgt 20 cm. Der durchschnittliche Massenschwächungskoeffizient des Körpergewebes ist 0,166 cm^2/g.

2.120. Es ist die Dosis auf der Hand zu berechnen, wenn man ein Probierglas mit einer ^{24}Na-Lösung mit einer Aktivität von 680 MBq 30 Sekunden lang in der Hand hält. Die Entfernung zwischen Hand und Flüssigkeit beträgt 1 cm. Es soll auch die Dosis für den Fall berechnet werden, wenn das Probierglas mit einer ca. 20 cm langen Zange angefasst wird. Welche Lehre kann man aus der Rechnung ziehen?

2.121. Wie groß ist die in der Luft erwartete Dosisleistung 30 cm von einem ^{24}Na-Isotop entfernt, das eine Aktivität von 0,6 GBq besitzt?

2.122. Wie fern sollte man sich in der Umgebung eines ^{131}I-Isotops mit einer Aktivität von 0,56 GBq aufhalten, um eine Dosisleistung von 20 $\mu Gy_{Luft}/h$ nicht zu überschreiten?

2.123. Wie lange dürfen wir uns in 30 cm Entfernung von einem ^{59}Fe-Präparat aufhalten, dessen Aktivität 0,75 GBq beträgt, ohne die für eine Woche erlaubte Dosis (1 mSv) zu überschreiten?

2.124. Wir legen ein ^{24}Na-Isotop mit einer Aktivität von 0,5 GBq hinter eine 2 cm dicke Bleiwand. Wie groß ist die Dosisleistung an der anderen Seite der Bleiwand in einer Entfernung von 30 cm?

2.125. Wir arbeiten mit einem ^{24}Na-Isotop, dessen Aktivität 20 MBq ist. Das Präparat befindet sich 40 cm von uns entfernt. Wie dick sollte der benutzte Bleiabsorbent sein, damit die Dosisleistung den Wert von 20 $\mu Gy_{Luft}/h$ nicht übersteigt?

2.126. Um wie viel Prozent sinkt die in der Luft absorbierte Dosis, wenn der Abstand von einer γ-strahlenden punktförmigen Quelle um 10% erhöht wird?

2.127. Um wie viel Prozent nimmt die in der Luft absorbierte Dosis zu, wenn der Abstand von einer γ-strahlenden punktförmigen Quelle um 10% reduziert wird?

2.128. In einer Zeitungsmeldung wurde berichtet, dass die Polizei ein ^{137}Cs-Präparat auf dem Flughafen bei einer Sicherheitskontrolle sichergestellt habe. Das 2,5 mg schwere Präparat sei von Bleifolien umhüllt in einem Aktenkoffer transportiert worden. Berechnen Sie
a) die Aktivität von 2,5 mg reinem ^{137}Cs,
b) die in der Luft erwartete Dosis während der Dauer des Flugs (3 Stunden) in einem Abstand von 0,6 m, wenn die Bleifolie 0,2 mm dick war und der Massenschwächungskoeffizient von Blei in Bezug auf die γ-Strahlung von ^{137}Cs 0,1 cm^2/g beträgt.

2.116. Die Aktivität gibt die Zahl der Zerfälle in einer Sekunde an. Wird die Aktivität mit der Zeitdauer der Bestrahlung multipliziert, erhält man die Zahl der Zerfälle während der Bestrahlung. In jedem Zerfall entsteht ein α-Teilchen. Die im Wasser absorbierte Gesamtenergie erhält man wie folgt: $\Delta E = \Lambda \cdot t \cdot E_\alpha$. Diese Energie wird das Wasser erwärmen. Eine Energiemenge von ΔE führt zu einer Temperaturzunahme von ΔT: $\Delta E = c \cdot m \cdot \Delta T$, wobei c die spezifische Wärmekapazität und m die Masse des Wassers bezeichnen. Aus den zwei Gleichungen ergibt sich die Temperaturzunahme:
$\Delta T = \frac{\Lambda \cdot t \cdot E_\alpha}{c \cdot m} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 1800 \cdot 6{,}2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4180 \cdot 0{,}1} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}$ °C.

2.117. $2{,}29 \cdot 10^{-3}$ °C

2.118. Die während der Bestrahlung aus der Sonnenstrahlung aufgenommene Gesamtenergie beträgt: $\Delta E = 4{,}2 \cdot 4000 \cdot t$, wobei die Fläche in cm^2 umgewandelt wurde – $0{,}4\ m^2 = 4000\ cm^2$. Die Dosis ergibt sich als $D = \frac{\Delta E}{\Delta m}$ und daraus $\Delta E = D \cdot \Delta m$. Aus den zwei Gleichungen erhält man:
$t = \frac{D \cdot \Delta m}{4{,}2 \cdot 4000} = \frac{8 \cdot 70}{4{,}2 \cdot 4000} = 0{,}0333$ min = 2 s.

2.119. Die durchtretende Röntgenintensität ist $J_0 e^{-\mu_m \cdot \rho \cdot x}$ und die im Körper absorbierte Intensität ist $J_0 - J$. Die im Körper absorbierte Energie erhält man, wenn man auch die bestrahlte Fläche (A) und die Bestrahlungszeit (t) berücksichtigt: $\Delta E = (J_0 - J) \cdot A \cdot t$. Die Masse des bestrahlten Körperteils lässt sich folgenderweise berechnen: $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot x$, wobei ρ die Dichte ist. Die absorbierte Dosis ist:
$D = \frac{\Delta E}{\Delta m} = \frac{(J_0 - J) \cdot A \cdot t}{\rho \cdot A \cdot x} = \frac{(J_0 - J) \cdot t}{\rho \cdot x} = \frac{J_0 \cdot (1 - e^{-\mu_m \cdot \rho \cdot x}) \cdot t}{\rho \cdot x} = \frac{0{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}166 \cdot 1{,}04 \cdot 20}) \cdot 60}{1040 \cdot 0{,}2} = 0{,}14$ Gy.

2.120. Wir können die in der Luft absorbierte Dosis einfach berechnen (wenn sich an der Stelle der Hand Luft befinden würde), wenn wir die Lösung als punktförmige Quelle betrachten:
$D_{\text{Luft}} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}68 \cdot 0{,}00833}{0{,}01^2} =$ =25100 μGy_{Luft} = 25 mGy_{Luft}. Man muss bei der Rechnung auf die Maßeinheiten achten! Da die Werte der Dosiskonstanten $K\gamma$ in den Tabellen in $\frac{\mu Gy_{Luft} m^2}{GBq \cdot h}$ angegeben sind, muss die Aktivität in GBq (680 MBq = 0,68 GBq), die Zeit in Stunden (30 s = 0,5 min = 0,00833 h) und der Abstand in Metern (1 cm = 0,01 m) eingesetzt werden. Dann erhält man die Dosis in μGy_{Luft}. Wenn der Abstand 20 cm beträgt, erhält man 62,5 μGy_{Luft}. Es ist wichtig zu bemerken, dass wegen der r^2-Abhängigkeit die Dosis 400-fach kleiner wird, obwohl der Abstand nur 20-fach erhöht wird!

2.121. 2,96 mGy_{Luft}/h

2.122. 123 cm

2.123. 45 Minuten

2.124. Die in der Luft erwartete Dosisleistung ohne Bleiabsorbent wäre: $\frac{D_{\text{Luft}}}{t} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda}{r^2}$. Mit Bleiabsorbent muss man diesen Wert noch mit dem exponentiellen Faktor aus dem Schwächungsgesetz korrigieren:
$\frac{D_{\text{Luft}}}{t} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda}{r^2} \cdot e^{-\mu_m \cdot \rho \cdot x} = 444 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}3^2} \cdot e^{-0{,}05 \cdot 11{,}3 \cdot 2} = 0{,}8$ mGy_{Luft}/h.

2.125. 1,8 cm

2.126. Die neue Dosis ist: $D'_{\text{Luft}} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{(r')^2} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{(1{,}1 \cdot r)^2} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{1{,}21 \cdot r^2} = \frac{1}{1{,}21} \cdot K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = \frac{D}{1{,}21} = 0{,}826 \cdot D$.
Die Dosis sinkt also um 17,4%.

2.127. 23,5%

2.128. a) 8,02 GBq; b) 5,23 mGy_{Luft}

Mechanische Strahlungen — Schall, Ultraschall

2.129. Berechnen Sie die Wellenlänge des Kammertons a1 (440 Hz) a) in der Luft und b) im Wasser.

2.130. Eine Schallwelle besitzt im Wasser eine Wellenlänge von 3 mm.
a) Berechnen Sie die Frequenz dieses Schalls.
b) Um was für eine Art Schall handelt es sich?
c) Wie groß wäre die Wellenlänge in der Luft?

2.131. Berechnen Sie die Wellenlänge eines therapeutischen Ultraschalls ($f = 800$ kHz) im Wasser.

2.132. Berechnen Sie die Frequenz und die Wellenlänge jeweils für die Grundschwingung und für die ersten zwei Oberschwingungen bei einem luftgefüllten Hohlresonator mit einem festen und einem freien Ende. Die Länge des Hohlresonators beträgt 50 cm und die Schallgeschwindigkeit ist 330 m/s.

2.133. Berechnen Sie die Frequenz- und die Wellenlängenwerte der Grundschwingung und der ersten Oberschwingung auf einer zweiseitig eingespannten Saite der Länge 14 cm. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf der Saite beträgt 448 m/s.

2.134. Berechnen Sie die Intensität der Schallwellen in einem Abstand von 30 m von einer punktförmigen Schallquelle mit einer Leistung von 200 W.

2.135. Die Intensität von gerade noch hörbaren Schallwellen beträgt 10^{-12} W/m^2 bei 1000 Hz. Berechnen Sie die effektive Druckschwankung dieser Schallwellen in der Luft bei Normalbedingungen (101 kPa und 0°C).

2.136. Die Intensität eines diagnostischen Ultraschallbündels beträgt 0,01 W/cm^2. Berechnen Sie die effektive Druckschwankung dieses Ultraschallbündels im Wasser.

2.137. Die Intensität eines therapeutischen Ultraschallbündels beträgt 2,5 W/cm^2. Berechnen Sie die effektive Druckschwankung dieses Ultraschallbündels im Wasser.

2.138. Die Schallintensität von dem Lärm eines Motorrades beträgt $6 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 im Leerlauf und $3{,}5 \cdot 10^{-1}$ W/m^2 bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h. Um wie viel dB ist die letztere Intensität höher?

2.139. Man dreht den Lautsprecher um 25 dB lauter. Auf das Wievielfache erhöht sich die Schallintensität?

2.140. Man legt den Wert von 10^{-12} W/m^2 als Vergleichsintensität fest. Bei dieser Intensität liegt also der Nullpunkt der dB-Skala (Schallpegel). In Bezug auf diese Vergleichsintensität soll beantwortet werden:
a) Wie viel dB stark ist der Lärm des Motorrades in Aufgabe 2.138 bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h?
b) Wie hoch ist die Schallintensität in einer Diskothek, in der der Schallpegel 105 dB beträgt?

2.141. Eine Schalldämpfungsschicht reduziert die Schallintensität von $6 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 auf $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ W/m^2. Berechnen Sie die Dämpfung (d. h. die Verminderung in dB).

2.142. Die Dämpfung einer Wand beträgt 52 dB. Die Intensität des Lärms auf einer Seite der Wand beträgt $8 \cdot 10^{-3}$ W/m^2. Berechnen Sie die Schallintensität auf der anderen Seite der Wand.

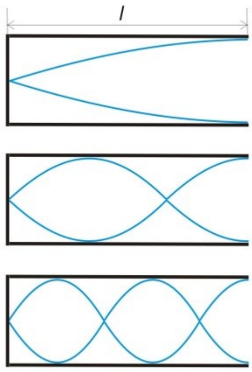
2.143. Schallwellen mit einer Wellenlänge von 1,6 m fallen aus der Luft auf eine Wasseroberfläche unter einem Einfallswinkel von 10°. Berechnen Sie a) den Reflexionswinkel und b) den Brechungswinkel.

2.144. Schallwellen fallen aus der Luft (bei Normalbedingungen, d. h. 101 kPa und 0°C) senkrecht auf eine Wasseroberfläche. Wie viel Prozent der einfallenden Intensität wird reflektiert?

2.129. a) Luft: 0,75 m; b) Wasser: 3,41 m

2.130. a) 500 kHz; b) Ultraschall; c) 0,66 mm

2.131. 1,88 mm



2.132. In der Abbildung ist ein Hohlresonator der Länge *l* zu sehen. Das linke Ende ist fest (geschlossen) und das rechte Ende ist frei (geöffnet). Von oben nach unten sind die Grundschwingung, die 1. und die 2. Oberschwingung zu sehen. Entsprechend dieser Abbildung gelten die folgenden Werte:
Grundschwingung: $\lambda_0 = 4 \cdot l = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ \mathrm{m}$ und daraus $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 150\ \mathrm{Hz}$.
1. Oberschwingung: : $\lambda_1 = \frac{4}{3} \cdot l = 66{,}7\ \mathrm{cm}$ und daraus $f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 450\ \mathrm{Hz}$.
2. Oberschwingung: $\lambda_2 = \frac{4}{5} \cdot l = 40\ \mathrm{cm}$ und daraus $f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 750\ \mathrm{Hz}$.

2.133. Grundschwingung: 1600 Hz und 28 cm; 1. Oberschwingung: 3200 Hz und 14 cm

2.134. 17,7 mW/m^2

2.135. Der Zusammenhang zwischen der effektiven Druckschwankung (Δp_{eff}) und der Schallintensität (J) ist: $\Delta p_{\mathrm{eff}} = \sqrt{J \cdot Z}$, wobei Z die akustische Impedanz der Luft bezeichnet. Diese ergibt sich aus der Dichte der Luft bei Normalbedingungen (ρ = 1,29 kg/m^3) und aus der Schallgeschwindigkeit (c = 330 m/s):
$Z = \rho \cdot c = 426\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2 \cdot s}}$. Mit diesem Impedanzwert ergibt sich: $\Delta p_{\mathrm{eff}} = \sqrt{J \cdot Z} = \sqrt{10^{-12} \cdot 426}$ = 20,6 µPa.

2.136. 12,2 kPa

2.137. 194 kPa

2.138. Laut der Definitionsformel der dB-Einheit ist: $n = 10\,\lg\frac{J_2}{J_1} = 10\,\lg\frac{3{,}5 \cdot 10^{-1}}{6 \cdot 10^{-6}}$ = 47,7 dB.

2.139. Aus der Definitionsformel der dB-Einheit ergibt sich der Quotient der zwei Intensitäten mit den folgenden Schritten:
$\frac{n}{10} = \lg\frac{J_2}{J_1}$ und $\frac{J_2}{J_1} = 10^{\frac{n}{10}} = 10^{\frac{25}{10}} = 316$.

2.140. a) 115 dB; b) 3,16·10^{-2} W/m^2

2.141. 43,8 dB

2.142. 5,05·10^{-8} W/m^2

2.143. a) 10°; b) 52,1°

2.144. Beim senkrechten Einfall gilt der folgende Zusammenhang für den Reflexionskoeffizient ρ (auch Reflektanz *R* oder Reflexionsvermögen genannt):
$\rho = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 = \left(\frac{\rho_2 \cdot c_2 - \rho_1 \cdot c_1}{\rho_2 \cdot c_2 + \rho_1 \cdot c_1}\right)^2 = \left(\frac{1000 \cdot 1500 - 1{,}29 \cdot 330}{1000 \cdot 1500 + 1{,}29 \cdot 330}\right)^2$ = 0,999 = 99,9%. Das heißt, es findet eine fast vollständige Reflexion statt! (Nehmen Sie bitte wahr, dass die Formel analog zu der Formel für die Lichtreflektanz einer Grenzfläche ist – dort taucht jedoch die Brechzahl statt der akustischen Impedanz auf.)

2.145. Bei einer Grenzfläche ist die akustische Impedanz von dem zweiten Medium um 30% größer als die des ersten Mediums. Berechnen Sie die Reflektanz (das Reflexionsvermögen) der Grenzfläche zwischen den zwei Medien.

2.146. Wasser dämpft bei 2 kHz die eindringende Schallintensität von $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 auf $3{,}45 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 auf einer Strecke von 500 m. Berechnen Sie
a) den linearen Schwächungskoeffizienten in der Einheit 1/km,
b) die Halbwertsdicke,
c) die Dämpfung,
d) die spezifische Dämpfung in der Einheit dB/(km·kHz) (unter der Voraussetzung, dass der lineare Schwächungskoeffizient zur Frequenz einfach proportional ist).

2.147. Die spezifische Dämpfung von Weichteilgewebe beträgt etwa 1 dB/(cm·MHz) in dem diagnostischen Ultraschallfrequenzbereich. Berechnen Sie
a) die Dämpfung durch ein 5 cm dickes Gewebe, wenn die angewendete Frequenz 4 MHz beträgt,
b) die abgeschwächte Schallintensität, wenn die eintretende Intensität 1200 W/m^2 beträgt,
c) den linearen Schwächungskoeffizienten,
d) die Halbwertsdicke des Gewebes.

2.148. Ein Pkw fährt mit einer durchgehend tönenden Hupe an einem stehenden Beobachter vorbei. Die Hupe hat eine Frequenz von 380 Hz. Welche Frequenz hört der Beobachter, wenn sich der Pkw mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h auf den Beobachter
a) zubewegt,
b) von ihm fortbewegt?
c) Berechnen Sie auch in beiden Fällen die Dopplerverschiebung.

2.149. Ein Pkw fährt mit durchgehend tönender Hupe an einer stehenden Person vorbei. Die Person hört den Ton höher bei Annäherung und niedriger bei Entfernung. Die beobachtete Frequenz fällt von 480 Hz auf 410 Hz. Berechnen Sie
a) die Geschwindigkeit des PKWs in km/h,
b) die ausgesendete Frequenz der Hupe.

2.150. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich der Beobachter von einer stehenden Schallquelle fortbewegen, wenn er den ausgesendeten Ton gerade eine Oktave tiefer hören möchte? (Eine Oktave entspricht einem Frequenzverhältnis von 2 zu 1.)

2.151. Zwei PKWs fahren aufeinander zu. Die Hupe des einen PKWs, dessen Geschwindigkeit 36 km/h beträgt, ertönt durchgehend mit einer Frequenz von 350 Hz. Welche Frequenz beobachtet eine Person, die in dem anderen PKW sitzt, der sich mit 90 km/h bewegt?

2.152. Ein Junge steht vor einem riesigen Schild und pfeift mit einer Frequenz von 500 Hz. Das Echo von dem stehenden Schild hat natürlicherweise dieselbe Frequenz.
a) Welche Frequenz würde der Junge beim Echo beobachten, wenn sich das Schild mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s von dem Jungen wegbewegen würde? (*Hilfe*: Die Situation kann so behandelt werden, als ob sich das Schild einerseits als „Beobachter” von der Schallquelle wegbewegt, andererseits sich als „Quelle” vom Beobachter wegbewegen würde.)
b) Berechnen Sie auch die Dopplerverschiebung bei dem sich bewegenden Schild.

2.145. 1,7%

2.146. a) Aus dem allgemeinen, auch für Schallwellen gültigen Schwächungsgesetz, ergibt sich der Schwächungskoeffizient:

$J = J_0 e^{-\mu x} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{1}{x}\ln\frac{J_0}{J} = \frac{1}{0{,}5}\ln\frac{3{,}5\cdot 10^{-6}}{3{,}45\cdot 10^{-6}} = 0{,}0288$ 1/km.

b) Auch die Halbwertsdicke erhält man aus dem allgemeinen Zusammenhang:

$D = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{\ln 2}{0{,}0288} = 24{,}1$ km.

c) Die Dämpfung ist definiert als

$\alpha = 10\cdot \lg\frac{J_0}{J} = 10\cdot \lg\frac{3{,}5\cdot 10^{-6}}{3{,}45\cdot 10^{-6}} = 0{,}0625$ dB.

d) Die spezifische Dämpfung lässt sich berechnen aus der Formel

$\text{spezifische Dämpfung} = \frac{\alpha}{f\cdot x} = \frac{0{,}0625}{2\cdot 0{,}5} = 0{,}0625$ dB/(km·kHz).

2.147. a) 20 dB; b) 12 W/m^2; c) 0,921 cm^{-1}; d) 0,753 cm

2.148. a) Nach der Formel für den Dopplereffekt im Falle einer sich bewegenden Schallquelle:

$f = f_0 \cdot \frac{c}{c-v} = 380\cdot\frac{330}{330-16{,}7} = 400$ Hz (c ist die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft und v ist die Geschwindigkeit des Autos in m/s).

b) Die gleiche Formel gilt für diesen Fall, nur mit einem „+" in dem Nenner:

$f = f_0 \cdot \frac{c}{c+v} = 380\cdot\frac{330}{330+16{,}7} = 362$ Hz.

c) Die Dopplerverschiebung ist die Differenz der beobachteten und der ausgesendeten Frequenzen, also +20 Hz im ersten Fall bzw. –18 Hz im zweiten Fall.

2.149. a) 93,4 km/h; b) 442 Hz

2.150. Wenn sich der Beobachter bewegt und die Schallquelle steht, gilt die folgende Formel für den Dopplereffekt:

$f = f_0 \cdot \frac{c\pm v}{c}$. Bei Fortbewegung ist das „–" zu verwenden. Laut der Aufgabenstellung ist $f = \frac{f_0}{2}$.

Die Schritte der Lösung sind:

$\frac{f_0}{2} = f_0\cdot\frac{c-v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \frac{c-v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c = 2(c-v) \quad \Rightarrow \qquad 2v = c$

und schließlich $v = \frac{c}{2}$.

Der Beobachter sollte sich also mit der Hälfte der Schallgeschwindigkeit bewegen.

2.151. Diesmal bewegen sich Schallquelle und Beobachter gleichzeitig, deswegen soll die kombinierte Formel $f = f_0\cdot\frac{c+v_2}{c-v_1} = 350\cdot\frac{330+25}{330-10} = 388$ Hz verwendet werden, wobei v_1 die Geschwindigkeit des ersten PKWs mit der tönenden Hupe (= 36 km/s = 10 m/s) und v_2 die Geschwindigkeit des zweiten PKWs mit dem Beobachter (= 90 km/s = 25 m/s) bezeichnen.

(Die Verwendung der Formel $f = f_0\cdot\frac{c}{c-v}$ oder $f = f_0\cdot\frac{c+v}{c}$ mit dem Wert v = 10 +25 = 35 m/s ist falsch. Allerdings führt dies zu nur wenig unterschiedlichen Ergebnissen. Die erste Formel ergibt 392 Hz statt des richtigen Wertes von 388 Hz, während die zweite Formel 387 Hz ergibt.)

2.152. a) 443 Hz; b) –57 Hz

3. Transporterscheinungen

Strömungen in Röhren

3.1. Das Herz pumpt im Durchschnitt 5,6 l Blut pro Minute in die Aorta. Wie groß ist die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in der Aorta mit einem Durchmesser von 2 cm?

3.2. Bei einer ruhigen Einatmung strömt 600 ml Luft in 2 Sekunden durch die Luftröhre, deren Querschnittsfläche 2,5 cm^2 beträgt. Berechnen Sie die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit der Luft.

3.3. Für eine Injektion wird eine Spritze mit einer Querschnittsfläche von 1 cm^2 benutzt. Man bewegt bei der Injektion den Kolben mit einer Geschwindigkeit von 1 mm/s. Die verwendete Hohlnadel hat einen inneren Durchmesser von 0,2 mm. Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit in der Hohlnadel?

3.4. Die Volumenstromstärke des Blutes in der Aorta (Querschnittsfläche = 4 cm^2) beträgt im Ruhezustand 5 Liter/Minute.

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit in der Aorta unter der Voraussetzung, dass die Strömung stationär ist.

b) Die Anzahl der geöffneten Kapillaren im Ruhezustand beträgt etwa 12 Milliarden. Die Parameter einer Kapillare sind: Durchmesser = 6 μm und Länge = 0,75 mm. Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit in den Kapillaren.

c) Wie viel Zeit verbringt ein Erythrozyt mit dieser Geschwindigkeit in der Kapillare?

3.5. Eine Druckdifferenz von 8 kPa treibt die Strömung einer Infusionslösung in einer Röhre mit einer Länge von 50 cm und einem inneren Radius von 1 mm. Die Viskosität der Lösung beträgt 1,5 mPas; ihre Dichte ist 1,2 g/cm^3. Berechnen Sie

a) die Volumenstromstärke der Strömung (in Liter/min),

b) die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit,

c) die kritische Geschwindigkeit.

3.6. Wasser strömt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 6 cm/s in einer 3 m langen Röhre mit einer Querschnittsfläche von 5 cm^2. (T = 20°C)

a) Ist die Strömung laminar oder turbulent?

b) Berechnen Sie die Volumenstromstärke der Strömung.

c) Berechnen Sie die zur Aufrechterhaltung der Strömung nötige Druckdifferenz.

3.7. Das Blut strömt mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s in einem 20 cm langen Abschnitt der Aorta. Die Querschnittsfläche der Aorta beträgt 2 cm^2. (Rechnen Sie mit einer laminaren und stationären Strömung!)

a) Wie groß ist die Volumenstromstärke in der Aorta (in Liter/min)?

b) Wie groß ist die zur Aufrechterhaltung der Strömung nötige Druckdifferenz?

c) Der gesamte, die Strömung in dem Körperkreislauf aufrechterhaltende Druck ist etwa 16 kPa. Wie viel Prozent fällt davon auf den 20 cm langen Abschnitt der Aorta?

d) Um wie viel Prozent könnte die Volumenstromstärke erhöht werden, ohne dass die Strömung turbulent wird?

3.8. Bei einer Bluttransfusion hängt der Blutbehälter 1,3 m über der Kanüle, deren Länge und Innendurchmesser 3 cm bzw. 0,36 mm betragen. In einer Minute fließt 4,5 cm^3 Blut durch die Kanüle. Berechnen Sie die Viskosität des Blutes unter diesen Bedingungen.

3.1. Die Volumenstromstärke der Blutströmung ist $5{,}6\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 5600\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{min}} = 93{,}3\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{s}}$. Der Zusammenhang zwischen Volumenstromstärke (I) und durchschnittlicher Strömungsgeschwindigkeit ($\bar{v}$) ist $I = A \cdot \bar{v}$, wobei A die Querschnittsfläche der Aorta bezeichnet. Die Querschnittsfläche ergibt sich aus dem Durchmesser (d): $A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot \pi = 3{,}14\ \mathrm{cm}^2$. Mit diesen Werten lässt sich die Geschwindigkeit errechnen: $\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{93{,}3}{3{,}14} = 29{,}7$ cm/s.

3.2. 120 cm/s

3.3. Laut der Kontinuitätsgleichung gilt: $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$, wobei A die Querschnittsfläche und v die Geschwindigkeit bezeichnen. Der Index 1 bedeutet „Spritze“ und 2 „Hohlnadel“. Die Querschnittsfläche der Hohlnadel ergibt sich aus dem Durchmesser: $A_2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2 \cdot \pi = 0{,}0314\ \mathrm{mm}^2$.
Nach dem Einsetzen der Werte in die Kontinuitätsgleichung erhält man:
$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 = \frac{100}{0{,}0314} \cdot 1 = 3190$ mm/s = 3,19 m/s.

3.4. a) 20,8 cm/s; b) 0,245 mm/s; c) 3,06 s (Diese Zeit ist verhältnismäßig lang, sie reicht normalerweise für einen effektiven Stoffaustausch aus.)

3.5. a) Unter der Voraussetzung, dass die Strömung laminar und stationär und die Flüssigkeit eine newtonsche Flüssigkeit ist, ergibt sich die Volumenstromstärke (I) aus dem Hagen–Poiseuille-Gesetz:
$I = \frac{\pi}{8\eta} r^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$, wobei η die Viskosität, r den Radius, Δl die Länge und Δp die Druckdifferenz zwischen den zwei Enden der Röhre bezeichnen. Nach dem Einsetzen der Werte erhält man:
$I = \frac{\pi}{8\eta} r^4 \frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\pi}{8 \cdot 0{,}0015} \cdot 0{,}001^4 \cdot \frac{8000}{0{,}5} = 4{,}19 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 4{,}19\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = 251\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min} = 0{,}251$ Liter/min.
b) Die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit erhält man aus dem Zusammenhang:
$\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{I}{r^2\pi} = \frac{4{,}19}{0{,}1^2 \cdot 3{,}14} = 133$ cm/s.
c) Die kritische Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Zusammenhang: $v_{\mathrm{krit}} = Re \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}$, wobei Re die Reynolds-Zahl (bei glattwandigen Gefäßen etwa 1160, s. „Konstanten und Daten”) bezeichnet. Nach dem Einsetzen der Werte:
$v_{\mathrm{krit}} = Re \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r} = 1160 \cdot \frac{0{,}0015}{1200 \cdot 0{,}001} = 1{,}45$ m/s.
Dieser Wert ist höher als die tatsächliche Geschwindigkeit (Frage b), d. h., die Strömung bleibt noch laminar.

3.6. a) Da $v_{\mathrm{krit}} = 9{,}21$ cm/s ist, ist die tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit (6 cm/s) kleiner als der kritische Wert und die Strömung bleibt laminar.
b) 30 cm^3/s; c) 9,09 Pa

3.7. a) 6 Liter/min; b) 56,5 Pa; c) 0,353%; d) 24%

3.8. In dieser Situation treibt die hydrostatische Druckdifferenz die Strömung:
$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 1050 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}3 = 13\ 390$ Pa. In der Gleichung bezeichnen ρ die Dichte des Blutes (= 1050 $\mathrm{kg/m}^3$), g die Beschleunigung des freien Falles (= 9,81 $\mathrm{m/s}^2$) und Δh den Höhenunterschied zwischen Behälter und Kanüle (= 1,3 m). Die Volumenstromstärke beträgt 4,5 cm^3/min = $7{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Bei der weiteren Rechnung wird vorausgesetzt, dass die Strömung laminar und stationär und das Blut eine newtonsche Flüssigkeit sind. Unter diesen Voraussetzungen kann nämlich die Viskosität aus dem Hagen–Poiseuille-Gesetz errechnet werden:
$\eta = \frac{\pi}{8I} r^4 \frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\pi}{8 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}00018^4 \cdot \frac{13390}{0{,}03} = 2{,}45$ mPa·s.

3.9. In einer Arterie mit einem Innendurchmesser von 4 mm ist die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Hälfte des kritischen Wertes. In einem stenotischen Abschnitt der Arterie verringert sich der innere Durchmesser auf die Hälfte. Unter der Voraussetzung einer stationären Strömung sollen die Strömungsgeschwindigkeiten und die kritischen Geschwindigkeiten in den verschiedenen Querschnitten errechnet werden. Wo könnten Turbulenzen mit größerer Wahrscheinlichkeit auftreten?

3.10. In einer großen Arterie liegt die tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit des Blutes 30% unter dem kritischen Geschwindigkeitswert. Um wie viel Prozent sollte die Querschnittsfläche der Arterie abnehmen, damit die Strömungsgeschwindigkeit in der Verengung den kritischen Wert erreicht? (Voraussetzung: Viskosität und Dichte des Blutes werden durch die Verengung nicht beeinflusst.)

3.11. Eine Arterie verzweigt sich in fünf Abschnitte mit demselben inneren Durchmesser. In jedem von diesen beträgt die Strömungsgeschwindigkeit 8/10 derjenigen, die vor der Verzweigung herrschte und 1/3 der kritischen Strömungsgeschwindigkeit. In welchem Abschnitt würde die Strömung früher turbulent werden, wenn man die Volumenstromstärke steigern würde und bei wie viel Prozent der Steigerung würde dies eintreten? (Die Strömung soll als stationär angenommen werden.)

Diffusion

3.12. Ein großes Gefäß wird mit einer 2 mm dicken Wand aufgeteilt. Die eine Hälfte wird mit reinem Wasser, die andere mit einer Glukoselösung der Konzentration 500 mmol/l gefüllt. Man öffnet ein kleines Loch mit einer Fläche von 1 cm^2 in der Wand. Wie viel Mol Glukose diffundiert in einer Stunde durch das Loch? (Der Diffusionskoeffizient von Glukose in Wasser beträgt $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ m^2/s bei Raumtemperatur.)

3.13. Ein Gelzylinder mit einem Radius von 3,4 mm und einer Länge von 2 cm enthält K^+-Ionen in einer Konzentration von 4,4 mmol/l. Das Gel wird in reines Wasser geworfen. Setzen wir voraus, dass im Laufe der nach außen gerichteten Diffusion der K^+-Ionen sich eine Situation einstellt, bei der die Konzentration direkt in der Mitte des Gels noch den ursprünglichen Wert hat und radial gleichmäßig bis auf null auf der äußeren Seite des Gels fällt. Die Diffusion durch die Endflächen des Zylinders sei vernachlässigbar. Wie viel Mol K^+-Ionen diffundieren in dieser Situation durch die Mantelfläche aus dem Gel in einer Sekunde? (Der Diffusionskoeffizient der K^+-Ionen im Gel beträgt $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ m^2/s bei Raumtemperatur.)

3.14. Die Sauerstoffdiffusion aus einer Kapillare ins Gewebe wird durch die folgende Aufgabe beschrieben. Die O_2-Konzentration beträgt 200 mmol/l im Blut und 50 mmol/l im Gewebe. Die Konzentration fällt gleichmäßig durch die 3 μm dicke Kapillarwand. Die zylindrische Kapillare ist 0,75 mm lang und ihr innerer Radius beträgt 3 μm. Der Diffusionskoeffizient von O_2-Molekülen beträgt $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ m^2/s. Berechnen Sie die in einer Minute durch die innere Mantelfläche der Kapillare durchdiffundierende O_2-Menge.

3.15. Der Diffusionskoeffizient von Glukose in Wasser beträgt $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ m^2/s bei 25°C. Schätzen Sie aus diesen Daten den hydrodynamischen Radius des Glukosemoleküls.

3.16. a) Schätzen Sie aus dem Diffusionskoeffizienten den hydrodynamischen Radius und daraus das Molekülvolumen für Myoglobin und Hämoglobin. In Wasser und bei 25°C gelten die folgenden Werte: $D_{\text{Myoglobin}} = 1{,}13 \cdot 10^{-10}$ m^2/s und $D_{\text{Hämoglobin}} = 0{,}69 \cdot 10^{-10}$ m^2/s.

b) Berechnen Sie das Verhältnis der Molekülvolumina. Wie kann das Ergebnis erklärt werden?

3.9. v_1 = 1,243 m/s, $v_{krit,1}$ = 2,486 m/s; v_2 = 4,972 m/s, $v_{krit,2}$ = 4,972 m/s; innerhalb der Stenose

3.10. 51%

3.11. vor der Verzweigung, 20%

3.12. Mit zwei plausiblen Voraussetzungen kann das erste ficksche Gesetz verwendet werden: Die Konzentration fällt in dem Loch gleichmäßig vom höheren Wert auf null und die zeitlichen Änderungen der Konzentrationen in den zwei Teilen des Gefäßes infolge der Diffusion sind, innerhalb der ersten Stunde, vernachlässigbar. Aus dem fickschen Gesetz ergibt sich dann die Glukosemenge:
$\Delta\nu = D \cdot A \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x} \cdot \Delta t = 5{,}7 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{500}{0{,}002} \cdot 3600 = 51{,}3$ μmol.

3.13. 0,829 nmol

3.14. 63,6 nmol

3.15. Die Einstein-Stokes-Gleichung für den Diffusionskoeffizienten ($D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$) gilt für kugelförmige Teilchen. Sie kann aber auch annähernd für Glukosemoleküle verwendet werden. In der Gleichung bezeichnen k die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur, η die Viskosität des Mediums und r den hydrodynamischen (oder Stokes-)Radius des diffundierenden Teilchens. Die Viskosität des Wassers beträgt 0,85 mPas bei 25°C (s. „Konstanten und Daten"). Aus der Gleichung folgt der gefragte Radius:
$r = \frac{kT}{6\pi\eta D} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}00085 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-10}} = 450$ pm.

3.16. a) Unter der Voraussetzung einer nahezu kugelförmigen Gestalt ergibt sich der Radius aus der Einstein-Stokes-Gleichung:
$r_{\text{Myoglobin}} = \frac{kT}{6\pi\eta D} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}00085 \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-10}} = 2{,}27$ nm,
$r_{\text{Hämoglobin}} = \frac{kT}{6\pi\eta D} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}00085 \cdot 0{,}69 \cdot 10^{-10}} = 3{,}72$ pm.
Das Volumen der Kugel lässt sich durch die folgende Formel berechnen:
$V_{\text{Myoglobin}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{Myoglobin}}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}27^3 = 49$ nm^3,
$V_{\text{Hämoglobin}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{Hämoglobin}}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}72^3 = 216$ nm^3.
b) Das Verhältnis ist 216/49 = 4,4. Das Hämoglobinmolekül ist ein Tetramer, d. h., es besteht hinsichtlich der Größe praktisch aus vier Myoglobinmolekülen.

3.17. Der Diffusionskoeffizient von Glukose im Wasser beträgt $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ m^2/s. Schätzen Sie daraus, wie viel Zeit ein Glukosemolekül im Durchschnitt braucht, um eine Entfernung von

a) 1 μm bzw.

b) 1 m vom Startpunkt durch Diffusion als Random Walk zu erreichen.

3.18. Die molare Masse eines Membranproteins beträgt 80 000 g/mol. Setzen wir voraus, dass das Molekül kugelförmig ist und eine Dichte von 1,4 g/cm^3 hat.

a) Geben Sie eine Schätzung für den Diffusionskoeffizienten des Moleküls in der Membran an, wenn bei 37°C die Viskosität der Membran 0,1 Pas beträgt.

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Strecke, die das Proteinmolekül in der Membran in einer Sekunde zurücklegt.

Energetische Beziehungen der Transportprozesse — Thermodynamik

3.19. In einem mit einem Kolben abgesperrten Zylinder herrscht ein Gasdruck von 200 kPa, der äußere Druck hingegen beträgt 101 kPa. In Folge der Druckdifferenz bewegt sich der Kolben nach außen. Betrachten wir eine kleine Verschiebung von 1 mm, während sich die Druckwerte praktisch nicht ändern. Berechnen Sie die durch das sich im Zylinder befindliche Gas verrichtete Volumenarbeit bei der Verschiebung. Die Querschnittsfläche des Zylinders beträgt 20 cm^2.

3.20. In einem mit einem Kolben abgesperrten Zylinder befinden sich 0,5 mol ideales Gas, dessen Temperatur 100°C ist. Das Gas leistet eine Arbeit von –1554 J, indem es sich isotherm reversibel ausdehnt. Wie groß ist der dabei vom Kolben zurückgelegte Weg, wenn seine Entfernung vom Ende des Zylinders ursprünglich 40 cm groß war?

3.21. In einen Ballon muss 1/4 mol Luft unter einem Druck, der 30% Volumenverminderung verursacht, mit dem Mund geblasen werden. Wie groß ist die geleistete Volumenarbeit bei diesem isothermen Prozess? Die Temperatur, der in den Ballon geblasenen Luft, ist etwa 37°C. (Der Prozess soll als reversibel und die Luft als ideales Gas angesehen werden.)

3.22. Bei einer Herzkontraktion wird Blut mit einem Volumen von 60 cm^3 aus dem linken Ventrikel in die Aorta gepumpt. Nach der Kontraktion wird der Ventrikel mit dem gleichen Volumen aufgefüllt. Nehmen wir an, dass der Druck in dem linken Ventrikel während der einzelnen Phasen etwa gleich bleibt: Während der Aus- und der Einströmung liegen die Druckwerte bei 120 mmHg bzw. 0 mmHg über dem äußeren atmosphärischen Wert (101 kPa). Berechnen Sie

a) die während der Ausströmung verrichtete Volumenarbeit,

b) die während der Einströmung verrichtete Volumenarbeit,

c) die Gesamtarbeit (im absoluten Betrag),

d) die durchschnittliche Leistung der Herzmuskulatur bei einem Puls von 72/min.

3.23. Bei ruhiger Atmung wird in einem Atemzyklus 0,5 l Luft ein- bzw. ausgeatmet. Der Luftdruck in der Lunge liegt dabei etwa 2 mmHg niedriger bzw. höher als der äußere atmosphärische Druck (101 kPa). Berechnen Sie

a) die Gesamtvolumenarbeit (im absoluten Betrag) in einem Zyklus,

b) die durchschnittliche Leistung bei einer Atemfrequenz von 20/min.

3.17. a) Nach der Random Walk-Theorie der Diffusion ergibt sich der durchschnittliche Abstand der Moleküle zu ihrem Startpunkt nach der Zeit t aus dem Zusammenhang: $\bar{R} = \sqrt{3Dt}$, wobei D den Diffusionskoeffizienten bezeichnet. Die Formel kann nach t aufgelöst und die Werte können eingesetzt werden:

$t = \frac{\bar{R}^2}{3D} = \frac{\left(10^{-6}\right)^2}{3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-10}} = 0{,}585$ ms.

b) $t = \frac{\bar{R}^2}{3D} = \frac{1^2}{3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-10}} = 5{,}85 \cdot 10^8$ s = 18,5 Jahre.

3.18. a) $8{,}03 \cdot 10^{-13}$ m^2/s; b) 1,55 µm

3.19. Wenn der Druck konstant ist, lässt sich die Volumenarbeit (mechanische Arbeit) nach dem Zusammenhang $W_{\text{mech}} = -p \cdot \Delta V$ berechnen, wobei p den im Zylinder herrschenden Gasdruck (und nicht den äußeren Druck!) und ΔV die Volumenänderung bezeichnen. Die Volumenänderung ergibt sich aus der Querschnittsfläche A und der Verschiebung Δx: $\Delta V = A \cdot \Delta x$. Im Endergebnis:

$W_{\text{mech}} = -p \cdot A \cdot \Delta x = -2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = -0{,}4$ J. (Das negative Vorzeichen weist nur darauf hin, dass bei diesem Prozess die innere Energie des Gases abnimmt.)

3.20. Jetzt ist der Gasdruck nicht mehr konstant, er nimmt bei der Ausdehnung ab. (Den Wert des Druckes braucht man aber nicht.) Dafür läuft der Prozess aber isotherm ab, also bei konstanter Temperatur. Unter diesen Bedingungen ergibt sich die Volumenarbeit für ein ideales Gas aus der Formel:

$W_{\text{mech}} = -\nu \cdot R \cdot T \ln\frac{V_2}{V_1}$, wobei ν die Molzahl des Gases, T seine Temperatur, V_1 das Anfangsvolumen und V_2 das Endvolumen bezeichnen. In Kenntnis der Volumenarbeit kann die Formel nach dem Quotienten der Volumina aufgelöst werden:

$\frac{V_2}{V_1} = e^{-\frac{W_{\text{mech}}}{\nu \cdot R \cdot T}} = e^{-\frac{-1554}{0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 373}} = 2{,}73.$

Der Quotient der Volumina kann folgenderweise geschrieben werden:

$2{,}73 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{A \cdot x_2}{A \cdot x_1} = \frac{x_2}{x_1}$, wobei A die Querschnittsfläche des Zylinders und x_1/x_2 die Entfernung des Kolbens vom Ende des Zylinders am Anfang bzw. am Ende bezeichnen. Daraus ergibt sich:

$x_2 = 2{,}73 \cdot x_1 = 2{,}73 \cdot 40 = 109$ cm.

Die Verschiebung des Kolbens beträgt also 109 – 40 = 69 cm.

3.21. 230 J

3.22. a) –7,02 J; b) 6,06 J; c) 0,96 J; d) 1,15 W

3.23. a) 2 mJ; b) 0,667 mW

3.24. a) Wie groß ist die Konzentrationsarbeit (im absoluten Betrag) der Tubuluszellen der Niere im menschlichen Körper (37°C), wenn sie die 100-fache Konzentrierung von 0,73 mol Glukose durchführen (in Richtung Blut aus dem filtrierten Urin)?
b) Die Tubuluszellen reabsorbieren diese Menge innerhalb eines Tages. Mit welcher Leistung arbeiten diese Zellen?

3.25. Ein Eisstück der Masse 2 kg schmilzt bei 0°C. Wie ändert sich seine Entropie? (Der Prozess kann als reversibel behandelt werden.)

3.26. Zwei Wassermengen von je 1 kg mit den Temperaturen 0°C bzw. 100°C werden zusammengeschüttet. Es soll bestimmt werden, in welchem Maße die Entropie des Systems zu- oder abnimmt.

3.27. 0,5 kg Eis (0°C) wird in 4 kg Wasser geworfen, dessen Temperatur 55°C ist. Wie groß ist die Entropieänderung bis zum Gleichgewicht?

3.28. Vier Moleküle (A, B, C und D) befinden sich in der einen Hälfte eines Behälters. Die Trennwand zwischen den zwei Hälften wird für die Moleküle permeabel gemacht. Berechnen Sie
a) die thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten der zwei Makrozustände, wenn (1) alle Moleküle in der einen Hälfte bleiben bzw. (2) für eine gleichmäßige Verteilung zwischen den zwei Hälften des Behälters,
b) die Entropieänderung in dem Ausgleichsprozess, wenn sich die Moleküle, ausgehend von dem Anfangszustand, gleichmäßig verteilen.

3.29. Ein Behälter wird durch zwei Trennwände in drei gleich große Teile aufgeteilt. Am Anfang enthält das erste Drittel sechs Moleküle, die anderen Drittel sind leer. Die Trennwände werden für die Moleküle permeabel gemacht. Berechnen Sie
a) die thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten der zwei Makrozustände, wenn (1) alle Moleküle in dem ersten Drittel bleiben bzw. (2) für eine gleichmäßige Verteilung auf die drei Teile des Behälters,
b) die Entropieänderung in dem Ausgleichsprozess, wenn sich die Moleküle, ausgehend von dem Anfangszustand, gleichmäßig verteilen.

3.30. Energie wird einem thermodynamischen System bei konstanter Temperatur von 350 K zugeführt. Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit wächst dadurch $10^{10^{10}}$-fach. Welche Energiemenge wurde zugeführt?

3.24. a) Die Konzentrationsarbeit (chemische Arbeit) ergibt sich bei konstanter Temperatur aus dem Zusammenhang: $W_{\text{chem}} = \nu \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{c_2}{c_1} = 0{,}73 \cdot 8{,}31 \cdot 310 \cdot \ln 100 = 8{,}66$ kJ.

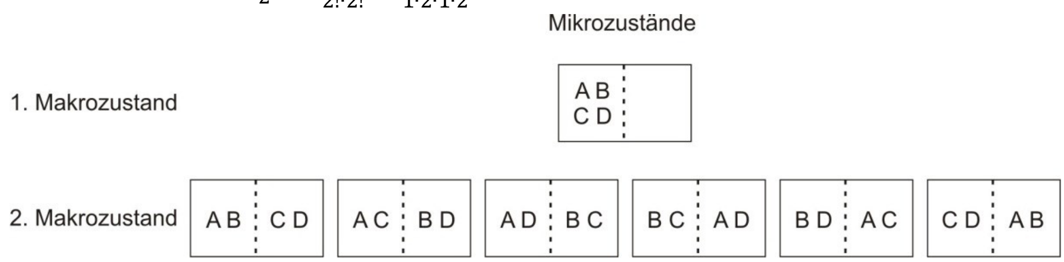
b) Die Leistung erhält man aus der Formel: $P_{\text{chem}} = \frac{W_{\text{chem}}}{t} = \frac{8660}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}1$ W.

3.25. Die Entropieänderung lässt sich aus der Formel $\Delta S = \frac{Q}{T}$ errechnen, wobei Q die beim Schmelzen aufgenommene Wärme und T die Temperatur bezeichnen. Q ergibt sich aus der Masse und der spezifischen Schmelzwärme des Eisstückes (q_{Schmelz} = 334,4 kJ/kg). Damit ist die Entropieänderung:
$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m \cdot q_{\text{Schmelz}}}{T} = \frac{2 \cdot 334{,}4 \cdot 10^3}{273} = 2450$ J/K.

3.26. Zuerst soll die Gleichgewichtstemperatur (t) errechnet werden. Schon aus Symmetriegründen folgt, dass diese Temperatur 50°C ist. Die ausführliche Rechnung dazu:
Vorausgesetzt, dass das System geschlossen ist, gilt die Energieerhaltung, d. h., die durch die wärmere Wassermenge (t_2 = 100°C) bei Abkühlung abgegebene Wärme ist gleich der durch die kältere Wassermenge (t_1 = 0°C) aufgenommenen Wärme:
$c \cdot m_2 \cdot (t_2 - t) = c \cdot m_1 \cdot (t - t_1)$, wobei c die spezifische Wärmekapazität des Wassers bezeichnet. Die Temperaturwerte können in °C eingesetzt werden, da es um Differenzen geht:
$1 \cdot (100 - t) = 1 \cdot (t - 0) \quad \Rightarrow \quad 100 = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 50$°C.
Die kältere Wassermenge erwärmt sich also auf 50°C, wobei ihre Entropie zunimmt:
$\Delta S_1 = c \cdot m \cdot \ln \frac{T}{T_1} = 4{,}18 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \ln \frac{323}{273} = 703$ J/K.
Ähnlicherweise kann die Entropieabnahme bei der Abkühlung der anderen Wassermenge berechnet werden: $\Delta S_2 = c \cdot m \cdot \ln \frac{T}{T_2} = 4{,}18 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \ln \frac{323}{373} = -602$ J/K.
Die Entropieänderung des ganzen Systems ergibt sich additiv aus den zwei Werten:
$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 703 - 602 = 101$ J/K. Die Entropie des ganzen Systems bei diesem Ausgleichsprozess (wie bei jedem Ausgleichsprozess) nimmt also zu.

3.27. 117 J/K

3.28. Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit eines Zustandes ist die Anzahl der zum Makrozustand gehörenden Mikrozustände. Bei dem 1. Makrozustand ist diese Wahrscheinlichkeit (Ω_1) gleich 1 (s. Abbildung). Bei der gleichmäßigen Verteilung sind zwei Moleküle in der einen und zwei in der anderen Hälfte zu finden. Je nachdem, welches Molekül sich wo befindet, unterscheiden sich die zu diesem 2. Makrozustand gehörenden Mikrozustände. Die Anzahl der Kombinationen, wie man zwei Moleküle aus vier auswählen kann, ist gleich $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$. Also $\Omega_2 = 6$.



b) Die Entropie eines Makrozustandes ist $S = k \ln \Omega$. Die Entropiezunahme ist:
$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \Omega_2 - k \ln \Omega_1 = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot \ln \frac{6}{1} = 2{,}47 \cdot 10^{-23}$ J/K.

3.29. a) 1 bzw. 90; b) $6{,}21 \cdot 10^{-23}$ J/K

3.30. 483 mJ

3.31. 100 g Wasser verdampfen bei 100°C und 101 kPa Druck (am normalen Siedepunkt). Berechnen Sie die Veränderung
a) der Entropie,
b) der Enthalpie,
c) der inneren Energie.
(Es soll das Volumen des Wassers außer Acht gelassen und der Wasserdampf als ideales Gas betrachtet werden.)

3.32. Ein Eisstück mit einer Masse von 5 kg gefriert bei 0°C und 101 kPa. Berechnen Sie
a) die Veränderung der Entropie,
b) die Veränderung der Enthalpie,
c) die verrichtete mechanische Arbeit,
d) die Veränderung der inneren Energie.
(Der Prozess soll als reversibel angesehen werden.)

3.33. Wie groß ist die freie Enthalpie von 200 ml Glukoselösung, deren Konzentration 0,02 mol/l ist, bei einer Temperatur von 25°C? (Das chemische Standardpotenzial von Glukose beträgt –902,5 kJ/mol.)

Transportvorgänge durch biologische Membranen, Membranpotenzial

3.34. Mittels Isotopenuntersuchungen wurde festgestellt, dass die Zellmembran für K^+-Ionen permeabel ist. In der intra- bzw. extrazellulären Flüssigkeit (wegen der im intrazellulären Raum anwesenden, immobilen, negativen Eiweißionen) ist die Konzentration der K^+-Ionen 155 bzw. 4 mmol/l. Wie groß ist die elektromotorische Kraft, die aus dieser Konzentrationsdifferenz bei einer Körpertemperatur von 37°C entsteht?

3.35. Das Membranpotenzial von Froschmuskelzellen beträgt –92 mV im Ruhezustand (Ruhepotenzial) bei 25°C. Berechnen Sie das Gleichgewichtspotenzial bei dieser Temperatur für
a) K^+-Ionen (intrazelluläre Konzentration: 139 mmol/l; extrazelluläre Konzentration: 2,5 mmol/l),
b) Na^+-Ionen (intrazelluläre Konzentration: 20 mmol/l; extrazelluläre Konzentration: 120 mmol/l),
c) Cl^--Ionen (intrazelluläre Konzentration: 3,8 mmol/l; extrazelluläre Konzentration: 120 mmol/l).
Vergleichen Sie die errechneten Werte mit dem gemessenen Ruhepotenzialwert von –92 mV.

3.36. Das gemessene Ruhepotenzial des Froschmuskels bei 25°C ist –92 mV. Die Konzentrationen bzw. Permeabilitätswerte sind: c_K^i = 139 mmol/l; c_K^e = 2,5 mmol/l; p_K = 1; c_{Cl}^i = 3,8 mmol/l; c_{Cl}^e = 120 mmol/l; p_{Cl} = 2; c_{Na}^i = 20 mmol/l; c_{Na}^e = 120 mmol/l und p_{Na} = 0,01. Berechnen Sie das Ruhepotenzial nach der Goldman-Hodgkin-Katz-Gleichung und die prozentuelle Abweichung von dem gemessenen Wert unter der Berücksichtigung
a) aller Ionensorten,
b) der zwei mobilsten Ionensorten (d. h. K^+ und Cl^-),
c) von lediglich K^+- und Na^+-Ionen.

3.31. a) Die Entropieänderung ergibt sich aus der Definitionsformel (wenn der Prozess als reversibel angenommen wird):

$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m \cdot q_{\text{Verdampfung}}}{T} = \frac{0{,}1 \cdot 2257 \cdot 10^3}{373} = 605$ J/K.

b) Da der Prozess isobar abläuft, ist die Enthalpieänderung gleich der aufgenommenen Wärme:

$\Delta H = Q = m \cdot q_{\text{Verdampfung}} = 226$ kJ.

c) Mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich:

$\Delta E = Q - p \cdot \Delta V = Q - p \cdot (V_{\text{Gas}} - V_{\text{Flüssigkeit}}) = Q - p \cdot V_{\text{Gas}}$,

weil das Wasservolumen nach der Aufgabenstellung vernachlässigt werden darf. Da der Wasserdampf als ideales Gas behandelt werden darf, kann das ideale Gasgesetz verwendet werden: $pV = \nu RT$.

Die Stoffmenge ν kann aus der Masse m (= 100 g) und der molaren Masse M (= 18 g) berechnet werden:

$\nu = \frac{m}{M} = \frac{100}{18} = 5{,}56$ mol. Im Endergebnis:

$\Delta E = Q - p \cdot V_{\text{Gas}} = Q - \nu RT = 226 \cdot 10^3 - 5{,}56 \cdot 8{,}31 \cdot 373 = 209$ kJ.

3.32. a) –6120 J/K; b) –1670 kJ; c) –43,9 J; d) –1670 kJ

(Im Vergleich zur abgegebenen Wärme ist die mechanische Arbeit sehr gering. Demzufolge sind die Änderungen der Enthalpie und der inneren Energie praktisch gleich groß.)

3.33. Die freie Enthalpie ergibt sich als: $G = \mu \cdot \nu$, wobei μ das chemische Potenzial und ν die Stoffmenge bezeichnen. Die Menge der Glukose (ν) kann aus der Konzentration (c) und dem Volumen (V) der Lösung berechnet werden: $\nu = c \cdot V = 0{,}02 \cdot 0{,}2 = 0{,}004$ mol. Das chemische Potenzial von Glukose bei 25°C (chemisches Standardpotenzial) beträgt –902,5 kJ/mol. Mit diesen Werten erhält man die freie Enthalpie:

$G = \mu \cdot \nu = -902{,}5 \cdot 0{,}004 = -3{,}61$ kJ.

3.34. Die elektromotorische Kraft ergibt sich aus der Nernst-Gleichung:

$\Delta\varphi = -\frac{RT}{F} \ln \frac{c_{\text{i}}}{c_{\text{e}}} = -\frac{8{,}31 \cdot 310}{96\,500} \ln \frac{155}{4} = -97{,}6$ mV.

(Diese Potenzialdifferenz kann auch Gleichgewichtspotenzial oder Nullstrompotenzial für K^+-Ionen genannt werden.)

3.35. a) –103 mV; b) +46 mV (!); c) –88,6 mV

Die errechneten Werte weichen stark von dem gemessenen Wert ab; das Gleichgewichtspotenzial für Na^+-Ionen hat sogar ein entgegengesetztes Vorzeichen. Die Abweichungen zeigen, dass überhaupt kein Gleichgewicht herrscht.

3.36. a) Laut der GHK-Gleichung ist das Ruhepotenzial:

$\Delta\varphi = \varphi_{\text{i}} - \varphi_{\text{e}} = \frac{RT}{F} \ln \frac{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{e}} + p_{\text{Na}} \cdot c_{\text{Na}}^{\text{e}} + p_{\text{Cl}} \cdot c_{\text{Cl}}^{\text{i}}}{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{i}} + p_{\text{Na}} \cdot c_{\text{Na}}^{\text{i}} + p_{\text{Cl}} \cdot c_{\text{Cl}}^{\text{e}}} = \frac{8{,}31 \cdot 298}{96\,500} \ln \frac{1 \cdot 2{,}5 + 0{,}01 \cdot 120 + 2 \cdot 3{,}8}{1 \cdot 139 + 0{,}01 \cdot 20 + 2 \cdot 120} = -90{,}2$ mV.

Die relative Abweichung ist $\frac{92 - 90{,}2}{92} \cdot 100\% = 1{,}96\%$.

b) Wenn man Na^+ außer Acht lässt, ergibt sich aus der Gleichung:

$\Delta\varphi = \frac{RT}{F} \ln \frac{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{e}} + p_{\text{Cl}} \cdot c_{\text{Cl}}^{\text{i}}}{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{i}} + p_{\text{Cl}} \cdot c_{\text{Cl}}^{\text{e}}} = \frac{8{,}31 \cdot 298}{96\,500} \ln \frac{1 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 3{,}8}{1 \cdot 139 + 2 \cdot 120} = -93$ mV. Die relative Abweichung ist nur 1,09%.

c) Wenn man Cl^- außer Acht lässt, ergibt sich aus der Gleichung:

$\Delta\varphi = \frac{RT}{F} \ln \frac{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{e}} + p_{\text{Na}} \cdot c_{\text{Na}}^{\text{e}}}{p_{\text{K}} \cdot c_{\text{K}}^{\text{i}} + p_{\text{Na}} \cdot c_{\text{Na}}^{\text{i}}} = \frac{8{,}31 \cdot 298}{96\,500} \ln \frac{1 \cdot 2{,}5 + 0{,}01 \cdot 120}{1 \cdot 139 + 0{,}01 \cdot 20} = -93{,}1$ mV. Die relative Abweichung ist nur 1,2%.

4. Die Biophysik der Sinnesorgane

Das Auge und das Sehen

4.1. Berechnen Sie die Reflektanz der Grenzfläche zwischen Luft und Hornhaut (n = 1,37) im Auge beim senkrechten Einfall von Licht.

4.2. Berechnen Sie die Reflektanz der Grenzfläche zwischen Kammerwasser (n = 1,33) und Linse (n = 1,41) im Auge beim senkrechten Einfall von Licht.

4.3. Berechnen Sie die Brechkräfte der vier Grenzflächen im Auge und ihre Gesamtbrechkraft. (Entnehmen Sie die nötigen Daten der Abb.IV.8. aus dem Lehrbuch.)

4.4. Berechnen Sie die Akkommodationsbreite, wenn der Nahpunkt 50 cm und der Fernpunkt 10 m weit entfernt liegen.

4.5. Berechnen Sie die Brechkraft einer Brillenlinse, die
a) den Nahpunkt eines weitsichtigen Auges von 1 m auf den normalen Wert eines Erwachsenen (25 cm) senkt,
b) den Fernpunkt eines kurzsichtigen Auges von 1 m auf den normalen Wert eines Erwachsenen (etwa unendlich) erhöht.

4.6. Wo liegt der Nahpunkt eines weitsichtigen Patienten, der eine Brille mit 2 dpt trägt, ohne Brille. (Der Nahpunkt des gesunden Erwachsenen liegt bei 25 cm.)

4.7. Bei der Untersuchung in der Augenklinik wurden der Nahpunkt und der Fernpunkt eines Patienten ermittelt: 120 cm bzw. praktisch unendlich.
a) Welcher Augenfehler liegt vor?
b) Wie groß ist die Akkommodationsbreite des Patienten?
c) Was für eine Brillenlinse und mit wie viel Dioptrie braucht der Patient, um Zeitungen in einer Entfernung von 30 cm gut lesen zu können?

4.8. a) Berechnen Sie den Sehwinkel (in Radiant, in Grad und in Winkelminute), unter dem man zwei 2 cm voneinander weit entfernt liegende Punkte in einem Abstand von 3 m sieht.
b) Berechnen Sie auch die Entfernung der zwei Bildpunkte auf der Retina mit Hilfe des reduzierten Auges (siehe Abb.5. des Kapitels „Die Optik des Auges" im Praktikumsbuch).
c) Sieht man mit einem durchschnittlichen Auge die zwei Punkte noch getrennt?

4.9. Die normale Sehwinkelgrenze beträgt 1'. Welche Entfernung müssen zwei Punkte voneinander haben, damit man sie gerade noch getrennt sieht, wenn ihr Abstand vom Auge
a) 25 cm bzw.
b) 5 m beträgt?

4.1. Für die Reflektanz gilt beim senkrechten Einfall: $\rho = \left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2 = \left(\frac{1{,}37-1}{1{,}37+1}\right)^2$ =0,0244 = 2,44%. Beim senkrechten Einfall auf die Grenzfläche zählt die Reihenfolge der Medien nicht, es ist also egal, welches Medium als erstes betrachtet wird.

4.2. 0,0852%, grob etwa 0,1%

4.3. Luft/Hornhaut: 48 dpt; Hornhaut/Kammerwasser: –6 dpt; Kammerwasser/Linse: 8 dpt; Linse/Glaskörper: 12 dpt; insgesamt 62 dpt

4.4. Die Akkommodationsbreite ist: $\Delta D = \frac{1}{g_p} - \frac{1}{g_r} = \frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{10} = 1{,}9$ dpt.

4.5. a) Wenn das Auge auf den Nahpunkt eingestellt ist, ist die Brechkraft des Auges: $D = \frac{n_g}{g_p} + \frac{n_b}{b} = \frac{1}{g_p} + \frac{n_b}{b}$, weil das Medium auf der Seite des Gegenstandes Luft ist, deren Brechzahl 1 beträgt. Man kann diese Formel sowohl für den gewünschten, als auch für den tatsächlichen Nahpunkt aufschreiben und anschließend die Differenz nehmen:

$D_{\text{gewünscht}} = \frac{1}{g_{p,\text{gewünscht}}} + \frac{n_b}{b}$ und $D_{\text{tatsächlich}} = \frac{1}{g_{p,\text{tatsächlich}}} + \frac{n_b}{b}$

$D_{\text{gewünscht}} - D_{\text{tatsächlich}} = \frac{1}{g_{p,\text{gewünscht}}} - \frac{1}{g_{p,\text{tatsächlich}}} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{1} = 3$ dpt.

Die Brechkraft des weitsichtigen Auges in der Aufgabe ist also um 3 dpt kleiner, als es nötig wäre. Diese „fehlende" Brechkraft kann die Brillenlinse ersetzen, da annähernd gilt, dass die Brechkräfte des Auges und der Brillenlinse einfach addiert werden können.

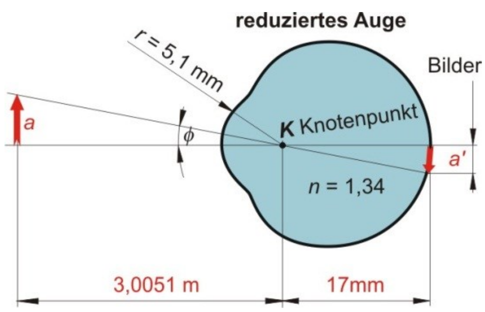
b) Nach einer ähnlichen Rechnung gilt:

$D_{\text{Brille}} = D_{\text{gewünscht}} - D_{\text{tatsächlich}} = \frac{1}{g_{r,\text{gewünscht}}} - \frac{1}{g_{r,\text{tatsächlich}}} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} =$ –1 dpt.

4.6. 50 cm

4.7. a) Weitsichtigkeit oder Alterssichtigkeit; b) 0,833 dpt; c) eine konvexe Linse mit einer Brechkraft von 2,5 dpt

4.8. a) Die Gegenstandsweite in der Aufgabe (von der vorderen Grenzfläche des reduzierten Auges gemessen) beträgt 3 m. Der Abstand des Gegenstandes vom Knotenpunkt ist um 5,1 mm größer, also 3,0051 m. Dieser Wert kann aber auf 3 m gerundet werden.



Den Sehwinkel ϕ erhält man in Radiant, wenn die Größe des Gegenstandes a (in unserem Fall ist sie gleich dem Abstand der zwei Punkte, d. h. 2 cm) durch den Abstand von 3 m dividiert wird: $\phi = \frac{0{,}02}{3} = 0{,}00667$ rad.

Der Wert kann zuerst mit Hilfe der Tatsache $2\pi = 360°$ in Grad, dann mit Hilfe der Tatsache 1° = 60' in Winkelminuten umgerechnet werden: $\phi = 0{,}00667 \cdot \frac{360}{2\pi} = 0{,}382°$ und $\phi = 0{,}382 \cdot 60 = 22{,}9'$.

b) Die Entfernung der Bildpunkte a' ergibt sich aus der Gleichung: $\frac{a'}{17} = \frac{a}{3000}$.

$a' = \frac{17}{3000} \cdot a = \frac{17}{3000} \cdot 2 = 0{,}0113 \text{ cm} = 0{,}113 \text{ mm} = 113\ \mu\text{m}$.

c) Ja, da die normale Sehwinkelgrenze 1' beträgt, die weit unterhalb des Sehwinkels von 22,9' in der Aufgabe liegt.

4.9. a) 0,073 mm; b) 1,45 mm

4.10. Ein Pkw fährt auf einer langen geraden Straße auf uns zu. In welcher Entfernung können wir die zwei 1,2 m voneinander entfernt liegenden Scheinwerfer gerade noch getrennt sehen? (Die Sehwinkelgrenze des normalen Auges beträgt 1'.)

4.11. Die Augenlinse ist ziemlich durchsichtig für sichtbares Licht, jedoch undurchsichtig für UVA-Strahlen. Dadurch schützt sie die Retina vor einer Schädigung. Der lineare Schwächungskoeffizient der Augen linse hat sehr unterschiedliche Werte in den zwei Lichtbereichen: etwa 0,56 cm^{-1} für sichtbares Licht und 8 mm^{-1} in dem UVA-Bereich (für eine „ältere" Linse). Die Dicke der Linse beträgt in dem mittleren Teil etwa 4 mm. Berechnen Sie die Transmittanz der Augenlinse

a) in dem UVA-Bereich,

b) in dem sichtbaren Bereich.

4.12. Der lineare Schwächungskoeffizient der Augenlinse eines Patienten mit Katarakt beträgt 6,6 cm^{-1} statt des normalen Wertes von 0,56 cm^{-1}. Berechnen Sie die Transmittanz der kranken Augenlinse. Die Dicke der Linse beträgt in dem mittleren Teil etwa 4 mm.

4.13. Die pigmentierte Schicht in der Retina ist sehr dünn, dennoch absorbiert sie sehr gut. Der lineare Absorptionskoeffizient dieser Schicht erreicht einen Wert von etwa 1000 cm^{-1} für das sichtbare Licht. Wie dick ist die Pigmentschicht, wenn sie 99% des einfallenden Lichtes absorbiert?

4.14. Beim Tageslichtsehen ist das menschliche Auge der gelbgrünen Farbe (550 nm) gegenüber am empfindlichsten und eine anhaltende Intensität von etwa $2 \cdot 10^{-12}$ W/m^2 wird bereits als Dauerlicht wahrgenommen. Wie viele Photonen müssen pro Sekunde auf die Pupille fallen, um eine kontinuierliche Lichtempfindung zu erzeugen? Der Durchmesser der Pupille kann als 5 mm angenommen werden und alle „Ereignisse" (Reflexion, Brechung, Absorption etc.) bis zur Pupille können außer Acht gelassen werden.

4.15. Der Strahl eines Laserpointers wird zufällig auf die weite Pupille einer Person gerichtet. Die ausgestrahlte Leistung des Lasers beträgt 5 mW. Der Durchmesser des parallelen Strahls ist 3 mm, die Pupillenweite im Moment des Einfallens 7 mm. Berechnen Sie

a) die Intensität des einfallenden Strahls,

b) die Brennweite mit Hilfe des reduzierten Auges (d. h. wie weit von der vorderen Grenzfläche entfernt der Strahl fokussiert wird), wenn der Strahl zentriert in der optischen Achse einfällt,

c) den Durchmesser des Strahls auf der Retina,

d) die Intensität des Strahls auf der Retina unter der Voraussetzung, dass die Intensitätsverluste auf dem Weg bis zur Retina vernachlässigt werden können,

e) die auf die Retina in 1,5 Sekunden einfallende Energie.

4.16. Sogar ein einziges auf die Netzhaut gelangendes Photon der Wellenlänge $5 \cdot 10^{-7}$ m erzeugt eine Lichtempfindung. Als Folge entsteht eine Spannung von 10 μV zwischen zwei Punkten der Sehnervenbahn. Die Spannung hält 0,1 ms lang an, der elektrische Widerstand des Sehnervenbahnabschnittes beträgt 100 Ω.

a) Wie hoch ist die Energie des einfallenden Photons?

b) Wievielmal übertrifft die Energie des auf der Nervenbahn entstehenden elektrischen Signals die Energie des Photons?

4.10. 4,13 km

4.11. a) Die Transmittanz ergibt sich mit Hilfe des Schwächungsgesetzes:

$\tau = \frac{J}{J_0} = e^{-\mu x} = e^{-8\cdot 4} = 1{,}27\cdot 10^{-14}$ (≈ 0).

b) In einer ähnlichen Rechnung erhält man: $\tau = 0{,}8 = 80\%$.

4.12. 7,14%

4.13. 46,1 µm

4.14. Die auf die Pupille in einer Sekunde fallende Energie ist:

$\Delta E = J\cdot\Delta A\cdot\Delta t = J\cdot r^2\pi\cdot\Delta t = 2\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}0025^2\pi\cdot 1 = 3{,}93\cdot 10^{-17}$ J.

Die Energie eines einzigen Photons des gelbgrünen Lichts ist:

$\varepsilon = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = 6{,}63\cdot 10^{-34}\frac{3\cdot 10^8}{550\cdot 10^{-9}} = 3{,}62\cdot 10^{-19}$ J.

Aus den zwei Energiewerten ergibt sich die Anzahl der in einer Sekunde einfallenden Photonen:

$N_{\mathrm{Photonen}} = \frac{\Delta E}{\varepsilon} = \frac{3{,}93\cdot 10^{-17}}{3{,}62\cdot 10^{-19}} = 109$.

4.15. a) Laut der Definition der Intensität: $J = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta P}{r^2\pi} = \frac{0{,}005}{0{,}0015^2\cdot\pi} = 707$ W/m^2.

b) Für die vordere Grenzfläche des reduzierten Auges und für achsennahe Strahlen gilt:

$\frac{n_2}{f_2} = D = \frac{n_2 - n_1}{R}$, wobei sich die Werte mit dem Index 1 auf das erste Medium (Luft) beziehen und die Werte mit dem Index 2 auf das reduzierte Auge. Aus der Gleichung ergibt sich die Brennweite in dem reduzierten Auge:

$f_2 = R\frac{n_2}{n_2 - n_1} = 5{,}1\cdot\frac{1{,}34}{1{,}34-1} = 20{,}1$ mm.

c) Die Retina (die hintere Grenzfläche) liegt 22,1 mm weit entfernt von der vorderen Grenzfläche im reduzierten Auge, während der Laserstrahl 20,1 mm weit entfernt fokussiert wird. Auf dem weiteren Wege bis zur Retina (d. h. 22,1 – 20,1 = 2 mm) divergiert der Strahl bereits. Sein Durchmesser auf der Retina (*d'*) ergibt sich aus der Gleichheit: $\frac{d'}{2} = \frac{d}{20{,}1}$ $\quad d' = 2\cdot\frac{d}{20{,}1} = 2\cdot\frac{3}{20{,}1} = 0{,}3$ mm.

d) Da keine Energieverluste vorhanden sind, ergibt sich die Intensität auf der Retina als:

$J' = \frac{\Delta P}{\Delta A'} = \frac{\Delta P}{r'^2\pi} = \frac{0{,}005}{0{,}00015^2\cdot\pi} = 70\ 700$ W/m^2. (Da der Durchmesser auf 1/100 reduziert wurde, ist die Intensität auf der Retina das 100-fache der einfallenden Intensität.)

e) $E = P\cdot t = 0{,}005\cdot 1{,}5 = 7{,}5$ mJ.

4.16. a) $3{,}96\cdot 10^{-19}$ J; b) 252

Das Ohr und das Hören

4.17. Musiker mit einem absoluten Gehör können die Tonhöhe eines Tones mit einer Frequenz von 1000 Hz im Extremfall auch dann erkennen, wenn der Ton nur 4 ms lang ertönt. Wie viele Perioden der Schallwelle braucht der Musiker zur Erkennung?

4.18. Der äußere Gehörgang kann als ein Hohlresonator mit einem festen und einem freien Ende betrachtet werden. Berechnen Sie die Grundfrequenz
a) für Kinder, bei denen die Länge des Außenohres etwa 1,3 cm beträgt,
b) für Erwachsene mit einer Außenohrlänge von etwa 2,5 cm.

4.19. Was ist die Erklärung für die sogenannte Donald Duck-Stimme, wenn man Heliumgas einatmet?

4.20. Wie hoch ist die Intensität eines Tones der Frequenz 300 Hz, den ein Mensch, dessen Hörverlust 25 dB beträgt, eben noch hören kann? (Bei 300 Hz beträgt die normale Hörschwelle $3 \cdot 10^{-11}$ W/m^2.)

4.21. Berechnen Sie für eine Frequenz von 100 Hz den Hörverlust eines Patienten, dessen Hörschwelle statt des normalen Wertes von $2 \cdot 10^{-10}$ W/m^2 den Wert von $6 \cdot 10^{-8}$ W/m^2 besitzt.

4.22. Der Hörverlust von einer Person ist 40 dB bei einer gegebenen Frequenz.
a) Mit welcher Intensität nimmt sie den Ton wahr, wenn die normale Hörschwelle bei der angewendeten Frequenz $5 \cdot 10^{-12}$ W/m^2 ist?
b) Wenn von einem Ton dieser Intensität eine Mauer nur $5 \cdot 10^{-12}$ W/m^2 durchlässt, sagt man, dass die Schallisolationsfähigkeit der Mauer 40 dB beträgt. Wievielmal dicker ist die Mauer im Vergleich zur Halbwertsdicke?
c) Berechnen Sie für den Fall, dass die Dicke dieser Mauer 12 cm beträgt, die Halbwertsdicke und den Schwächungskoeffizienten des Mauermaterials, in Bezug auf die gegebene Frequenz.

4.23. Herr Taub (sein Hörverlust beträgt 30 dB) wird trotz seines Hörverlustes und einer der 15-fachen Halbwertsdicke entsprechenden Mauer durch ein Fest seines Nachbars gestört. Er hört das Fest nur dann nicht mehr, wenn er Ohropacks mit einer Dämpfung von 45 dB benutzt. Wie hoch ist die Schallintensität, die auf die Mauer an der anderen Seite trifft? (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Ton eine Frequenz von 1 kHz hat.)

4.24. Die 45 dB starke Hörschädigung eines Patienten wird durch ein Hörgerät kompensiert, dessen Mikrofon und Lautsprecher mit einem Umwandlungswirkungsgrad von 5% bzw. 8% funktionieren. Wie viel dB soll die Verstärkung des Verstärkers in dem Hörgerät betragen?

4.25. Hans sitzt 2 m von einem Lautsprecher entfernt, der als punktförmig betrachtet werden kann, eine elektrische Leistung von 40 W aufnimmt und einen Umwandlungswirkungsgrad von 8% hat. Der Lautsprecher überträgt einen Ton von 1000 Hz. Wie laut hört Hans diesen Ton in Phon?

4.26. Fünf reine (sinusförmige) Töne sind gegeben. Sortieren Sie sie in aufsteigender Reihenfolge hinsichtlich ihrer Lautstärken.
Ton 1: Frequenz = 10 Hz, Schallpegel = 80 dB,
Ton 2: Frequenz = 50 Hz, Schallpegel = 40 dB,
Ton 3: Frequenz = 1000 Hz, Schallintensität = 10^{-6} W/m^2,
Ton 4: Frequenz = 1000 Hz, Schallpegel = 40 dB,
Ton 5: Frequenz = 5000 Hz, Lautstärke = 40 phon

4.17. 4

4.18. a) 6350 Hz; b) 3300 Hz

4.19. In Helium ist die Schallgeschwindigkeit größer (970 m/s) als in der Luft (330 m/s).

4.20. Die Hörschwellenintensität (J) des Patienten mit dem Hörverlust liegt also um 25 dB höher als die normale Hörschwellenintensität ($J_0 = 3\cdot10^{-11}$ W/m^2) bei der gegebenen Frequenz:
$n = 10\lg\frac{J}{J_0} \quad\Rightarrow\quad 25 = 10\lg\frac{J}{3\cdot10^{-11}} \quad\Rightarrow\quad 2{,}5 = \lg\frac{J}{3\cdot10^{-11}}$ und
$J = 10^{2,5}\cdot3\cdot10^{-11} = 9{,}49\cdot10^{-9}$ W/m^2.

4.21. 24,8 dB

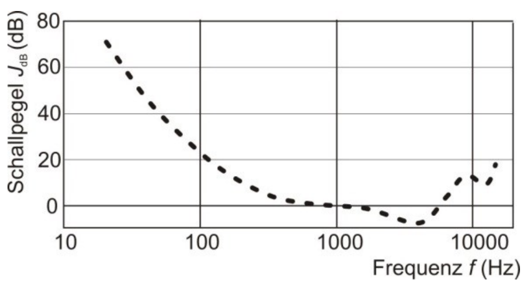
4.22. a) Die Hörschwellenintensität (J) des Patienten mit dem Hörverlust liegt also um 40 dB höher als die normale Hörschwellenintensität ($J_0 = 5\cdot10^{-12}$ W/m^2) bei der gegebenen Frequenz:
$n = 10\lg\frac{J}{J_0} \quad\Rightarrow\quad 40 = 10\lg\frac{J}{5\cdot10^{-12}} \quad\Rightarrow\quad 4 = \lg\frac{J}{5\cdot10^{-12}}$ und
$J = 10^4\cdot5\cdot10^{-12} = 5\cdot10^{-8}$ W/m^2.
b) Eine Halbwertsdicke reduziert die Intensität auf $J_0/2 = 2^{-1}\cdot J_0$.
Das Zweifache der Halbwertsdicke reduziert die Intensität auf $J_0/4 = 2^{-2}\cdot J_0$.
Das n-fache der Halbwertsdicke reduziert die Intensität auf $2^{-n}\cdot J_0$:
$J = J_0\cdot2^{-n} \quad\Rightarrow\quad 5\cdot10^{-12} = 5\cdot10^{-8}\cdot2^{-n} \quad\Rightarrow\quad 10^{-4} = 2^{-n}$ und
$n = -\frac{\ln 10^{-4}}{\ln 2} = 13{,}3$.
c) Die Dicke der Wand ist also gleich dem 13,3-fachem der Halbwertsdicke: $12 = 13{,}3\cdot D$. Daraus ergibt sich die Halbwertsdicke: $D = 0{,}902$ cm. Den Schwächungskoeffizienten erhält man aus dem gewöhnlichen Zusammenhang: $\mu = \frac{\ln 2}{D} = \frac{\ln 2}{0{,}902} = 0{,}768$ cm^{-1}.

4.23. 1 W/m^2

4.24. Ein Wirkungsgrad von $\eta < 1 = 100\%$ bedeutet einen Verlust, der auch in dB ausgedrückt werden kann: $n = 10\lg\eta = 10\lg 0{,}05 = -13$ dB bzw. $n = 10\lg 0{,}08 = -11$ dB. Dazu kommt noch die Hörschädigung: –45 dB. Der Verstärker muss diese Verluste kompensieren und deshalb einen Verstärkungspegel von insgesamt 13 + 11 + 45 = 69 dB haben.

4.25. Die durch den Lautsprecher ausgestrahlte Schallleistung (die akustische Leistung) ist:
$P_{\text{Schall}} = \eta\cdot P_{\text{el}} = 0{,}08\cdot40 = 3{,}2$ W. Wenn der Lautsprecher als isotrope punktförmige Strahlungsquelle angenommen wird, ergibt sich die Schallintensität in einer Entfernung von 2 m aus der Formel:
$J = \frac{P_{\text{Schall}}}{4\pi r^2} = \frac{3{,}2}{4\pi 2^2} = 0{,}0637$ W/m^2. Der Schallpegel ist: $n = 10\lg\frac{J}{J_0} = 10\lg\frac{0{,}0637}{10^{-12}} = 108$ dB. Da bei 1000 Hz die Dezibelskala und die Phonskala übereinstimmen, entsprechen 108 dB einer Lautstärke von 108 phon.

4.26. Ton 1 (10 Hz!) liegt außerhalb des Hörbereiches (20–20 000 Hz). Ton 2 liegt bereits im Hörbereich, jedoch unterhalb der Hörschwellenkurve (s. Abbildung). Der Schallpegel von Ton 3 ist: $n = 10\lg\frac{J}{J_0} = 10\lg\frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 60$ dB. Das entspricht einer Lautstärke von 60 phon. Ton 4 hat eine Lautstärke von 40 phon. Ton 5 hat ebenfalls diese Lautstärke. Im Endergebnis ist die Reihenfolge zunehmender Lautstärke:
Ton 1 = Ton 2 (beide sind nicht hörbar) < Ton 4 = Ton 5 < Ton 3.



5. Biomechanik

5.1. Das Young-Modul einer Kollagenfaser (wichtigstes Strukturprotein der Sehnen) beträgt etwa 1 GPa.
a) Mit welcher Zugspannung kann eine solche Faser um 5% gedehnt werden?
b) Welche Kraft ist dazu nötig, wenn die Querschnittsfläche eines Kollagenfaserbündels 30 mm^2 beträgt?

5.2. Die Zugfestigkeit von Kollagen beträgt etwa 60 MPa. Ein hinterer Zahn ist auf der ganzen Zahnwurzeloberfläche (etwa 400 mm^2) im Zahnbett durch Kollagenfasern am Knochen befestigt. Schätzen Sie die Kraft, die ein Zahnarzt beim Herausziehen dieses Zahns etwa aufwenden müsste, um alle Kollagenfasern gleichzeitig zu zerreißen.

5.3. Die Zugfestigkeit des menschlichen Haares beträgt etwa 380 MPa. Vorausgesetzt, dass jedes Haar einen Durchmesser von 100 μm hat, wie viele parallel angeordnete Haare könnten zusammen ein durchschnittliches Körpergewicht von 70 kg halten?

5.4. Die Bandscheibe kann mit einer Scheibe mit einem Durchmesser von 40 mm und einer Dicke von 10 mm modelliert werden. Die Steifigkeit (das Young-Modul) der Bandscheibe kann als 5 MPa angenommen werden. Beim Sitzen belastet eine Druckkraft von etwa 700 N die Bandscheibe. Berechnen Sie
a) die Druckspannung,
b) die Stauchung,
c) die Dickenänderung der Bandscheibe.

5.5. In einer *in vitro* Messung wurde die Druckkraft gemessen, bei der ein Wirbelkörper bricht. Das Ergebnis war 8 kN. Berechnen Sie die Druckfestigkeit des Wirbelkörpers, wenn er mit einer Scheibe mit einem Durchmesser von 40 mm modelliert wird.

5.6. Die mechanischen Eigenschaften von Kollagen und Elastin (die zwei wichtigen Strukturproteine in der Wand der Aorta) sind ziemlich unterschiedlich (siehe Tabelle unten). Ihr Zusammenspiel in der Gefäßwand wird durch die folgende Aufgabe modelliert. Eine 6 cm lange elastische Faser (Elastin) und eine 7,5 cm lange Kollagenfaser werden an beiden Enden miteinander verbunden (d. h. die Kollagenfaser ist nicht ausgestreckt, siehe Abbildung). Die zwei Fasern werden auseinander gezogen, bis die Kollagenfaser voll ausgestreckt ist. Die zwei Fasern werden dann zusammen so lange gedehnt, bis die Kollagenfaser reißt.

a) Wie groß ist die Zugspannung, mit der die Kollagenfaser völlig ausgestreckt wird? (Voraussetzung: Zum Ausstrecken selbst ist keine Kraft nötig.)
b) Wie groß ist die Zugspannung in den einzelnen Fasern und die Gesamtzugspannung (d. h. die Zugfestigkeit des Systems) in dem Moment, in dem die Kollagenfaser reißt?
c) Wie groß sind die Dehnungen (in %) der einzelnen Fasern unmittelbar vor dem Reißen der Faser?
d) Stellen Sie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Systems dar.

Stoff	*E*, Young-Modul (Steifigkeit) (MPa)	σ_{Zug}, Zugfestigkeit (MPa)	ε_{max}, maximale Dehnung
Elastin	0,2	0,6	3
Kollagen	1000	60	0,06

5.1. a) 50 MPa; b) 1500 N

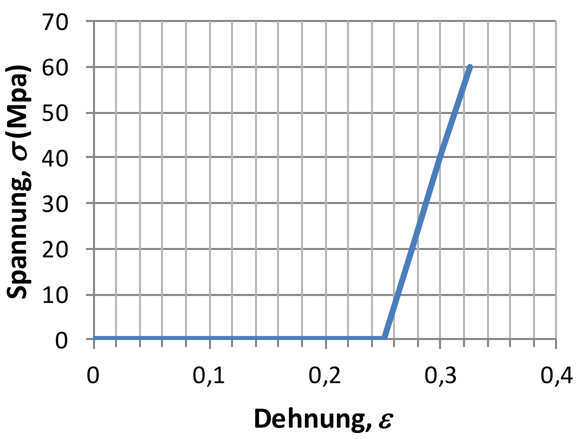
5.2. Etwa 24 000 N (Eine so große Kraft kann der Arzt selbstverständlich nicht ausüben. Er braucht Werkzeuge, die seine Kraft vervielfachen und er zerreißt nicht alle Kollagenfasern gleichzeitig!)

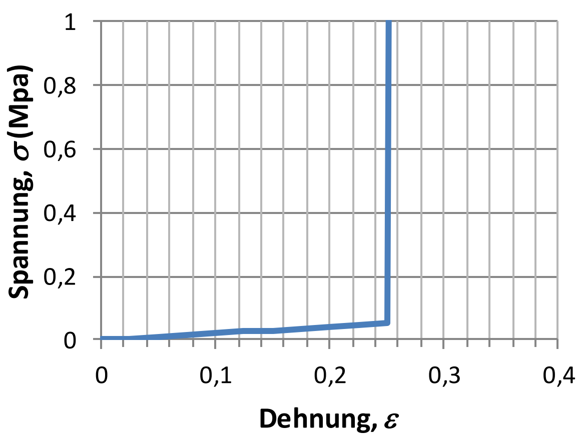
5.3. 230 (Das ist nur ein geringer Anteil der etwa 100 000 Haare auf dem Kopf!)

5.4. a) 557 kPa; b) 0,111 = 11,1%; c) 1,11 mm

5.5. 6,37 MPa

5.6. a) Damit die Kollagenfaser völlig ausgestreckt wird, muss die elastische Faser um 1,5 cm gedehnt werden. Ihre Dehnung (relative Längenänderung) wird dann $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$ sein. Zu dieser Dehnung ist eine Zugspannung von $\sigma = E \cdot \varepsilon = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05\ \mathrm{MPa} = 50\ \mathrm{kPa}$ nötig.
b) Wenn die Zugfestigkeit der Kollagenfaser erreicht wird, ist ihre Dehnung
$\varepsilon_{\text{max, Kollagen}} = \frac{\sigma_{\text{max, Kollagen}}}{E_{\text{Kollagen}}} = \frac{60}{1000} = 0{,}06$ und ihre Längenänderung
$\Delta l_{\text{max, Kollagen}} = \varepsilon_{\text{max, Kollagen}} \cdot l_{\text{Kollagen}} = 0{,}06 \cdot 7{,}5 = 0{,}45\ \mathrm{cm}$.
In diesem Moment ist die Verlängerung der elastischen Faser schon
$\Delta l_{\text{max, Elastin}} = 1{,}5 + 0{,}45 = 1{,}95\ \mathrm{cm}$ und ihre Dehnung
$\varepsilon_{\text{max, Elastin}} = \frac{\Delta l_{\text{max, Elastin}}}{l_{\text{Elastin}}} = \frac{1{,}95}{6} = 0{,}325$.
Die dazu nötige Zugspannung ist $\sigma_{\text{max, Elastin}} = E_{\text{Elastin}} \cdot \varepsilon_{\text{max, Elastin}} = 0{,}2 \cdot 0{,}325 = 0{,}065\ \mathrm{MPa}$.
Die Gesamtspannung ist: 60 + 0,065 = 60,065 MPa ≈ 60,1 MPa.
c) Kollagenfaser: 0,06 = 6%, elastische Faser: 0,325 = 32,5%.
d)





Die geringe Steigung der Kurve bis $\varepsilon = 0{,}25$ in dem linken Diagramm wird nur dann sichtbar sein, wenn ein kleinerer Teil des Diagrammes (vertikal bis 1 MPa) dargestellt wird (rechtes Diagramm). Die geringe Steigung bis $\varepsilon = 0{,}25$ bedeutet, dass dieses System aus einer elastischen und einer Kollagenfaser sehr leicht, praktisch ohne Spannung und ohne Kraft ausgedehnt werden kann. Bei Überschreitung dieser Dehnung werden die Kollagenfasern „sichtbar" – eine weitere Ausdehnung ist jetzt praktisch unmöglich bzw. nur mit so großen Kraftwirkungen möglich, die physiologisch im Körper nicht auftreten.

6. Physikalische Methoden der Molekular- und Zelldiagnostik

Mikroskopie

6.1. Die Daten eines Mikroskops sind wie folgt: f_{Objektiv} = 2 mm, f_{Okular} = 20 mm, Tubuslänge d = 8 cm.

a) Berechnen Sie die Vergrößerung der einzelnen Linsen und die Gesamtvergrößerung des Mikroskops.

b) Wie groß sieht man einen Erythrozyten mit einem Durchmesser von 8 µm in diesem Mikroskop?

c) In welchem Abstand zur Objektivlinse muss der Gegenstand positioniert werden, damit das Zwischenbild gerade in der Brennebene der Okularlinse entsteht?

d) Berechnen Sie den Halböffnungswinkel der Objektivlinse für den obigen Fall, wenn ihr Durchmesser 6 mm beträgt.

e) Wie groß ist die Auflösungsgrenze ohne Immersionsöl in dem obigen Fall? (Als Lichtwellenlänge ist 550 nm zu benutzen.)

6.2. Die Parameter des Objektivs eines Mikroskops sind wie folgt: Durchmesser 8 mm, Brennweite 10 mm. Bei der Scharfstellung liegt der Gegenstand 10,625 mm weit vom Objektiv entfernt. Das Okular besitzt eine 6-fache Vergrößerung.

a) In welchem Abstand vom Objektiv entsteht das Zwischenbild?

b) Berechnen Sie die Vergrößerung des Objektivs und des Mikroskops.

c) Berechnen Sie die Brennweite des Okulars.

d) Berechnen Sie die Tubuslänge des Mikroskops.

e) Wie groß sind Auflösungsgrenze und Auflösungsvermögen ohne Immersionsöl bei der unteren Grenzwellenlänge des sichtbaren Bereiches?

6.3. Berechnen Sie die mit dem Mikroskop noch auflösbare kleinste Entfernung (die Auflösungsgrenze), wenn der Öffnungswinkel des Objektivs 140° ist und eine gelbgrüne Beleuchtung (λ = 520 nm) benutzt wird

a) ohne Immersionsflüssigkeit,

b) mit Wasser als Immersionsflüssigkeit,

c) mit Zedernöl als Immersionsflüssigkeit.

6.4. Ein optisches Gitter mit 2500 Strichen (Gitterlinien) pro Millimeter wird in einem Mikroskop beobachtet. Das Gitter liegt 3 mm weit entfernt vom Objektiv, dessen Durchmesser 6 mm beträgt. Sind die einzelnen Gitterlinien im Mikroskop getrennt zu sehen?

6.1. a) Die Vergrößerung der Objektivlinse ist: $V_{\text{Objektiv}} = \frac{d}{f_{\text{Objektiv}}} = \frac{80}{2} = 40$.

Die Vergrößerung der Okularlinse ist: $V_{\text{Okular}} = -\frac{a}{f_{\text{Okular}}} = \frac{250}{20} = -12{,}5$, wobei a die deutliche Sehweite mit dem Wert von 25 cm bezeichnet.

Die Gesamtvergrößerung ergibt sich als Produkt der zwei Vergrößerungen: $V_{\text{Mikroskop}} = -500$.

b) Die Größe des Bildes (B) ergibt sich aus der Vergrößerung und der Größe des Gegenstandes (G):
$B = V_{\text{Mikroskop}} \cdot G = 500 \cdot 8 = 4000\ \mu\text{m} = 4$ mm.

c) Da das Bild gerade in der Brennebene des Okulars liegt, ergibt sich die Bildweite b aus der Brennweite der Objektivlinse und dem Abstand zwischen den Brennebenen von Objektiv und Okular (optische Tubuslänge): $b = 2 + 80 = 82$ mm.

Aus der Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ ergibt sich die Gegenstandsweite:

$\frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}$ $\qquad$ $\frac{1}{g} = \frac{b-f}{fb}$ $\qquad$ und schließlich $\qquad$ $g = \frac{fb}{b-f} = \frac{2 \cdot 82}{82-2} = 2{,}05$ mm.

(Die Gleichung haben wir in Bezug auf die Objektivlinse aufgeschrieben. Deshalb ist f die Brennweite des Objektivs, d. h. 2 mm.)

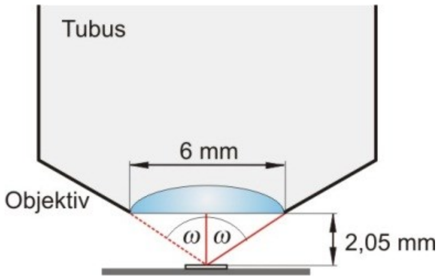
d) Aus dem rechtwinkligen Dreieck in der Abbildung folgt:

$\tan\omega = \frac{3}{2{,}05} = 1{,}463$ $\qquad$ und $\qquad$ $\omega = \tan^{-1} 1{,}463 = 55{,}6°$.

e) Die Auflösungsgrenze (δ) des Lichtmikroskops ist:

$\delta = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin\omega} = 0{,}61 \frac{550}{\sin 55{,}6°} = 407$ nm.

(Die Brechzahl n beträgt 1, da ohne Verwendung von Immersionsöl das Medium zwischen dem Präparat und der Objektivlinse Luft ist.)



6.2. a) 170 mm;

b) $V_{\text{Objektiv}} = 16$, $V_{\text{Mikroskop}} = -96$; 4 mm;

c) 41,7 mm;

d) 160 mm;

e) Die Auflösungsgrenze ist $\delta = 0{,}691\ \mu\text{m}$ und das Auflösungsvermögen ist $1/\delta = 1{,}45\ \mu\text{m}^{-1}$.

6.3. a) 338 nm; b) 254 nm; c) 224 nm

6.4. Wenn man eine rote Beleuchtung ($\lambda = 800$ nm) verwendet, ist die Auflösungsgrenze (690 nm) größer, als der Abstand zwischen den Gitterlinien (400 nm). Deshalb sind die Gitterlinien nicht separat zu sehen.
Die Anwendung von Zedernöl als Immersionsflüssigkeit hilft nicht, da dadurch die Auflösungsgrenze nur auf 458 nm reduziert werden kann. Dies ist immer noch größer als 400 nm.
Wenn aber eine blaue Beleuchtung mit einer Wellenlänge von 400 nm verwendet wird, ist die Auflösungsgrenze bereits ohne Immersionsöl 345 nm und somit kleiner als der Gitterlinienabstand.

Spektroskopie

6.5. Man misst eine Absorbanz von 0,25 von einer Proteinlösung. Der Extinktionskoeffizient des Proteins bei der Wellenlänge der Messung ist bekannt: 18 200 $M^{-1}cm^{-1}$. Die Schichtdicke der Lösung beträgt 1 cm. Berechnen Sie die Proteinkonzentration.

6.6. Eines der wichtigsten Proteine in der Augenlinse ist das Alpha-Kristallin. Sein Extinktionskoeffizient beträgt 13 000 1/(cm·mol/l) bei einer Wellenlänge von 280 nm. Wie groß ist die Absorbanz einer Alpha-Kristallin-Lösung mit einer Konzentration von 1 mg/ml und einer Dicke von 1 cm bei dieser Wellenlänge? (Die molare Masse von Alpha-Kristallinen beträgt 20 000 g/mol.)

6.7. Eine dünne Lösung mit einer Konzentration von 0,3 mol/l und einer Schichtdicke von 1 cm absorbiert 20% der einfallenden Lichtintensität. Wie viel Prozent der Lichtintensität wird bei sonst unveränderten Bedingungen durchgelassen, wenn die Konzentration a) 0,6 mol/l, b) 0,9 mol/l, c) 0,15 mol/l ist?

6.8. 0,4733 mg ATP (Adenosintriphosphat) wird in 12 ml Wasser aufgelöst. Man misst die Absorbanz der Lösung bei einer Wellenlänge von 259 nm in einer Küvette der Dicke 10,02 mm. Die gemessene Absorbanz beträgt 1,2. (Die molare Masse von ATP beträgt 507,18 g/mol.)
a) Berechnen Sie den molaren Extinktionskoeffizienten von ATP.
b) Wie viel μM ist die Konzentration der ATP-Lösung, wenn die bei den gleichen Bedingungen gemessene Absorbanz 0,07 beträgt?
c) Wie viel mg ATP ist in 10 ml Wasser aufzulösen, wenn man eine ATP-Lösung mit einer Absorbanz von 0,25 erhalten möchte?
d) Das Absorptionsmaximum von einer wässrigen ATP-Lösung bei neutralem pH-Wert liegt bei 259 nm. Berechnen Sie die Energiedifferenz des entsprechenden Elektronenüberganges in eV.

6.9. Die Absorbanz einer Hämoglobinlösung mit einer „Konzentration" von 150 mg/ml wird spektrophotometrisch bei zwei verschiedenen Wellenlängen (660 nm und 910 nm) gemessen. Die Lösung enthält sowohl oxygenierte als auch desoxygenierte Hämoglobinmoleküle, deren Extinktionskoeffizienten unterschiedlich sind (siehe Tabelle unten). Setzen wir voraus, dass die Sauerstoffsättigung der Lösung 0,8 ist, d. h. 80% der Moleküle sind oxygeniert (HbO_2), der Rest ist desoxygeniert (Hb). Die Küvette ist 1 mm dick. Die molare Masse von Hämoglobin beträgt 64 500 g/mol. Berechnen Sie die aufgrund des Lambert–Beer-Gesetzes erwartete Absorbanz
a) bei 660 nm,
b) bei 910 nm.
c) Berechnen Sie den Quotienten der zwei Absorbanzwerte, d. h. A_{910}/A_{660}.
Die molaren Extinktionskoeffizienten sind:

Wellenlänge	molarer Extinktionskoeffizient (1/(cm·mol/l))	
	HbO_2	Hb
660 nm	320	3230
910 nm	1210	775

6.10. In einer pulsoxymetrischen Messung erhält man nur den Quotienten von zwei Absorbanzwerten: $A_{910}/A_{660} = 2$, wobei A_{910} annähernd die Absorbanz des Blutes bei 910 nm bzw. A_{660} die Absorbanz bei 660 nm ist. Berechnen Sie die Sauerstoffsättigung des Blutes, d. h. wie viel Prozent der Hämoglobinmoleküle oxygeniert (HbO_2) sind. Die zur Rechnung fehlenden Daten entnehmen Sie der Aufgabe 6.9.

6.5. Nach dem Lambert–Beer-Gesetz ist die Absorbanz einer dünnen Lösung: $A = \varepsilon \cdot c \cdot x$, wobei ε den molaren Extinktionskoeffizienten, *c* die Konzentration und *x* die Schichtdicke bezeichnen. Aus dieser Formel ergibt sich die Konzentration: $c = \frac{A}{\varepsilon \cdot x} = \frac{0{,}25}{18\,200 \cdot 1} = 1{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{M} = 13{,}7\ \mu\mathrm{M} =$ 13,7 µmol/l .

6.6. 0,65

6.7. a) Wenn 20% absorbiert wird, ist die Transmittanz 80% = 0,8. Aus der Lösung der Aufgabe 2.80 erhalten wir den Zusammenhang zwischen Transmittanz und Absorbanz: $A = -\lg \tau = -\lg 0{,}8 = 0{,}0969$. Nach dem Lambert–Beer-Gesetz ist die Absorbanz bei dünnen Lösungen direkt proportional zur Konzentration. Wenn die Konzentration von 0,3 mol/l auf 0,6 mol/l erhöht wird, verdoppelt sich auch die Absorbanz: 2·0,969 = 0,1938. Die Transmittanz erhält man aus dem Zusammenhang (s. Lösung der Aufgabe 2.78):
$\tau = 10^{-A} = 10^{-0{,}1938} = 0{,}64 = 64\%$.
In ähnlicher Weise lassen sich die Aufgaben b und c lösen: b) 51,2%; c) 89,4%

6.8. a) 15 270 1/(cm·M); b) 4,58 µM; c) 0,0829 mg; d) 4,8 eV

6.9. Zuerst berechnen wir die richtige (molare) Konzentration der Hämoglobinlösung in zwei Schritten:
150 mg/ml = 150 g/l, dieser Wert ist durch die molare Masse zu dividieren $c = \frac{150}{64\,500} = 2{,}326\ \frac{\mathrm{mmol}}{\mathrm{l}}$.
Nach der Aufgabenstellung ist 80% dieser Konzentration gleich der Konzentration der oxygenierten Moleküle:
$c_{\mathrm{HbO2}} = 0{,}8 \cdot 2{,}326 = 1{,}861\,\frac{\mathrm{mmol}}{\mathrm{l}}$ und die Konzentration der desoxygenierten Moleküle ist:
$c_{\mathrm{Hb}} = 0{,}2 \cdot 2{,}326 = 0{,}465\,\frac{\mathrm{mmol}}{\mathrm{l}}$.
Mit Hilfe des Lambert–Beer-Gesetzes kann die Absorbanz der Lösung berechnet werden, wenn sich entweder nur oxygenierte oder nur desoxygenierte Moleküle in der Lösung befinden. Die Summe der zwei Absorbanzwerte ergibt die Absorbanz der Lösung.
a) $A_{660} = A_{660,\ \mathrm{HbO2}} + A_{660,\ \mathrm{Hb}} = \varepsilon_{660,\ \mathrm{HbO2}} \cdot c_{\mathrm{HbO2}} \cdot x + \varepsilon_{660,\ \mathrm{Hb}} \cdot c_{\mathrm{Hb}} \cdot x =$
$320 \cdot 1{,}861 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 + 3230 \cdot 0{,}465 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 = 0{,}21$.
b) Wenn man die bei 910 nm gültigen Extinktionswerte in die obige Formel einsetzt, erhält man:
$A_{910} = 1210 \cdot 1{,}861 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 + 775 \cdot 0{,}465 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 = 0{,}261$.
c) Der Quotient ist: 0,261/0,21 = 1,24.

6.10. 91%

7. Elektrische Signale und Methoden

Grundbegriffe der Elektrizitätslehre

7.1. Eine Kupferkugel besitzt eine Ladung von +2,5 mC.

a) Wie viele Elektronen fehlen der Kugel?

b) Wie viel Mol Elektronen entspricht diese Elektronenmenge?

7.2. Berechnen Sie die Anziehungskraft zwischen dem Atomkern und dem Elektron innerhalb eines He^+-Ions. Verwenden Sie dabei 50 pm für den Abstand zwischen dem Kern und dem Elektron.

7.3. Bei einem Gewitter herrscht eine Spannung von 250 MV zwischen der Wolkenunterseite und dem Boden. Ihr Abstand beträgt 1250 m. Ein Blitz entsteht, in dem 0,6 C Ladungsmenge auf den Boden übertragen wird.

a) Wie groß ist die dabei freigesetzte Energie?

b) Wie viel Liter Wasser könnte mit Hilfe dieser Energie von 25°C auf 100°C erwärmt und verdampft werden?

c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke zwischen Wolke und Erde unter der Voraussetzung eines homogenen Feldes.

7.4. Zwischen dem intrazellulären Raum einer Zelle und dem extrazellulären Raum besteht ein Potenzial von −90 mV.

a) Wie viel Arbeit (Energie) braucht eine Ionenpumpe um ein positives einwertiges Ion aus dem intrazellulären in den extrazellulären Raum zu pumpen?

b) Wie viel Arbeit (Energie) braucht eine Ionenpumpe um ein Mol Ionen zu pumpen?

c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke in der etwa 10 nm dicken Membran unter der Voraussetzung eines homogenen Feldes.

7.5. In einem Plattenkondensator herrscht ein elektrisches Feld der Feldstärke 150 N/C. Der Abstand zwischen den Platten beträgt 3 cm.

a) Wie viel Arbeit (Energie) braucht man, um +4 mC Ladung von der negativen Platte zu der positiven Platte parallel zu den Feldlinien zu transportieren?

b) Wie groß ist die Spannung zwischen den Platten?

7.6. Die Daten eines Plattenkondensators sind: Fläche der Platten = 7 m^2 und Abstand der Platten = 0,885 mm. Es wird eine Spannung von 100 V an den Kondensator angelegt. Berechnen Sie

a) die Kapazität des Kondensators,

b) die Feldstärke zwischen den Kondensatorplatten,

c) die Ladung an den Platten,

d) die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie.

e) Eine Polystyrolfolie wird zwischen die Platten gesetzt. Wie ändert sich dadurch die Kapazität, wenn die relative Dielektrizitätszahl von Polystyrol 2,5 beträgt?

7.1. a) Da ein Elektron im absoluten Betrag über eine Ladungsmenge von $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C verfügt, ergeben insgesamt $N = 0{,}0025/1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}56 \cdot 10^{16}$ Elektronen die Ladungsmenge von 0,0025 C.

b) Die Molzahl ist: $\nu = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = \frac{1{,}56 \cdot 10^{16}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 25{,}9$ nmol.

Ein alternativer Lösungsweg: $\nu = \frac{q}{F} = \frac{0{,}0025}{96\,500} = 25{,}9$ nmol.

In dieser Formel bezeichnen q die Gesamtladungsmenge und F die Faraday-Konstante. $F = 96\,500$ C/mol ist die Ladungsmenge von einem Mol Elektronen im absoluten Betrag.

7.2. Die Anziehungskraft kann aufgrund des Coulomb-Gesetzes berechnet werden:

$F = -k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(50 \cdot 10^{-12})^2} = -184$ nN.

Hier bezeichnet q_1 die Ladung des Atomkerns von He^+, der 2 Protonen enthält. Deshalb ist $q_1 = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. q_2 ist die Ladung des einzigen Elektrons im He^+ ($q_2 = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

7.3. a) Die elektrische Arbeit (Energie) ist: $W_\mathrm{el} = U \cdot \Delta q = 250 \cdot 10^6 \cdot 0{,}6 = 150$ MJ.

b) Aus dem Zusammenhang $W_\mathrm{el} = Q = c \cdot m \cdot \Delta t + m \cdot q_\mathrm{Verdampfung}$ ergibt sich die Masse des Wassers:

$m = \frac{W_\mathrm{el}}{c \cdot \Delta t + q_\mathrm{Verdampfung}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{4180 \cdot 75 + 2\,257\,000} = 58{,}4$ kg.

(In der Gleichung bezeichnen c die spezifische Wärmekapazität und $q_\mathrm{Verdampfung}$ die spezifische Verdampfungswärme des Wassers und Δt die Temperaturzunahme.) Diese Masse entspricht etwa 58,4 Liter.

c) Bei einem homogenen Feld gilt: $E = \frac{U}{d} = \frac{2{,}5 \cdot 10^8}{1250} = 200\,000$ V/m.

7.4. a) $1{,}44 \cdot 10^{-20}$ J; b) 8,7 kJ; c) 9 MV/m

7.5. a) 18 mJ; b) 4,5 V

7.6. a) Die Kapazität eines Plattenkondensators ergibt sich aus

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{7}{8{,}85 \cdot 10^{-4}} = 70$ nF, wobei ε_0 die absolute Dielektrizitätskonstante (oder elektrische Feldkonstante) ist. (Diese Formel gilt aber nur für den Fall, wenn zwischen den Platten ein Vakuum besteht.)

b) In dem Plattenkondensator herrscht ein homogenes Feld. Es gilt:

$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{8{,}85 \cdot 10^{-4}} = 113$ kV/m.

c) Die Ladungsmenge an den Platten beträgt: $q = C \cdot U = 7 \cdot 10^{-8} \cdot 100 = 7$ µC.

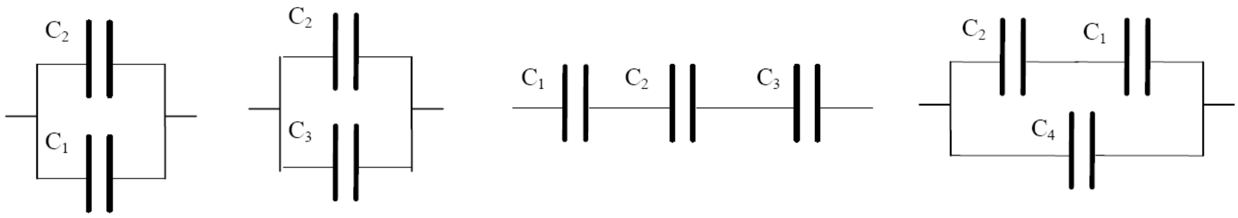
d) Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie ist: $W_\mathrm{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} 7 \cdot 10^{-8} \cdot 100^2 = 350$ µJ.

e) Falls statt Vakuum ein Isolatorstoff zwischen die Platten gesetzt wird, muss auch die relative Dielektrizitätskonstante des Stoffes ε_r berücksichtigt werden:

$C' = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d} = \varepsilon_\mathrm{r} \cdot C = 2{,}5 \cdot 70 = 175$ nF.

7.7. Berechnen Sie die resultierende Kapazität für die folgenden Anordnungen, wenn $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $C_3 = 100\ nF$ und $C_4 = 1{,}33\ \mu F$ sind:

a) b) c) d)



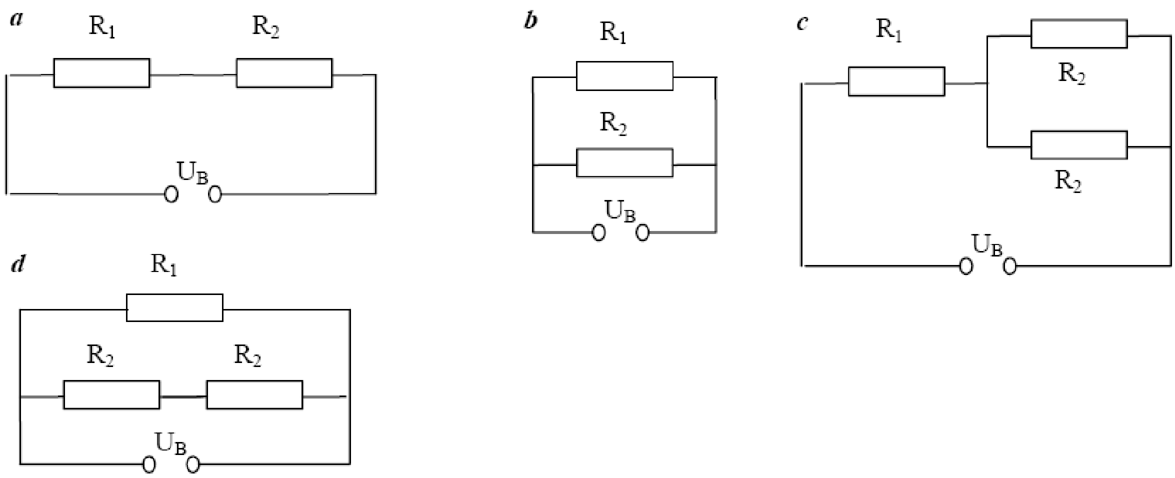
7.8. In einem Kupferdraht fließt ein elektrischer Strom der Stromstärke 0,3 A. Berechnen Sie
a) die durch den Querschnitt des Leiters pro Minute durchfließende Ladungsmenge,
b) die Menge der Elektronen in Mol, die den Leiterquerschnitt pro Stunde passieren.

7.9. Berechnen Sie die Stromstärke von dem Blitz der Aufgabe 7.3, wenn der Blitz 30 μs lang dauert.

7.10. Wie groß ist der Widerstand eines Bügeleisens, in dem bei einer Spannung von 220 V ein Strom mit einer Stärke von 4,5 A fließt?

7.11. In einer Messung mit dem Coulter-Zähler wird eine konstante Stromstärke von 200 μA verwendet. Der Widerstand des Stromkreises ändert sich um 5 Ω, wenn ein Erythrozyt die Kapillare durchtritt.
a) Berechnen Sie die Amplitude des entstehenden Spannungsimpulses.
b) Wie groß wird die Amplitude sein, wenn zwei Erythrozyten gleichzeitig die Kapillare durchtreten?

7.12. Bestimmen Sie die Spannungen und Stromstärken an den Widerständen R_1 und R_2 in den folgenden Stromkreisen, wenn $U_B = 6\ V$, $R_1 = 1\ k\Omega$ und $R_2 = 2\ k\Omega$ sind.



7.7. a) 3 μF; b) 2,1 μF; c) 87 nF; d) 2 μF

7.8. a) Aus der Definitionsformel der elektrischen Stromstärke $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ergibt sich die gefragte Ladungsmenge:
$\Delta q = I \cdot \Delta t = 0{,}3 \cdot 60 = 18$ C.
b) Zuerst wird die pro Stunde durchfließende Ladungsmenge berechnet:
$\Delta q = I \cdot \Delta t = 0{,}3 \cdot 3600 = 1080$ C.
Mit Hilfe der Faraday-Konstante kann diese Ladungsmenge in Mol umgerechnet werden:
$\nu = \frac{\Delta q}{F} = \frac{1080}{96\,500} = 11{,}2$ mmol.

7.9. 20 000 A

7.10. Aus dem ohmschen Gesetz ergibt sich der Widerstand als $R = \frac{U}{I} = \frac{220}{4{,}5} = 48{,}8\ \Omega$.

7.11. a) 1 mV; b) 2 mV

7.12. a) Nach der Additionsregel der in Reihe geschalteten Widerstände ergibt sich der Gesamtwiderstand:
$R = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3$ kΩ. Die Stromstärke kann mit dem ohmschen Gesetz berechnet werden:
$I = \frac{U_\mathrm{B}}{R} = \frac{6}{3000} = 2$ mA. Diese Stromstärke fließt durch die beiden in Reihe geschalteten Widerstände. Die Spannung an dem Widerstand R_1 ergibt sich aus der Formel: $U_1 = R_1 \cdot I = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ V.
In ähnlicher Weise lässt sich U_2 berechnen: $U_2 = 4$ V.
b) An parallelgeschalteten Widerständen ist die Spannung gleich groß: $U_1 = U_2 = U_\mathrm{B} = 6$ V. Aus dem ohmschen Gesetz ergeben sich die zwei Stromstärken in den parallelen Zweigen:
$I_1 = \frac{U_\mathrm{B}}{R_1} = \frac{6}{1000} = 6$ mA und in ähnlicher Weise $I_2 = \frac{U_\mathrm{B}}{R_2} = \frac{6}{2000} = 3$ mA. Die Gesamtstromstärke ist gleich der Summe der zwei Nebenstromstärken: $I = 9$ mA.
c) Bei diesem Stromkreis sollen zuerst die zwei parallelgeschalteten Widerstände (R_2) nach der Regel für die Parallelschaltung addiert werden: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{R_2}{2} = 1$ kΩ.
Im weiteren wird R' die zwei parallelgeschalteten Widerstände ersetzen. Danach können R_1 und R' einfach addiert werden: $R = 1 + 1 = 2$ kΩ. Die Stromstärke in dem Hauptzweig ist: $I = \frac{U_\mathrm{B}}{R} = \frac{6}{2000} = 3$ mA.
Diese Stromstärke fließt durch den Widerstand R_1. Da die Widerstände in den zwei parallelen Nebenzweigen gleich groß sind, verteilt sich der Strom des Hauptzweiges gleichmäßig auf die zwei Nebenzweige auf, sodass $I_2 = 1{,}5$ mA ist. Da R_1 und R' gleich groß sind, teilt sich die Gesamtspannung von 6 V gleichmäßig auf: $U_1 = U_2 = 3$ V.
d) Zunächst können Spannung und Stromstärke für R_1 bestimmt werden: $U_1 = U_\mathrm{B} = 6$ V und
$I_1 = \frac{U_\mathrm{B}}{R_1} = \frac{6}{1000} = 6$ mA. Die Summe der zwei Widerstände in dem unteren parallelen Zweig ist: $R' = 2R_2 = 4$ kΩ. Deshalb fließt ein Strom von $I_2 = \frac{U_\mathrm{B}}{R'} = \frac{6}{4000} = 1{,}5$ mA durch die beiden Widerstände R_2. Die Spannung von 6 V teilt sich gleichmäßig auf die zwei Widerstände R_2 auf: $U_2 = 3$ V. (Gesamtwiderstand und Gesamtstromstärke für den ganzen Stromkreis sind: $R_\mathrm{gesamt} = 800\ \Omega$, $I_\mathrm{gesamt} = 7{,}5$ mA.)

7.13. Die Kathode einer Röntgenröhre wird mit Hilfe eines Heizstromkreises erhitzt. Die an die Kathode angelegte Spannung beträgt 12 V, der Widerstand ist 3 Ω. Berechnen Sie

a) die Heizstromstärke,

b) die aufgenommene elektrische Leistung,

c) die in 1,5 Sekunden entstehende Wärme,

d) die Erwärmung der Kathode in 1,5 Sekunden, wenn sie aus Wolfram besteht und eine Masse von 0,2 g besitzt. (Setzen wir voraus, dass während dieser Zeit keine Wärme von der Kathode abgegeben wird.)

7.14. Die spiralförmig aufgewickelte Wolframfaser einer Glühbirne hat eine Länge von 600 mm und einen Durchmesser von 0,05 mm. Berechnen Sie

a) den Widerstand der Faser, wenn der spezifische Widerstand von Wolfram $5{,}51 \cdot 10^{-8}$ Ω·m beträgt,

b) die Leistung, wenn eine Spannung von 120 V an die Glühbirne angelegt wird, unter der Voraussetzung, dass sich der Widerstand der Wolframfaser durch Erhitzung nicht verändert.

c) Berechnen Sie die tatsächliche Leistung der Glühbirne unter der Berücksichtigung, dass sich durch die Erhitzung der Widerstand auf 240 Ω erhöht.

7.15. Man misst den Widerstand und die geometrischen Daten eines Drahtes: R = 1,51 mΩ, l = 15 cm und r = 0,75 mm. Berechnen Sie den spezifischen Widerstand von dem Material des Drahtes.

7.16. Wie groß ist der Widerstand der Wolframfaser einer Glühbirne mit einer Leistung von 60 W bei einer Spannung von 220 V?

7.17. Der Widerstand eines RC-Kreises beträgt 15 kΩ, die Kapazität des Kondensators ist 20 µF.

a) Bestimmen Sie die Zeitkonstante des RC-Kreises.

b) Man lädt den Kondensator auf eine gewisse Spannung auf, danach entlädt sich dieser über den Widerstand. In welcher Zeit reduziert sich die Spannung des Kondensators auf die Hälfte der Anfangsspannung?

7.18. a) Wie groß ist die Kapazität eines Kondensators in einem RC-Kreis mit einem 10 MΩ Widerstand, wenn die Zeitkonstante 1 s ist?

b) Auf wie viel Prozent sinkt die Spannung bei der Entladung dieses RC-Kreis in 2 s?

7.19. Die Zeitkonstante eines RC-Kreises ist 0,6 s.

a) Auf welche Spannung lädt sich der Kondensator in 1 s auf, wenn die Ladespannung 100 V beträgt?

b) Wie lange dauert es, bis sich dieser Kondensator von der errechneten Spannung auf die Hälfte entlädt?

7.20. Die Zeitkonstante eines RC-Kreises beträgt 40 s. Der Kondensator des Kreises wird mit einer Batterie mit einer Spannung von 9 V geladen. Wie lange dauert die Aufladung, bis die Kondensatorspannung 8,9 V erreicht?

7.21. Eine sinusförmige Wechselspannung hat eine Amplitude von 500 V und eine Periodenzeit von 0,2 ms.

a) Wie groß ist die Frequenz?

b) Wie groß ist der Effektivwert der Spannung?

7.22. Die Netzspannung in Deutschland hat einen Effektivwert von 230 V und eine Frequenz von 50 Hz. Berechnen Sie

a) die Amplitude,

b) die Periodenzeit dieser sinusförmigen Netzspannung.

7.13. a) $I = \frac{U}{R} =$ 4 A; b) $P = U \cdot I =$ 48 W; c) $Q = W = P \cdot t =$ 72 J.

d) Aus der Formel $Q = c \cdot m \cdot \Delta t$ ergibt sich die Temperaturänderung: $\Delta t = \frac{Q}{c \cdot m} = \frac{72}{132 \cdot 0{,}0002} =$ 2730°C, wobei für Wolfram c = 132 J/(g·K) ist (s. „Konstanten und Daten"). Die Kathode wird also sehr schnell auf Temperaturen nahe dem Schmelzpunkt (3422°C) erhitzt. Bei dieser hohen Temperatur ist neben der thermischen Elektronenemission auch schon die Wärmeabgabe durch Temperaturstrahlung bedeutsam.

7.14. a) Der Widerstand R eines Leiters mit der Länge l und der Querschnittsfläche A (= $r^2\pi$, wenn der Querschnitt kreisförmig ist) ergibt sich aus der Formel

$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{r^2\pi} = 5{,}51 \cdot 10^{-8} \frac{0{,}6}{(0{,}025 \cdot 10^{-3})^2\pi} = 16{,}8\ \Omega.$

b) $P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{120^2}{16{,}8} =$ 857 W.

c) $P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{120^2}{240} =$ 60 W.

7.15. $1{,}78 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$

7.16. 807 Ω

7.17. a) Die Zeitkonstante τ ergibt sich aus dem Zusammenhang: $\tau = R \cdot C = 15 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} =$ 0,3 s.

b) Der Entladungsvorgang verläuft exponentiell: $U_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, wobei U_0 die Anfangsspannung und U_C die aktuelle Spannung zum Zeitpunkt t bezeichnen. Aus der Gleichung ergibt sich t: $t = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{U_C}$.

Da nach der Aufgabenstellung $U_C = U_0/2$ ist, kann die Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$t = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{U_C} = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{\frac{U_0}{2}} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}21$ s.

7.18. a) 0,1 μF; b) 13,5%

7.19. a) Der Aufladevorgang verläuft exponentiell: $U_C = U_\mathrm{B} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, wobei U_B die Ladespannung (oder Batteriespannung), U_C die aktuelle Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt t und τ die Zeitkonstante des Kreises bezeichnen. Aus der Gleichung ergibt sich die gefragte Spannung:

$U_C = U_\mathrm{B} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{0{,}6}}\right) = 81{,}2$ V.

b) $t = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{U_C} = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{\frac{U_0}{2}} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}415$ s (siehe Erläuterung zur Aufgabe 7.17 b)).

7.20. 3 min

7.21. a) Die Frequenz ist gleich dem reziproken Wert der Periodenzeit: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}0002} =$ 5 kHz.

b) Die effektive Spannung steht in dem folgenden Zusammenhang zur Amplitude (U_max):

$U_\mathrm{eff} = \frac{U_\mathrm{max}}{\sqrt{2}} = \frac{500}{\sqrt{2}} = 353$ V.

7.22. a) 325 V; b) 20 ms

7.23. Ein Widerstand von 460 Ω wird an eine Wechselspannungsquelle geschaltet. Die Wechselspannung wird mit der Formel $U = 325\ \mathrm{V} \sin(314 \frac{1}{s} \cdot t)$ beschrieben. Berechnen Sie

a) die maximale Spannung,
b) die effektive Spannung,
c) die maximale Stromstärke,
d) die effektive Stromstärke,
e) die durchschnittliche Leistung in dem Schaltkreis.

7.24. Der ohmsche Widerstand und die Kapazität eines Hautbereiches mit einer Oberfläche von 5 cm^2 betragen 2000 Ω bzw. 5 10^{-7} F. Berechnen Sie

a) den spezifischen Widerstand der Haut,
b) die spezifische Kapazität der Haut,
b) den kapazitiven Widerstand des Hautbereiches bei Frequenzen von 10 Hz, 1 kHz und 20 kHz.
d) Bei welcher Frequenz sind ohmscher und kapazitiver Widerstand des Hautbereiches gleich groß?

7.25. Bei der Messung der Hautimpedanz wurden die Werte 2 Ωm^2 für den spezifischen Widerstand der Haut und 0,3 $\mu F/cm^2$ für die spezifische Kapazität gemessen. Berechnen Sie

a) den ohmschen Widerstand,
b) die Kapazität eines Hautbereiches mit einer Oberfläche von 10 cm^2.
c) Bei welcher Frequenz sind ohmscher und kapazitiver Widerstand gleich groß?
d) Wie hoch ist die Zeitkonstante der Haut, wenn diese als RC-Kreis betrachtet wird?

Signalverarbeitung

7.26. Berechnen Sie den Informationsgehalt des Ereignisses „3“ beim Würfelspiel.

7.27. Wie groß ist der Informationsgehalt eines Wurfs beim Würfelspiel?

7.28. Berechnen Sie den Informationsgehalt des Buchstabens „m“ für die deutsche Sprache, wobei die Auftrittswahrscheinlichkeit bei $p = 0{,}031$ liegt.

7.29. Gegeben ist das Alphabet mit zwei Buchstaben „a“ und „b“ und deren Wahrscheinlichkeiten $p(\mathrm{a}) = 0{,}75$ und $p(\mathrm{b}) = 0{,}25$. Berechnen Sie

a) separat den Informationsgehalt der zwei Buchstaben,
b) den Informationsgehalt der Identifizierung eines zufälligen Buchstabens in der Sprache dieses Alphabets.
c) Wie groß wäre der letztere Informationsgehalt, wenn beide Wahrscheinlichkeiten 0,5 wären?

7.30. Das ungarische Alphabet enthält 40 Buchstaben. Berechnen Sie den Informationsgehalt der Identifizierung eines zufälligen Buchstabens in der ungarischen Sprache unter der Voraussetzung, dass alle Buchstaben die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit haben.

7.31. Das deutsche Alphabet enthält 30 Buchstaben. Berechnen Sie den Informationsgehalt der Identifizierung eines zufälligen Buchstabens in der deutschen Sprache unter der Voraussetzung, dass alle Buchstaben die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit haben.

7.23. a) 325 V; b) 230 V; c) 0,707 A; d) 0,5 A; e) 115 W

7.24. a) Der spezifische Widerstand ergibt sich aus der Formel:
$\rho^* = R \cdot A = 2000 \cdot 5 = 10\ 000\ \Omega \cdot \mathrm{cm}^2 = 1\ \Omega \cdot \mathrm{m}^2$.
b) Die spezifische Kapazität ergibt sich als Quotient der Kapazität und der Oberfläche:
$\gamma^* = \frac{C}{A} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\ \mu\mathrm{F/cm}^2 = 0{,}001\ \mathrm{F/m}^2$.
c) Der kapazitive Widerstand hängt von der Kapazität und der Frequenz der angelegten Wechselspannung ab: $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$.
Setzt man die Kapazität und die angegebenen Frequenzwerte ein, erhält man bei 10 Hz 31,8 kΩ, bei 1 kHz 318 Ω und bei 20 kHz 15,9 Ω.
d) $R = X_C = \frac{1}{2\pi f C} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi RC} = 159$ Hz.

7.25. a) 2000 Ω; b) 3 μF; c) 26,5 Hz; d) 6 ms

7.26. Den Informationsgehalt erhält man aus dem Zusammenhang: $H = p \cdot \log_2 \frac{1}{p}$, wobei p die Auftrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses „3“ bezeichnet. Wenn alle Ereignisse von „1“ bis „6“ die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, dann ist $p = 1/6$. Mit diesem Wert erhält man:
$H = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} = \frac{1}{6} \cdot \log_2 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\ln 6}{\ln 2} = 0{,}431$ bit.
Bei der letzten Umformung haben wir die Tatsache $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ ausgenutzt.

7.27. Beim Würfeln gibt es 6 unterschiedliche Ausgänge oder Ereignisse, jeweils mit einer Auftrittswahrscheinlichkeit von 1/6 (falls der Würfel nicht manipuliert wurde). Der Informationsgehalt der einzelnen Ereignisse muss addiert werden:
$H = \sum_i \left(p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \log_2 6 = \log_2 6 = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 2{,}58$ bit.
Da jeder p_i-Wert für die 6 Ereignisse gleich groß ist, muss man bei der Summation den gleichen Wert 6-mal addieren, daher kommt der Multiplikator 6 in dem zweiten Schritt. Wenn man von dem Ergebnis der vorigen Aufgabe ausgeht, erhält man die Lösung schneller: 6·0,432 bit = 2,58 bit.

7.28. 0,155 bit

7.29. a) Für „a“: $H = p(a) \cdot \log_2 \frac{1}{p(a)} = 0{,}75 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}75} = 0{,}311$ bit.
Für „b“: $H = p(b) \cdot \log_2 \frac{1}{p(b)} = 0{,}25 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}25} = 0{,}5$ bit.
b) Die Summe der zwei einzelnen Ereignisse (Buchstaben) ist 0,811 bit.
c) Wenn die Wahrscheinlichkeiten gleich wären (p(a) = p(b) = 1/2), dann würde man
$H = \sum_i \left(p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = 1$ bit (d. h. 2·0,5 bit) erhalten.

7.30. 5,32 bit

7.31. 4,91 bit

7.32. a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 4 verschiedenen Nukleotiden eine „Nukleotidkette” herzustellen, die aus einem einzigen Nukleotid besteht?
b) Berechnen Sie den Informationsgehalt dieser „Nukleotidkette“.

7.33. a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 4 verschiedenen Nukleotiden eine „Nukleotidkette“ herzustellen, die der des MS2 Bakteriophagen (3600 Basen) entspricht?
b) Berechnen Sie den Informationsgehalt dieser „Nukleotidkette“.

7.34. Berechnen Sie den Informationsgehalt eines DNA-Moleküls, das aus 10^6 Nukleotiden besteht.

7.35. a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 20 verschiedenen Aminosäuren eine „Polypeptidkette” herzustellen, die aus einer einzigen Aminosäure besteht?
b) Berechnen Sie den Informationsgehalt dieser „Polypeptidkette“.

7.36. a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 20 verschiedenen Aminosäuren eine aus 51 Aminosäuren bestehende Polypeptidkette herzustellen, die dem Insulin von der Länge her ähnlich ist?
b) Berechnen Sie den Informationsgehalt dieser Polypeptidkette.

7.37. Berechnen Sie den Informationsgehalt eines Polypeptids, das aus 120 Aminosäuren besteht.

7.38. Das humane Chromosom 21 besteht aus insgesamt 34 169 939 Nukleotiden (pro Einzelstrang). In der Basensequenz haben die Basen C, G, A und T die folgenden Häufigkeiten:

C: 6 977 567 G: 6 990 505 A: 10 140 701 T: 10 061 166.

a) Wie viel Mbit Speicherkapazität wäre nötig, den Informationsgehalt des Chromosoms zu speichern, falls alle Basen die gleiche Auftrittshäufigkeit hätten?
b) Wie viel Mbit Speicherkapazität ist nötig bei den gegebenen Häufigkeiten und wie viel Mbit Speicherkapazität wird im Vergleich zu Frage a) gespart?

7.39. Die Signalleistung wird durch einen Verstärker 1000-fach erhöht. Wie groß ist der Verstärkungspegel?

7.40. Auf das Wievielfache wird die Signalleistung durch einen Verstärker mit einem Verstärkungspegel von 43 dB erhöht?

7.41. Eine Signalspannung wird durch einen Verstärker verdoppelt. Wie groß ist die Änderung der Signalleistung in dB? (Sei $R_{aus} = R_{ein}$!)

7.42. Zwei harmonische Signale mit der gleichen Leistung aber unterschiedlichen Frequenzen (f_1 und f_2) werden durch einen Verstärker verstärkt, dessen Verstärkungspegel bei f_1 und f_2 30 dB bzw. 27 dB sind. Berechnen Sie das Verhältnis der zwei verstärkten Signalleistungen.

7.43. Zwei harmonische Signale der gleichen Leistung, aber unterschiedlicher Frequenzen (f_1 und f_2), werden durch einen Verstärker verstärkt, dessen Verstärkungspegel bei f_1 und f_2 50 dB bzw. 33 dB beträgt. Berechnen Sie das Verhältnis der zwei verstärkten Signalleistungen.

7.44. Der Spannungsverstärkungsfaktor eines Verstärkers beträgt 100. Mit Hilfe eines Rückkopplungskreises werden 3% der Ausgangsspannung negativ zurückgekoppelt. (Sei $R_{aus} = R_{ein}$!)
a) Wie groß ist der Verstärkungspegel ohne Rückkopplung?
b) Auf welchen Wert fällt der Spannungsverstärkungsfaktor durch die Gegenkopplung?
c) Wie groß ist der Verstärkungspegel mit Gegenkopplung?

7.45. Der Leistungsverstärkungsfaktor (Verstärkungspegel) eines Verstärkers beträgt 26 dB. Mit negativer Rückkopplung wurde dieser Wert auf 20 dB herabgesetzt. Welcher Anteil der Ausgangsspannung wurde zurückgekoppelt?

7.32. a) Als das einzige Nukleotid in der „Kette“ kann jedes Nukleotid gewählt werden, die Zahl der Möglichkeiten ist also 4.
b) Falls jedes Nukleotid mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt werden kann, ist die Wahrscheinlichkeit 1/4 und der Informationsgehalt der Kette beträgt:
$H = \sum_i \left(p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = 2$ bit.

7.33. a) An jeder Stelle der Kette kann man 4 verschiedene Nukleotide wählen. Wenn die Kette zwei Mitglieder hätte, wäre die Zahl aller Möglichkeiten (Variationen) $4{\cdot}4 = 16 = 4^2$. Wenn die Kette aus 3600 Mitgliedern besteht, dann ist diese Zahl $4^{3600} = 2{,}6{\cdot}10^{2167}$.
b) Falls jedes Nukleotid an jeder Stelle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt werden kann, beträgt der Informationsgehalt der Kette:
$H = \sum_i \left(p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}\right) = 2{,}6 \cdot 10^{2167} \cdot \frac{1}{2{,}6\cdot 10^{2167}} \cdot \log_2(2{,}6 \cdot 10^{2167}) = 7200$ bit.

7.34. $2{\cdot}10^6$ bit

7.35. a) 20; b) 4,32 bit

7.36. a) $20^{51} = 2{,}25{\cdot}10^{66}$; b) 220 bit

7.37. 519 bit

7.38. a) 68,3 Mbit; b) 64 Mbit, es werden 4,3 Mbit gespart

7.39. Der Verstärkungspegel lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:
$n = 10 \cdot \lg V_P = 10 \cdot \lg 1000 = 30$ dB.

7.40. 20 000-fache

7.41. Falls $R_{aus} = R_{ein}$ ist, gilt die folgende Formel: $n = 10 \cdot \lg V_P = 20 \cdot \lg V_U = 20 \cdot \lg 2 = 6$ dB.

7.42. Bei der ersten Frequenz ist also der Verstärkungspegel $n_1 = 30$ dB. Daraus folgt der Leistungsverstärkungsfaktor V_{P1}:
$V_{P1} = 10^{\frac{n_1}{10}} = 10^{\frac{30}{10}} = 1000.$
Ähnlicherweise ergibt sich aus dem Verstärkungspegel $n_2 = 27$ dB der Leistungsverstärkungsfaktor bei der zweiten Frequenz V_{P2}:
$V_{P2} = 10^{\frac{n_2}{10}} = 10^{\frac{27}{10}} = 501.$
Da die Eingangsleistungen bei den zwei Frequenzen gleich sind, werden die verstärkten Ausgangsleistungen auch das Verhältnis von $1000/501 \approx 2$ haben.

7.43. 50,1

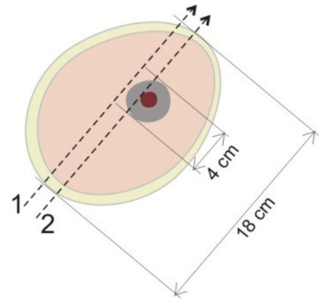
7.44. a) Falls $R_{aus} = R_{ein}$ ist, lässt sich der Verstärkungspegel mit der folgenden Formel berechnen:
$n = 20 \cdot \lg V_U = 20 \cdot \lg 100 = 40$ dB.
b) Der Spannungsverstärkungsfaktor mit Rückkopplung ist:
$V_R = \frac{V_U}{1-\beta\cdot V_U}$, wobei V_U den ursprünglichen Spannungsverstärkungsfaktor ohne Rückkopplung und β den Rückkopplungsfaktor (hier $\beta = -0{,}03$, weil es sich um eine negative Rückkopplung handelt) bezeichnen. Mit diesen Werten ergibt sich:
$V_R = \frac{V_U}{1-\beta\cdot V_U} = \frac{100}{1+0{,}03\cdot 100} = \frac{100}{4} = 25.$
c) $n = 20 \cdot \lg V_U = 20 \cdot \lg 25 = 28$ dB.

7.45. 1/20, d. h. 5%

8. Bildgebende Verfahren

Röntgendiagnostik

8.1. Der Oberschenkel (s. Abbildung) wird in einer Untersuchung mit Röntgenstrahlen der Intensität J_0 durchleuchtet. Betrachten wir die zwei Strahlengänge 1 und 2. Beim Strahlengang 1 setzt sich der Röntgenstrahl im Weichteilgewebe mit einem Schwächungskoeffizienten von 0,19 cm^{-1} fort. Beim Strahlengang 2 durchquert der Strahl auch einen Knochen mit einem Schwächungskoeffizienten von 0,42 cm^{-1}. Berechnen Sie das Intensitätsverhältnis der austretenden Strahlen.



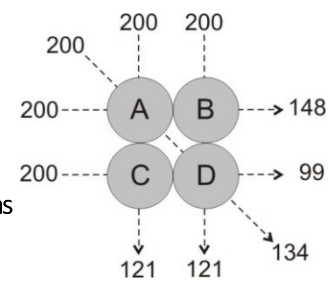
8.2. Bei einer Röntgendurchleuchtung werden Röntgenstrahlen in einem Photonenenergiebereich verwendet, bei dem die Schwächung ausschließlich auf den Photoeffekt zurückzuführen ist. Was für Kontraste entstehen zwischen Knochen- und Weichteilgewebe? Die effektive Ordnungszahlen sind: Knochen: 13,8 und Weichteilgewebe: 7,4. Die durchschnittlichen Dichtewerte sind: Knochen: 1,8 g/cm^3 und Weichteilgewebe: 1,04 g/cm^3. Berechnen Sie
a) das Verhältnis der zwei Massenschwächungskoeffizienten,
b) das Verhältnis der zwei Schwächungskoeffizienten,
c) das Verhältnis der zwei austretenden Intensitäten, wenn der Röntgenstrahl eine 1 cm dicke Weichteilgewebeschicht bzw. eine 1 cm dicke Knochenschicht durchquert und der Schwächungskoeffizient von Weichteilgewebe 0,1 cm^{-1} ist.

8.3. Ein Röntgenstrahl trifft auf eine 1 cm dicke Muskelgewebeschicht bzw. auf eine 1 cm dicke Fettgewebeschicht. Wie groß ist das Verhältnis der zwei austretenden Intensitäten, wenn die Schwächung ausschließlich durch den Photoeffekt erfolgt? (Die Parameter für den Muskel sind: μ_M = 0,1 cm^{-1}, $Z_{eff,M}$ = 7,4 und ρ_M = 1,04 g/cm^3. Die Parameter für Fett sind: $Z_{eff,F}$ = 6 und ρ_F = 0,93 g/cm^3.)

8.4. In der Tabelle sind die Schwächungskoeffizienten von einigen Körpergeweben bzw. Organen (bei einer gewissen Wellenlänge) aufgeführt. Berechnen Sie die entsprechenden Hounsfield-Einheiten (CT-Zahlen).

Gewebe/Organ	μ (cm^{-1})	HU (CT-Zahl)
Lunge	0,092	
Fettgewebe	0,170	
Wasser	0,183	
Muskel	0,190	
Blut	0,192	
Knochen (Spongiosa)	0,201	
Knochen (Kompakta)	0,732	

8.5. Der Querschnitt eines einfachen Körpers ist in der Abbildung zu sehen. Der Körper besteht aus 4 Kreiszylindern mit jeweils einem Durchmesser von 1 cm. Sie bestehen aus unterschiedlichen Stoffen. Der Körper wird von verschiedenen Richtungen mit einem Röntgenstrahl durchleuchtet. Die Intensitätswerte der einfallenden und durchtretenden Strahlen sind in der Abbildung in relativen Einheiten zu sehen. Unter der Voraussetzung, dass das Zwischenmedium zwischen den Zylindern A und D keine Strahlung absorbiert, soll der Schwächungskoeffizient der 4 Zylinder berechnet werden.



8.1. Nach dem Schwächungsgesetz gilt:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{J_0\,e^{-\mu_1 x_1}}{J_0\,e^{-\mu_1(x_1-x_2)}e^{-\mu_2 x_2}} = e^{-(\mu_1-\mu_2)x_2} = e^{-(0{,}19-0{,}42)\cdot 4} = 2{,}5.$$

8.2. a) Das Verhältnis der zwei Massenschwächungskoeffizienten (μ_m) ist gleich dem Verhältnis der zwei Teilmassenschwächungskoeffizienten von dem Photoeffekt (τ_m) und des Weiteren gleich dem Verhältnis der dritten Potenzen der effektiven Ordnungszahlen:

$$\frac{\mu_{m,K}}{\mu_{m,W}} = \frac{\tau_{m,K}}{\tau_{m,W}} = \frac{Z^3_{eff,K}}{Z^3_{eff,W}} = \left(\frac{Z_{eff,K}}{Z_{eff,W}}\right)^3 = \left(\frac{13{,}8}{7{,}4}\right)^3 = 6{,}49.$$

b) Da der Schwächungskoeffizient $\mu = \mu_m \cdot \rho$ ist, kann das gefragte Verhältnis mit

$\frac{\mu_K}{\mu_W} = \frac{\mu_{m,K}\cdot\rho_K}{\mu_{m,W}\cdot\rho_W} = \frac{\mu_{m,K}}{\mu_{m,W}}\cdot\frac{\rho_K}{\rho_W} = 6{,}49\cdot\frac{1{,}8}{1{,}04} = 11{,}2$ geschrieben werden.

c) Wenn $\mu_W = 0{,}1\ \mathrm{cm}^{-1}$ beträgt, dann ist $\mu_K = 11{,}2\cdot 0{,}1 = 1{,}12\ \mathrm{cm}^{-1}$. Mit diesen Schwächungskoeffizienten:

$$\frac{J_W}{J_K} = \frac{J_0\,e^{-\mu_W\cdot x}}{J_0\,e^{-\mu_K\cdot x}} = e^{-(\mu_W-\mu_K)x} = e^{-(0{,}1-1{,}12)\cdot 1} = 2{,}77.$$

8.3. $\frac{J_F}{J_M} = 1{,}054$. Es kommen also nur 5,4% mehr Strahlung durch das Fettgewebe durch.

8.4.

Gewebe/Organ	μ (cm^{-1})	HU (CT-Zahl)
Lunge	0,092	–497 ≈ **–500**
Fettgewebe	0,170	–71 ≈ **–70**
Wasser	0,183	**0**
Muskel	0,190	38 ≈ **40**
Blut	0,192	49 ≈ **50**
Knochen (Spongiosa)	0,201	98 ≈ **100**
Knochen (Kompakta)	0,732	**3000**

8.5. Als Beispiel schreiben wir das Schwächungsgesetz für die Durchleuchtung der Zylinder A und B auf:

$148 = 200\cdot e^{-\mu_A\cdot 1}\cdot e^{-\mu_B\cdot 1}$ und daraus $\mu_A + \mu_B = \ln\frac{200}{148} = 0{,}3$. [Gl.1] (Der Einfachheit halber werden die Maßeinheiten nicht aufgeschrieben und das Ergebnis auf eine signifikante Stelle gerundet.) Aus den weiteren Durchleuchtungen erhalten wir ähnliche Gleichungen:

$\mu_C + \mu_D = 0{,}7$ [Gl.2] $\quad \mu_A + \mu_D = 0{,}4$ [Gl.3] $\quad \mu_A + \mu_C = 0{,}5$ [Gl.4] $\quad \mu_B + \mu_D = 0{,}5$ [Gl.5]

Die Gleichungen 1 bis 4 zum Beispiel sind unabhängig voneinander und können gelöst werden. Addieren wir zuerst Gl.3 und Gl.4. Von der Summe ziehen wir Gl.2 ab:

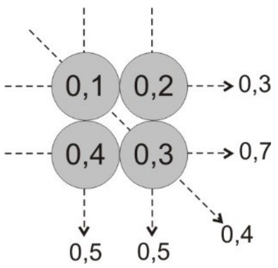
$\mu_A + \mu_D + \mu_A + \mu_C - (\mu_C + \mu_D) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}7$

$\mu_A = 0{,}1\ \mathrm{cm}^{-1}$.

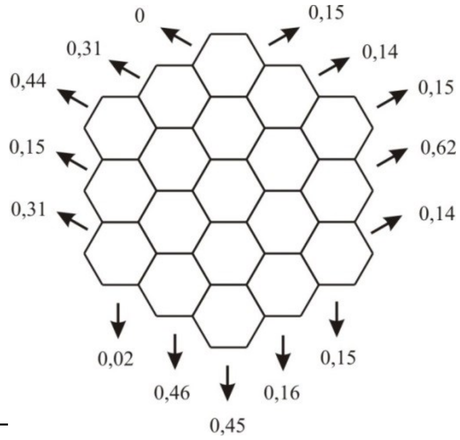
Nach dem Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichungen 1, 3 und 4 erhalten wir die weiteren Werte:

$\mu_B = 0{,}2\ \mathrm{cm}^{-1}$ $\qquad \mu_C = 0{,}4\ \mathrm{cm}^{-1}$ $\qquad \mu_D = 0{,}3\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Die Lösung grafisch:



8.6. Spielen wir „CT“! Einige von den dargestellten Bienenwaben sind mit Honig gefüllt, die anderen sind leer. Aus einer Röntgendurchleuchtung erhält man die in der Abbildung angegebenen Summen der Schwächungskoeffizienten (ohne Maßeinheiten) für die einzelnen Reihen. (Die Werte sind aber nicht genau, man muss einen Fehler von ±0,02 in Betracht ziehen.) Unter der Voraussetzung, dass nur Honig die Strahlung abschwächt und die Wände nicht, sollen die mit Honig gefüllten Zellen gefunden werden.



Isotopendiagnostik

8.7. Die Aktivität von ^{99}Mo ($T_{1/2}$ = 66 h) in einem Tc-Generator beträgt am Anfang 370 GBq.

a) Wie viele ^{99}Mo-Atome befinden sich am Anfang in dem Generator?

b) Wie viele ^{99}Mo-Atome bleiben 24 Stunden später übrig?

c) Wie viele ^{99m}Tc-Atome sind während dieser 24 Stunden entstanden?

d) Wenn keine der entstandenen ^{99m}Tc-Atome zerfallen würden und alle bei der Elution aus dem Tc-Generator in eine Lösung ausgewaschen werden könnten, wie groß wäre dann die Aktivität der Lösung?

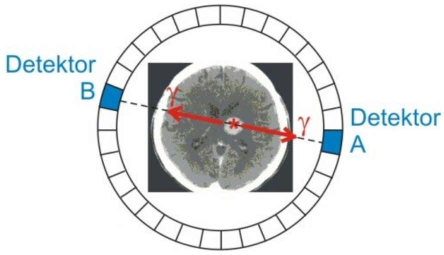
e) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Teil d) soll die Aktivität von ^{99m}Tc-Atomen in der nächsten Elution weitere 24 Stunden später berechnet werden.

8.8. Wie groß ist die biologische Halbwertszeit des Schwefels (S) in der Haut, wenn man am Anfang der Untersuchung in einem Gramm Haut 6 kBq und nach zwei Wochen 3,45 kBq ^{35}S messen kann?

8.9. Vor der Radiojodtherapie eines Schilddrüsenkrebses soll die Jodaufnahme und Speicherfähigkeit der Schilddrüse bestimmt werden. Dafür wird dem Körper in einer Untersuchung das Isotop ^{131}I zugeführt und im abnehmenden Abschnitt der Speicherkurve die Aktivität bestimmt. 24 h nach der Gabe wird eine Aktivität von 85,5% und nach weiteren 24 h eine Aktivität von 59,6% der zugeführten Aktivität gemessen. Wie groß ist die biologische Halbwertszeit der untersuchten Schilddrüse bezogen auf das Jod in Stunden?

8.10. In der Positronenemissionstomografie (PET) wird ein β^+-strahlendes Isotop dem Patienten zugeführt. Die im Körper des Patienten emittierten Positronen (β^+-Teilchen) führen aber praktisch sofort am Emissionsort mit einem Elektron Paarvernichtung durch. Dabei entstehen zwei γ-Quanten mit der gleichen Energie. Berechnen Sie diese Energie.

8.11. In der dargestellten PET-Untersuchung beträgt der Durchmesser des Detektorrings 48 cm.

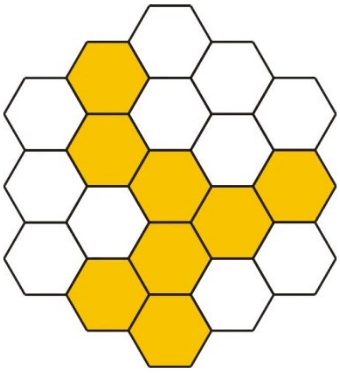


a) Wie groß muss das Zeitfenster der Koinzidenzschaltung sein, damit die zwei durch Paarvernichtung entstandenen γ-Quanten die Detektoren A und B sicher mit einer kleineren Zeitdifferenz erreichen, als das eingestellte Zeitfenster.

b) Im Detektor B entsteht das Signal um 0,5 ns später als im Detektor A. Bestimmen Sie den Ort, an dem die Paarvernichtung aufgetreten ist.

8.12. In einem PET-Gerät ist der Durchmesser des Detektorrings 1,5 m groß. Im Detektor B entsteht das Signal um 3 ns später als im Detektor A (s. obige Abbildung). Bestimmen Sie a) die Größe des zweckmäßigen Zeitfensters, b) den Ort, an dem die Paarvernichtung auftritt.

8.6.



8.7. a) $1{,}27 \cdot 10^{17}$; b) $0{,}987 \cdot 10^{17}$; c) $0{,}283 \cdot 10^{17}$; d) 905 GBq; e) 704 GBq

8.8. Für die Abnahme der Aktivität in der Haut gilt: $A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{\text{eff}}} \cdot t}$.

Daraus ergibt sich die effektive Halbwertzeit: $T_{\text{eff}} = \frac{t \cdot \ln 2}{\ln \frac{A_0}{A}} = \frac{14 \cdot \ln 2}{\ln \frac{6}{3{,}45}} = 17{,}5$ Tage.

Unter Kenntnis der physikalischen Halbwertzeit ($T_{\text{phys}} = 87{,}2$ Tage) kann die biologische Halbwertzeit aus der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \frac{1}{T_{\text{phys}}} + \frac{1}{T_{\text{biol}}}$$

$\frac{1}{T_{\text{biol}}} = \frac{1}{T_{\text{eff}}} - \frac{1}{T_{\text{phys}}} = \frac{1}{17{,}5} - \frac{1}{87{,}2} = 0{,}04567$ und $T_{\text{biol}} = 21{,}9$ Tage.

8.9. $T_{\text{biol}} = 60{,}7$ Stunden

8.10. Die Massen von dem Positron und dem Elektron werden in die Energie von den zwei γ-Quanten umgewandelt: $2E = 2mc^2$ und daraus $E = mc^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8{,}18 \cdot 10^{-14}$ J = 510 keV.

8.11. a) Die Geschwindigkeit der γ-Quanten beträgt $3 \cdot 10^8$ m/s. Die maximale Streckendifferenz ist gleich dem Durchmesser des Detektorrings, d. h. 48 cm. Daraus ergibt sich die maximale Zeitdifferenz, bei der die zwei durch Paarvernichtung entstandenen γ-Quanten die entsprechenden Detektoren erreichen:

$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{0{,}48}{3 \cdot 10^8} = 1{,}6$ ns. Es ist zweckmäßig, diesen Wert als Zeitfenster einzustellen.

b) Die Zeitverzögerung von 0,5 ns entspricht dann einer Strecke von

$\Delta s = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-10} = 15$ cm.

Der Weg bis zum Detektor B (s_B) ist also um 15 cm länger als der Weg bis zum Detektor A (s_A):

$s_B = s_A + 15$.

Der Gesamtweg beträgt 48 cm: $s = s_B + s_A = s_A + 15 + s_A = 2s_A + 15 = 48$

und daraus $s_A = 16{,}5$ cm bzw. $s_B = 31{,}5$ cm.

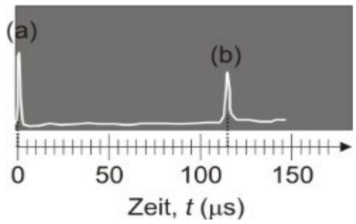
8.12. a) 5 ns; b) entlang der Linie AB und 30 cm weit von A entfernt

Sonografie

8.13. Berechnen Sie mit Hilfe der folgenden Tabelle das Reflexionsvermögen der Grenzen
a) Luft-Haut,
b) Haut-Muskel,
c) Muskel-Knochen.

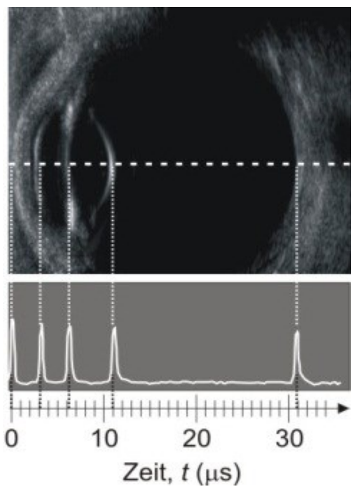
	Luft	Haut	Muskel	Knochen
Schallgeschwindigkeit (m/s)	330	1480	1570	3600
Dichte (kg/m^3)	1,29	980	1040	1700

8.14. Ein Ultraschall-Echogramm (A-Bild) ist auf dem Schirm eines Oszilloskops zu sehen. Die Zeitdifferenz zwischen den von der Körperoberfläche (a) und von einer inneren Fläche (b) ausgehenden Echosignalen kann der Abbildung entnommen werden. Wie tief liegt die innere, reflektierende Fläche, wenn die Geschwindigkeit des Ultraschalls im Körpergewebe 1540 m/s ist?



8.15. Man möchte die Größe einer Zyste aus einem Ultraschall-A-Bild bestimmen. Die Zeitdifferenz zwischen den von der vorderen bzw. der hinteren Grenzfläche der Zyste zurückgesendeten Echosignalen beträgt 52 µs.
a) Welche Größe ergibt sich daraus, wenn man mit der für alle Gewebe vorausgesetzten Ultraschallgeschwindigkeit von 1540 m/s rechnet?
b) Welche Größe ergibt sich, wenn man mit der in der Flüssigkeit der Zyste tatsächlich gültigen Ultraschallgeschwindigkeit von 1500 m/s rechnet?

8.16. Das Sonogramm eines menschlichen Auges ist in der Abbildung zu sehen. Oben ist das zweidimensionale B-Bild zu sehen, unten ein vereinfachtes A-Bild entlang der mit einer gestrichelten Linie gezeigten Augenachse. Angenommen, dass die Ultraschallgeschwindigkeit im Auge überall einheitlich 1540 m/s beträgt, sollen mit Hilfe der Zeitachse des A-Bildes berechnet werden:
a) die Dicke der Linse,
b) die Tiefe des Glaskörpers,
c) die Gesamtgröße des Augapfels.



8.17. Es sei angenommen, dass zwei im Körper 8 cm weit voneinander liegende Grenzflächen Echosignale der gleichen Intensität zurücksenden. Um wie viel dB wird die gemessene Intensität des Echosignals der hinteren Grenzfläche wegen der Dämpfung im Gewebe kleiner sein, als die Echointensität von der vorderen Grenzfläche? Die spezifische Dämpfung des Körpergewebes beträgt 1 dB/(cm·MHz) und die Frequenz des verwendeten Ultraschalls ist 6 MHz.

8.13. a) 99,9%; b) 0,35%; c) 33,5%

8.14. Nach der Abbildung beträgt die Zeitdifferenz 115 μs. Daraus ergibt sich eine Wegstrecke von $s = v \cdot t = 1540 \cdot 115 \cdot 10^{-6} =$ 17,7 cm. Man muss jedoch in Betracht ziehen, dass der Ultraschallimpuls den Abstand zwischen der Körperoberfläche und der inneren Grenzfläche hin und her, also zweimal, zurücklegt hat. Somit ergeben sich 17,7 cm. Die innere reflektierende Fläche liegt also nur 17,7/2 = 8,85 cm tief.

8.15. a) 4 cm; b) 3,9 cm. (Die Zyste ist also (wenn auch nicht wesentlich) kleiner als die durch die Ultraschallmessung „offiziell" erhaltene Größe.)

8.16. a) 3,85 mm; b) 15,4 mm; c) 21,6 mm

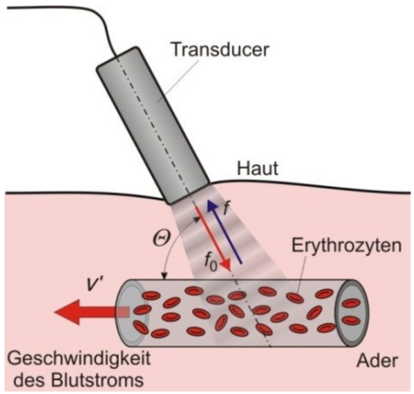
8.17. 48 dB

8.18. Eine Arterie wird nach der Abbildung mit dem Ultraschall-Doppler-Verfahren untersucht. Die Frequenz des ausgesendeten Ultraschalls beträgt 8 MHz. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit des Blutes in der Arterie konstant ist und 25 cm/s beträgt. Die Geschwindigkeit des Ultraschalls im Körper beträgt 1540 m/s. Der Arzt hält den Transducer unter verschiedenen Winkeln. Berechnen Sie die Dopplerverschiebung, wenn der Winkel Θ

a) 90°,

b) 45°,

c) annähernd 0° beträgt.



8.19. Die Blutströmung wird in einer Arterie mit dem Ultraschall-Doppler-Verfahren untersucht. Die Frequenz des ausgesendeten Ultraschalls beträgt 8 MHz. Die Ausbreitungsrichtung der Ultraschallwellen stimmt mit der Strömungsrichtung überein. Die Dopplerverschiebung beträgt 1200 Hz. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Blutes in der Arterie? (Die Geschwindigkeit des Ultraschalls im Körper ist 1540 m/s.)

Kernspintomografie (MRT)

8.20. Bei einer Protonen-MRT-Untersuchung beträgt die verwendete magnetische Feldstärke 3,5 T.

a) Wie groß ist die zeemansche Aufspaltung (in eV), d. h. die Energiedifferenz zwischen den zeemanschen Niveaus?

b) Wie groß muss die für die Anregung verwendete Radiowellenfrequenz sein?

c) Das Wievielfache der thermischen Energie (bei 25°C) ist gleich der oben berechneten Anregungsenergie?

8.21. Bei einer Protonen-MRT-Untersuchung ist die verwendete magnetische Feldstärke 1,5 T.

a) Wie groß ist das Besetzungsverhältnis der Grund- und angeregten Niveaus bei 25°C?

b) Wie viele Protonen befinden sich im angeregten Zustand, wenn die Anzahl der Protonen im Grundzustand $n_{\mathrm{Grund}} = 10^7$ ist?

c) Wie viele Protonen mehr sitzen im Grundzustand als im angeregten Zustand?

d) Wie groß ist die Anzahl der Protonen im angeregten Zustand nach einem 90°-Puls?

8.22. Bei einem Protonen-MRT-Gerät beträgt die Resonanzfrequenz 100 MHz.

a) Berechnen Sie die verwendete magnetische Feldstärke.

b) Ein G_z-Feldgradient von 5 mT/m wird eingeschaltet. Berechnen Sie die Differenz der magnetischen Feldstärken zwischen den zwei Rändern einer 2 mm dicken Gewebeschicht.

c) Berechnen Sie die Differenz der Resonanzfrequenzen zwischen den zwei Rändern der Gewebeschicht.

d) In welchem Verhältnis steht diese Differenz (die Bandbreite der verwendeten Radiowellenstrahlung) zu der Resonanzfrequenz von 100 MHz?

8.23. Bei einem Protonen-MRT-Gerät beträgt die Frequenzbandbreite der verwendeten Radiowellenstrahlung 1490 Hz. Wie groß ist die Schichtdicke aus der man Signale erhält, wenn der angewendete Feldgradient 5 mT/m groß ist?

8.18. Die Dopplerverschiebung (auch Doppler-Frequenz genannt, f_D) ergibt sich aus der Formel:
$f_D = f - f_0 = 2 \cdot f \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos\Theta$, wobei f_0 die ausgesendete und f die zurückgesendete Frequenz bezeichnen. v ist die Blutströmungsgeschwindigkeit, c ist die Schallgeschwindigkeit und Θ ist der Winkel, den die Ausbreitungsrichtung des reflektierten Ultraschalls und die Strömungsrichtung einschließen. In diese Formel können die drei Winkelwerte eingesetzt werden:
a) $f_D = 2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}25}{1540} \cdot \cos 90° = 0$, da $\cos 90° = 0$ ist.
b) $f_D = 2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}25}{1540} \cdot \cos 45° = 1840$ Hz.
c) $f_D = 2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}25}{1540} \cdot \cos 0° = 2600$ Hz. Wenn möglich, ist also ein Winkel von 0° optimal.

8.19. 11,6 cm/s

8.20. a) Die zeemansche Aufspaltung (ΔE) ist proportional zur magnetischen Feldstärke (H): $\Delta E = g_P \mu_N H$, wobei g_P den Lande-Faktor des Protons ($g_P = 5{,}59$) und μ_N das Kernmagneton ($\mu_N = 5{,}05 \cdot 10^{-27}$ J/T) bezeichnen.
$\Delta E = 5{,}59 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}5 = 9{,}88 \cdot 10^{-26}$ J $= 6{,}18 \cdot 10^{-7}$ eV.
b) Die Resonanz gilt bei der Gleichung: $\Delta E = h \cdot f$. Aus dieser Gleichung ergibt sich die Frequenz:
$f = \frac{\Delta E}{h} = 149$ MHz.
c) Die thermische Energie ist: $kT = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (25 + 273) = 4{,}11 \cdot 10^{-21}$ J. Die in a) berechnete Anregungsenergie ist also das $9{,}88 \cdot 10^{-26}/4{,}11 \cdot 10^{-21} = 0{,}000024$-fache (d. h. nur ein geringer Bruchteil) dieser thermischen Energie.

8.21. a) Hierfür gilt die Boltzmann-Verteilung:
$\frac{n_{\text{angeregt}}}{n_{\text{Grund}}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = e^{-\frac{g_P \mu_N H}{kT}} = e^{-\frac{5{,}59 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (25+273)}} = 0{,}9999897$. Das heißt, dass die Verteilung der Protonen auf dem Grund- und dem angeregten Zustand fast 1 zu 1 ist. Die Zahl der Protonen im angeregten Zustand ist also nur minimal weniger.
b) $n_{\text{angeregt}} = 0{,}9999897 \cdot n_{\text{Grund}} = 0{,}9999897 \cdot 10^7 = 9{,}999897 \cdot 10^6$.
c) Die Differenz ist $n_{\text{Grund}} - n_{\text{angeregt}} = 103$.
d) Nach einem 90°-Puls sind die Protonenzahlen im Grund- und angeregten Zustand gerade gleich, d. h., die Zahl der Protonen im angeregten Zustand ist gleich der Hälfte der Gesamtprotonenzahl:
$(10^7 + 9{,}999897 \cdot 10^6)/2 = 9{,}999949 \cdot 10^6$.
(Das heißt, die Hälfte der 103 Protonen (etwa 52) wurden durch den 90°-Puls aus dem Grundzustand in den angeregten Zustand gehoben.)

8.22. Aus dem Zusammenhang $h \cdot f = \Delta E = g_P \mu_N H$ ergibt sich die verwendete Feldstärke:
$H = \frac{h \cdot f}{g_P \mu_N} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 100 \cdot 10^6}{5{,}59 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27}} = 2{,}35$ T.
b) Wenn der Feldgradient $G_z = 5$ mT/m beträgt, dann ist die Änderung der magnetischen Feldstärke auf einer Strecke von 2 mm: $\Delta H = G_z \cdot \Delta z = 0{,}005 \cdot 0{,}002 = 10$ µT.
c) Die Differenz der Resonanzfrequenzen ist: $\Delta f = \frac{g_P \mu_N \cdot \Delta H}{h} = \frac{5{,}59 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 213$ Hz.
d) Das Verhältnis ist: $213/10^8 = 2{,}13 \cdot 10^{-6} = 0{,}000213\%$.

8.23. 7 mm

9. Physikalische Methoden in der Therapie

Therapeutische Anwendungen des Lichtes

9.1. Berechnen Sie die Photonenenergie der Strahlung einer Germizidlampe in eV (das Emissionsspektrum der Germizidlampe ist in Abb.6. des Kapitels „Lichtemission" im Praktikumsbuch zu finden).

9.2. Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtes, das einen photochemischen Effekt verursacht, wenn die dazu benötigte Energie 240 kJ/mol ist?

9.3. Bei dem „Laserschweißen" der abgelösten Netzhaut werden Laserimpulse eines Argonlasers (λ = 514 nm) mit einer Leistung von 0,3 W und einer Impulsdauer von 200 ms verwendet.
a) Wie viel Energie enthält ein Laserimpuls?
b) Wie viele Photonen enthält ein Laserimpuls?

9.4. Der lineare Schwächungskoeffizient von Muskelgewebe beträgt bei der Wellenlänge eines CO_2-Lasers (10,6 μm) 800 cm^{-1}, bei der Wellenlänge eines Nd-YAG-Lasers (1,06 μm) 5,7 cm^{-1}. Wie dick ist die Muskelschicht, die 90% der Lichtintensität absorbiert bei den jeweiligen Lasern?

9.5. Bei einer Wellenlänge von 488 nm (blaue Linie des Argonlasers) beträgt der lineare Schwächungskoeffizient der optischen Medien des Auges 10^{-4} cm^{-1}; dies entspricht etwa dem Wert von Wasser. Der Schwächungskoeffizient des Blutes bei der gleichen Wellenlänge beträgt 330 cm^{-1}.
a) Mit welchem Energieverlust (in %) erreicht das Licht des Argonlasers den 25 mm tief liegenden Augenhintergrund?
b) Das Laserlicht fällt auf eine Kapillare des Augenhintergrundes. Wie dick muss eine Blutschicht in „mm" sein, um die einfallende Lichtintensität zu halbieren?

9.6. Bei einer Trommelfelldurchbohrung wird das Licht eines Nd-YAG-Lasers auf eine Fläche von 1 mm^2 des Trommelfells fokussiert. Die Intensität des fokussierten Laserstrahls beträgt $2\cdot10^6$ W/m^2. Vorausgesetzt, dass die ganze einfallende Lichtenergie in einem Volumen von 1 mm^3 des Trommelfells absorbiert wird, soll folgendes berechnet werden:
a) Wie lange muss das Trommelfell bestrahlt werden, damit das Gewebestück von 37°C auf 100°C erwärmt wird?
b) Wie lange muss das Gewebestück noch weiter bestrahlt werden, damit es verdampft?
(Daten des Gewebes: Dichte = 1,02 g/cm^3, spezifische Wärmekapazität = 3400 J/(kg·°C), spezifische Verdampfungswärme = 2000 kJ/kg.)

9.7. Ein chirurgischer CO_2-Laser emittiert Laserimpulse mit einer Leistung von 10 W und einer Impulsdauer von 0,1 s. Der Laserstrahl wird bei einer Operation auf das Gewebe fokussiert, sodass die bestrahlte kreisförmige Fläche einen Durchmesser von 0,6 mm hat.
a) Welche Schichtdicke des Gewebes absorbiert 90% der einfallenden Intensität? Der Schwächungskoeffizient des Gewebes beträgt bei der Wellenlänge des CO_2-Lasers 800 cm^{-1}. (Andere Prozesse als die der Absorption sind zu vernachlässigen.)
b) Wie stark würde sich diese absorbierende Schicht infolge der absorbierten Laserenergie eines Impulses erwärmen, wenn sich die absorbierte Energie in der Schicht gleichmäßig verteilen würde und andere Prozesse wie z. B. Wärmeleitung während des Impulses vernachlässigt werden können. Betrachten wir den Laserstrahl als parallel. (Daten des Gewebes: Dichte = 1,04 g/cm^3, spezifische Wärmekapazität = 3400 J/(kg·°C).)

9.1. Die Wellenlänge ist etwa 254 nm. Daraus ergibt sich die Photonenenergie von 4,89 eV.

9.2. Die für eine einzige photochemische Reaktion nötige Energie ist: $\varepsilon = \frac{E}{N_\mathrm{A}} = \frac{240\ 000}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 3{,}99 \cdot 10^{-19}$ J.

Ein Photon liefert diese Energiemenge, die Photonenenergie ist also gleich groß. Aus dem Zusammenhang für die Photonenenergie ergibt sich die Wellenlänge: $\lambda = \frac{h \cdot c}{\varepsilon} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3{,}99 \cdot 10^{-19}} = 498$ nm.

9.3. a) 60 mJ; b) $1{,}55 \cdot 10^{17}$

9.4. 0,03 mm bei dem CO_2 Laser bzw. 4 mm bei dem Nd-YAG-Laser

9.5. a) 0,025%; b) 0,02 mm

9.6. a) Die im Gewebe absorbierte Energie erhält man aus der Intensität des Laserstrahls (J), der bestrahlten Fläche (ΔA) und der Bestrahlungsdauer (Δt_1): $\Delta E_1 = J \cdot \Delta A \cdot \Delta t_1$.

Diese Energiemenge führt zu einer Temperaturänderung von ΔT nach der Formel: $\Delta E_1 = c \cdot m \cdot \Delta T$, wobei c die spezifische Wärmekapazität und m die Masse des Gewebestückes bezeichnen. Die Masse ergibt sich aus dem Volumen (ΔV) und der Dichte des Gewebes (ρ): $m = \rho \cdot \Delta V$. Wenn man die drei Zusammenhänge kombiniert, erhält man:

$J \cdot \Delta A \cdot \Delta t_1 = c \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot \Delta T$.

Diese Gleichung kann nach Δt_1 aufgelöst werden:

$\Delta t_1 = \frac{c \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot \Delta T}{J \cdot \Delta A} = \frac{3400 \cdot 1020 \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 63}{2 \cdot 10^{6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 0{,}109$ s.

b) Die während der weiteren Bestrahlungszeit (Δt_2) absorbierte Energiemenge (ΔE_2) wird zur Verdampfung des Gewebestückes führen: $\Delta E_2 = m \cdot q_{\mathrm{Verdampfung}}$,

wobei $q_{\mathrm{Verdampfung}}$ die spezifische Verdampfungswärme bezeichnet. Mit dieser neuen und mit den zwei früheren Formeln erhält man:

$J \cdot \Delta A \cdot \Delta t_2 = \rho \cdot \Delta V \cdot q_{\mathrm{Verdampfung}}$.

Diese Gleichung kann nach Δt_2 aufgelöst werden:

$\Delta t_2 = \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot q_{\mathrm{Verdampfung}}}{J \cdot \Delta A} = \frac{1020 \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 2\ 000\ 000}{2 \cdot 10^{6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 1{,}02$ s.

9.7. a) 0,0288 mm;

b) 28 000°C (!) — Das ist natürlich unmöglich. Neben der Erwärmung treten auch andere Prozesse auf: Verdampfung des Wassers (Vaporisation), Verbrennung von Stoffen (Karbonisation) und Zerfall von Molekülen (Atomisation).

Strahlentherapie

9.8. Im Laufe der Strahlentherapie eines Patienten mit Hilfe einer Kobaltkanone soll einer 300 g schweren Geschwulst eine absorbierte Dosis von 1,5 Gy zugeführt werden. Wie lange sollte die Bestrahlung dauern, wenn die Aktivität unserer ^{60}Co-Strahlungsquelle 1 TBq beträgt? Der Abstand zwischen der Strahlungsquelle und der Geschwulst ist 20 cm. $\mu_{m,Gew} / \mu_{m,Luft} = 1{,}1$. Von der Strahlungsschwächung der dazwischenliegenden Gewebe soll abgesehen werden.

9.9. Bei der Radiojodtherapie eines Schilddrüsenkrebses wird einem Patienten das radioaktive ^{131}I-Isotop zugeführt. In seiner Schilddrüse häuft sich eine Aktivität von 0,2 GBq an und zerfällt dort mit einer effektiven Halbwertszeit von 7,5 Tagen. Wie groß ist die durch die Schilddrüse im Weiteren absorbierte Dosis, wenn die Masse der Schilddrüse 80 g und die durchschnittliche Energie der β-Teilchen des ^{131}I-Isotops 0,18 MeV betragen.

Elektrotherapie

9.10. Die elektrischen Rechteckimpulse eines Herzschrittmachers haben eine Dauer von 1 ms und eine Spannungsamplitude von 4 V. Der elektrische Widerstand des Körperteils zwischen den Elektroden beträgt 800 Ω. Setzen wir voraus, dass der Herzschrittmacher mit einer konstanten Frequenz von 72 1/min funktioniert. Die Ladung der Batterie des Herzschrittmachers beträgt 600 mAh, wovon aber wegen der Energieverluste nur 50% für die Impulse verwendbar sind. Berechnen Sie
a) die Stromstärke während des Impulses,
b) die Energie eines Impulses,
c) die elektrische Leistung während des Impulses,
d) die durchschnittliche elektrische Leistung,
e) die transportierte elektrische Ladungsmenge in einem Impuls,
f) die Betriebszeit des Herzschrittmachers, in der die komplette Ladung der Batterie aufgebracht wird.

9.11. Ein Herzschrittmacher gibt Stimulationsimpulse mit den folgenden Parametern ab: Zeitdauer: 2 ms, Stromstärke: 6 mA. Der elektrische Widerstand des Körperteils zwischen den Elektroden beträgt 1000 Ω. Setzen wir voraus, dass der Herzschrittmacher mit einer konstanten Frequenz von 70 1/min funktioniert. Berechnen Sie
a) die Spannung eines Impulses,
b) die elektrische Leistung während des Impulses,
c) die durchschnittliche elektrische Leistung.

9.12. Wie lange funktioniert ein Pacemaker mit einer Ladung von 500 mAh, wenn nur 40% dieser Ladung für die Stimulationsimpulse verwendbar ist, in einem Impuls 4 μC Ladung abgegeben wird und der Pacemaker mit einer Frequenz von 72 1/min funktioniert?

9.13. Die Parameter der Impulse eines Pacemakers sind: Zeitdauer: 2,5 ms, Stromstärke: 1,6 mA. Setzen wir voraus, dass der Pacemaker mit einer konstanten Frequenz von 75 1/min funktioniert. Wie groß muss die Ladung der Batterie sein, wenn der Wirkungsgrad des Pacemakers 50% und die geplante Betriebszeit 10 Jahre sind?

9.8. Die bei dem gegebenen Abstand in der Luft zu erwartete absorbierte Dosis ist:
$D_{\text{Luft}} = K_\gamma \frac{A \cdot t}{r^2}$, wobei K_γ die Dosiskonstante von ^{60}Co bezeichnet. Die im Gewebe absorbierte Dosis ist entsprechend dem Verhältnis der Massenschwächungskoeffizienten größer:
$D_{\text{Gewebe}} = \frac{\mu_{\text{m, Gewebe}}}{\mu_{\text{m, Luft}}} \cdot D_{\text{Luft}} = \frac{\mu_{\text{m, Gewebe}}}{\mu_{\text{m, Luft}}} \cdot K_\gamma \frac{A \cdot t}{r^2}$. Die Gleichung kann nach der Behandlungszeit *t* aufgelöst werden:
$t = \frac{D_{\text{Gewebe}} \cdot r^2}{K_\gamma \cdot A} \cdot \frac{\mu_{\text{m, Luft}}}{\mu_{\text{m, Gewebe}}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2^2}{305 \cdot 1000} \cdot \frac{1}{1{,}1} =$ 0,179 h = 10,7 min.
Vorsicht mit den Einheiten: Da die Maßeinheit der Dosiskonstanten $\frac{\mu\text{Gy} \cdot \text{m}^2}{\text{GBq} \cdot \text{h}}$ ist, müssen die absorbierte Dosis in μGy (1,5 = $1{,}5 \cdot 10^6$ μGy), der Abstand in m (20 cm = 0,2 m) und die Aktivität in GBq (1 TBq = 1000 GBq) eingesetzt werden! Dann erhält man die Zeit in Stunden.

9.9. 67,5 Gy

9.10. a) Nach dem ohmschen Gesetz gilt: $I = \frac{U}{R} = \frac{4}{800} =$ 5 mA.
b) Die elektrische Energie ergibt sich aus der Formel: $E = U \cdot I \cdot \tau = 4 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}001 =$ 20 μJ.
c) Die elektrische Leistung ist: $P = U \cdot I = 4 \cdot 0{,}005 =$ 20 mW.
d) Aus der Frequenz *f* = 72 1/min folgt, dass eine Periode $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{72} =$ 0,01389 min = 0,833 s lang dauert. (Der Impuls dauert also 0,001 s lang. Danach kommt eine Pause von 0,832 s.) Für die ganze Periode beträgt die durchschnittliche Leistung: $\bar{P} = \frac{E}{T} = \frac{20}{0{,}833} =$ 24 μW.
e) Die in einem Impuls transportierte Ladung ergibt sich aus der Definitionsformel der Stromstärke:
$q = I \cdot \tau = 0{,}005 \cdot 0{,}001 =$ 5μC.
f) Die Ladung der Batterie ist *Q* = 600 mAh = $600 \cdot 10^{-3}$ A·3600 s = 2160 As = 2160 C.
(1 Coulomb = 1 Ampere·1 Sekunde!)
Die verwendbare Ladung der Batterie ist unter Berücksichtigung des Wirkungsgrads:
$Q_{\text{verwendbar}} = \eta \cdot Q = 0{,}5 \cdot 2160 =$ 1080 C.
Diese Menge reicht für $N = \frac{Q_{\text{verwendbar}}}{q} = \frac{1080}{5 \cdot 10^{-6}} =$ $2{,}16 \cdot 10^8$ Impulse aus.
Da ein Impuls in *T* = 0,833 s geliefert wird, ist die Betriebszeit des Pacemakers: $t = N \cdot T = 2{,}16 \cdot 10^8 \cdot 0{,}833 =$ $1{,}8 \cdot 10^8$ s = $3 \cdot 10^6$ min = 50 000 h = 2083 d ≈ 5,7 a.

9.11. a) 6 V; b) 36 mW; c) 84 μW

9.12. etwa 4,75 Jahre

9.13. 3156 C = 877 mAh

9.14. Der Kondensator eines Defibrillators hat eine Kapazität von 20 µF.
a) Auf welche Spannung muss er aufgeladen werden, um einen elektrischen Stromschlag mit einer Energie von 160 J produzieren zu können?
b) Wie groß ist die Ladung des Kondensators?

9.15. Der Kondensator eines Defibrillators mit einer Kapazität von 40 µF wird auf eine Spannung von 4 kV aufgeladen. Berechnen Sie die im Kondensator gespeicherte
a) Energie,
b) Ladung.

9.16. Auf das Wievielfache erhöht sich die im Kondensator eines Defibrillators gespeicherte Energie, wenn die Spannung des Kondensators verdoppelt wird?

9.17. Auf das Wievielfache muss die Spannung des Kondensators erhöht werden, damit seine Energie verdoppelt wird?

9.18. Bei einer Defibrillation wurde mit Hilfe von zwei großflächigen Elektroden (Durchmesser = 8 cm) eine Spannung von 4 kV an den Brustkorb gelegt. Der Kondensator in dem Defibrillator hat eine Kapazität von 20 µF.
a) Wie hoch ist die Stromstärke im ersten Moment des Eingriffs, wenn der spezifische Widerstand der Haut 8,3 $\Omega \cdot m^2$ beträgt und die anderen Widerstände zu vernachlässigen sind?
b) In welcher Zeit fällt die Stromstärke unter die Rheobase (4 mA)?

Wärmetherapie

9.19. Wie groß ist die Wellenlänge des Wärmetherapie-Generators bei einer Betriebsfrequenz von 27 MHz bzw. 2,37 GHz in der Luft?

9.20. Wie hoch ist die Betriebsfrequenz des Kurzwellengenerators, wenn die Wellenlänge der Kurzwellen in der Luft 11 m beträgt?

9.21. Wie groß ist die Wellenlänge des Mikrowellengenerators bei einer Betriebsfrequenz von 2,45 GHz in der Luft?

9.22. Die Wärmetherapie eines Muskels wird mit der Kondensatorfeldmethode durchgeführt. (Frequenz: 30 MHz, spezifische Leitfähigkeit des Muskels bei 30 MHz: 0,8 $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, Behandlungszeit: 3 min, Volumen des Muskels: 600 cm^3, elektrische Feldstärke im Muskel: 100 V/m). Wie groß ist die Erwärmung, wenn 70% der Wärme durch den Blutstrom abtransportiert wird?

9.23. Um wie viel °C erwärmt sich das Muskelgewebe während einer 10 Minuten dauernden kurzwellentherapeutischen Behandlung, wenn eine Feldstärke von 100 V/m im Gewebe erzeugt und 30% der Wärmeproduktion durch den Blutstrom abtransportiert wird? Die spezifische Leitfähigkeit des Muskels beträgt 0,8 $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

9.14. a) Die in einem Kondensator gespeicherte Energie ist: $E = \frac{1}{2} CU^2$. Daraus ergibt sich die Spannung:

$U = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 160}{20 \cdot 10^{-6}}} = 4$ kV.

b) Die Ladung eines Kondensators ist: $Q = C \cdot U = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 4000 = 80$ mC.

9.15. a) 320 J; b) 160 mC

9.16. 4

9.17. 1,41

9.18. a) Der ohmsche Widerstand der Haut unter einer Behandlungselektrode ist:

$R = \frac{\rho^*}{A} = \frac{\rho^*}{r^2\pi}$. Die zwei Hautschichten unter den zwei Elektroden sind in Reihe geschaltet, deshalb ist der Gesamtwiderstand einfach das Doppelte von *R*:

$R_{\text{Gesamt}} = 2R = 2\frac{\rho^*}{r^2\pi} = 2\frac{8{,}3}{0{,}04^2\pi} = 3300\ \Omega$. Nach dem ohmschen Gesetz ergibt sich die Stromstärke aus der angelegten Spannung und dem Gesamtwiderstand:

$I_0 = \frac{U_0}{R_{\text{Gesamt}}} = \frac{4000}{3300} = 1{,}21$ A. Der Index „0" weist darauf hin, dass diese Werte im ersten Moment der Behandlung gelten. Der Kondensator im Defibrillator entlädt sich im Laufe der Behandlung. Sowohl die Spannung als auch die Stromstärke klingen exponentiell ab.

b) Der Kondensator im Defibrillator und die Haut bilden bei der Behandlung einen RC-Kreis, in dem die Entladung des Kondensators exponentiell erfolgt. Die Änderung der Stromstärke folgt der Änderung der Spannung des Kondensators:

$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, wobei τ die Zeitkonstante des RC-Kreises bezeichnet.

Die Zeitkonstante ergibt sich als: $\tau = RC$.

Nach Einsetzen dieser Formel in die erste Formel kann *t* ausgedrückt werden:

$t = -RC \ln\frac{I}{I_0} = -3300 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\frac{0{,}004}{1{,}21} = 0{,}377$ s = 377 ms.

9.19. 11,1 m bzw. 12,6 cm

9.20. 27,3 MHz

9.21. 12,2 cm

9.22. Die durch die Behandlung entstehende Wärme ist:

$Q = \sigma \cdot E^2 \cdot V \cdot t$, wobei σ die elektrische Leitfähigkeit, *E* die elektrische Feldstärke und *V* das Volumen des behandelten Gewebes bezeichnen. *t* ist die Behandlungszeit. 30% dieser Wärme werden tatsächlich in dem behandelten Gewebe bleiben:

$Q' = 0{,}3Q$. Die Erwärmung des Gewebes (ΔT) ergibt sich aus der Formel:

$Q' = c \cdot m \cdot \Delta T$, wobei *c* die spezifische Wärmekapazität und *m* die Masse des behandelten Gewebes bezeichnen. Die Masse ergibt sich aus der Dichte und dem Volumen:

$m = \rho \cdot V$. Wenn man die 4 Gleichungen kombiniert, erhält man:

$0{,}3 \cdot \sigma \cdot E^2 \cdot V \cdot t = c \cdot \rho \cdot V\ \cdot \Delta T$. Das Volumen kann man kürzen und die Erwärmung ist:

$\Delta T = \frac{0{,}3 \cdot \sigma \cdot E^2 \cdot t}{c \cdot \rho} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 100^2 \cdot 3 \cdot 60}{3760 \cdot 1060} = 0{,}11$°C.

(Dichte und spezifische Kapazität für den Muskel sind im Anhang zu finden.)

9.23. 0,85°C

10. Physikalische Methoden in der biologischen Forschung

Elektronenmikroskopie

10.1. a) Wie groß ist die Geschwindigkeit von Elektronen, die mit einer Spannung von 5 kV beschleunigt wurden? (Der relativistische Massenzuwachs soll nicht berücksichtigt werden.)
b) Wie groß ist die Wellenlänge von diesem Elektronenstrahl?

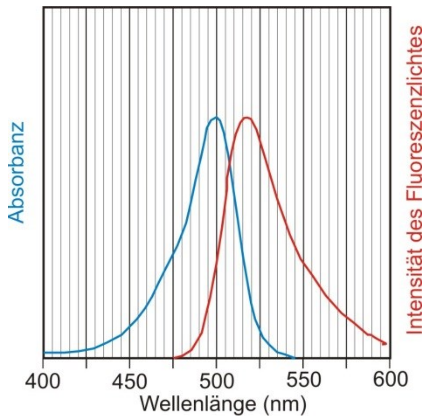
10.2. Ein Durchstrahlelektronenmikroskop arbeitet mit Elektronenenergien von 5 keV. Wie groß sind die Auflösungsgrenze und das Auflösungsvermögen, wenn der Aperturwinkel des Elektronenobjektivs 3° beträgt?

10.3. Der Aperturwinkel eines Elektronenmikroskops beträgt 1°.
a) Wie groß muss die Beschleunigungsspannung sein, damit die Auflösungsgrenze 0,3 nm ist. (Der relativistische Massenzuwachs soll nicht berücksichtigt werden.)
b) Wie groß ist die Vergrößerung des Mikroskops, wenn die Auflösungsgrenze auf dem Bild einem Abstand von 0,6 mm entspricht?

Spektroskopie

10.4. In dem Emissionsspektrum des Kaliumatoms ist eine starke Linie bei ≈ 760 nm zu beobachten. Berechnen Sie die Anregungsenergie von Kalium in eV.

10.5. Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung ungefähr die Größe der Stokes-Verschiebung für Fluorescein ab.



10.6. Lesen Sie die Größe der Stokes-Verschiebung aus der Abb. VI.25. des Lehrbuchs a) für die Fluoreszenz und b) für die Phosphoreszenz von Tryptophan ab. (Nehmen Sie jeweils die mittleren Peaks.)

10.7. Man misst den zeitlichen Verlauf des Phosphoreszenzlichtes von Tryptophan in einem Proteinmolekül. Die gemessenen Intensitätswerte sind zu einigen Zeitpunkten in der Tabelle zu finden. Bestimmen Sie die Phosphoreszenzlebensdauer durch die Darstellung der gemessenen Werte und Anpassung einer Kurve von den Messpunkten.

Zeitpunkt (s) nach der Anregung	Intensität (in relativen Einheiten)
0,2	1536
0,4	1089
0,6	833
0,8	667
1,0	455

10.8. Man möchte die Phosphoreszenz eines Proteinmoleküls messen. Bei der Messung ist das Fluoreszenzlicht des Moleküls jedoch direkt nach der Anregung 10^6-mal stärker als sein Phosphoreszenzlicht bei der Wellenlänge der Messung. Damit die starke Fluoreszenz die Messung der Phosphoreszenz nicht stört, muss nach der Anregung gewartet werden, bis das Fluoreszenzlicht schwächer – und zwar 10^6-mal schwächer ist als das Phosphoreszenzlicht. Nach welcher Zeit nach der Anregung kann man mit der Messung anfangen, wenn die Fluoreszenzlebensdauer des Moleküls 510 ns und die Phosphoreszenzlebensdauer 0,58 ms betragen?

10.1. a) Die elektrische Arbeit ist: $W = eU$. Diese Arbeit erscheint als kinetische Energie des Elektrons: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$. Aus den zwei Gleichungen ergibt sich die Geschwindigkeit:

$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5000}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} = 4{,}19\cdot 10^7$ m/s. Annähernd alle beschleunigten Elektronen besitzen diese Geschwindigkeit.

b) Nach der de Broglie-Formel gilt:

$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 4{,}19\cdot 10^7} = 17{,}4$ pm.

10.2. Wenn die Elektronen 5 keV Energie besitzen, wurden sie durch eine Spannung von 5 kV beschleunigt. In der Lösung der Aufgabe 10.1 ist die dazu gehörende Wellenlänge zu finden: 17,4 pm. Die beim Lichtmikroskop kennengelernte Formel für die Auflösungsgrenze gilt (ohne den Brechungsindex) auch für das Durchstrahlelektronenmikroskop:

$\delta = 0{,}61\frac{\lambda}{\sin\omega} = 0{,}61\frac{17{,}4}{\sin 3°} = 203$ pm $\approx 0{,}2$ nm.

Das Auflösungsvermögen ist der reziproke Wert: $1/\delta = 5\ \mathrm{nm}^{-1}$.

10.3. a) λ = 8,58 pm und U = 20,5 kV; b) 2 000 000

10.4. 1,64 eV

10.5. Das Maximum der Fluoreszenzkurve liegt bei etwa 530 nm, während das Maximum der Absorptionskurve bei etwa 500 nm zu sehen ist. Die Differenz ist die Stokes-Verschiebung: etwa 30 nm.

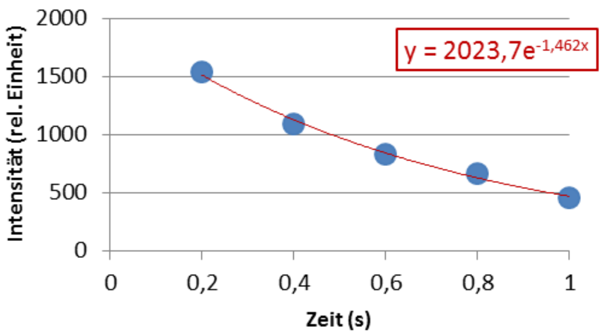
10.6. a) etwa 45 nm, b) etwa 145 nm

10.7. Die Phosphoreszenz klingt exponentiell nach der Formel $J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ab. Nach der Darstellung der Daten in einem Excel-Diagramm und dem Einfügen einer exponentiellen Trendlinie erhält man die exponentielle Funktion:

$y = 2023{,}7e^{-1{,}462x}$. Der Wert 1,462 ist gleich $1/\tau$.

Die Lebensdauer ist also:

$\tau = \frac{1}{1{,}462} = 684$ ms.



10.8. 14,1 µs

Diffraktionsmethoden

10.9. Ein NaCl-Einkristall wird nach der Bragg-Methode untersucht. Der Kristall wird mit einem monochromatischen Röntgenstrahl mit einer Wellenlänge von 71 pm bestrahlt. Bei der Bragg-Reflexion erscheint das Intensitätsmaximum erster Ordnung unter einem Winkel von 7,23°. Berechnen Sie den Abstand der reflektierenden Gitternetzebenen des NaCl-Kristalls.

10.10. Bei der Bragg-Diffraktion von Gold erhält man 44° für den Winkel des Intensitätsmaximums erster Ordnung. Die Wellenlänge des verwendeten Röntgenstrahls beträgt 0,154 nm. Berechnen Sie den Netzebenenabstand des Goldkristalls.

10.9. Die Bragg-Gleichung ist: $2d \sin\theta = n \cdot \lambda$, wobei *d* den Abstand der Gitterebenen, θ den Winkel der Intensitätsmaxima, *n* eine ganze Zahl und λ die Wellenlänge des verwendeten Röntgenstrahls bezeichnen. Schreibt man die Gleichung für das Intensitätsmaximum erster Ordnung auf, muss 1 für *n* und der Winkel des Maximums erster Ordnung für θ in die Formel eingesetzt werden. Nach dem Einsetzen kann die Gleichung nach *d* aufgelöst werden:
$d = \frac{1 \cdot \lambda}{2 \cdot \sin\theta} = \frac{71}{2 \cdot \sin 7{,}23°} = 282$ pm.

10.10. 111 pm

11. Weitere Aufgaben zu den Praktikumsthemen

Mikroskopie

11.1. Die beiden Krümmungsradien einer bikonvexen Linse werden um 10% erhöht. Wie ändert sich a) die Brechkraft, b) die Brennweite?

11.2. Die beiden Krümmungsradien einer bikonvexen Linse werden um 20% verkleinert. Wie ändert sich a) die Brechkraft, b) die Brennweite?

11.3. Wie groß ist die Gesamtbrechkraft von zwei dünnen, eng nebeneinander gestellten Linsen mit einer Brennweite von jeweils 80 cm?

11.4. Eine Linse der Brennweite 0,5 m und eine andere Linse der Brennweite 2 m werden eng nebeneinander gestellt. Wie groß ist die Gesamtbrechkraft der zwei Linsen?

Refraktometrie

11.5. Destilliertes Wasser wird zwischen die Prismen ($n_P = 1{,}739$) eines Refraktometers gefüllt.

a) Berechnen Sie den Grenzwinkel.

b) Wie ändert sich der Grenzwinkel, wenn das destillierte Wasser gegen gesundes menschliches Blutplasma mit einer Eiweißkonzentration von 70 g/l ausgetauscht wird? (Die Brechzahl des Blutplasmas ist aus Abb. 14 des Kapitels 4. „Refraktometrie" im Praktikumsbuch abzulesen.)

c) Um wie viel Prozent ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Messprisma niedriger, als die im destillierten Wasser?

Die Optik des Auges

11.6. Den 0,4 mm großen Spalt eines Landolt-Ringes sieht man in einer Entfernung von 1,5 m. Berechnen Sie

a) die Sehwinkelgrenze in Winkelminuten,

b) die Sehschärfe in %.

c) Wie groß ist das Bild des Spaltes auf der Retina aufgrund der Daten des reduzierten Auges?

11.7. Den 2 mm großen Spalt eines Landolt-Ringes sieht man in einer Entfernung von 4 m. Berechnen Sie

a) die Sehwinkelgrenze in Winkelminuten,

b) die Sehschärfe in %.

c) Wie groß ist das Bild des Spaltes auf der Retina aufgrund der Daten des reduzierten Auges?

Nukleare Grundmessung

11.8. Ein Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) enthält 10 Dynoden. Wie groß ist seine Verstärkung, wenn die Anzahl der Sekundärelektronen pro einfallendem Elektron und pro Dynode

a) 3, b) 4, c) im Durchschnitt 2,7 beträgt?

11.1. a) Die Brechkraft einer Linse ergibt sich aus der Linsenschleiferformel: $D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Die neue Brechkraft bei erhöhten Radien ist:

$D' = (n-1)\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{1{,}1 \cdot R_1} + \frac{1}{1{,}1 \cdot R_2}\right) = \frac{1}{1{,}1}(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{1{,}1} D = 0{,}909 \cdot D$.

D. h. die Brechkraft nimmt um 9,1% ab.

b) Die neue Brennweite ist: $f' = \frac{1}{D'} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}1}D} = 1{,}1\frac{1}{D} = 1{,}1 \cdot f$. D. h. die Brennweite erhöht sich um 10%.

11.2. a) um 25% größer; b) um 20% kleiner

11.3. Die Brechkraft einer Linse ist: $D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ dpt. Wenn die zwei Linsen sehr nah nebeneinander gestellt werden, gilt die einfache Summationsregel: $D = D_1 + D_2 = 2{,}5$ dpt.

11.4. 2,5 dpt

11.5. a) 49,4°; b) 50,3°; c) 23,4%

11.6. a) Die Sehwinkelgrenze ist annähernd:

$\alpha = \frac{a}{x} = \frac{0{,}4}{1500} = 0{,}000267 \text{ rad} = 0{,}000267 \cdot \frac{360}{2\pi} = 0{,}0153° = 0{,}0153 \cdot 60 = 0{,}918'$.

b) Die Sehschärfe oder Visus ist: $\frac{1'}{\alpha(')} = 1{,}09 = 109\%$.

c) In dem reduzierten Auge liegt der Knotenpunkt K 17 mm von der Retina entfernt. Deshalb gilt der Zusammenhang: $\frac{a}{x} = \frac{a'}{17}$ für die Bildgröße a'. Die Gleichung kann nach a' aufgelöst werden:

$a' = 17 \cdot \frac{a}{x} = 17 \cdot \frac{0{,}4}{1500} = 4{,}53 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 4{,}53\ \mu\text{m}$.

11.7. a) 1,53‘; b) 65,4%; c) 7,56 μm

11.8. a) Setzen wir voraus, dass 1 Elektron auf die erste Dynode fällt. Die Zahl der Sekundärelektronen nach der ersten Dynode ist 3. Nach der zweiten ist sie: $3 \cdot 3 = 3^2$. Nach der dritten ist sie: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ usw. Nach der zehnten Dynode ist die Zahl $3^{10} = 59\ 049$. Die Verstärkung ist also etwa 59 000-fach.

b) etwa 1 050 000-fach; c) etwa 20 600-fach

Gamma-Absorption

11.9. Eine Bleiplatte absorbiert 10% der einfallenden γ-Strahlung. Wie viel % der einfallenden Strahlung wird durch zwei solche Bleiplatten durchgelassen?

11.10. Eine Bleiplatte lässt 80% der einfallenden γ-Strahlung durch. Wie viel % der einfallenden Strahlung wird durch zwei solche Bleiplatten insgesamt absorbiert?

11.11. Eine Bleiplatte absorbiert 60% der einfallenden γ-Strahlung. Wie viel % der einfallenden Strahlung wird durch eine halb so dicke Bleiplatte absorbiert?

11.12. Eine Bleiplatte lässt 40% der einfallenden γ-Strahlung durch. Wie viel % der einfallenden Strahlung wird durch eine halb so dicke Bleiplatte durchgelassen?

Röntgen

11.13. Die Anodenspannung einer Röntgenröhre wird um 25% erhöht.
a) Um wie viel % verschiebt sich die Grenzwellenlänge des Bremsspektrums und in welche Richtung?
b) Um wie viel % ändert sich die ausgestrahlte Leistung der Bremsstrahlung?
c) Um wie viel % ändert sich der Wirkungsgrad der Röntgenröhre?
d) Um wie viel % verschieben sich die Wellenlängen der Peaks der charakteristischen Röntgenstrahlung und in welche Richtung?

11.14. Die Anodenspannung einer Röntgenröhre wird um 25% verkleinert.
a) Um wie viel % verschiebt sich die Grenzwellenlänge des Bremsspektrums und in welche Richtung?
b) Um wie viel % ändert sich die ausgestrahlte Leistung der Bremsstrahlung?
c) Um wie viel % ändert sich der Wirkungsgrad der Röntgenröhre?
d) Um wie viel % verschieben sich die Wellenlängen der Peaks der charakteristischen Röntgenstrahlung und in welche Richtung?

11.15. Die Anodenspannung einer Röntgenröhre wird verdoppelt und die Anodenstromstärke gleichzeitig halbiert.
a) Auf das Wievielfache ändert sich die Grenzwellenlänge des Bremsspektrums?
b) Auf das Wievielfache ändert sich die ausgestrahlte Leistung der Bremsstrahlung?
c) Auf das Wievielfache ändert sich der Wirkungsgrad der Röntgenröhre?
d) Um wie viel % verschieben sich die Wellenlängen der Peaks der charakteristischen Röntgenstrahlung?

11.16. Die Ordnungszahl von Material 1 ist um 20% größer, als die Ordnungszahl von Material 2. Um wie viel % ist der aus dem Photoeffekt stammende Teilmassenschwächungskoeffizient des Materials 1 bei der gleichen γ-Strahlung größer, als der Teilmassenschwächungskoeffizient des Materials 2?

11.17. Wievielmal größer bzw. kleiner ist der aus dem Photoeffekt stammende Teilmassenschwächungskoeffizient von Eisen (Fe) als der von Kohlenstoff (C) bei der gleichen γ-Strahlung?

11.18. Die Photonenenergie der monoenergetischen Röntgenstrahlung 1 ist gleich der Hälfte der Photonenenergie der monoenergetischen Röntgenstrahlung 2. Wievielmal größer bzw. kleiner ist der aus dem Photoeffekt stammende Teilmassenschwächungskoeffizient eines Materials in Bezug auf die Strahlung 1, als auf die Strahlung 2?

11.9. Wenn eine Bleiplatte 10% der einfallenden Strahlung absorbiert, werden 90% durchgelassen: $J = 0{,}9 \cdot J_0$.

Diese reduzierte Intensität fällt auf die zweite Platte und wird nochmals um 10% abgeschwächt: $J = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot J_0 = 0{,}81 \cdot J_0$. Es wird also 81% der Strahlung durchgelassen (und 29% absorbiert).

11.10. 36%

11.11. Wenn die Bleiplatte 60% der einfallenden Strahlung absorbiert, werden 40% durchgelassen: $J = 0{,}4 \cdot J_0$.

Setzen wir voraus, dass eine halb so dicke Bleiplatte von der einfallenden Intensität J_0 die Intensität $J = x \cdot J_0$ durchlässt. Nach der Lösung der Aufgabe 11.9 lassen zwei solche Platten (d. h. gerade die ursprüngliche Platte) $J = x \cdot x \cdot J_0 = x^2 \cdot J_0$ durch. Dieser Anteil ist jedoch bekannt: $0{,}4 \cdot J_0$.

Im Endergebnis ist: $x^2 = 0{,}4$ und daraus $x = \sqrt{0{,}4} = 0{,}632$. D. h. 63,2% werden durchgelassen und 36,8% absorbiert.

11.12. 63,2%

11.13. a) Bei der erhöhten Spannung ($U' = 1{,}25 \cdot U$) ist die Grenzwellenlänge:

$\lambda'_{\mathrm{G}} = \frac{hc}{eU'} = \frac{hc}{e \cdot 1{,}25 \cdot U} = \frac{1}{1{,}25} \frac{hc}{eU} = \frac{1}{1{,}25} \lambda_G = 0{,}8 \cdot \lambda_G$. Sie verschiebt sich um 20% in Richtung kürzerer Wellenlängen, die Strahlung wird also härter.

b) Die ausgestrahlte Röntgenleistung ist bei der erhöhten Spannung:

$P'_{\mathrm{Rtg}} = c_{\mathrm{Rtg}} \cdot U'^2 \cdot I \cdot Z = c_{\mathrm{Rtg}} \cdot (1{,}25 \cdot U)^2 \cdot I \cdot Z = 1{,}25^2 \cdot c_{\mathrm{Rtg}} \cdot U^2 \cdot I \cdot Z = 1{,}25^2 \cdot P_{Rtg} = 1{,}563 \cdot P_{Rtg}$.

Die Leistung erhöht sich also um 56,3%.

c) Der Wirkungsgrad ist: $\eta'_{\mathrm{Rtg}} = c_{\mathrm{Rtg}} \cdot U' \cdot Z = c_{\mathrm{Rtg}} \cdot 1{,}25 \cdot U \cdot Z = 1{,}25 \cdot c_{\mathrm{Rtg}} \cdot U \cdot Z = 1{,}25 \cdot \eta_{Rtg}$ .Der Wirkungsgrad nimmt also um 25% zu.

d) Die charakteristischen Linien verschieben sich nicht, da ihre Stellen ausschließlich vom Anodenmaterial abhängen und nicht von den einstellbaren Parametern der Röntgenröhre wie Anodenspannung und Anodenstromstärke.

11.14. a) 33,3% in Richtung längerer Wellenlängen; b) um 43,7% kleiner. c) um 33,3% größer. d) keine Änderung

11.15. a) auf die Hälfte; b) 2-fach; c) 2-fach; d) keine Änderung

11.16. Für die Ordnungszahlen gilt: $Z_1 = 1{,}2 \cdot Z_2$.

Der aus dem Photoeffekt stammende Teilmassenschwächungskoeffizient ist für Material 1: $\tau_{m,1} = c \cdot Z_1^3 \cdot \lambda^3$ und für Material 2: $\tau_{m,2} = c \cdot Z_2^3 \cdot \lambda^3$.

Der Quotient von diesen ist: $\frac{\tau_{m,1}}{\tau_{m,2}} = \frac{c \cdot Z_1^3 \cdot \lambda^3}{c \cdot Z_2^3 \cdot \lambda^3} = \frac{Z_1^3}{Z_2^3} = \frac{(1{,}2 \cdot Z_2)^3}{Z_2^3} = \frac{1{,}2^3 \cdot Z_2^3}{Z_2^3} = 1{,}2^3 = 1{,}728$.

D. h. $\tau_{m,1}$ ist um 72,8% größer als $\tau_{m,2}$.

11.17. 81,4-fache

11.18. 8-fache

Röntgen — CT

11.19. Wie ändert sich die Röntgendichte eines Absorbers, wenn bei gleichbleibender einfallender Intensität die durchgelassene Intensität im Vergleich zu der früheren auf die Hälfte sinkt?

11.20. Wie ändert sich die Röntgendichte eines Absorbers, wenn bei gleichbleibender einfallender Intensität die durchgelassene Intensität im Vergleich zu der früheren um 30% sinkt?

Verstärker

11.21. Um wie viel dB nimmt der Verstärkungspegel eines Verstärkers zu, wenn sein Leistungsverstärkungsfaktor um 80% erhöht wird?

11.22. Um wie viel dB nimmt der Verstärkungspegel eines Verstärkers ab, wenn sein Leistungsverstärkungsfaktor um 40% reduziert wird?

11.23. Um wie viel Prozent nimmt die Ausgangsleistung eines Verstärkers bei der gleichen Eingangsleistung zu, wenn der Verstärkungspegel um 2 dB erhöht wird?

11.24. Um wie viel Prozent nimmt die Ausgangsleistung bei einem Verstärker bei der gleichen Eingangsleistung ab, wenn der Verstärkungspegel um 3 dB vermindert wird?

11.25. Um wie viel dB nimmt der Verstärkungspegel eines Verstärkers zu, wenn der Spannungsverstärkungsfaktor um 60% erhöht wird? (Eingangs- und Ausgangswiderstand sind etwa gleich groß.)

11.26. Um wie viel dB nimmt der Verstärkungspegel eines Verstärkers ab, wenn der Spannungsverstärkungsfaktor um 60% reduziert wird? (Eingangs- und Ausgangswiderstand sind etwa gleich groß.)

11.27. Um wie viel Prozent nimmt der Leistungsverstärkungsfaktor eines Verstärkers ab, wenn bei konstantem Spannungsverstärkungsfaktor der Ausgangswiderstand um 20% reduziert wird?

11.28. Um wie viel Prozent nimmt der Leistungsverstärkungsfaktor eines Verstärkers zu, wenn bei konstantem Spannungsverstärkungsfaktor der Ausgangswiderstand um 80% erhöht wird?

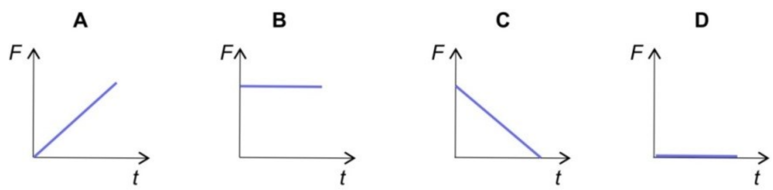
Resonanzmessung

11.29. Man hängt ein Gewicht der Masse 500 g an eine Schraubenfeder. Nach dem Erreichen des Gleichgewichts beträgt die Verlängerung der Feder 2,3 cm. Berechnen Sie die Federkonstante.

11.30. Man hängt ein Gewicht der Masse 250 g an eine Schraubenfeder der Länge 10 cm. Nach dem Erreichen des Gleichgewichts wird die Feder um 7,5% verlängert. Berechnen Sie die Federkonstante.

11.31. Betrachten wir die Achilles-Sehne als eine Schraubenfeder, deren Federkonstante $3 \cdot 10^5$ N/m beträgt. Welche Kraft ist erforderlich, um die Sehne um 2 mm zu verlängern?

11.32. Man drückt eine Feder langsam und gleichmäßig zusammen. Welche Abbildung beschreibt die Größe der Rückstellkraft richtig?



11.19. Die Röntgendichte ist: $D = \lg\frac{J_0}{J}$. Falls die durchgelassene Intensität auf die Hälfte sinkt, gilt der folgende Zusammenhang: $D' = \lg\frac{J_0}{0{,}5\cdot J} = \lg\left(\frac{1}{0{,}5}\cdot\frac{J_0}{J}\right) = \lg\left(2\cdot\frac{J_0}{J}\right) = \lg 2 + \lg\frac{J_0}{J} = \lg 2 + D = 0{,}301 + D$.
Die Röntgendichte nimmt also um 0,301 zu.

11.20. Sie nimmt um 0,155 zu.

11.21. Der erhöhte Leistungsverstärkungsfaktor ist: $V_P' = 1{,}8\cdot V_P$.
Der Verstärkungspegel ist bei dem erhöhten Leistungsverstärkungsfaktor:
$n' = 10\cdot\lg V_P' = 10\cdot\lg(1{,}8\cdot V_P) = 10\cdot(\lg 1{,}8 + \lg V_P) = 10\cdot\lg 1{,}8 + 10\cdot\lg V_P = 2{,}55 + n$.
Der Verstärkungspegel nimmt also um 2,55 dB zu.

11.22. 2,22 dB

11.23. Der erhöhte Verstärkungspegel ist: $n' = n + 2$.
Die Definitionsformel des Verstärkungspegels: $n = 10\cdot\lg\frac{P_{aus}}{P_{ein}}$. Dies kann nach P_{aus} aufgelöst werden:
$\frac{n}{10} = \lg\frac{P_{aus}}{P_{ein}}$ $\Rightarrow$ $10^{\frac{n}{10}} = \lg\frac{P_{aus}}{P_{ein}}$ und $P_{aus} = P_{\text{ein}}\cdot 10^{\frac{n}{10}}$.
Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für die neue Ausgangsleistung (P_{aus}'): $P_{\text{aus}}' = P_{\text{ein}}\cdot 10^{\frac{n'}{10}}$.
Nehmen wir den Quotienten von den zwei Ausgangsleistungen und setzen $n' = n + 2$ ein:
$\frac{P_{\text{aus}}'}{P_{\text{aus}}} = \frac{P_{\text{ein}}\cdot 10^{\frac{n'}{10}}}{P_{\text{ein}}\cdot 10^{\frac{n}{10}}} = \frac{10^{\frac{n'}{10}}}{10^{\frac{n}{10}}} = 10^{\left(\frac{n'}{10}-\frac{n}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{n+2}{10}-\frac{n}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{n}{10}+\frac{2}{10}-\frac{n}{10}\right)} = 10^{0{,}2} = 1{,}585$.
D. h., die Ausgangsleistung wird um 58,5% größer.

11.24. 49,9%

11.25. In dem einfachen Fall, wenn der Eingangs- und Ausgangswiderstand gleich groß sind, kann der Verstärkungspegel mit Hilfe des Spannungsverstärkungsfaktors (V_U) folgendermaßen berechnet werden: $n = 20\cdot\lg V_U$. Für den um 60% höheren Spannungsverstärkungsfaktor (V_U') gilt: $n' = 20\cdot\lg V_U'$, wobei $V_U' = 1{,}6\cdot V_U$ ist. Setzt man diesen letzteren Zusammenhang in die Formel ein, so erhält man:
$n' = 20\cdot\lg V_U' = 20\cdot\lg(1{,}6\cdot V_U) = 20\cdot(\lg 1{,}6 + \lg V_U) = 20\cdot\lg 1{,}6 + 20\cdot\lg V_U = 4{,}08 + n$.
Der Verstärkungspegel steigt also um 4,08 dB.

11.26. 7,96 dB

11.27. Der Leistungsverstärkungsfaktor kann im allgemeinen Fall aus der Formel $V_P = V_U^2\frac{R_{\text{ein}}}{R_{\text{aus}}}$ errechnet werden. Die Abnahme des Ausgangswiderstandes kann man in die Formel folgendermaßen einsetzen:
$V_P' = V_U^2\frac{R_{\text{ein}}}{0{,}8\cdot R_{\text{aus}}} = \frac{1}{0{,}8}\cdot V_U^2\frac{R_{\text{ein}}}{R_{\text{aus}}} = 1{,}25\cdot V_U^2\frac{R_{\text{ein}}}{R_{\text{aus}}} = 1{,}25\cdot V_P$.
Der Leistungsverstärkungsfaktor nimmt also um 25% zu.

11.28. 44,4%

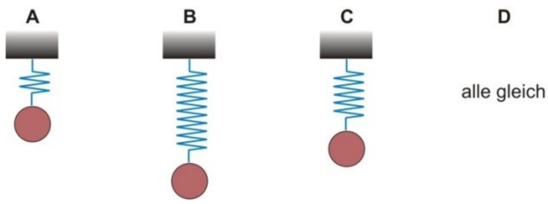
11.29. Im Gleichgewicht sind Gewichtskraft und Rückstellkraft gleich groß: $F = mg$.
Aus dem hookeschen Gesetz folgt: $D = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}5\cdot 9{,}81}{0{,}023} = 213$ N/m.

11.30. 327 N/m

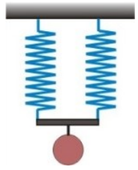
11.31. Im Gleichgewicht ist die erforderliche Zugkraft gleich der Rückstellkraft, die nach dem hookeschen Gesetz $F = Dx = 3\cdot 10^5\cdot 0{,}002 = 600$ N groß ist.

11.32. A

11.33. Die Federn in der Abbildung werden jeweils um 10% verlängert, wenn man das gleiche Gewicht an sie hängt. Welche Feder besitzt die größte Federkonstante?



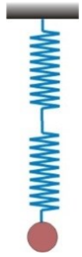
11.34. Zwei gleich starke Federn mit einer Federkonstanten von jeweils 450 N/m werden parallel zueinander angeordnet. Man hängt ein Gewicht von 3 kg an sie.



a) Berechnen Sie die Verlängerungen der Federn.

b) Man ersetzt dieses Federsystem mit einer einzigen Feder so, dass ihre Verlängerung gleich groß wird. Wie groß muss die Federkonstante dieser Ersatzfeder sein?

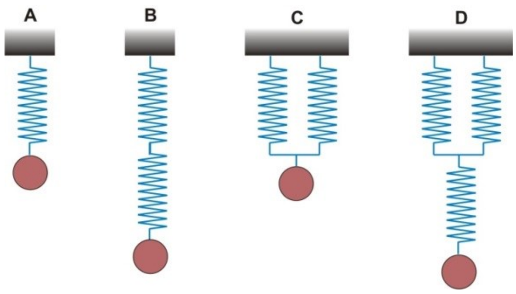
11.35. Zwei gleich starke Federn mit einer Federkonstanten von jeweils 450 N/m werden in Reihe zueinander angeordnet. Man hängt ein Gewicht von 3 kg an sie.



a) Berechnen Sie die Verlängerungen der Federn.

b) Man ersetzt dieses Federsystem mit einer einzigen Feder so, dass ihre Verlängerung gleich groß wird wie die Gesamtverlängerung der zwei Federn. Wie groß muss die Federkonstante dieser Ersatzfeder sein?

11.36. In der Abbildung sind vier Anordnungen von gleich starken Federn skizziert. Alle Federn besitzen also eine gleich große Federkonstante. Man hängt das gleiche Gewicht an die vier Federsysteme. Bei welchem System ist die Verlängerung am größten?



11.37. Welche Aussage ist richtig für eine harmonische Schwingung?

A: Die Amplitude wächst mit der Zeit.

B: Die Amplitude ändert sich sinusförmig mit der Zeit.

C: Die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung.

D: Der zurückgelegte Weg wächst linear mit der Zeit.

11.38. Ein Pendel macht genau 15 Schwingungsperioden in einer Minute. Berechnen Sie

a) die Periodenzeit (Periodendauer) in Sekunden,

b) die Frequenz in Hertz,

c) die Kreisfrequenz in 1/Sekunde.

11.39. Die Auslenkung einer harmonischen Schwingung wird durch die Funktion $x = 3\ \mathrm{cm} \cdot \sin\left(0{,}6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$ beschrieben. Geben Sie

a) die Amplitude,

b) die Kreisfrequenz,

c) die Frequenz,

d) die Periodenzeit (Periodendauer) der Schwingung an.

11.33. Die relativen prozentualen Verlängerungen sind gleich groß: 10%. Die absoluten Verlängerungen jedoch nicht mehr: Die absolute Verlängerung wird bei der kürzesten Feder am kleinsten und bei der längsten Feder am größten sein. Die größte Federkonstante besitzt die Feder, deren Verlängerung bei der gleichen Kraftwirkung am kleinsten ist. Das gilt für die kürzeste Feder in Abbildung A.

11.34. a) Im Gleichgewicht sind Gewichtskraft und Rückstellkraft gleich groß: $F = mg$.
Wegen der parallelen Anordnung belastet aber nur die Hälfte dieser Kraft eine Feder. Aus dem hookeschen Gesetz folgt dann die gleich große Verlängerung der Federn:
$x = \frac{F/2}{D} = \frac{mg/2}{D} = \frac{3 \cdot 9{,}81/2}{450} = 0{,}0327$ m = 3,27 cm.
b) Wenn die ganze Kraft auf eine Feder wirken würde, wäre ihre Federkonstante:
$D = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{3 \cdot 9{,}81}{0{,}0327} = 900$ N/m. (D. h. gerade das Doppelte. Durch die parallele Anordnung addieren sich die Federkonstanten einfach – man gewinnt eine stärkere Feder.)

11.35. a) Im Gleichgewicht sind Gewichtskraft und Rückstellkraft gleich groß: $F = mg$. Diese Kraft spannt beide Federn einzeln wegen der Reihenschaltung. Aus dem hookeschen Gesetz folgt, dass beide Federn gleich stark verlängert werden und diese Verlängerung:
$x = \frac{F}{D} = \frac{mg}{D} = \frac{3 \cdot 9{,}81}{450} = 0{,}0654$ m = 6,54 cm ist.
Da die zwei Federn in Reihe geschaltet sind, werden ihre Verlängerungen addiert. Die Gesamtverlängerung des Systems ist also: 2·6,54 =13,08 cm.
b) Wenn die gleiche Kraft auf eine Feder wirken würde, und die Verlängerung dieser Feder 13,08 cm wäre, wäre ihre Federkonstante:
$D = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{3 \cdot 9{,}81}{0{,}1308} = 225$ N/m. (D. h. gerade die Hälfte. Durch die Reihenschaltung wird das Federsystem schwächer!)

11.36. B

11.37. C

11.38. a) 4 s; b) 0,25 Hz; c) 1,57 s^{-1}

11.39. a) 3 cm; b) 0,6 s^{-1}; c) 0,0955 Hz; d) 10,5 s

11.40. Eine Schraubenfeder mit einer Federkonstanten von 60 N/m hängt vertikal. Man befestigt eine Kugel der Masse 0,4 kg am unteren Ende der Feder und lässt die Kugel los. Berechnen Sie
a) die Eigenfrequenz,
b) die Periodenzeit (Periodendauer) der Eigenschwingung des Pendels.

11.41. Bei einem Federpendel wird die Periodenzeit verdoppelt, wenn die an die Feder gekoppelte Masse um 30 g vergrößert wird. Wie groß war die ursprüngliche Masse?

11.42. Ein Federpendel schwingt mit einer Periodenzeit von 3 s. Wenn die an die Feder gekoppelte Masse um 500 g vermindert wird, sinkt die Periodenzeit auf 2 s. Berechnen Sie
a) die ursprüngliche Masse,
b) die Federkonstante.

11.43. Wie ändert sich die Eigenfrequenz eines Federpendels, wenn die an die Feder gekoppelte Masse verdoppelt wird?

11.44. Wie ändert sich die Eigenfrequenz eines Federpendels, wenn die an die Feder gekoppelte Masse halbiert wird?

11.45. Wie ändert sich die Eigenfrequenz eines Federpendels, wenn die an die Feder gekoppelte Masse um 40% vergrößert wird?

11.46. Wie ändert sich die Eigenfrequenz eines Federpendels, wenn die Federkonstante der Feder verdoppelt wird?

Impulsgeneratoren

11.47. Die Zeitkonstante des RC-Kreises in einem monostabilen Multivibrator beträgt 5 ms. Wie groß ist die Impulsdauer dieses Multivibrators, wenn das Spannungsniveau U_{Trigger} gleich $U_0/2$ ist?

11.48. Die Zeitkonstante des RC-Kreises in einem monostabilen Multivibrator beträgt 20 ms. Wie groß ist die Impulsdauer dieses Multivibrators, wenn das Spannungsniveau U_{Trigger} gleich $U_0/10$ ist?

11.49. Bei einem astabilen Multivibrator dauert der aktive Zustand 2 ms und der passive Zustand 18 ms lang. Berechnen Sie
a) die Frequenz,
b) das Tastverhältnis des Multivibrators.

11.50. Bei einem astabilen Multivibrator dauert der aktive Zustand 1 ms lang. Die Frequenz des Multivibrators beträgt 1 Hz. Berechnen Sie
a) die Zeitdauer des passiven Zustandes,
b) das Tastverhältnis des Multivibrators.

11.51. Die Periodendauer eines astabilen Multivibrators beträgt 20 ms, das Tastverhältnis ist 5%. Wie lange dauert der passive Zustand?

11.52. Die Frequenz eines astabilen Multivibrators beträgt 10 Hz, das Tastverhältnis ist 10%. Wie lange dauert der aktive Zustand?

11.40. a) Die Eigenfrequenz des Federpendels ist:

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{60}{0{,}4}} = 1{,}95$ Hz.

b) 0,513 s

11.41. Zwei Gleichungen können für die zwei Situationen aufgestellt werden:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ und $2T = 2\pi\sqrt{\frac{m+0{,}03}{D}}$.

T kann aus der ersten Formel in die zweite eingesetzt werden:

$2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+0{,}03}{D}}$.

Nach Kürzung durch 2π und Quadrierung erhält man:

$4\frac{m}{D} = \frac{m+0{,}03}{D}$ und $4m = m + 0{,}03$ und schließlich m = 0,01 kg = 10 g.

11.42. a) 0,9 kg; b) 3,95 N/m

11.43. Die Eigenfrequenz des Federpendels mit der Masse m ist: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$.

Wenn die Masse verdoppelt wird, gilt für die neue Eigenfrequenz (f_0') die Formel:

$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0$. Sie wird also auf den $\sqrt{2}$-ten Teil reduziert. D. h., sie ändert sich auf das $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$-fache. Anders gesagt: sie nimmt um 29,3% ab.

11.44. Sie nimmt um 41,4% zu.

11.45. Sie nimmt um 15,5% ab.

11.46. Sie nimmt um 41,4% zu.

11.47. Die Impulsdauer ist gleich der Zeitspanne, während der die Spannung (U) des RC-Kreises von dem ursprünglichen Wert von U_0 auf den Wert von U_{Trigger} fällt. Da sich die Spannung des RC-Kreises nach der Exponentialfunktion $U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ändert und nach der Aufgabenstellung $U_{\text{Trigger}} = \frac{U_0}{2}$ ist, kann man folgende Gleichung aufstellen: $\frac{U_0}{2} = U_{\text{Trigger}} = U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Die Gleichung kann nach t aufgelöst werden:

$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{+\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \frac{t}{\tau}$ und $t = \tau \cdot \ln 2 = 5 \cdot 0{,}693 = 3{,}47$ ms.

11.48. 46,1 ms

11.49. a) Die Periodendauer ist die Summe der Zeitdauer der zwei Zustände:

$T_{\text{AMV}} = \tau_{\text{aktiv}} + \tau_{\text{passiv}} = 2 + 18 = 20$ ms. Die Frequenz ist: $f_{\text{AMV}} = \frac{1}{T_{\text{AMV}}} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50$ Hz.

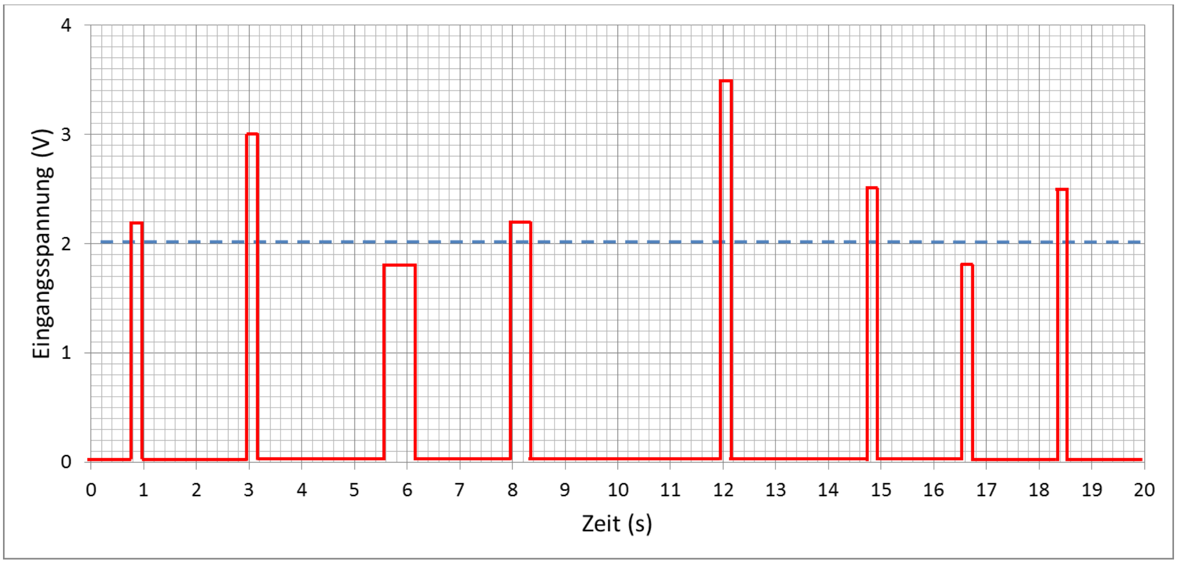
b) Das Tastverhältnis zeigt an, den wievielten Teil der gesamten Periodendauer der aktivierte Zustand ausmacht: $\text{Tastverhältnis} = \frac{\tau_{\text{aktiv}}}{T_{\text{AMV}}} = \frac{2}{20} = 0{,}1$ = 10%.

11.50. a) 999 ms; b) 0,1%

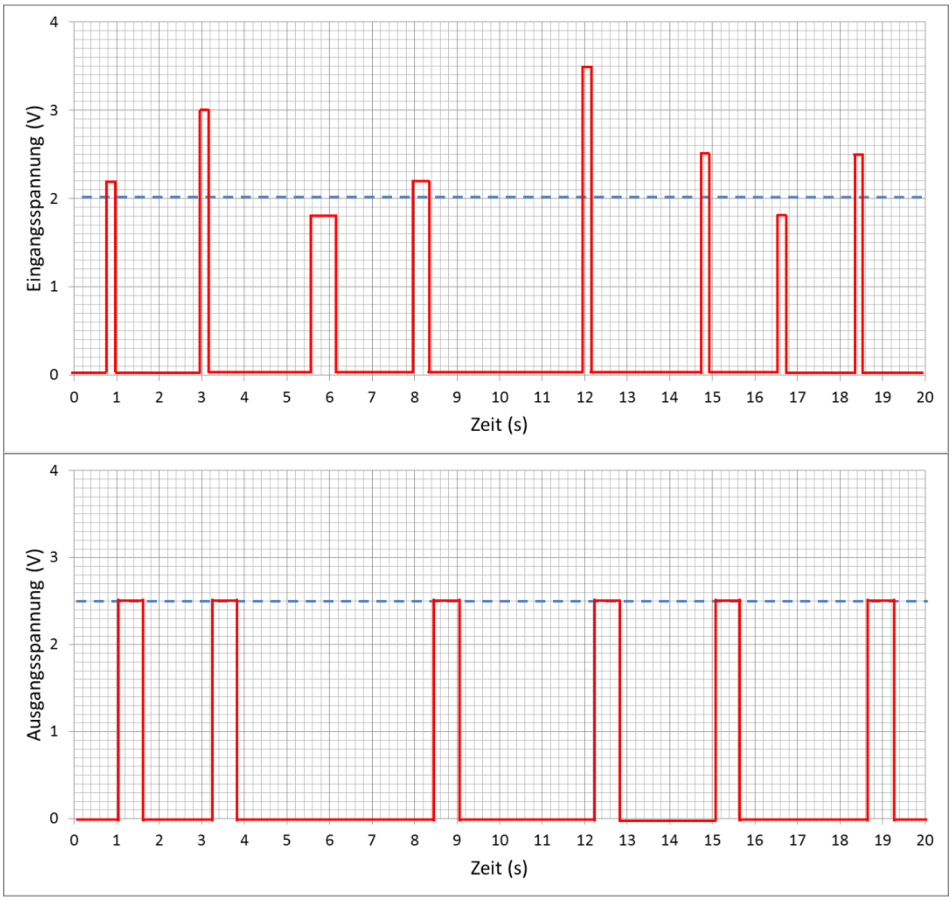
11.51. 19 ms

11.52. 10 ms

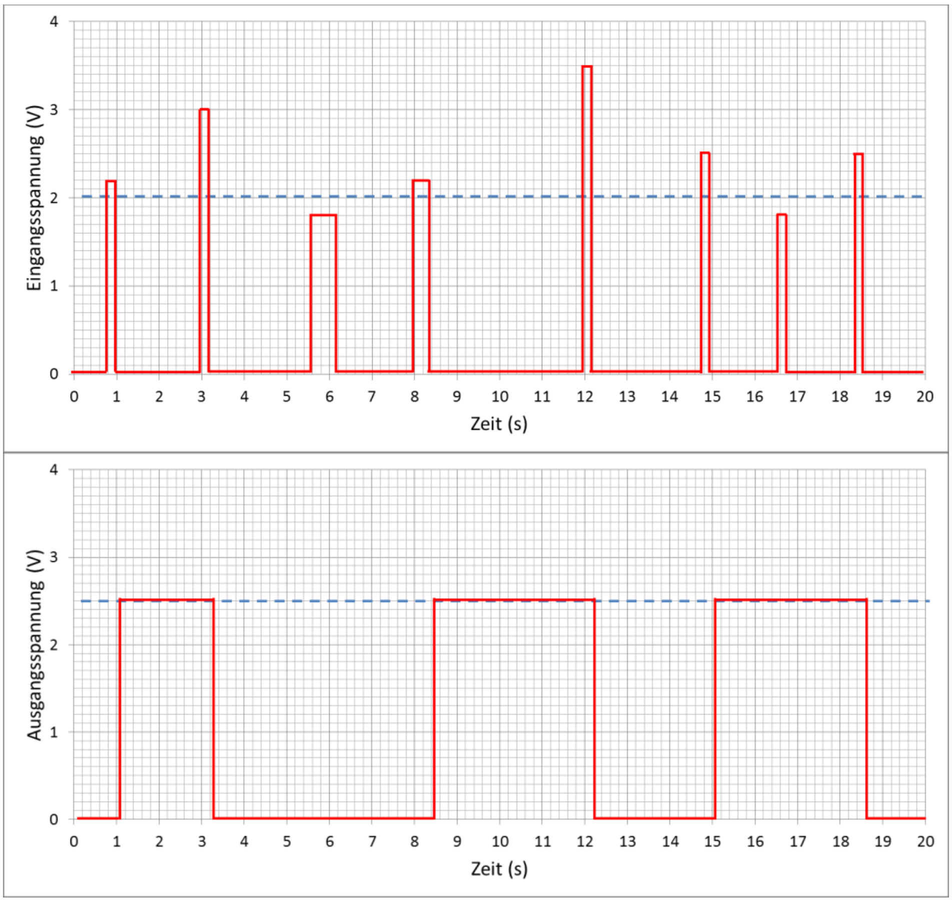
11.53. In der folgenden Abbildung sind die Triggerimpulse beim Eingang eines Multivibrators als Funktion der Zeit dargestellt. Der Schwellenwert der Aktivierung beträgt 2 V (blaue Linie). Der Multivibrator wird durch die fallende Flanke des Triggerimpulses aktiviert. Die weiteren Parameter des Multivibrators sind: Spannung des passiven Zustandes: 0 V und Spannung des aktiven Zustandes: 2,5 V. Stellen Sie die Ausgangsspannung des Multivibrators als Funktion der Zeit dar, wenn der Multivibrator
a) monostabil ist und seine Impulsdauer 0,6 s beträgt,
b) bistabil ist.



11.53. a)


Eingangsspannung (V)
Zeit (s)
Ausgangsspannung (V)
Zeit (s)

b)


Eingangsspannung (V)
Zeit (s)
Ausgangsspannung (V)
Zeit (s)

Coulter-Zähler

11.54. Wie stark ist das Blut zu verdünnen, damit bei der Erythrozytenmessung die erwartete Zahl der Erythrozyten in der Messkapillare mit einem Volumen von 5 nl gerade 1 wird? (Die ursprüngliche Zahl der Erythrozyten in einem Blutvolumen von 1 mm^3 beträgt etwa $5 \cdot 10^6$.)

11.55. Wie stark muss das Blut verdünnt werden, damit bei der Erythrozytenmessung die erwartete Zahl der Erythrozyten in der Messkapillare mit einem Volumen von 10 nl gerade 1 wird? (Die ursprüngliche Zahl der Erythrozyten in einem Blutvolumen von 1 mm^3 beträgt etwa $4{,}5 \cdot 10^6$.)

Audiometrie

11.56. Die Intensität eines Tons mit einer Frequenz von 1000 Hz wird verhundertfacht. Wie ändern sich a) der Schallpegel und b) die Lautstärke?

11.57. Die Intensität eines Tons mit einer Frequenz von 1000 Hz wird halbiert. Wie ändern sich a) der Schallpegel und b) die Lautstärke?

11.58. Für die Aufgabe ist die unten abgebildete vereinfachte Version der Abbildung des Praktikumbuchs (Kapitel 25. Audiometrie Abb.1) zu verwenden.

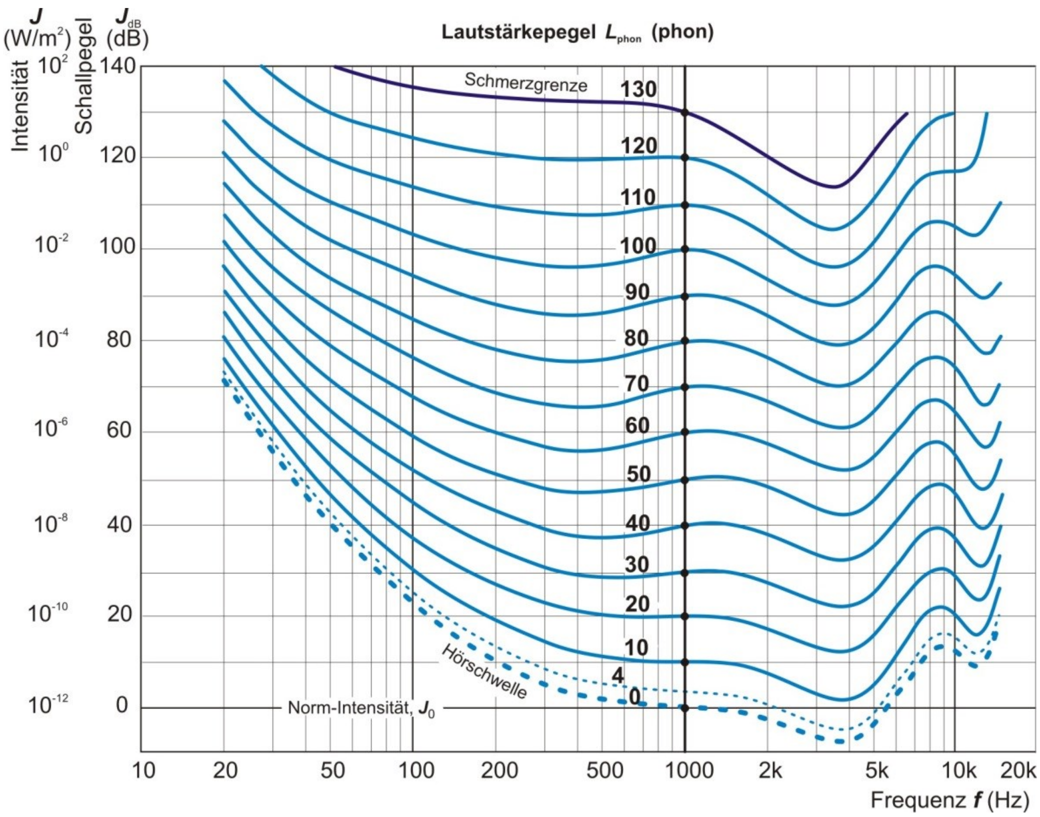
a) Bei welcher Frequenz hört man einen Ton mit einem Schallpegel von 110 dB gerade 110 phon laut?

b) Bei welcher Frequenz hört man einen Ton mit einem Schallpegel von 110 dB nur 80 phon laut?

c) Es ist gegeben *Ton 1*: 6 kHz und 40 dB. Man hört *Ton 2* gleich laut mit einer Frequenz von 40 Hz. Wie groß ist der Schallpegel von Ton 2?

d) Es ist gegeben *Ton 1*: 3 kHz und 80 dB. Man hört *Ton 2* gleich laut mit einem Schallpegel von 100 dB. Wie groß ist die Frequenz von Ton 2?

e) Es ist gegeben *Ton 1*: 1000 Hz und 10^{-5} W/m^2. Man hört *Ton 2* gleich laut mit einer Frequenz von 40 Hz. Wie groß ist die Intensität von Ton 2?



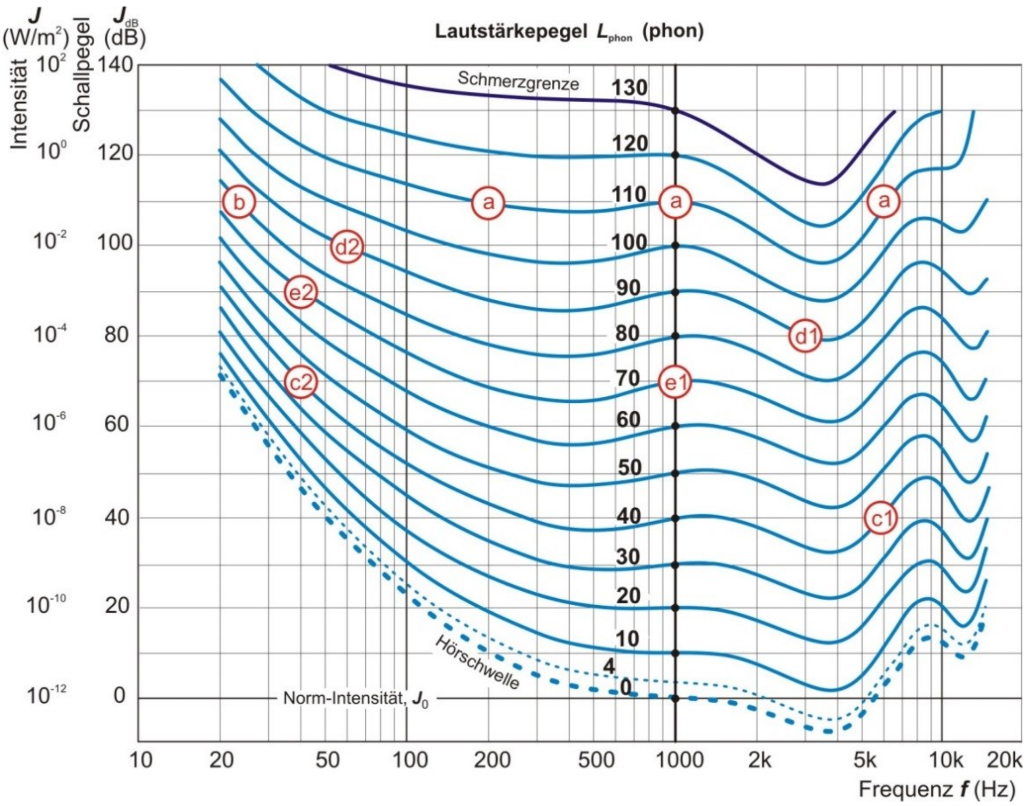
11.54. Die zwei Volumina müssen in der gleichen Einheit angegeben werden. Z. B. wandeln wir nl in mm^3 um: 5 nl = $5 \cdot 10^{-9}$ l = $5 \cdot 10^{-9}$ dm^3 = $5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6$ mm^3 = 0,005 mm^3. Das Volumen und die Zahl (*N*) der Erythrozyten in diesem Volumen sind zueinander direkt proportional. Deshalb gilt vor der Verdünnung: $\frac{N}{5 \cdot 10^6} = \frac{0{,}005}{1}$.
Daraus ergibt sich *N*: $N = 5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}005 =$ 25 000. Ohne Verdünnung hätte man also 25 000 Erythrozyten in der Messkapillare. Damit sich statt dieser Zahl nur 1 Erythrozyt in der Kapillare befindet, muss man eine 25 000-fache Verdünnung verwenden.

11.55. 45 000-fach

11.56. a) Der Schallpegel lässt sich aus der Formel $J_{\mathrm{dB}} = 10 \lg \frac{J}{J_0}$ errechnen, wobei $J_0 = 10^{-12}$ W/m^2 die Norm-Intensität ist. Wenn *J* 100-fach vergrößert wird, ist der neue Schallpegel:
$J'_{\mathrm{dB}} = 10 \lg \frac{100 \cdot J}{J_0} = 10 \cdot \left(\lg 100 + \lg \frac{J}{J_0}\right) = 10 \cdot \lg 100 + 10 \cdot \lg \frac{J}{J_0} = 20 + J_{\mathrm{dB}}.$
Der Schallpegel nimmt also um 20 dB zu.
b) Da bei 1000 Hz der Schallpegel und die Lautstärke zahlenmäßig gleich sind, erhöht sich die Lautstärke auch um 20, nur nicht 20 dB, sondern 20 phon.

11.57. a) –3 dB; b) –3 phon

11.58. Die in der Aufgabe angegebenen Töne werden in der Abbildung mit dem Buchstaben des Aufgabenteiles bezeichnet. Ein ausführlicher Lösungsweg wird nur bei den Fragen a) und c) angegeben.
a) Man betrachtet die waagrechte Linie ausgehend von 110 dB und sucht nach den Schnittpunkten mit der Kurve von 110 phon. Es gibt 3 Schnittpunkte (s. Punkt **a** in der Abbildung), und zwar bei 200 Hz, 1000 Hz und 6 kHz.
b) etwa 25 Hz
c) Man identifiziert Ton 1 (6 kHz und 40 dB) in der Abbildung – Punkt **c1**. Er liegt auf der Kurve von 40 phon. Ton 2 ist gleich laut und muss auch auf dieser Kurve liegen. Man geht auf dieser Kurve nach links bis zu der Frequenz von 40 Hz (Punkt **c2**). Der Schallpegel von Ton 2 beträgt 70 dB.
d) 60 Hz
e) 10^{-3} W/m^2



11.59. Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein. Die Werte in einer Zeile beziehen sich auf denselben Sinuston. Als Hilfe benutzen Sie Abb.1 in dem Kapitel 25. „Audiometrie" des Praktikumbuchs oder die vereinfachte Version der Aufgabe 11.58.

	Frequenz, f	Intensität, J	Schallpegel, J_{dB}	Lautstärke, L_{phon}
a	60 Hz		60 dB	
b	0,2 kHz			60 phon
c			11 B	90 phon
d	6 kHz	10^{-6} mW/cm^2		
e		10^{-4} W/m^2		80 phon
f	100 Hz	1 nW/m^2		

11.60. Welcher Lautheit (L_{sone}) entspricht eine Lautstärke (L_{phon}) von a) 40 phon, b) 50 phon und c) 70 phon?

11.61. Welcher Lautstärke (L_{phon}) entspricht eine Lautheit (L_{sone}) von a) 1 sone, b) 4 sone und c) 16 sone?

11.62. Welcher Ton ist lauter? *Ton 1* oder *Ton 2*? Zur Hilfe benutzen Sie Abb.1 in dem Kapitel 25. „Audiometrie" des Praktikumbuchs oder die vereinfachte Version der Aufgabe 11.58.

a) *Ton 1*: 50 phon — *Ton 2*: 2 sone
b) *Ton 1*: 3 sone — *Ton 2*: 60 phon
c) *Ton 1*: 1000 Hz, 70 dB — *Ton 2*: 65 phon
d) *Ton 1*: 1000 Hz, 60 dB — *Ton 2*: 3 sone
e) *Ton 1*: 1000 Hz, 60 phon — *Ton 2*: 200 Hz, 70 phon
f) *Ton 1*: 500 Hz, 60 phon — *Ton 2*: 20 Hz, 4 sone
g) *Ton 1*: 1000 Hz, 40 dB — *Ton 2*: 20 Hz, 40 dB

Sensor

11.63. Auf das Wievielfache steigt die Empfindungsstärke nach dem Stevens-Gesetz, wenn die Reizstärke von dem 2-fachen auf das 8-fache des Referenzwertes erhöht wird und in dem Exponenten des Stevens-Gesetzes 0,8 steht?

11.64. Auf das Wievielfache steigt die Empfindungsstärke nach dem Stevens-Gesetz, wenn die Reizstärke von dem 3-fachen auf das 6-fache des Referenzwertes erhöht wird und in dem Exponenten des Stevens-Gesetzes 0,4 steht?

11.65. Auf das Wievielfache steigt die Empfindungsstärke nach dem Weber–Fechner-Gesetz, wenn die Reizstärke von dem 2-fachen auf das 8-fache des Referenzwertes erhöht wird?

11.66. Auf das Wievielfache steigt die Empfindungsstärke nach dem Weber–Fechner-Gesetz, wenn die Reizstärke von dem 3-fachen auf das 6-fache des Referenzwertes erhöht wird?

11.59.

	Frequenz, f	Intensität, J	Schallpegel, J_{dB}	Lautstärke, L_{phon}
a	60 Hz	**10^{-6} W/m^2**	60 dB	**40 phon**
b	0,2 kHz	**10^{-6} W/m^2**	**60 dB**	60 phon
c	**30 Hz**	**10^{-1} W/m^2**	11 B	90 phon
d	6 kHz	10^{-6} mW/cm^2	**70 dB**	**70 phon**
e	**1000 Hz**	10^{-4} W/m^2	**80 dB**	80 phon
f	100 Hz	1 nW/m^2	**30 dB**	**10 phon**

11.60. a) Definitionsgemäß entspricht die Lautstärke von 40 phon einer Lautheit von 1 sone.
b) Jede 10 phon große Zunahme in der Lautstärke bedeutet, dass die Lautheit verdoppelt wird. Dementsprechend ist 50 phon = 2 sone.
c) 70 phon = 8 sone

11.61. a) 40 phon; b) 60 phon; c) 80 phon

11.62. a) gleich laut
b) Ton 2
c) Ton 1
d) Ton 1
e) Ton 2
f) gleich laut
g) Ton 1

11.63. In dem ersten Fall ist die Empfindungsstärke:

$$\Psi_1 = \text{konst.} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{0,8} = \text{konst.} \left(\frac{2 \cdot \Phi_0}{\Phi_0}\right)^{0,8} = \text{konst.}\,(2)^{0,8} = \text{konst.} \cdot 1{,}74.$$

In dem zweiten Fall ist sie: $\Psi_2 = \text{konst.} \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right)^{0,8} = \text{konst.} \left(\frac{8 \cdot \Phi_0}{\Phi_0}\right)^{0,8} = \text{konst.}\,(8)^{0,8} = \text{konst.} \cdot 5{,}27.$

Der Quotient der zwei Empfindungsstärken ist: $\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{\text{konst.} \cdot 5{,}27}{\text{konst.} \cdot 1{,}74} = \frac{5{,}27}{1{,}74} = 3{,}03.$

Die Empfindungsstärke steigt also auf das 3,03-fache.

11.64. 1,32

11.65. In dem ersten Fall ist die Empfindungsstärke:

$$\Psi_1 = \text{konst.} \cdot \lg\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \text{konst.} \cdot \lg\frac{2 \cdot \Phi_0}{\Phi_0} = \text{konst.} \cdot \lg 2 = \text{konst.} \cdot 0{,}301.$$

In dem zweiten Fall ist sie: $\Psi_2 = \text{konst.} \cdot \lg\frac{\Phi_2}{\Phi_0} = \text{konst.} \cdot \lg\frac{8 \cdot \Phi_0}{\Phi_0} = \text{konst.} \cdot \lg 8 = \text{konst.} \cdot 0{,}903.$

Der Quotient der zwei Empfindungsstärken ist: $\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{\text{konst.} \cdot 0{,}903}{\text{konst.} \cdot 0{,}301} = \frac{0{,}903}{0{,}301} = 3.$

Die Empfindungsstärke steigt also auf das 3-fache.

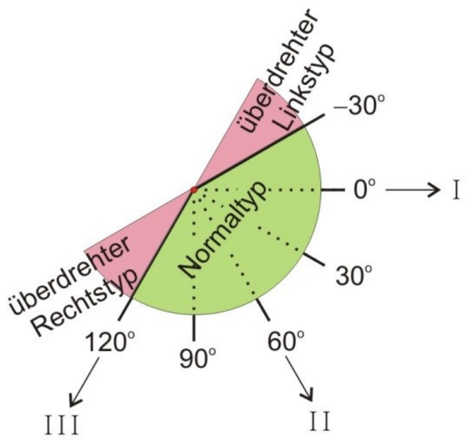
11.66. 1,63

EKG

11.67. Wie viel mm ist der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden R-Zacken auf dem Elektrokardiogramm, wenn die Pulszahl des Patienten 75 1/min beträgt und das Papier des Registriergeräts mit einer Geschwindigkeit von 25 mm/s läuft?

11.68. Wie groß ist die Pulszahl eines Patienten, wenn der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden R-Zacken auf dem Elektrokardiogramm 30 mm beträgt und das Papier des Registriergeräts mit einer Geschwindigkeit von 50 mm/s läuft?

11.69. Bestimmen Sie den anatomischen Lagetyp oder Positionstyp (Richtung der elektrische Herzachse) des Patienten (Normaltyp, überdrehter Linkstyp oder überdrehter Rechtstyp) nach den Definitionen der folgenden Abbildung, wenn nach Einthoven gemessen $R_{\mathrm{I}} = 0{,}9$ mV und $R_{\mathrm{II}} = 1{,}5$ mV sind.

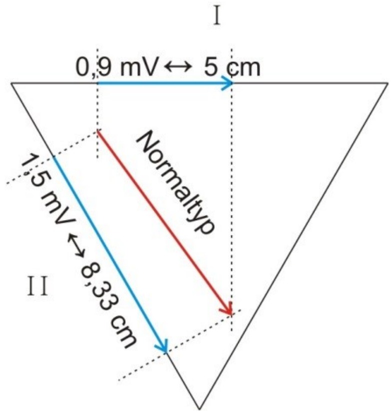


11.70. Bestimmen Sie den anatomischen Lagetyp (Richtung der elektrische Herzachse) des Patienten (Normaltyp, überdrehter Linkstyp oder überdrehter Rechtstyp), wenn nach Einthoven gemessen $R_{\mathrm{I}} = 1{,}8$ mV und $R_{\mathrm{II}} = -0{,}2$ mV sind.

11.67. Der Zeitabstand zwischen zwei R-Zacken (d. h. die Periodendauer) ist: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{75}$ = 0,0133 min = 0,8 s. Während dieser Zeitspanne läuft das Papier $s = v \cdot t = 25 \cdot 0{,}8 =$ 20 mm weiter.

11.68. 100 1/min

11.69. Die elektrische Herzachse kann in dem sog. Einthoven-Dreieck konstruiert werden. Man trägt einen Vektor (in der Abbildung mit Blau dargestellt) mit einer willkürlichen Länge (z. B. 5 cm) auf die Seite I des Dreiecks auf. (Die Position des Vektors auf der Seite des Dreiecks ist egal.) Falls R_{I} positiv ist, zeigt der Vektor von links nach rechts, sonst umgekehrt. Dann trägt man einen Vektor mit einer Länge von *x* auf die Seite II so ein, dass die Längen der zwei Vektoren dem Verhältnis der zwei R-Amplituden entsprechen: $\frac{x}{5\,\mathrm{cm}} = \frac{1{,}5\,\mathrm{mV}}{0{,}9\,\mathrm{mV}}$. Aus diesem Dreisatz kann *x* bestimmt werden: $x = 5\,\mathrm{cm} \cdot \frac{1{,}5\,\mathrm{mV}}{0{,}9\,\mathrm{mV}}$ = 8,33 cm.
Die Länge des Vektors II ist also 8,33 cm und er zeigt nach rechts, wenn die Spannung positiv ist bzw. nach links, wenn die Spannung negativ ist. Danach konstruiert man je eine Normale auf die Anfangs- und Endpunkte der Vektoren. Die Schnittpunkte geben die elektrische Herzachse an (in der Abbildung mit Rot dargestellt). In diesem Fall liegt die Achse offensichtlich in dem Normalbereich.
Mit ein wenig Übung kann man den Lagetyp in einfachen Fällen ohne ausführliche Konstruktion schätzen. Wenn z. B. die beiden Spannungswerte R_{I} und R_{II} positiv sind und R_{II} wesentlich größer ist als R_{I}, wie in dieser Aufgabe, muss der Summenvektor etwa in Richtung II zeigen. Dies entspricht einem Normaltyp.



11.70. überdrehter Linkstyp

Konstanten und Daten

Konstanten

Universelle Gaskonstante	R = 8,31 J/(mol·K)
Avogadro-Konstante	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ /mol
Boltzmann-Konstante	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Faraday-Konstante	F = 96500 C/(mol·Wertigkeit)
Planck-Konstante (Plancksches Wirkungsquantum)	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s
Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s
Elementarladung	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
Ruhemasse des Protons	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
Ruhemasse des Neutrons	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ J/(m^2·K^4·s)
Beschleunigung des freien Falles (Normwert)	g = 9,81 m/s^2
Reynolds-Zahl (für Röhren mit einer glatten Wand)	Re = 1160
Röntgenröhrenkonstante	$c_{Rtg} = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ 1/V
Lande-Faktor des Protons	g_P = 5,59
Kernmagneton	$\mu_N = 5{,}05 \cdot 10^{-27}$ J/T
Grundzahl des natürlichen Logarithmus	e = 2,718...

Das Periodensystem der Elemente

	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII	VIII	VIII	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	0
1	1 **H** 1,008																	2 **He** 4,003
2	3 **Li** 6,939	4 **Be** 9,012											5 **B** 10,811	6 **C** 12,011	7 **N** 14,007	8 **O** 15,999	9 **F** 18,998	10 **Ne** 20,183
3	11 **Na** 22,990	12 **Mg** 24,312											13 **Al** 26,982	14 **Si** 28,086	15 **P** 30,974	16 **S** 32,064	17 **Cl** 35,453	18 **Ar** 39,948
4	19 **K** 39,102	20 **Ca** 40,08	21 **Sc** 44,956	22 **Ti** 47,88	23 **V** 50,942	24 **Cr** 51,996	25 **Mn** 54,938	26 **Fe** 55,847	27 **Co** 58,933	28 **Ni** 58,69	29 **Cu** 63,54	30 **Zn** 65,37	31 **Ga** 69,72	32 **Ge** 72,59	33 **As** 74,922	34 **Se** 78,96	35 **Br** 79,909	36 **Kr** 83,80
5	37 **Rb** 85,47	38 **Sr** 87,62	39 **Y** 88,905	40 **Zr** 91,22	41 **Nb** 92,906	42 **Mo** 95,94	43 **Tc** (99)	44 **Ru** 101,07	45 **Rh** 102,91	46 **Pd** 106,42	47 **Ag** 107,87	48 **Cd** 112,40	49 **In** 114,82	50 **Sn** 118,69	51 **Sb** 121,75	52 **Te** 127,60	53 **I** 126,90	54 **Xe** 131,30
6	55 **Cs** 132,91	56 **Ba** 137,34		72 **Hf** 178,49	73 **Ta** 180,95	74 **W** 183,85	75 **Re** 186,2	76 **Os** 190,2	77 **Ir** 192,2	78 **Pt** 195,09	79 **Au** 196,97	80 **Hg** 200,59	81 **Tl** 204,38	82 **Pb** 209,17	83 **Bi** 208,98	84 **Po** (210)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)																

„6“	57 **La** 138,91	58 **Ce** 140,12	59 **Pr** 140,91	60 **Nd** 144,24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150,36	63 **Eu** 151,96	64 **Gd** 157,25	65 **Tb** 158,92	66 **Dy** 162,50	67 **Ho** 164,93	68 **Er** 167,26	69 **Tm** 168,93	70 **Yb** 173,04	71 **Lu** 174,97
„7“	89 **Ac** (227)	90 **Th** 232,04	91 **Pa** (231)	92 **U** 238,03	93 **Np** (237)	94 **Pu** (242)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (249)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (254)	100 **Fm** (253)	101 **Md** (256)	102 **No** (253)	103 **Lr** (257)

Dichte

Elemente	ρ (g/cm^3)	zusammengesetzte Stoffe	ρ (g/cm^3)
Aluminium (Al):	2,7	Zirkon (ZrO_2)	6,0
Kupfer (Cu)	8,96	Amalgam (im Durchschnitt)	12
Zinn (Sn)	5,75	Quarz (SiO_2)	2,65
Eisen (Fe)	7,9	PMMA (Polymethylmethacrylate)	1,2
Silber(Ag)	10,5	Luft (0°C, 100 kPa)	0,00129
Quecksilber (Hg)	13,6	Wasser (bei 4°C)	1,000
Gold (Au)	19,3	Eis (bei 0°C)	0,92
Blei (Pb):	11,3	Ethanol	0,8
Kohlenstoff (C, Graphit)	2,23	Körpergewebe (im Durchschnitt)	1,04
Kohlenstoff (C, Diamant)	3,51	Muskel (im Durchschnitt)	1,06
Kohlenstoff (C^{60}, Fullerene)	1,65	Blut (im Durchschnitt)	1,05
Titan (Ti)	4,51	Knochen (im Durchschnitt)	1,7
		Fettgewebe (im Durchschnitt)	0,92-0,94

Oberflächenspannung

Stoff	σ (mJ/m^2)
Wasser	73
Quecksilber (Hg)	486
Ethylalkohol	22

Spezifische Wärmekapazität

Stoff	c (kJ/(kg·K))
Wolfram (W)	0,132
Wasser	4,18
Eis	2,094
Ethanol	2,4
Muskel	3,76
Blut	3,9
Kompakter Knochen	1,3-1,7
Fettgewebe	3
Körpergewebe (im Durchschnitt)	3,5

Spezifische Phasenumwandlungswärme

Stoff	q (kJ/kg)
Eis (Schmelzwärme)	334,4
Wasser (Verdampfungswärme bei 100°C und 101 kPa)	2257
Wasser (Verdampfungswärme bei 30°C und 101 kPa)	2400

Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

Stoff	α (10^{-6} 1/K)
Aluminium	24
Stahl	12
Amalgam	25
Eis	51
Teflon	200

Absolute Brechzahl

Stoff	n (bei 589 nm und 20°C)
Luft	1
Wasser	1,333
Zedernöl	1,505
Diamant	2,417
Glas	1,5
Flintglas	1,6

Schallgeschwindigkeit

Stoff	c (m/s)
Luft	330
Helium	970
Wasser	1500

Viskosität

Stoff	η (mPa·s)
Wasser (bei 20°C)	1
Wasser (bei 25°C)	0,85
Blut (bei 37°C in der Aorta)	4,5

Charakteristische Daten einiger wichtiger Radionuklide

Chemisches Element und seine Ordnungszahl		**Symbol des Isotops**	**Physikalische Halbwertszeit**	**Zerfallstyp**	**Maximale Teilchenenergie** (MeV)	**γ - Energie** (MeV)	***K_γ* Dosis-konstante** $\left(\frac{\mu Gy_{Luft}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right)$
Wasserstoff	1	^{3}H	12,33 Jahre	β^-	0,0186	–	
Kohlenstoff	6	^{11}C ^{14}C	20,4 Minuten 5760 Jahre	β^+ β^-	0,96 0,155	–	
Stickstoff	7	^{13}N	10 Minuten	β^+	1,19	–	
Sauerstoff	8	^{15}O	2 Minuten	β^+	1,73	–	
Fluor	9	^{18}F	109,8 Minuten	β^+	0,633	–	
Natrium	11	^{24}Na	15,02 Stunden	β^-, γ	1,392	2,754 1,369	444
Phosphor	15	^{32}P	14,28 Tage	β^-	1,710	–	
Schwefel	16	^{35}S	87,2 Tage	β^-	0,167	–	
Kalium	19	^{40}K ^{42}K	$1{,}28 \cdot 10^9$ Jahre 12,36 Stunden	β^-, K (10%) β^-, γ	1,31 3,52 (75%) 1,99 (25%)	1,46 nach K 1,525	
Calcium	20	^{45}Ca	163 Tage	β^-	0,257	–	
Chrom	24	^{51}Cr	27,7 Tage	K, e^-, γ	0,315 (e^-)	0,320	
Eisen	26	^{52}Fe ^{59}Fe	8,2 Stunden 44,6 Tage	β^+, γ β^-, γ	0,8 1,566	0,5 1,30 1,10	 160
Kobalt	27	^{60}Co	5,272 Jahre	β^-, γ	0,318	1,33 1,17	305
Kupfer	29	^{64}Cu	12,74 Stunden	β^- (39%) β^+ (19%) K (42%) γ (1%)	0,575 0,656	 1,34	
Krypton	36	^{85}Kr	10,73 Jahre	β^-, γ	0,687	0,514	
Rubidium	37	^{81}Rb ^{86}Rb	4,7 Stunden 18,65 Tage	β^+, γ β^-, γ	0,99 1,78	1,93 0,95 1,078	
Strontium	38	^{90}Sr	29 Jahre	β^-	0,546	–	
Yttrium	39	^{90}Y	64 Stunden	β^-, γ(0,4%)	2,29	1,761	
Technetium	43	$^{99}Tc^m$	6,02 Stunden	γ	–	0,140	
Indium	49	$^{113}In^m$	1,658 Stunden	γ	–	0,391	
Jod	53	^{123}I ^{125}I ^{131}I	13,3 Stunden 59,7 Tage 8,04 Tage	K, γ K, γ β^-, γ	– – 0,606 0,25 0,81	0,16 0,0355 0,364 0,080 0,723	 54
Xenon	54	^{133}Xe	5,29 Tage	β^-, γ	0,346	0,081	
Cäsium	55	^{137}Cs	30,1 Jahre	β^-, γ	0,512 (92,6%) 1,173 (7,4%)	0,661	80
Gold	79	^{198}Au	2,695 Tage	β^-, γ	0,961	0,411	
Quecksilber	80	^{203}Hg	46,6 Tage	β^-, γ	0,212	0,279	
Radon	86	^{222}Rn	3,824 Tage	α	5,489	–	
Radium	88	^{226}Ra	1600 Jahre	α, γ(6%)	4,784 4,598	0,186 0,260 0,609	
Uran	92	^{238}U	$4{,}47 \cdot 10^9$ Jahre	α, γ	4,2	0,048	