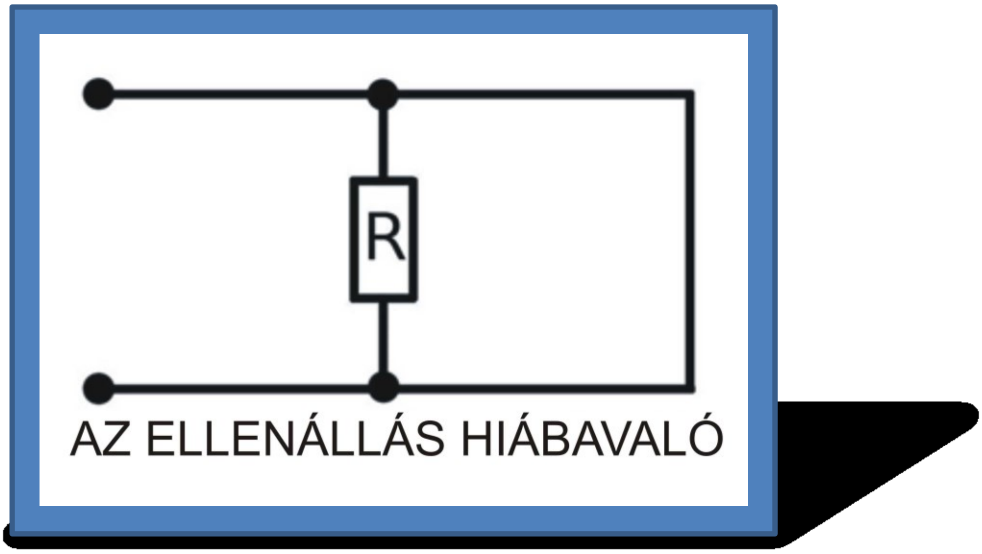
Fizikai alapismeretek

Vizsgareleváns kiegészítő anyag
az „orvosi biofizika“ és „biofizika“ kurzusokhoz

Összeállította: Dr. Tölgyesi Ferenc, egyetemi docens



Semmelweis Egyetem
Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet
2016

Előszó

Az „Orvosi biofizika”, ill. „Biofizika” tárgyak a középiskolai fizika tananyagra épülnek. Bizonytalan vagy hiányzó alapokra nem lehet, nem szabad építeni. Ennek a jegyzetnek az a célja, hogy röviden és nagyon célratörően összefoglalja azokat az ismereteket, amelyek az említett tárgyakhoz nélkülözhetetlenek. (Ezek az alapismeretek azonban jól jönnek majd a kémia, biokémia, élettan, stb. tárgyakhoz is.)

A jegyzet anyaga hozzátartozik az említett tárgyak vizsgaanyagához.

A jegyzet csak a mechanikát, a hő- és elektromosságtant tartalmazza, mivel a többi fizikai diszciplina (pl. az optika) szükséges alapismeretei az említett egyetemi kurzusok anyagában megtalálhatók. Az egyes fejezetekben a fogalmak és törvények lexikonszerűen, kövérrel szedett és így gyorsan megtalálható címszavakban vannak felsorolva, csak nem betűrendben, hanem egyfajta logikus felépítésben. A fejezetek elején egy rövid bevezetés a téma gyakorlati/orvosi jelentőségére kíván röviden rámutatni, a fejezetek végén lévő feladatok pedig a jobb megértést, az ismeretek alkalmazását szeretnék segíteni. Néhány feladathoz részletes megoldást mellékelünk — ezt a  szimbólum jelöli —, de a többi feladat végeredményét is megadjuk.

Köszönetet mondok volt diákomnak, Karim Kouznak, a jegyzet összeállításában való közreműködéséért.

Budapest, 2016. 08. 12. Tölgyesi Ferenc

Tartalomjegyzék

1. Néhány matematikai segédeszköz

A matematika nélkülözhetetlen a fizikában (és a kémiában, a biológiában és minden más tudományban is). Itt csak a biofizika kurzusokban leggyakrabban előforduló, alapvető matematikai ismereteket foglaljuk össze röviden.
Mivel ebben a fejezetben a matematikára koncentrálunk, a példákban előforduló fizikai fogalmak magyarázatával nem foglalkozunk, arra a későbbi, megfelelő fejezetekben kerül sor.

Tíz hatványai: 10-es alapú hatvány egy tetszőleges, de egész számú n kitevővel (hatványkitevő), azaz 10^n.
Néhány példa:

- $n = 0$: $10^0 = 1$
- n pozitív: $10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$ $10^4 = 10000$ $10^5 = 100000$, ...
- n negatív: $10^{-1} = 0{,}1$ $10^{-2} = 0{,}01$ $10^{-3} = 0{,}001$ $10^{-4} = 0{,}0001$ $10^{-5} = 0{,}00001$, ...

A hatványozás azonosságai (a 10-es alapú hatvány példáján):

- $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$ pl.: $10^8 \cdot 10^{-2} = 10^6$
- $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ pl.: $\dfrac{10^5}{10^{-5}} = 10^{5-(-5)} = 10^{10}$
- $\left(10^n\right)^m = 10^{n \cdot m}$ pl.: $\left(10^3\right)^3 = 10^9$

A számok normálalakja: A normálalak egy szorzat, amelynek első tényezője, az ún. mantissza (m) 1-nél nem kisebb, 10-nél kisebb szám ($1 \le m < 10$), második tényezője pedig 10-nek egész kitevős (n) hatványa:

$$m \cdot 10^n.$$

Például a 325 000 számot normálalakban mint $3{,}25 \cdot 10^5$ írjuk. További példák:

- $5\,300\,000 = 5{,}3 \cdot 10^6$
- $105\,000\,000 = 1{,}05 \cdot 10^8$
- $0{,}000\,000\,5 = 5 \cdot 10^{-7}$
- $0{,}000\,000\,006\,6 = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$

Ha a szám nagyobb, mint 1, akkor a normálalakban a kitevő pozitív, ha a szám kisebb, mint 1, akkor a kitevő negatív. A normálalak segítségével a nagyon nagy és a nagyon kicsi számok is tömören leírhatóak, ez sokszor hasznos, például:

- a fénysebesség vákumban: kb. 300 000 000 m/s = $3 \cdot 10^8$ m/s
- az elemi töltés: 0,000 000 000 000 000 000 16 C = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (Coulomb)
- a vörösvértestek száma egy liter vérben: kb. 5 000 000 000 000 = $5 \cdot 10^{12}$
- a sejtmembrán vastagsága: kb. 0,000 000 01 m = $1 \cdot 10^{-8}$ m

Kerekítés: A zsebszámológéppel elvégzett számolások eredménye gyakran fölöslegesen sok számjegyből áll. Például a mért testtömegből (m = 72,5 kg) és testtérfogatból (V = 69,5 Liter = 0,0695 m^3) ki akarjuk számolni a vizsgált személy átlagos testsűrűségét. A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, a 72,5-t elosztjuk tehát 0,0695-tel. A megjelenő eredmény: 1043,165468 (kg/m^3-ban). Ez a hat tizedesjegynyi pontosság azonban az orvos számára teljesen felesleges, sőt félrevezető, ha a tömeg és a térfogat mérési pontosságát tekintjük. Az eredményeket tehát kerekíteni kell – na de hogyan?
A biofizika kurzus során kerekítsünk mindig **három értékes jegyre!** Balról indulva az első nem nulla számjegy az első értékes jegy. Innen számolva a harmadik számjegyet kerekítjük attól függően, hogy mi a következő, tehát negyedik számjegy. Ha az 0 és 4 között van, akkor lefele kell kerekíteni, ha 5 és 9 között, akor felfelé. E szerint a szabály szerint a fenti példában a sűrűség értéke 1043,165468 kg/m^3 ≈ 1040 kg/m^3. További példák:

- 128 845 = 129 000
- 25,910 78 = 25,9
- 1,929 856 = 1,93
- 0,002 385 555 = 0,002 39
- 0,010 998 589 = 0,011

(Nem fogjuk hibának venni, ha a ≈ jel helyett — ahogy fent is látható — egyenlőségjelet ír valaki a feladat végeredményének megadásánál.)

Tízes alapú logaritmus: A logaritmus a hatványozás inverz (fordított) művelete, a tízes alapú logaritmus a tízes alapú hatványozásé, jelölése: „lg”. Amikor egy szám (*a*) tízes alapú logaritmusát vesszük, akkor azt a számot (lg *a* = *x*) keressük, melyre a 10-et emelve eredményül az *a* számot kapjuk, tehát:

$$\lg a = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = a\,.$$

Például:

$$\lg 1000 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10^3 = 1000$$

$$\lg 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10^0 = 1$$

$$\lg 0{,}01 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-2} = 0{,}01$$

Úgy is lehet fogalmazni, hogy az *a* szám logaritmusának meghatározása az $a = 10^x$ egyenlet *x*-re történő megoldását jelenti.
Az, hogy a hatványozás és a logaritmus inverz műveletek, még inkább látszik, ha a fönti azonosságokat a következőképpen írjuk fel:

$$10^{\lg a} = a \quad \text{vagy} \quad \lg\left(10^x\right) = x\,.$$

(Tehát, ha egy adott számot logaritmálunk, aztán pedig a 10-et az eredménnyel hatványozzuk, vagy fordítva, akkor ugyanahhoz a számhoz jutunk, a két művelet egymást mintegy kioltja.)

Természetes logaritmus: analóg a tízes alapú logaritmussal, csak az alapszám az *e* (az Euler-féle szám, *e* = 2,71828...) és a jelölése „ln” (logaritmus naturalis). „ln *a*” az a szám, amellyel ha az *e*-t hatványozzuk, akkor *a*-t kapunk:

$$\ln a = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = a\,.$$

A természetes logaritmusra is vonatkozik:

$$e^{\ln a} = a \quad \text{vagy} \quad \ln\left(e^x\right) = x\,.$$

A logaritmus azonosságai (a tízes alapú logaritmus példáján):

- $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ pl.: $\lg 25 + \lg 4 = \lg(25 \cdot 4) = \lg 100 = 2$
- $\lg\left(\dfrac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ pl.: $\lg 20 - \lg 200 = \lg\left(\dfrac{20}{200}\right) = \lg 0{,}1 = -1$
- $\lg\left(a^n\right) = n \cdot \lg a$ pl.: $2 \cdot \lg 5 + 2 \cdot \lg 2 = \lg\left(5^2\right) + \lg\left(2^2\right) = \lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$

Egyenletek: A fizikai törvény különböző mennyiségek közötti összefüggést ad meg, amelyet a gyakorlatban kihasználhatunk arra, hogy egy ismeretlen mennyiséget meghatározzunk, ha a többi mennyiséget ismerjük. A fizikai törvényt mint egy matematikai egyenletet kezeljük, amelyből az ismeretlen mennyiség (általános jelölése *x*) meghatározható. A biofizika kurzus során különböző típusú egyenletekkel találkozhatunk, leggyakrabban lineáris, másodfokú, trigonometrikus és exponenciális egyenletekkel.

Lineáris egyenlet egy ismeretlennel: Az egyenlet az *x*-et tartalmazza kizárólag az első hatványon. Például:

$$4x + 5 = 33\,.$$

Az egyenletet a következő módon oldjuk meg *x*-re: Először mindkét oldalból kivonunk 5-öt:

$$4x = 28\,,$$

majd elosztjuk mindkét oldalt 4-gyel:

$$x = \frac{28}{4} = 7\,.$$

Egy fizikai példa: Egy 2015-ös gyorsulási versenyen az egyik sportautó nyugalomból indulva egyenletesen gyorsulva s = 201 m utat tett meg t = 6,51 s időtartam alatt. Mekkora az autó gyorsulása? Az egyenletesen gyorsuló mozgásra vonatkozó út–idő törvény szerint:

$$s = \frac{1}{2}at^2,$$

ahol a gyorulást a jelöli, ez az ismeretlen. Az egyenlet a-ra történő megoldásához először felszorozzuk mindkét oldalt 2-vel és elosztjuk t^2-tel:

$$2s = at^2$$

$$\frac{2s}{t^2} = a\,.$$

Az értékek behelyettesítésével és az eredmény három értékes jegyre történő kerekítésével: $402/6{,}51^2 = 8{,}28$ m/s^2. (Számolásokban a mértékegységet elegendő a végén kiírni.)

Másodfokú egyenlet egy ismeretlennel: Az egyenletben az x a második hatványon van. Például:

$$5x^2 - 26x = 24\,.$$

A másodfokú egyenlet általános formája a, b és c paraméterekkel:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0\,.$$

A másodfokú egyenletekre érvényes megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

amelyből a két matematikailag lehetséges megoldás x_1 és x_2 (összefoglaló jelöléssel $x_{1,2}$) kiszámolható. A példaként hozott másodfokú egyenlet megoldásában azt először az általános formába hozzuk:

$$5x^2 - 26x - 24 = 0\,.$$

A paraméterek így azonosíthatók: a = 5, b = –26 és c = –24. Ezeket az értékeket behelyettesítjük a megoldóképletbe:

$$x_{1,2} = \frac{+26 \pm \sqrt{676 + 480}}{10} = \frac{26 \pm 34}{10}\,.$$

A két megoldás tehát:

$$x_1 = \frac{26+34}{10} = 6$$

$$x_2 = \frac{26-34}{10} = -1{,}2\,.$$

Egy fizikai példa: Az említett gyorsulási versenyen egy másik autó nyugalomból indulva a = 6 m/s^2 gyorsulással mozgott. Mennyi időre volt szüksége az s = 201 m út megtételéhez? Most a t az ismeretlen az említett törvényben:

$$s = \frac{1}{2}at^2\,.$$

Az általános megoldóképlettel dolgozva:

$$201 = \frac{1}{2}6t^2$$

$$3t^2 + 0t - 201 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 2412}}{6} = \frac{\pm 49{,}11}{6} = \pm 8{,}19\,\text{s}\,.$$

A két matematikailag lehetséges megoldás közül a +8,19 s értelmes, míg a –8,19 s fizikailag az adott szituációban értelmetlen. Meg kell azonban jegyezni, hogy az ilyen hiányos másodfokú egyenleteknél (a példánkban a b együttható nulla) eltekinthetünk az általános megoldóképlet használatától, rövidebben is célhoz érhetünk:

$$t = \pm\sqrt{\frac{2s}{a}} = \pm\sqrt{\frac{402}{6}} = \pm 8{,}19\,\text{s}\,.$$

Egyenletrendszer két ismeretlennel: két egyenlet két (x és y) ismeretlennel. Például:

$$3x + 2y = 14$$
$$x + 4y = 8$$

Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, majd beillesztjük a kapott kifejezést a másik egyenletbe. Így egyetlen egyenletet kapunk egyetlen ismeretlennel. Példánkban a második egyenletből fejezzük ki x-et, amit aztán belyettesítünk az első egyenletbe:

$$x = 8 - 4y$$
$$3(8 - 4y) + 2y = 14$$
$$24 - 12y + 2y = 14$$
$$-10y = -10$$
$$y = 1.$$

y értékét ismerve adódik x is:

$$x = 8 - 4y = 8 - 4 = 4.$$

Egy fizikai példa: Egy f = 30 cm fókusztávolságú lencse segítségével úgy akarunk leképezni egy tárgyat, hogy a tárgy éles valódi képe a tárgytól éppen 125 cm távolságban lévő falon jelenjen meg. Hova tegyük a lencsét? A probléma megoldásában a leképezési törvényt használhatjuk ki:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k},$$

ahol t a tárgytávolságot, k a képtávolságot jelöli. Mindkettő ismeretlen. Meghatározásukhoz két egyenletre van szükségünk. Az egyik a leképezési törvény. A másik egyenletet az az információ adja, hogy a tárgytávolság és a képtávolság együttesen 125 cm (ehhez persze tudnunk kell, hogy a tárgy és valódi képe mindig a lencse ellentétes oldalain vannak):

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$
$$t + k = 125$$

Például a második egyenletből kifejezhetjük k-t és behelyettesíthetjük az első egyenletbe:

$$k = 125 - t$$
$$\frac{1}{30} = \frac{1}{t} + \frac{1}{125 - t}$$

Az egyenlet átrendezésével másodfokú egyenlethez jutunk:

$$t(125 - t) = 30(125 - t) + 30t$$
$$125t - t^2 = 3750 - 30t + 30t$$
$$0 = t^2 - 125t + 3750$$

Ez egy teljes másodfokú egyenlet. A megoldóképlet szerint:

$$t_{1,2} = \frac{+125 \pm \sqrt{15625 - 15000}}{2} = \frac{125 \pm 25}{2}.$$

A két megoldás tehát:

$$t_1 = \frac{125 + 25}{2} = 75\,\text{cm},$$
$$t_2 = \frac{125 - 25}{2} = 50\,\text{cm}.$$

Mindkét t megoldást visszahelyettesítjük k kifejezésébe:

$$k_1 = 125 - t_1 = 125 - 75 = 50\,\text{cm}$$
$$k_2 = 125 - t_2 = 125 - 50 = 75\,\text{cm}$$

Mindkét megoldás lehetséges fizikailag. (Ha kikötöttük volna még azt is, hogy a kép nagyított legyen, akkor ennek már csak a t_2 = 50 cm és k_2 = 75 cm megoldáspár felelne meg.)

Trigonometrikus egyenlet: Az x ismeretlen egy szögfüggvény argumentumában van. Például:

$$\sin x = 0{,}5.$$

A megoldást egyszerűen megkapjuk a szinuszfüggvény inverz függvényével. Ezt a függvényt sok zsebszámológép „$\sin^{-1}$”-el jelöli (szerencsétlen módon, mert egyébként a –1 hatványkitevő a reciprokértéket és nem az inverz függvényt jelenti). A függvény általában az „INV + SIN” vagy „2ndF + SIN” billentyű-kombinációkkal érhető el. Az eredmény:

$$x = \sin^{-1} 0{,}5 = 30°\,,$$

feltéve, hogy a zsebszámológép előzetesen fok mértékegységre lett beállítva (D vagy DEG szimbólum a kijelzőn). Ha a számológép radián egységre van állítva (R vagy RAD szimbólum a kijelzőn), akkor a következő eredmény fog megjelenni:

$$x = \sin^{-1} 0{,}5 = 0{,}524.$$

Ez az érték radián egységben értendő (csak a rad jelölést sokszor nem írjuk ki) és természetesen 30° = 0,524 rad. (A fok és radián egységeket lásd a későbbi „Szögmértékek” címszónál!)

Egy fizikai példa: Harmonikus rezgésnél a test nyugalmi helyzettől való kitérését (y) szinuszfüggvény írja le:

$$y = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t),$$

ahol A az amplitúdót (a maximális kitérést) és f a frekvenciát (a rezgések időegység alatti számát) jelenti. Vegyük példaként a párizsi Pantheonban lévő Foucault-ingát. A 67 m hosszú inga amplitúdója kb. 3 m és a frekvenciája 0,061 Hz (Hz, azaz hertz, a frekvencia SI-egysége, egyenértékű az 1/s-mal). Kiindulópontnak vegyük azt az időpillanatot, amikor az inga átlendül a nyugalmi helyzetén. Kérdésünk az, hogy mennyi idő múlva éri el az inga a tőle 2 m-re az útjába helyezett kuglibábút? Tehát a képletben a t az ismeretlen, így trigonometrikus egyenlettel van dolgunk. Az egyenlet átrendezése és a $\sin^{-1}$ függvény megadja a megoldást:

$$\frac{y}{A} = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) = 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$t = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right)}{2\pi \cdot f} = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}061} = \frac{0{,}7297}{0{,}3831} = 1{,}9\text{ s.}$$

(Ebben a számolásban feltétlenül a radián egységet kell használni a számolásban, mert a frekvencia mértékegysége 1/s és nem °/s.)

Exponenciális egyenlet: Az x ismeretlen a kitevőben van. Például:

$$2^x = 5\,.$$

A megoldás logaritmálással történik. Tehát mind két oldalnak vesszük a tízes alapú logaritmusát, majd némi átrendezést hajtunk végre:

$$\lg(2^x) = \lg 5$$

$$x \cdot \lg 2 = \lg 5$$

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{0{,}699}{0{,}301} = 2{,}32.$$

Természetesen ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a természetes alapú logaritmust használjuk:

$$\ln(2^x) = \ln 5$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln 5$$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = \frac{1{,}609}{0{,}6931} = 2{,}32.$$

Egy fizikai példa: A radioaktív atommagok spontán bomlása miatt egy radioaktív preparátum aktivitása (A) exponenciális függvény szerint csökken. A bomlási törvény:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,,$$

ahol A_0 a radioaktív preparátum aktivitása a $t = 0$ időpillanatban, A a preparátum aktivitása t idővel később, λ pedig a radioaktív anyagra jellemző bomlási állandó. Egy orvosi vizsgálatban A_0 = 200 000 Bq (Bq, azaz

Becquerel, az aktivitás SI-egysége) aktivitású radioaktív izotópot adnak be a páciensnek. Mennyi idő múlva fog ez az aktivitás a fizikai bomlás miatt A = 25 000 Bq-re csökkenni? A bomlási állandó 0,005 1/perc.
A bomlási törvényből átrendezéssel és logaritmálással tudjuk kifejezni az időt:

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right)$$

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t$$

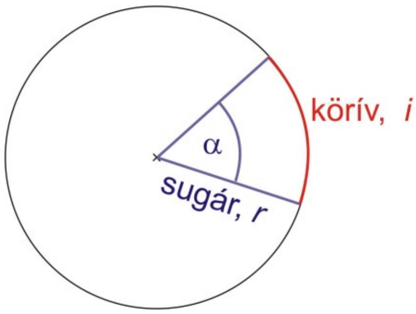
$$\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{-\lambda} = t$$

A behelyettesítés után percben kapjuk meg a kérdéses időt, mert a bomlási állandó mértékegysége 1/perc volt:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25000}{200000}\right)}{-0{,}005} = \frac{\ln 0{,}125}{-0{,}005} = \frac{-2{,}079}{-0{,}005} = 416\,\text{perc} = 6\,\text{óra és } 56\,\text{perc}.$$

Néhány mértani alakzat:

- *Kör* (r sugárral): Kerület: $K = 2 \cdot r \cdot \pi$ Terület: $T = r^2 \cdot \pi$
- *Gömb* (r sugárral): Felszín: $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ Térfogat: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$



Szögmértékek: Egy szög nagysága megadható fok egységben (°) vagy radián egységben (rad). Az első esetén a jól ismert megállapodást használjuk, nevezetesen hogy a teljesszöget (egy teljes kört) 360°-ra osztjuk be. A kisebb szögek megadásához használjuk még a szögpercet (jele:′) — 1° = 60′, illetve a szögmásodpercet (jele:′′) — 1′ = 60′′.
Egy szöget radiánban is meg lehet adni. A radián definíciója:

$$\alpha = \frac{i}{r},$$

ahol i az α szöghöz tartozó körív hosza és r a körív sugara. Ezt ívmértéknek is nevezzük.
A teljesszög köríve megegyezik a kör kerületével, tehát $i = 2r\pi$, ami azt jelenti, hogy 360° éppen 2π radiánnak felel meg:

$$360° = 2\pi\ \text{rad} = 6{,}28\,\text{rad}.$$

Ebből következik, hogy

$$1° = \frac{2\pi}{360} = 0{,}01745$$

(a „rad” jelet sokszor nem írjuk ki), illetve

$$1\,\text{rad} = \frac{360}{2\pi} = 57{,}3°$$

Feladatok:

1. Mennyi 10^{-3}?

2. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét zsebszámológép nélkül: $\frac{\left(10^3\right)^2 \cdot 10^4}{10^{-2}} \cdot 10^{-10}$!

3. Írja fel a következő számot normálalakban: 390 000 000!

4. Kerekítse a következő számot három értékes jegyre: 0,004 099 099!

5. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét zsebszámológép nélkül: $2 \cdot \lg 5 + 2 \cdot \lg 20$!

6. Oldja meg a következő egyenletrendszert: $\begin{matrix} x \cdot y = 3 \cdot y \\ x + y = 3 \end{matrix}$!

7. Oldja meg a következő egyenletet: $\sin x = 0{,}72 \cdot \sin 30°$!

8. Oldja meg a következő egyenletet: $10000 = 2 \cdot e^{0{,}51 \cdot x}$!

9. Mekkora a sugara annak a gömbnek, amelynek térfogata 1 m^3?

10. Egy szög 80°-os. Váltsa át radián egységbe!

Megoldások:

1. 0,001

2. 100

3. $3{,}9 \cdot 10^8$

4. 0,0041

5. 4

6. $x = 3$, $y = 0$

7. 21,1º

8. 16,7

9. 62 cm

10. 1,4

2. Fizikai mennyiségek és mértékegységeik

A fizika — mint minden természettudomány — megfigyelésekre épül. A megfigyelések eredménye kvantitatív (mennyiségi) kell, hogy legyen, mert (1) csak így lehet igazán ellenőrizni őket, (2) így szolgálhatnak legjobban tudományos modellek, elméletek alapjául, végül (3) így lehet hatékonyan alkalmazni őket a gyakorlati életben, pl. egy híd tervezésekor, vagy egy rákbeteg sugárterápiás kezelésének megtervezésekor. A fizika tehát kvantitatív megfigyeléseken, azaz méréseken alapszik, és jól definiált fizikai mennyiségekkel dolgozik. A fizika megértésének és korrekt orvosi alkalmazásának alapfeltétele a fizikai mennyiségek és mértékegységeik pontos tudása.

Fizikai mennyiség: A fizikai mennyiség definíciója egy mérési utasítás, azaz egy leírás arról, hogyan kell a mennyiséget megmérni. (Ezt sokszor képlet formájába önthetjük.) A mennyiséget a tömör fogalmazás érdekében legtöbbször egy betűvel jelöljük. A fizikai mennyiség (ill. értéke) egy számérték és egy mértékegység szorzata:

$$\textit{fizikai mennyiség} = \text{számérték} \cdot \text{mértékegység}.$$

Például egy páciens testtömegét m-el jelölhetjük, és a mérés eredményét m = 84 kg formában adhatjuk meg. (A szorzójelet általában nem írjuk ki.) Nincs előírva, hogy milyen betűt használjunk a jelölésre. A tömeget legtöbbször m-el jelöljük, de előfordul pl. a M és a μ is. A mennyiségeket jelölő betűket mindig *kurzívan* (*dőlten*) írjuk.

A fizikai mennyiségeket különbözőképpen csoportosíthatjuk: pl. skalár és vektor vagy alapmennyiség és származtatott mennyiség.

Skalár (skaláris mennyiség): térbeli iránnyal **nem** rendelkező mennyiség, pl. testhőmérséklet. Ha a kórlapon az áll, hogy t = 37°C, az teljes mértékben megadja a mennyiséget.

Vektor (vektoriális mennyiség): térbeli iránnyal rendelkező mennyiség, pl. egy vadászrepülő sebessége. A mennyiség teljes megadásához nem elegendő az, hogy a sebesség nagysága pl. 1200 km/h. Meg kell adni azt is, hogy milyen irányban mozog a gép.

Alapmennyiségek: önkényesen kiválasztott mennyiségek, amelyekre minden más mennyiséget visszavezethetünk, pl. a hosszúság (l. az alábbi táblázatot).

Mértékegység: egy mennyiség önkényesen lerögzített értéke, amellyel a mennyiség más értékeit összehasonlítjuk, és a lerögzített érték valahányszorosaként adjuk meg, pl. a méter. A mértékegységeket is betűkkel jelöljük, pl. a méter jele az „m“. A fizikai mennyiségek szabad jelölésével szemben azonban a mértékegységek jelölése szigo-rúan szabályozott. A métert nem lehet más betűvel jelölni, csak „m“-el. Na most, hogy az „m“ a tömeg nevű fizikai mennyiséget jelöli, vagy a métert, annak eldöntésében segít az, hogy a mértékegységeket jelölő betűket állón és nem dőlten írjuk.

Alapmértékegységek: az alapmennyiségek mértékegységei (l. az alábbi táblázatot). Minden más mennyiség mértékegysége ezekből az alapmértékegységekből leszármaztatható.

Mértékegységek Nemzetközi Rendszere (Système International d'Unités, röv. SI): az önkényesen választott hét alapmennyiség mértékegysége.

Mértékegységek Nemzetközi Rendszere (SI)

alapmennyiség		SI-alapegység	
név	szokásos jelölés	név	előírt jelölés
hosszúság	l	méter	m
tömeg	m	kilogramm	kg
idő	t	másodperc	s
elektromos áramerősség	I	amper	A
termodinamikai hőmérséklet	T	kelvin	K
anyagmennyiség	n	mol	mol
fényerősség	I	kandela	cd

(Az alapmennyiségek pontos meghatározása érdekes és fontos, de egy orvos mint a fizikai ismeretek praktikus alkalmazója számára talán nem annyira lényeges, ezért ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.)

Származtatott mennyiségek és mértékegységeik: a hét alapmennyiségből és mértékegységeikből általában egy definíciós képlettel meghatározott mennyiségek, ill mértékegységek. Például a sebességet (v) a Δt idő alatt megtett Δs út és a Δt idő hányadosaként definiáljuk ($v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$). Ennek megfelelően a sebesség SI-mértékegysége a méter/másodperc (m/s), bár a gyakorlatban a kilométer/óra (km/h) is megengedett és használható.

Egy mennyiség megváltozása: Egy fizikai mennyiség megváltozását a Δ (görög „delta“ betű) jelöli. Például egy test térfogatának megváltozását ΔV-vel jelölhetjük. A megváltozás kiszámításakor mindig a későbbi értékből vonjuk le a korábbi értéket: $\Delta V = V_2 - V_1$. Így pozitív értéket kapunk, ha a test térfogata — pl. hőtágulás miatt — nő, és negatív értéket, ha — például lehűléskor — csökken.

SI-prefixumok (előtagok): a tíz bizonyos hatványai, amelyeket névvel látunk el, és amelyeket a mértékegységek elé illesztve a nagyon nagy vagy nagyon kicsi értékeket röviden és áttekinthetően adhatjuk meg. Például a „kilo” (rövidítése állón írt „k“) ezret (10^3) jelent, így pl. a 200 000 m-t rövidebben 200 km-ként írhatjuk. Leginkább a tíz hárommal osztható kitevőjű hatványait használjuk, de van néhány ettől eltérő prefixum is. Az egyetemi tanulmányokhoz elegendő az alábbi táblázatban felsorolt prefixumok ismerete.

Görög betűs jelölések: A latin betűk mellett használjuk a görög betűket is egyes fizikai mennyiségek (pl. a λ-t a hullámhossz), egy SI-prefixum (μ-t a mikro), esetleg bizonyos jelenségek (pl. α-sugárzás) jelölésére. Az alábbi táblázat tartalmazza a görög ábécé leggyakrabban használt betűit.

SI-prefixumok (előtagok)

prefixum		szorzó	
neve	jele	hatvánnyal	számnévvel
exa	E	10^{18}	trillió
peta	P	10^{15}	billiárd
tera	T	10^{12}	billió
giga	G	10^{9}	milliárd
mega	M	10^{6}	millió
kilo	k	10^{3}	ezer
hekto	h	10^{2}	száz
deka	da	10	tíz
dezi	d	10^{-1}	tized
centi	c	10^{-2}	század
milli	m	10^{-3}	ezred
mikro	μ	10^{-6}	milliomod
nano	n	10^{-9}	milliárdod
piko	p	10^{-12}	billiomod
femto	f	10^{-15}	billiárdod
atto	a	10^{-18}	trilliomod

Néhány görög betű

név	kisbetű
alfa	α
béta	β
gamma	γ
epszilon	ε
éta	η
kappa	κ
lambda	λ
mű	μ
nű	ν
pí	π
ró	ρ
szigma	σ
tau	τ
fí	ϕ
pszí	ψ
ómega	ω
ómega	Ω (nagybetű)

Feladatok:

1. Írja át az alábbi mennyiségeket három értékes jegyre való kerekítés után prefixum nélkül normálalakra!

a) 0,004996 PJ =

b) 32,88 fmol =

c) 1198,7 km =

2. Írja át az alábbi mennyiségeket három értékes jegyre való kerekítés után prefixum nélkül normálalakra!

a) 0,2455 μm =

b) 3,2982 MJ =

c) 123,5 aJ =

3. Írja föl az alábbi mennyiségeket valamelyik SI-prefixum alkalmazásával úgy, hogy a lehető legrövidebb alakot kapja!

a) 0,0025 m =

b) $0{,}033 \cdot 10^{8}$ W =

c) $0{,}003 \cdot 10^{-6}$ mol =

d) $2000 \cdot 10^{10}$ Hz =

4. Írja föl az alábbi mennyiségeket valamelyik SI-prefixum alkalmazásával úgy, hogy a lehető legrövidebb alakot kapja!

a) $5{,}2 \cdot 10^{-8}$ s =

b) 0,003 mol =

c) $8750 \cdot 10^{4}$ J =

5. Alakítsa át!
a) $5 \cdot 10^{6}$ fmol = ……............. nmol

b) 300 cm^2 = …........……… m^2

c) 12 dm^3 = ...…........…..... cm^3

d) 25 m/s = ……...........…… km/h

6. Alakítsa át!
a) 0,3 GW = ……................. MW

b) 0,3 m^2 = …..........……..… cm^2

c) 1000 cm^3 = ...…............. dm^3

d) 72 km/h = ……...........….. m/s

Megoldások:

1. Először kerekítünk, azután a kerekített számot normálalakra hozzuk, utána helyettesítjük a prefixumot a megfelelő szorzóval, végül összevonjuk tíz hatványait:

a) $0{,}004996\ \text{PJ} = 0{,}005\ \text{PJ} = 5\cdot 10^{-3}\ \text{PJ} = 5\cdot 10^{-3}\cdot 10^{15}\ \text{J} = 5\cdot 10^{12}\ \text{J}$

b) $32{,}88\ \text{fmol} = 32{,}9\ \text{fmol} = 3{,}29\cdot 10^{1}\ \text{fmol} =\cdot 3{,}29\cdot 10^{1}\cdot 10^{-15}\ \text{mol} = 3{,}29\cdot 10^{-14}\ \text{mol}$

c) $1198{,}7\ \text{km} = 1200\ \text{km} = 1{,}2\cdot 10^{3}\ \text{km} = 1{,}2\cdot 10^{3}\cdot 10^{3}\ \text{m} = 1{,}2\cdot 10^{6}\ \text{m}$

2. a) $2{,}46\cdot 10^{-7}\ \text{m}$
b) $3{,}30\cdot 10^{6}\ \text{J}$
c) $1{,}24\cdot 10^{-16}\ \text{J}$

3. A számot először normálalakra hozzuk, és ha tíz hatványkitevője éppen osztható hárommal, a táblázatból kikeressük a hatvány nevét. Ha tív hatványkitevője nem osztható hárommal (lásd a d) részfeladatot), akkor a közeli prefixumokat kipróbáljuk és kiválasztjuk azt, amelyikkel a legrövidebb alakot kapjuk:

a) $0{,}0025\ \text{m} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m} = 2{,}5\ \text{mm}$

b) $0{,}033\cdot 10^{8}\ \text{W} = 3{,}3\cdot 10^{6}\ \text{W} = 3{,}3\ \text{MW}$

c) $0{,}003\cdot 10^{-6}\ \text{mol} = 3\cdot 10^{-9}\ \text{mol} = 3\ \text{nmol}$

d) $2000\cdot 10^{10}\ \text{Hz} = 2\cdot 10^{13}\ \text{Hz} = 20\cdot 10^{12}\ \text{Hz} = 20\ \text{THz}$,
vagy
$= 0{,}02\cdot 10^{15}\ \text{Hz} = 0{,}02\ \text{PHz}$

A két lehetőség közül a 20 THz alak picit rövidebb.

4. a) 52 ns
b) 3 mmol
c) 87,5 MJ

5. a) $5\cdot 10^{6}\ \text{fmol} = 5\cdot 10^{6}\cdot 10^{-15}\ \text{mol} = 5\cdot 10^{-9}\ \text{mol} = 5\ \text{nmol}$

b) $300\ \text{cm}^2 = 300\cdot(\text{cm}\cdot\text{cm}) = 300\cdot(10^{-2}\ \text{m}\cdot 10^{-2}\ \text{m}) = 300\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 0{,}03\ \text{m}^2$

c) $12\ \text{dm}^3 = 12\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 12\cdot 10^{-3}\cdot 10^{6}\ \text{cm}^3 = 12\cdot 10^{3}\ \text{cm}^3 = 12\,000\ \text{cm}^3$

d) $25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 25\,\frac{0{,}001\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}} = 25\cdot 3600\cdot 0{,}001\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 90\ \text{km/h}$

6. a) 300 MW
b) $3000\ \text{cm}^2$
c) $1\ \text{dm}^3$
d) 20 m/s

3. Mechanika — kinematika

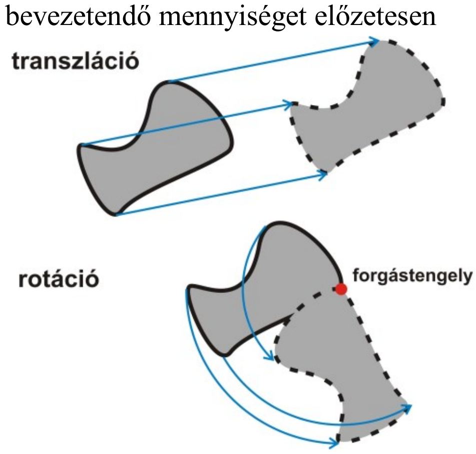
A kinematika (mozgástan) a *mozgások* leírásával foglalkozik. A kinematika fogalmai, mennyiségei szinte minden fizikai diszciplinában, ill. általában a természettudományokban előkerülnek. Az orvostudományokban a biomechanika és a sportorvoslás használja ezeket leginkább.

A mozgás fogalma viszonylagos. Az, hogy egy test áll vagy mozog, attól függ, mihez viszonyítjuk, milyen *vonatkoztatási rendszer*ben vizsgáljuk. Például egy, a villamosban álló ember — amelyik tehát a villamoshoz képest nyugalomban van — az úttesthez képest a villamossal együtt mozog. A Naphoz képest pedig megint másféle mozgást végez.

Vonatkoztatási rendszer: önkényesen választott test (testek összessége), amelyhez (amelyekhez) képest a vizsgált test mozgását leírjuk. A mozgás kvantitatív leírásához a vonatkoztatási testekhez egy koordináta-rendszert (pl. egy derékszögű koordináta-rendszert) rögzítünk.

Egy **merev test** (idealizált test, amely az alakját nem változtatja) bármilyen bonyolult mozgása összetehető két egyszerű mozgásból, *haladó mozgás*ból és *forgómozgás*ból.

Haladó mozgás (transzláció): Haladó mozgást végez egy test, ha pontjainak elmozdulása egyszerű párhuzamos eltolással egymással fedésbe hozható (l. az ábrát). (Ha egy picit később bevezetendő mennyiséget előzetesen felhasználunk, azt is mondhatnánk, hogy a test minden pontjának ugyanolyan nagyságú és irányú a sebessége.) Például a síugró a sánc elhagyása után egy rövid fázisban meglehetősen mereven tarja magát, és mozgása jó közelítéssel egyszerű haladó mozgás.



Forgómozgás (rotáció): A test pontjai egy tengely körüli koncentrikus körpályákon mozognak. A műkorcsolyázónő piruettje jó közelítéssel forgás.

A következőkben először a haladó mozgást leíró mennyiségekkel és törvényekkel foglalkozunk.

Haladó mozgás (transzláció)

Ha egy valóságos, kiterjedéssel rendelkező test forgómozgásától eltekintünk, csak a haladó mozgásával foglalkozunk, akkor a test nyugodtan tekinthető egy pontnak (persze tömeggel rendelkező pontnak, azaz tömegpontnak), így egyszerűbben fogalmazhatunk. Egy tömegpont haladó mozgásának leírására a *sebesség*, *gyorsulás*, *periódusidő*, *frekvencia* és *szögsebesség* nevű mennyiségeket vezetjük be.

Sebesség (szokásos jelölése v): a megtett út (Δs) és a hozzátartozó időtartam (Δt) hányadosa:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ahhoz, hogy a test sebességét egy adott pillanatban minél pontosabban megkapjuk, a Δt időtartamnak minél kisebbnek kell lennie. Persze ez is viszonylagos — tehát olyan kicsinek, hogy közben a test mozgásának megváltozása elhanyagolható legyen, egyébként csak a Δt időtartamra vonatkozó átlagsebességet kapjuk meg. A sebesség SI-mértékegysége a m/s. A sebesség megmutatja, milyen gyors egy test mozgása. A sebességnek iránya is van, tehát vektormennyiség, de ezzel a tulajdonságával nem foglalkozunk.

Egyenesvonalú egyenletes mozgás: irányváltoztatás nélküli állandó sebességű mozgás. Erre a mozgásra igaz, hogy a megtett út (s) az időnek (t) lineáris függvénye:

$$s = v \cdot t\,,$$

tehát a megtett út az eltelt idővel arányosan egyenletesen növekszik. A függvény képe egyenes (l. alább az egyenesvonalú egyenletes mozgás ábráit).

Gyorsulás (szokásos jelölése a): a sebességváltozás (Δv) és a hozzá tartozó időtartam (Δt) hányadosa:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Itt megint a gyorsulás pillanatnyi értékéhez a Δt időtartamnak olyan kicsinek kell lennie, hogy közben a test gyorsulásának megváltozása elhanyagolható legyen. A gyorsulás SI-mértékegysége a m/s^2. A gyorsulás megmutatja, milyen gyorsan változik egy test sebessége, pl. az a = 3 m/s^2 érték azt jelenti, hogy egy másodperc alatt a sebesség értéke 3 m/s-al nő. A gyorsulás is vektormennyiség, de ezt ebben a jegyzetben nem tárgyaljuk. Ha egy egyenes vonalú mozgásnál a test sebessége nő, akkor gyorsulása pozitív, míg lassulás esetén a Δv sebességváltozás és így a gyorsulás is negatív.

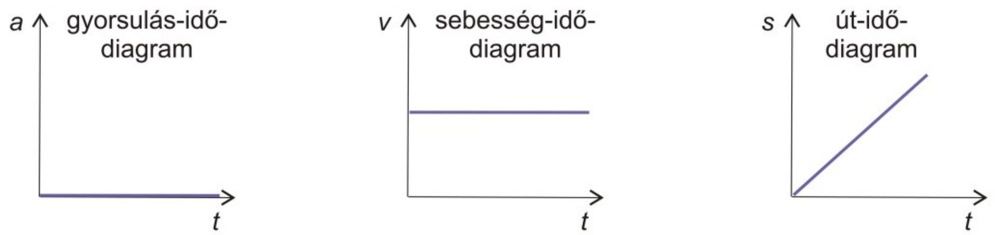
Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás: egy egyenes mentén történő mozgás állandó gyorsulás értékkel. Erre a mozgásra igaz, hogy a test sebessége (v) az időnek (t) lineáris függvénye:

$$v = a \cdot t + v_0,$$

ahol v_0 a $t = 0$ időpontban érvényes sebességet, az ún. kezdősebességet jelöli. Az állandó gyorsulás érték azt jelenti — a függvény is ezt mondja —, hogy a sebesség a kezdő értékről az eltelt idővel arányosan egyenletesen nő, vagy éppenséggel egyenletesen csökken, attól függően, hogy a gyorsulás értéke pozitív vagy negatív. A függvény képe egyenes. Mivel a test sebessége nem állandó, hanem egyenletesen nő (vagy csökken), az egymás után következő azonos időtartamok alatt a test egyre több (vagy kevesebb) utat tesz meg (l. alább az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás ábráit). Valamely t idő alatt megtett utat legegyszerűbben az átlagsebességgel számolhatjuk ki: $s = \bar{v} \cdot t$. A $\bar{v}$ átlagsebesség lineáris változás esetén egyszerűen a kezdő- és végső érték számtani közepe: $\bar{v} = (v_0 + v)/2$. Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgásra példa a **szabadesés**, amikor is a test csak a nehézségi erő hatása alatt mozog, minden más hatás, pl. a levegő ellenállása, elhanyagolható.

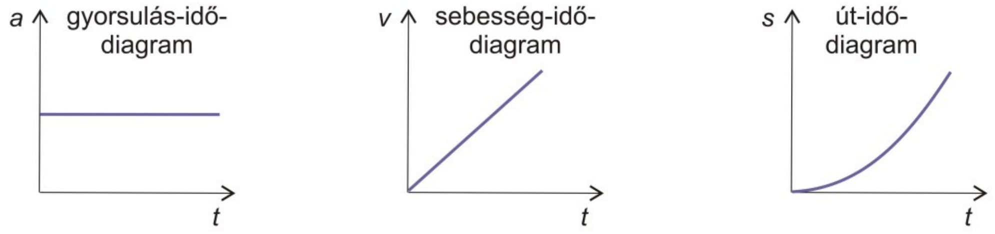
A szabadesés gyorsulás értéke (szokásos jelölése g): a test állandó gyorsulás értéke szabadesés közben. Értéke a Föld különböző helyein kicsit eltér, az Egyenlítőnél nagyobb, a sarkoknál kisebb. Közepes értéke megközelítőleg 9,81 m/s^2. Ez azt jelenti, hogy a szabadon eső test sebessége minden másodpercben 9,81 m/s-al nő. Ez a gyorsulásérték igaz akkor is, amikor a feldobott kő még felfelé repül (ilyenkor másodpercenként 9,81 m/s-al csökken a sebesség) és akkor is, amikor a kő már lefelé esik.

Egyenesvonalú egyenletes mozgás ábrái (az ábrasorozat példaként pozitív sebesség értékkel készült):



A test gyorsulása minden pillanatban nulla, mivel sebessége állandó. A megtett s út az $s = v \cdot t$ függvény szerint az eltelt idővel egyenletesen nő. Az egyenes meredeksége a v sebesség érték.

Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás ábrái (az ábrasorozat példaként pozitív gyorsulás értékkel készült):



A gyorsulás értéke állandó. A sebesség a $v = a \cdot t$ függvény szerint lineárisan változik (a v_0 kezdősebességet itt nullának vettük), az egyenes meredeksége az a gyorsulás érték. A megtett út egyre gyorsabban növekszik, hiszen a test sebessége nő.

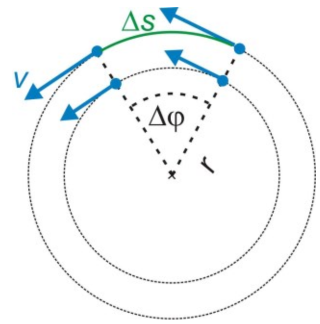
Körmozgás: körpályán történő mozgás. (Vigyázat, ez a mozgás haladó mozgás és nem forgás!)

Szögsebesség vagy **körfrekvencia** (szokásos jelölése ω): a Δt időtartam alatti szögelfordulás ($\Delta\varphi$) és a Δt hányadosa:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Itt megint megjegyezzük, hogy a Δt időtartamnak olyan kicsinek kell lenni, hogy közben a mozgás ne változzon meg. A szögsebesség SI-mértékegysége az 1/s. (Ez tulajdonképpen rad/s-ot jelent, csak a rad jelölést sokszor nem írjuk ki.)

Egyenletes körmozgás: körmozgás állandó szögsebességgel. A szögelfordulás az eltelt idővel egyenes arányban növekszik:



$$\varphi = \omega \cdot t.$$

Egyenletes körmozgásnál a test sebességének nagysága is változatlan, iránya azonban állandóan változik, mindig a körpálya aktuális érintőjének irányába mutat (l. az ábrát). A test sebessége és szögsebessége természetesen nem függetlenek egymástól. Nagyobb szögsebességhez arányosan nagyobb sebesség társul. A sebesség azonban adott szögsebesség mellett még attól is függ, mekkora a körpálya sugara. Hiszen egy nagyobb sugarú körpályán ugyanakkora $\Delta\varphi$ szögelforduláshoz a testnek nagyobb körívet kell befutnia, így gyorsabbnak kell lennie. A sebességet definíció szerint kiszámolhatjuk úgy, hogy a Δt idő alatt befutott körív hosszát (Δs) osztjuk a Δt-vel, az ívhosszat viszont — a radián definícióját felhasználva — mint $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$-t írjuk fel:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega.$$

Az egyenletes körmozgás egy periodikus, azaz ismétlődő mozgás. Minden kör az előbbinek egyszerű ismétlése. Mindenféle periodikus mozgásnál használhatjuk a következő mennyiségeket.

Periódusidő vagy **keringési idő** (szokásos jelölése T): az az idő, amely egy kör (ill. általánosabban egy periódus) megtételéhez kell. Alapmértékegysége természetesen a másodperc (s).

Frekvencia vagy **fordulatszám** (szokásos jelölése f): időegység alatt megtett körök (ill. általánosabban periódusok) száma. Minél rövidebb ideig tart egy kör, annál több kört tesz meg a test időegység alatt:

$$f = \frac{1}{T}.$$

A frekvencia SI-mértékegysége a **hertz** (Hz; 1 Hz = 1/s).

A szögsebesség és a frekvencia arányosak egymással. Ezt egy egyszerű levezetéssel megmutathatjuk. Alkalmazzuk a szögsebesség fenti definíciós képletét pont egy fordulatra. Mivel egy teljes fordulat ideje T, és hozzá 2π szögelfordulás tartozik, ezért:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f.$$

(Innen származik ω másik neve, a körfrekvencia.)

Még egyszer hangsúlyozzuk: az utóbbi mennyiségek minden periodikus mozgásnál, pl. a forgásnál, a rezgéseknél vagy a hullámoknál, de még általánosabban, egy fizikai mennyiség ismétlődő változásánál, mint pl. a szív működése során mérhető térfogat-, nyomás- vagy elektromos potenciálváltozások leírásánál, jól használhatók.

Forgómozgás (rotáció)

A forgó merev test pontjai olyan körpályákon mozognak, amelyeknek középpontjai egy egyenesre, az ún. forgástengelyre illeszkednek. Minden pont azonos szögsebességgel mozog, viszont sebességük függ a forgástengelytől mért távolságtól is. A körmozgás leírására bevezetett mennyiségek értelemszerűen itt is használhatók.

***Feladatok**:*

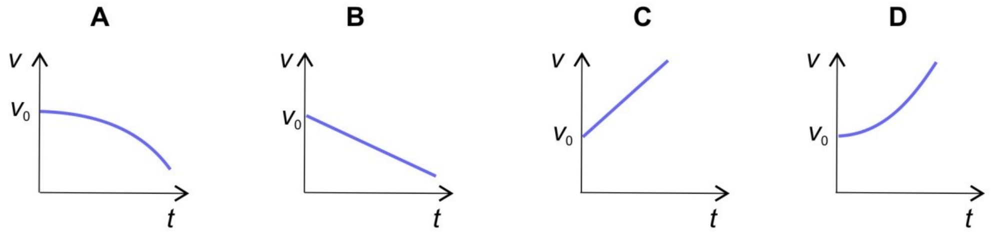
1. A Budapest–München távolság 675 km. Autópályákon meg lehet tenni 6 óra 15 perc alatt. Mekkora az (átlagos) sebesség km/h-ban, ill. m/s-ben?

2. Mennyi időt nyerhet az ember, ha egy autópályán utazva a 118 km-es távolságot a még éppen megengedett 130 km/h-s sebességgel teszi meg, mint a takarékosabb és biztonságosabb 110 km/h-s sebességgel?

3. Egy ultrahangos vizsgálatban az ultrahang fej egy nagyon rövid idejű ultrahang impulzust küld a testbe, ahonnal az egy szerv határáról visszaverődve 80 μs alatt érkezik vissza az ultrahang fejhez. Milyen mélyen fekszik a szerv határa az ultrahang fejtől számítva, ha az ultrahang terjedési sebessége a vizsgált testszövetben 1500 m/s?

4. Egy zivatar alkalmával a mennydörgést 5 másodperccel a villám után halljuk. Tőlünk hány kilométerre villámlott, ha a fény sebességét végtelennek, a hang sebességét a levegőben 330 m/s-nak vesszük?

5. Egy követ v_0 kezdősebességgel felfelé dobunk. Tegyük fel, hogy a nehézségi erőn kívül semmilyen más erő, pl. légellenállás sem hat a testre. Melyik ábra mutatja helyesen a kő sebességének változását a felfelé repülés közben?



6. Egy alma leesik a fáról, és 0,8 s után a fa alatt alvó ember fején koppan. (Az alma mozgását tekintsük szabadesésnek!)
a) Mekkora sebességgel érkezik meg az alma?
b) Milyen magasan lévő ágon függött a szóban forgó alma?

7. Egy követ dobunk felfelé 36 km/h-s kezdősebességgel. (A légellenállást hagyjuk figyelmen kívül!)
a) Mennyi idő után éri el a kő pályája legmagasabb pontját?
b) Milyen magasra repül a kő?

8. Egy műhold kering egyenletes sebességgel egy Föld körüli körpályán a Föld felszínétől 1670 km-re. Két óra alatt kerüli meg a Földet. (A Föld közepes sugara 6370 km). Határozza meg
a) a periódusidőt,
b) a frekvenciát,
c) a szögsebességet,
d) a sebességet (km/h egységben) és
e) az egy hét alatti fordulatok számát!

9. Mari egy körhintában ül 8 m-re a körhinta tengelyétől. Három és fél percig tart egy menet, eközben 20 fordulatot tesz meg a hinta. Határozza meg
a) a periódusidőt,
b) a frekvenciát (Hz egységben),
c) a szögsebességet és
d) a sebességet!

Megoldások:

1. 15 perc egy negyedórát jelent: 15 min = 0,25 h. A menetidő tehát 6,25 h. Az átlagsebesség:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{675}{6{,}25} = 108\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Átszámolás m/s egységre: $108\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 108 \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{108}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2. 9 perc és 54 másodperc

3. Az ultrahang impulzus „mozgása" egyenesvonalú egyenletes mozgásnak vehető v = 1500 m/s sebességgel. A t = 80 μs = $8\cdot 10^{-5}$ s időtartam alatt megtett teljes út (oda és vissza összesen):

$s = v\cdot t = 1500\cdot 8\cdot 10^{-5} = 0{,}12\,\mathrm{m}$.

A szerv határa tehát 0,06 m = 6 cm mélyen található.

4. 1,65 km

5. B

6. a) Az alma nyugalmi helyzetből induló (azaz v_0 = 0 kezdősebességű) egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Gyorsulása $a = g$ = 9,81 m/s^2. A t = 0,8 s idő alatt elért sebessége:

$v = a\cdot t + v_0 = g\cdot t + 0 = 9{,}81\cdot 0{,}8 = 7{,}85\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (= 28{,}3\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}!)$.

(Persze az alma valóságos mozgása nem egészen szabadesés. A légellenállás miatt a gyorsulása és így az elért sebessége is kisebb valamennyivel. Csak a számolás a valósághoz közelebb álló „modellel" és az annak megfelelő képletekkel sokkal bonyolultabb.)

b) Mivel az alma sebessége lineárisan növekszik, az átlagsebesség a kezdő és végső sebességértékek egyszerű számtani középéréke:

$\bar{v} = (v_0 + v)/2 = (0 + 7{,}85)/2 = 3{,}93\ \mathrm{m/s}$. Ezzel az átlagsebességgel t = 0,8 s idő alatt megtett út:

$s = \bar{v}\cdot t = 3{,}93\cdot 0{,}8 = 3{,}14\,\mathrm{m}$.

7. a) 1,02 s; b) 5,1 m

8. A műhold körmozgást végez a Föld középpontja körül, tehát a pálya sugara a Föld közepes sugara és a felszíntől mért távolság együttesen r = 6370 km + 1670 km = 8040 km = $8{,}04\cdot 10^6$ m.

a) A periódusidő a feladat szövegében már adott: T = 2 óra.

b) A frekvencia a periódusidő reciproka: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\cdot 3600} = 1{,}39\cdot 10^{-4}$ Hz.

c) A szögsebesség (más néven körfrekvencia) a frekvenciával arányos:

$\omega = 2\pi\cdot f = 6{,}28\cdot 1{,}39\cdot 10^{-4} = 8{,}73\cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$.

d) A sebesség arányos a szögsebességgel: $v = r\cdot\omega = 8{,}04\cdot 10^6\cdot 8{,}73\cdot 10^{-4} = 7020\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25300\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

e) Egy hét 7·24 = 168 órából áll. Ha 2 óra kell egy fordulathoz, akkor a 168 óra éppen 84 fordulatra elég.

9. a) 10,5 s; b) 0,0952 Hz; c) 0,598 1/s; d) 4,79 m/s

4. Mechanika — dinamika és statika

A dinamika a testek között fellépő erőkkel, valamint az erőhatások és a testek mozgásának megváltozása közötti összefüggésekkel foglalkozik. A statika egy speciális esettel — amikor is a testre ható erők éppen egyensúlyt tartanak egymással, és a test nyugalomban van.
A dinamika és statika fogalmaival az orvosi gyakorlatban elsősorban a sportorvoslás, az ortopédia, a fizikoterápia területén találkozhatunk. Ezen ismeretek hozzásegítenek a támasztó- és mozgásszervek működésének megértéséhez, segítségükkel például meghatározhatjuk, mekkora erők feszítik az inakat a különböző mozgásoknál, vagy milyen erőhatásoknak vannak kitéve a csigolyák különböző testhelyzetekben. De egyéb területeken is hasznosíthatók ezek az ismeretek, például a hallócsontocskák alkotta emelőrendszer hangerősítő funkciójának megértésében, vagy a szintén emelőként működő alsó állkapocs által létrehozott rágóerők meghatározásában.

A testek között — tulajdonságaiktól függően — különböző *kölcsönhatások*, pl. tömegvonzás, súrlódás, elektromos vonzás/taszítás, mágneses vonzás/taszítás, magerők, stb. léphetnek föl. Ha két test ilyen kölcsönhatásban áll egymással, azt mondjuk, hogy *erőt* fejtenek ki egymásra. A kölcsönhatások erősebben vagy gyengébben is jelentkezhetnek. Az „erő" nevű fizikai mennyiséget célszerűen a kölcsönhatás erősségének leírására vezetjük be. A kölcsönhatás (erőhatás) felléptét úgy vehetjük észre, hogy az erőhatásnak kitett test mozgása vagy alakja megváltozik. Mindkét megfigyelhető és mérhető hatást felhasználhatjuk az erő definíciójára. Mi a szokásosabb utat követve a test mozgásának megváltozása, azaz a test gyorsulása segítségével vezetjük be az erőt.

Erő (szokásos jelölése F): az erőhatásnak kitett test tömegének és gyorsulásának szorzata:

$$F = m \cdot a\,.$$

Az erő SI-mértékegysége a **newton** (N; 1 N = 1 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$). Az erő vektoriális mennyiség, iránya a gyorsulás (és nem a mozgás, azaz a sebesség!) irányával egyezik meg. (Ebben a jegyzetben az erő vektoriális tulajdonságára csak korlátozottan, néhány esetben lesz szükségünk.)

Van néhány általános összefüggés a kölcsönhatásokra, erőkre, ill. az általuk okozott gyorsulásra vonatkozóan, ezek a *Newton-féle törvények*, ill. *axiómák*.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség elve): Minden test nyugalomban marad, vagy egyenes vonal mentén egyenletesen mozog mindaddig, amíg más test ennek megváltoztatására nem kényszeríti. Tehát mindig más test vagy testek, ill. az ezekkel való kölcsönhatások állnak a megfigyelhető mozgásváltozások hátterében. (Ez a megállapítás gyorsuló vonatkoztatási rendszerben nem igaz, de ilyen rendszerekkel nem foglalkozunk.)

Newton II. törvénye (a dinamika alaptörvénye): Egy test gyorsulása és a rá ható erő arányosak egymással:

$$F = m \cdot a\,,$$

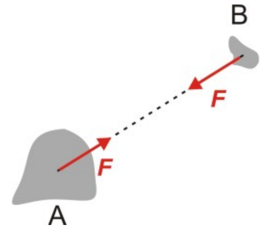
vagy — ha több erő hat egyidejűleg a vizsgált testre —:

$$\sum F = m \cdot a\,,$$

ahol ΣF a testre ható erők (vektoriális) összegét, az ún. *eredő erőt* jelenti. Tehát, ha csak egy erő hat a testre, akkor ez a törvény gyakorlatilag megegyezik az erő definíciós képletével. Ha azonban egyidejűleg több erő hat a testre, akkor már többlet jelentése van a törvénynek: a vizsgált testre ható erőket összegezhetjük, és a test gyorsulása az eredő erővel lesz arányos.

Megjegyezzük, hogy az első törvény a második speciális esetének tekinthető. Ha ugyanis a vizsgált test nem áll kölcsönhatásban más testekkel, így a rá ható eredő erő nulla, akkor a gyorsulása is nulla kell legyen, ami azt jelenti, hogy a sebessége nem változik, állandó nagyságú és irányú marad, ami éppenséggel nulla sebességet, azaz nyugalmi helyzetet is jelenthet.

Newton III. törvénye (a kölcsönhatás törvénye, akció-reakció): a kölcsönhatás, ill. az erők szimmetriáját írja le. Ha A test F nagyságú erőt fejt ki B testre, akkor B test ugyanakkora, csak éppen ellentétes irányú ellenerőt fejt ki A testre. (Az erők tehát mindig párban lépnek fel. Vigyázat: ha pl. az A testet vizsgáljuk, és rá akarjuk felírni az alaptörvényt, hogy a gyorsulását kiszámítsuk, akkor a III. törvényben szereplő erőt és ellenerőt nem szabad összeadni, hiszen csak az egyik hat az A testre!)



Egyensúly: Egy test egyensúlyban van, ha a rá ható erők eredője $\Sigma F = 0$. Ezért a gyorsulása is nulla, tehát vagy egyenes vonal mentén egyenletesen mozog, vagy áll. Ez utóbbi esettel foglalkozik a *statika*.

Az eddig felsoroltak persze csak akkor lesznek a gyakorlatban is hasznosak, ha két test kölcsönhatásakor a közöttük fellépő erőt a testek gyorsulásának ismerete nélkül is meg tudjuk határozni a testek tulajdonságainak (pl. tömegük, elektromos töltésük, stb.), távolságának, esetleg sebességének ismeretében. Erre szolgálnak az ún. *erőtörvény*ek. Ha ugyanis az erőtörvényekből meg tudjuk mondani, milyen erők hatnak egy testre, akkor a dinamika alaptörvénye segítségével ki tudjuk számolni a test gyorsulását, abból pedig a kinematika összefüggései segítségével a test sebesség-idő és út-idő grafikonját is. Tehát előre tudjuk jelezni, hogy hogyan, milyen pályán fog mozogni a vizsgált test. (Ez a mechanisztikus determinizmus alapgondolata.)

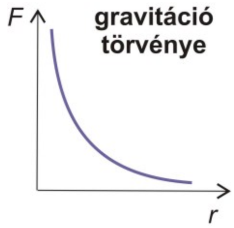
Erőtörvény: egy összefüggés, amely egy adott kölcsönhatásban megadja a két test között fellépő erőt a testek tulajdonságai, távolsága, sebessége, stb. függvényében.

Egy sor erőtörvényt ismerünk, pl. a gravitáció törvényét, a Hooke-törvényt, az elektromosságtanból a Coulomb-törvényt vagy a Lorentz-erőre vonatkozó összefüggést, stb. Ezek közül nézzünk néhányat.

Gravitáció (általános tömegvonzás) törvénye: Két test között fellépő vonzóerő csak a testek tömegétől (m_1 és m_2) és a közöttük lévő távolságtól (r) függ:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

ahol γ a gravitációs állandót jelöli, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2). Növekvő távolsággal tehát a kölcsönhatás erőssége „lecseng”, az erő a távolság négyzetével fordított arányban csökken (l. az ábrát).



Nehézségi erő (jelölése pl. F_{neh}): az az erő, amely a szabadon eső testeket a Föld felé gyorsítja. Ez jó közelítéssel megegyezik a Föld által a testre kifejtett gravitációs erővel (itt a Föld forgásából fellépő kicsi módosító erőt elhanyagoltuk). Kiszámolására felhasználhatjuk a gravitációs törvényt. Ha a test a Föld felszínén van és távolsága a Föld középpontjától jó közelítéssel nem változik, akkor a törvényben m_1 a Föld tömegét, r a Föld sugarát jelenti, ezeket a γ állandóval összevonva — nem véletlenül — a korábban megismert és g-vel jelölt értéket, a szabadesés gyorsulásának értékét (9,81 m/s^2) kapjuk. (Ki lehet próbálni!) Ezzel az m tömegű testre ható nehézségi erő nagysága:

$$F_{\text{neh}} = m \cdot g .$$

Pontosabb meggondolással persze a g értéke nem állandó, a Föld különböző helyein kicsit különbözik, hiszen a Föld nem pontosan gömb alakú, így sugara a Sarkoknál nagyobb, mint az Egyenlítőnél.

Súlyerő vagy **egy test súlya** (szokásos jelölése G): A súly az az erő, amellyel a test az alátámasztását nyomja, vagy a felfüggesztését húzza. Ha a test egyensúlyban van, és rá csak a nehézségi erő és az alátámasztási erő hatnak, akkor a súlyerő nagyságát tekintve megegyezik a nehézségi erővel, egyébként annál kisebb, vagy nagyobb is lehet (l. a 9. feladatot). Ha a test nincs alátámasztva, vagy felfüggesztve (szabadon esik), akkor ez az erő nulla — ez a súlytalanság állapota.

Hooke-törvény: Egy rugóban megnyújtáskor ébredő arányos a megnyúlással (s):

$$F = -D \cdot s,$$

ahol D az ún. rugóállandó (mértékegysége a N/m). Ez azt mutatja meg, hogy 1 méter megnyúlásnál mekkora erőt fejt ki a rugó. A rugóállandó a rugó anyagától, méretezésétől függ. A negatív előjel az összefüggésben az irányra utal: az erő a megnyúlással ellentétes irányú. (A törvény összenyomásra is érvényes, ellentétes előjelekkel.) A törvény jó közelítéssel alkalmazható pl. a szalagok és inak megnyúlására is.

***Feladatok**:*

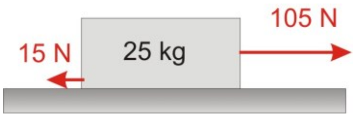
1. Egy 10 g tömegű lövedék 200 m/s-os sebességgel hatol be egy falba, ahol 0,002 s alatt megáll. Tegyük fel, hogy a golyó lassulása a falban egyenletes.
a) Mekkora erő fékezi a golyót?
b) Milyen mélyen áll meg a golyó a falban?

2. Egy sportautó (m = 1500 kg) álló helyzetből egyenletesen gyorsulva 3,1 s alatt éri el a 100 km/h-s sebességet.
a) Mekkora gyorsító erő szükséges ehhez?
b) Hány méter úton éri el az autó ezt a sebességet?

3. Egy részecskegyorsítóban egy $2{,}5\cdot10^{-25}$ kg tömegű iont állandó $1{,}6\cdot10^{-12}$ N nagyságú erő gyorsít.
a) Mekkora az ion gyorsulása?
b) Mennyivel növekszik a sebessége 10 ns alatt?

4. Egy ejtőernyős (m = 70 kg) gyorsulását megmérjük az ugrás egy adott pillanatában: 0,5 m/s^2 nagyságú, iránya lefelé mutat. Milyen és mekkora erők hathatnak az ejtőernyősre ebben a pillanatban?

5. Egy apa álló helyzetből indulva 5 másodpercen keresztül állandó 105 N nagyságú erővel húzza a szánkót, amelynek tömege kisgyerekével együtt 25 kg. A szánkóra még 15 N nagyságú súrlódási erő hat.
a) Mekkora a szánkó gyorsulása?
b) Mekkora sebességet sikerült az 5 s alatt elérni?
c) Milyen messzire húzta a papa eközben a szánkót?



6. Egy ember állandó sebességgel húz egy szánkót (m = 20 kg). Hirtelen elszakad a kötél. A szánkó egyenletesen lassulva, de tovább csúszik még 9,2 m-t. Ez 6,1 másodpercig tart.
a) Mekkora a szánkó sebessége a szakadás pillanatában?
b) Mekkora a szánkó gyorsulása (azaz lassulása)?
c) Mekkora a szánkót lefékező súrlódási erő?

7. Mekkora a hidrogén atomban az atommag (egy proton) és az elektron közötti tömegvonzási erő, ha a távolságukat 100 pm-nek vesszük? (A proton tömege: $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; az elektron tömege: $9{,}11\cdot10^{-31}$ kg.)

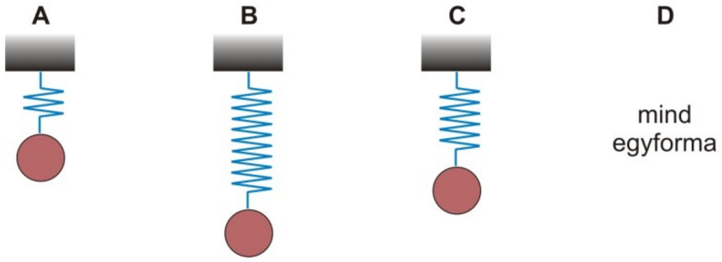
8. Mekkora a gravitációs erő két aszteroida (200 000 t, ill. 300 000 t tömegűek) között, amikor 2 km távolságban elhaladnak egymás mellett?

9. Egy 40 kg tömegű homokzsák függ egy kötélen.
a) Mekkora nehézségi erő hat a homokzsákra?
b) Mekkora erővel húzza a homokzsák a kötelet, azaz mekkora a homokzsák súlya?
c) Mekkora a nehézségi erő, ill. a súly, ha a homokzsák egy liftben függ, amelyik éppen 2 m/s^2-es gyorsulással lefelé indul?

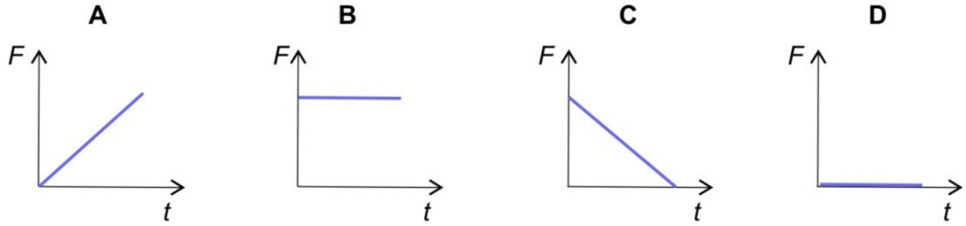
10. Tekintsük az Achilles-inat egy egyszerű rugónak, amelynek rugóállandója $3\cdot10^5$ N/m. Mekkora erő szükséges az ín 2 mm-es megnyújtásához?

11. Egy 2 kg tömegű testet függesztünk egy rugóra. Néhány rezgés után beáll az egyensúlyi megnyúlás, amely 25 cm. Mekkora a rugó rugóállandója?

12. Az ábrán látható rugók mindegyike 10%-kal nyúlik meg, ha ugyanazt a golyót függesztjük fel rájuk. Melyik rugó rendelkezik a legnagyobb rugóállandóval? Vagy mindegyik rugóállandója azonos?



13. Az ábrákon egy-egy erő időbeli változását látjuk:



a) Egy labdát fölfelé dobtunk. Melyik ábra adja meg helyesen a labdára ható nehézségi erő időbeli változását?
b) Egy rugót nagyon lassan és egyenletesen nyomunk össze. Melyik ábra adja meg helyesen a rugóerő időbeli változását?
c) Egy labda szabadon esik lefelé. Melyik ábra adja meg helyesen a labda súlyának időbeli változását?

Megoldások:

1. a) A golyó gyorsulása definíció szerint: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0-200}{0{,}002} = \dfrac{-200}{0{,}002} = -10^5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A golyóra ható fékező erő: $F = m \cdot a = 0{,}01 \cdot \left(-10^5\right) = -1000\,\text{N}$. A negatív előjel mindkét értéknél az irányra utal: mind a gyorsulás (ez esetben lassulás), mind a fékező erő ellentétes irányú a mozgással.

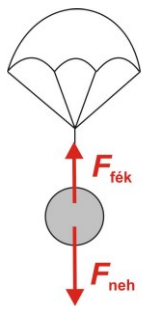
b) A golyó átlagsebessége egyenletesen változó mozgásnál: $\bar{v} = (v_0 + v)/2 = (200+0)/2 = 100\,\text{m/s}$.
Ezzel az átlagsebességgel 0,002 s alatt megtett út: $s = \bar{v} \cdot t = 100 \cdot 0{,}002 = 0{,}2\,\text{m} = 20\,\text{cm}$.

2. a) 13 400 N; b) 43,1 m

3. a) Az ionra csak egy erő hat, gyorsulása így: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-12}}{2{,}5 \cdot 10^{-25}} = 6{,}4 \cdot 10^{12}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) A Δt = 10 ns = 10^{-8} s alatti sebességnövekedést a gyorsulás definíciós képletéből kaphatjuk meg:
$\Delta v = a \cdot \Delta t = 6{,}4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-8} = 6{,}4 \cdot 10^4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

4. Lefelé hat a nehézségi erő F_{neh}, fölfelé hat a közegellenállás és az ernyő fékező ereje, együttesen $F_{\text{fék}}$, a kettő eredő ereje $\Sigma F = F_{\text{neh}} - F_{\text{fék}}$. A dinamika alaptörvénye szerint:
$F_{\text{neh}} - F_{\text{fék}} = \sum F = ma = 70 \cdot 0{,}5 = 35\,\text{N}$. Mivel ebből maga a nehézségi erő
$F_{\text{neh}} = mg = 70 \cdot 9{,}81 = 687\,\text{N}$ nagyságú, ezért az $F_{\text{fék}}$ fékező erő
$F_{\text{fék}} = F_{\text{neh}} - 35 = 687 - 35 = 652\,\text{N}$ nagyságú kell, hogy legyen. Ebben a pillanatban tehát a nehézségi erő még nagyobb, mint a fékező erő, ezért az ejtőernyős még gyorsul.



5. a) 3,6 m/s^2; b) 18 m/s; c) 45 m

6. a) 3,02 m/s; b) –0,495 m/s^2; c) –9,9 N

7. Egy egyszerű modellben a hidrogén atommagját és elektronját klasszikus testeknek tekintve a gravitációs törvény szerint: $F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}{(100 \cdot 10^{-12})^2}$ $=1{,}01 \cdot 10^{-47}$ N. (Ez ugyan vonzóerő, de olyan gyenge, hogy az atomot összetartani nem lenne képes. Természetesen a sokkal erősebb elektromos vonzás az, amely az atomot egyben tartja. Lásd a 10. fejezet 1. feladatát.)

8. 1 N

9. a) A nehézségi erő mindig:
$F_{\text{neh}} = mg = 40 \cdot 9{,}81 = 392$ N.

b) Ha a homokzsák nyugalomban (egyensúlyban) van, akkor a gyorsulása és így a rá ható erők eredője is nulla. A kötél tehát ugyanakkora erővel tartja a homokzsákot, mint amennyivel a nehézségi erő lefelé húzza: $F_{\text{kötél}} = F_{\text{neh}}$. Newton III. törvénye szerint viszont a homokzsák ugyanakkora erővel húzza a kötelet, mint amekkorával a kötél őt tartja. A súly pedig éppen az az erő, amivel a homokzsák a kötelet húzza, tehát: $G = F_{\text{kötél}} = F_{\text{neh}} = 392$ N. Ebben a szituációban tehát — a nagyságokat tekintve — a súlyerő megegyezik a nehézségi erővel.

c) Az biztos, hogy a nehézségi erő továbbra is 392 N. Most azonban a homokzsák nincs egyensúlyban, a lifttel együtt gyorsulva mozog lefelé. Erre is igaz azonban a dinamika alapegyenlete:
$\sum F = F_{\text{neh}} - F_{\text{kötél}} = ma$, ahol $F_{\text{kötél}}$ értéke nem okvetlenül ugyanaz, mint az előző feladatrészben.
(Az egyenlet felírásakor a lefelé mutató irányt tekintettük pozitívnak.)
Ebből kiszámolható a kötélerő: $F_{\text{kötél}} = F_{\text{neh}} - ma = 392 - 40 \cdot 2 = 392 - 80 = 312$ N.
A kötélerő tehát most a lefelé gyorsuló mozgás miatt kisebb, mint nyugalomban. Természetesen a homokzsák is ezzel a kisebb erővel húzza a kötelet, súlya tehát kisebb lett: $G = 312$ N. Ez a jelenség valószínűleg mindenki számára ismerős: a lift lefelé indulásakor egy pillanatra mintha „megkönnyebbednénk”.
(Ha a feladatban a lift ugyanekkora gyorsulással, csak felfelé indulna, akkor a homokzsák súlya nagyobb lenne: 472 N.)

10. Akkora erő szükséges, amekkora az adott megnyúlásnál az ínban mint egyszerű rugóban ébred. Ez az erő a Hooke-törvény szerint:
$F = D \cdot s = 3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}002 = 600\,\text{N}$.

11. 78,5 N/m

12. A

13. a) B; b) A; c) D

5. Mechanika — munka és energia

Az energia egyike a fizika és a természettudományok legfontosabb mennyiségeinek. Egy test, egy rendszer állapotát jellemzi. Az energia és a munka meglehetősen közeli fogalmak. Viszonyuk szemléltetésére egy példa: Egy daru felemel egy betonelemet, azaz munkát végez. Eközben energiát veszít (üzemanyaga fogy), a betonelem (helyzeti) energiát nyer. Az energiaátadást, energiaközlést nevezzük munkának. A példából is látszik: sokféle energiafajta van, mozgási, helyzeti, belső energia, stb. A különböző energiafajták egymásba alakulhatnak, az összes energiafajtát tekintve egy zárt rendszerre érvényes azonban az energiamegmaradás elve, a fizika egyik alapvető törvénye.
Az élet egyik jellemző velejárója is az állandó energiaátalakítás. Az életfunkciók fenntartásához szükséges energia kémiai reakciókból származik. Ez az energia később mint például a vér áramlásához kötődő mozgási energia jelentkezik, vagy például ebből az energiából tudnak az izmok mechanikai munkát végezni. A szervezet által felhasznált energia nagy része egy első pillantásra nem is igen látható célra fordítódik: az ionpumpák működtetésére. Egyedül a nátrium-kálium pumpa felemészti egy sejt ATP energiáinak közel 70%-át a megfelelő ionkoncentrációk beállítására.
Példaként tekintsük még a szív bal kamrájának izomzata által végzett mechanikai munkát: a kipumpált vért az aortaívig fel kell emelni, és fel is kell gyorsítani a megfelelő áramlás fenntartása végett. Összesen a szív egy összehúzódás során kb. 1 joule munkát végez, átlagteljesítménye kb. 1 watt. Nem nagy értékek, de élethosszig-lan érvényesek!

A munka és az energia is a testek közötti kölcsönhatások leírására szolgálnak, de alkalmazhatósági körük szélesebb az erőénél. Például termikus vagy kémiai kölcsönhatások leírására is használhatók. (Bevezetésük azonban a mechanikai kölcsönhatásoknál a szokásos, mert talán itt a legegyszerűbb.)

Munka (szokásos jelölése W): Ha egy test egyenes mentén mozog, és egy állandó nagyságú, a mozgással azonos irányú erő F hat rá, akkor ez az erő

$$W = F \cdot s$$

munkát végez a testen, ahol s a test által megtett utat jelöli. Azaz a munka nem csak a kölcsönhatás erősségét (az erőt) jellemzi, hanem azt is, milyen hosszú úton „működik” a kölcsönhatás. Amennyiben az erő iránya nem esik össze a mozgás irányával, akkor az erőnek a mozgás irányába eső vetületét kell venni, azaz a fenti kifejezést meg kell szorozni a két vektor által bezárt α szög koszinuszával:

$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha .$$

A munka SI-mértékegysége a **joule** (J; 1 J = 1 N·m). A munka skaláris mennyiség, nem rendelkezik iránnyal. (A munka fenti fizikai definíciójából származik egy érdekesség, amire fel szeretnénk hívni a figyelmet: ha az erő és a mozgás iránya merőleges egymásra ($\alpha = 90°$ és $\cos\alpha = 0$), akkor a munka nulla. Például, ha valaki egy koffert odébb visz, fizikai értelemben nincs munkavégzés, hiszen a kofferre kifejtett erő függőlegesen hat, a koffer mozgása pedig vízszintes.) A mechanikában három egyszerű, de gyakori szituációra szoktuk alkalmazni a fenti általános definíciót: ha egy testet valamely erővel gyorsítunk (gyorsítási munka), a nehézségi erőtérben felemelünk (emelési munka), ill. ha egy rugót megnyújtunk (nyújtási munka). Ezekről kicsit részletesebben az egyes mechanikai energiafajtáknál beszélünk.

Teljesítmény (szokásos jelölése P): az időegység alatt végzett munka, azaz a t idő alatt végzett W munkát osztjuk az idővel:

$$P = \frac{W}{t} .$$

A teljesítmény SI-mértékegysége a **watt** (W; 1 W = 1 J/s).

Energia (szokásos jelölése E): egy test vagy rendszer munkavégző képessége. Egy testen végzett munka révén növekszik vagy csökken a test energiája. A munka és az energia tehát azonos jellegű mennyiségek, mértékegységük is azonos, a joule. A fizikában és az orvostudományban használatosak még a következő mértékegységek: az elektronvolt (eV) és a kalória (cal). Az átváltások: 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, és 1 cal = 4,19 J.

Sokféle energiafajta van: mechanikai, elektromos, belső, stb. A mechanikai energiafajták: mozgási, helyzeti és rugalmas.

Mozgási energia vagy **kinetikus energia** (szokásos jelölése E_{kin}): a test mozgásállapotát jellemző energiafajta. A test sebességétől (v) és tömegétől (m) függ:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 .$$

Egy rövid indoklás a képlethez: Ahhoz, hogy egy m tömegű testet álló helyzetből t idő alatt egyenletesen v sebességre gyorsítsunk, $a = \frac{v}{t}$ gyorsulást kell elérni, ehhez pedig $F = ma = m\frac{v}{t}$ erő szükséges, mégpedig $s = \bar{v}t = \frac{v}{2}t$ úton. Az eközben végzett gyorsítási munka a munka definíciós képletéből kiindulva és a fentieket figyelembe véve:

$$W = F \cdot s = m\frac{v}{t} \cdot \frac{v}{2}t = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ez a gyorsítási munka jelenik meg és „tárolódik" a test megváltozott mozgásállapotában mint mozgási energia. Az így tárolt energia akár munkavégzésre is használható, pl. amikor a kilendített faltörő kossal falat törnek.

Helyzeti energia vagy **potenciális energia** (szokásos jelölése E_{pot}): a testnek a Föld nehézségi erőterében elfoglalt helyzetét jellemző energiafajta. Képlete:

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h ,$$

ahol g a szabadesés gyorsulása és h egy önkényesen választott nullszinttől mért magasság. Egy rövid indoklás a képlethez: Ahhoz, hogy egy m tömegű testet a nullszinttől h magasságba emeljünk mg erőt kell kifejtenünk h úton, tehát a végzett emelési munka:

$$W = F \cdot s = mgh .$$

Ez a munka jelenik meg mint helyzeti energia. Például az emberi tesben álló helyzetben a szívnek a kipumpált vér az aortaívig kell emelnie, a végzett emelési munka a vér helyzeti energiájában jelenik meg.

Rugalmas energia (szokásos jelölése E_{rug}): a rugó megnyújtott állapotát jellemző energiafajta. Képlete:

$$E_{\text{rug}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2 .$$

Egy rövid indoklás a képlethez: A rugó nyújtása közben egyenletesen növekvő erőt kell kifejtenünk, a végén az s megnyúláshoz a Hooke-törvény szerint $D \cdot s$ nagyságú erő szükséges. Az átlagos erő a számtani közép: $\frac{1}{2}Ds$. Ezzel számolva végig az s úton, a végzett nyújtási munka:

$$W = F \cdot s = \frac{1}{2}Ds \cdot s = \frac{1}{2}Ds^2 .$$

Ez a nyújtási munka tárolódik a megnyújtott rugóban mint rugalmas energia. A megfeszített íj rugalmas energiája hasznosul, amikor a nyilat kilövik. Az emberi testben az inakban/szalagokban tárolt rugalmas energia fontos szerepet játszik a mozgásban. Ha leguggolunk, könnyebben esik ugyanazzal a lendülettel rögtön felállni, mintha várakozás után állunk fel. Az első esetben ugyanis a megnyújtott inakban/szalagokban tárolt energiát visszanyerjük. Hosszasabb guggolásnál azonban az inak egy relaxációs folyamat során ezt az energiát elvesztik.

Az energiamegmaradás törvénye: Egy zárt rendszerben a mechanikai (mozgási, helyzeti és rugalmas) energiák összege állandó. Képletszerűen:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{rug}} = \text{állandó} .$$

Zárt az a rendszer, amelyben a testek csak egymással állnak kölcsönhatásban, a rendszeren kívüli testekkel nem. Zárt rendszer például a Föld és a Föld gravitációs erőterében lefelé eső test, ha a test és a levegő közötti súrlódás, a légellenállás elhanyagolható. A példában a mozgási és helyzeti energia egymásba alakulhat, de összegük állandó marad.
A mechanika energia megmaradását kimondó törvényt más energiafajták (pl. belső energia) bevonásával általánosítani lehet: Zárt rendszer energiája állandó.

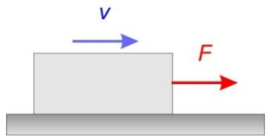
Tömeg-energia ekvivalencia (egyenértékűség): az Einstein-féle relativitáselmélet egyik eredménye, mely szerint egy m tömeggel rendelkező test

$$E = m \cdot c^2$$

ún. nyugalmi energiával rendelkezik. A képletben c a vákuumbeli fénysebességet jelöli ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Vannak olyan jelenségek, ahol a tömeg energiává alakul és fordítva. Például egy orvosi képalkotó eljárásban, a pozitronemissziós tomográfiában (PET), a páciensnek beadott radioaktív izotóp által kibocsátott pozitronok elektronokkal találkozva az ún. „annihilációs" folyamatban mint részecskék megsemmisülnek, belőlük a fenti képlet szerinti energiájú γ-sugárzás keletkezik.

***Feladatok**:*

1. Egy apa $F = 30$ N nagyságú vízszintes irányú erőt kifejtve $v = 2{,}5$ m/s-os állandó sebességgel húzza a szánkót.
a) Mekkora munkát végez az apa 10 perc alatt?
b) Hány Milka mogyorós szelet fedezi ennek a munkának az energiaigényét, ha egy szelet energiatartalma 535 kcal?
c) Mekkora az édesapa teljesítménye?
d) Mekkora súrlódási erő hat a szánkóra?



2. Egy autó ($m = 1{,}2$ t) álló helyzetből 12 s alatt egyenletesen gyorsul fel 100 km/h sebességre.
a) Mekkora erő szükséges a felgyorsításhoz?
b) Hány méter távolságot tesz meg az autó a felgyorsítás alatt?
c) Mekkora a gyorsító erő munkája?
d) Mekkora az átlagos teljesítmény?
e) Mekkora mozgási energiával rendelkezik az autó a felgyorsítás végén?

3. Egy kisgyerek a szánkójával (össztömegük: 30 kg) 4 m/s sebességgel érkezik meg a lejtő aljára. A vízszintes kifutón egyenletesen lassulva még 24 m utat tesz meg.
a) Mekkora a szánkó és gyerek együttesének mozgási energiája a lassulás kezdetekor?
b) Mekkora munkát végez a súrlódási erő, ami lelassítja a szánkót?
c) Mekkora ez a súrlódási erő?

4. Az emberi szív bal kamrája egy összehúzódás során durván 70 g tömegű vért pumpál ki. Ennek során ez a vérmennyiség az aortaívig nagyjából 15 cm-el magasabbra kerül, és körülbelül 30 cm/s-os áramlási sebességre tesz szert. Határozza meg
a) az emelési munkát,
b) a gyorsítási munkát és
c) a bal kamra izomzatának teljesítményét, ha az összehúzódás ideje 0,2 s!

5. Egy 8 m mély kútból húzunk fel egyenletes 50 cm/s-es sebességgel egy vízzel teli vödröt ($m = 12$ kg, ebben benne van a 10 liter víz is). Mekkora a) a szükséges erő, b) a végzett munka és c) a teljesítmény? d) Hány kcal energiával egyenértékű az ember munkája, ha egész nap dolgozva összesen 4,8 m^3 vizet emel ki a kútból?

6. Mennyi energiát tárol egy 5 cm-el megnyújtott csavarrugó, amelynek rugóállandója $D = 400$ N/m?

7. Mennyi energiát tárol az Achilles-ín 2 mm-es megnyúlásnál, ha rugóállandója $3 \cdot 10^5$ N/m?

8. Egy kis méretű, 30 dkg tömegű betondarab leválik egy omladozó erkélyről, és 20 m magasságból leesik. A közegellenállás elhanyagolása mellett számolja ki a betondarab mozgási, helyzeti és összes energiáját
a) induláskor és
b) a földet érés pillanatában!
c) Hány km/h-s sebességgel vágódik a betondarab az útra?

9. Egy labda ($m = 0{,}8$ kg) 2 m magasságból leesik és a földön pattanva 1,2 m magasra repül vissza. Mennyi mechanikai energia veszett el összesen a közegellenállás miatt és a talajjal való ütközés során?

10. Mekkora egy elektron nyugalmi energiája ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg)? Számolja át ezt az energiát J egységből eV egységbe!

Megoldások:

1. a) A szánkó 10 perc (= 600 s) alatt $s = v \cdot t = 2{,}5 \cdot 600 = 1500\,\text{m}$ utat tesz meg. A végzett munka: $W = F \cdot s = 30 \cdot 1500 = 45000\ \text{J} = 45\ \text{kJ}$.

b) Egy szelet energiatartalma 535 kcal = 535 000·4,19 = 2 241 650 J. Az apa munkáját tehát $\frac{45000}{2241650} = 0{,}02$ szelet, azaz 1/50 szelet fedezi! (Persze az emberi test energiaátalakítása nem 100%-os!)

c) A teljesítmény: $P = \frac{W}{t} = \frac{45000}{600} = 75\ \text{W}$.

d) Mivel a szánkó állandó sebességgel mozog, azaz nem gyorsul, a rá ható erők eredője nulla kell legyen. Az apa húzóereje éppen egyenlő az ellentétes irányban ható súrlódási erővel, amely tehát 30 N nagyságú.

2. a) 2780 N; b) 167 m; c) 463 kJ; d) 37,8 kW; e) 463 kJ

3. a) A mozgási energia: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4^2 = 240$ J.

b) A rendszer a lassulás során teljes mozgási energiáját elveszti, így a fékező erő munkája éppen egyenlő ezzel az energiával, csak ellentétes előjelű: –240 J. (A rendszer energiája csökken, tehát megváltozása negatív, így a munka is.)

c) Az F_s súrlódási erő munkája $W = F_s \cdot s$. A munkát már tudjuk, így a súrlódási erő kiszámolható: $F_s = \frac{W}{s} = \frac{-240}{24} = -10$ N. (A negatív előjel mutatja, hogy a súrlódási erő ellentétes irányú a szánkó mozgásával.)

4. a) 0,103 J; b) 0,003 J; c) Az összes munka 0,106 J, és ezzel a teljesítmény az összehúzódás ideje alatt 0,53 W. (A szív összmunkája ennél kb. tízszer nagyobb, az átlagteljesítmény meghatározásánál viszont figyelembe kell venni a kb. 0,8 s ideig tartó szünetet is, így jönnek ki a fejezet bevezetőjében említett 1 J, ill. 1 W értékek.)

5. a) 118 N; b) 942 J; c) 58,9 W; d) 108 kcal

6. A rugalmas energia képletéből: $E_{\text{rug}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2 = \frac{1}{2} 400 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}5\ \text{J}$.

7. 0,6 J

8. a) Induláskor (1):

$E_{\text{kin},1} = 0$, $\quad E_{\text{pot},1} = m \cdot g \cdot h = 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot 20 = 58{,}86\text{J}$, $\quad E_{\text{össz},1} = 0 + 58{,}86 = 58{,}86\ \text{J}$,

feltéve, hogy a helyzeti energia nullszintjét az út magasságában rögzítettük.

b) Földet éréskor (2):

$E_{\text{pot},2} = 0$.

Mivel a súrlódást elhanyagoltuk, érvényes az energiamegmaradás törvénye, így:

$E_{\text{össz},2} = E_{\text{össz},1} = 58{,}86\ \text{J}$, ebből pedig

$E_{\text{kin},2} = E_{\text{össz},2} - E_{\text{pot},2} = 58{,}86 - 0 = 58{,}86\ \text{J}$.

c) Az előző feladatrészből: $E_{\text{kin},2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 58{,}86\,\text{J}$. Ebből a sebesség:

$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin},2}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 58{,}86}{0{,}3}} = 19{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 71{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (A közegellenállás miatt ennél azért kisebb a sebesség!)

9. 6,28 J

10. A tömeg-energia ekvivalencia szerint:

$E = m \cdot c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 8{,}2 \cdot 10^{-14} / 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{eV} = 513\ \text{keV}$.

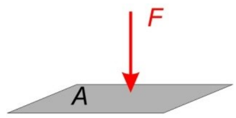
6. Mechanika — nyomás

A nyomás fogalmával is találkozhatunk nem csak a fizikában, hanem többek között a kémiában és az élettanban is. A mindennapi orvosi gyakorlatban például a vérnyomás mérésnél.
A vérnyomás és mérése annyira alapvető jelentőségű, hogy néhány sort még ebben a rövid jegyzetben is szánunk rá. A vér össznyomását a szív által létrehozott nyomás és az ún. hidrosztatikai nyomás együttesen adja. Ez utóbbi erősen függ attól, hogy fekszünk vagy állunk — ezt hirtelen felállásnál érezhetjük is. A vérnyomást bonyolult mechanizmus szabályozza, amelyben több szerv (pl. a szív, a vese, az erek, …) ist részt vesz.
A vérnyomás egy szívciklus során a különböző érszakaszokon eltérő mértékben, de ingadozik. A legmagasabb értéket szisztolés, a legkisebbet pedig diasztolés értéknek nevezzük.
A vérnyomást általában a felkaron mérik. Ennek során a felkarra helyeznek egy rugalmas mandzsettát, amelyet fel lehet fújni és benne a nyomást egy nyomásmérővel (manométerrel) mérni. A felfújódó mandzsetta a felkart összeszorítja és a felkarban futó artéria (A. brachialis) elzáródik. Ezután lassan csökkentjük a mandzsettában a nyomást, és amikor az éppen a vér szisztolés nyomása alá csökken, az újra induló véráramlás egy jól hallható (vagy egy szenzorral érzékelhető) hangot kelt. (Az épp egy kicsit megnyíló érben meginduló áramlás erősen gomolygó, zajos, ez az ún. Korotkov-hang.) Ebben a pillanatban leolvassuk a manométer által mutatott nyomásértéket, ez lesz a szisztolés nyomás. Ahogyan a nyomást tovább csökkentjük, az áramlás gomolygóból csendes, réteges áramlásba vált át, a Korotkov-hang eltűnik. Az e pillanatban leolvasott nyomásérték a diasztolés érték.

Ha egyik esetben egy szivacsra rátenyerelünk, a másik esetben ugyanakkora erővel, de csak egy ujjunkkal nyomjuk a szivacsot, egészen más lesz a szivacs deformációja. Bizonyos esetekben fontos az, hogy a testre ható erő mekkora felületen oszlik el. Ezt vesszük figyelembe egy új mennyiség, a *nyomás* bevezetésével.

Nyomás (szokásos jelölése p): az A felületre merőlegesen ható F erő — amely a felületen egyenletesen oszlik el — és az A felület hányadosa:

$$p = \frac{F}{A}\,.$$



A nyomás SI-mértékegysége a **pascal** (Pa; 1 Pa = 1 N/m^2). A technikában és az orvosi gyakorlatban használt más mértékegységek többek között a bar (bar), a fizikai atmoszféra (atm) és a higanymilliméter (Hgmm), amelyett torr-nak (torr) is nevezünk. Az átváltások:

1 bar = 10^5 Pa, 1 atm = $1{,}01\cdot10^5$ Pa, 1 Hgmm = 133 Pa.

A nyomást gázok és folyadékok belső állapotának jellemzésére is felhasználhatjuk. Az ezekben a közegekben uralkodó nyomás szoros összefüggésben van *sűrűség*ükkel.

Sűrűség (szokásos jelölése ρ): a homogén test tömegének (m) és térfogatának (V) hányadosa:

$$\rho = \frac{m}{V}\,.$$

Ha a test nem homogén, akkor a fenti képlet az átlagsűrűséget adja. A sűrűség SI-mértékegysége a kg/m^3, de a gyakorlatban gyakrabban használják a kg/dm^3 és a g/cm^3 egységeket. Az átváltások:

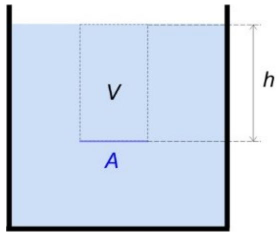
$$1\ \mathrm{g/cm^3} = 1\ \mathrm{kg/dm^3} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Az anyagok sűrűsége nagyon különböző és — különösen a gázoké — a körülményektől, pl. a hőmérséklettől és nyomástól is függ. Néhány példát láthatunk a következő táblázatban:

Néhány sűrűségérték

anyag	ρ (g/cm^3)
levegő (0°C és 101 kPa mellett)	0,00129
víz (4°C és 101 kPa mellett)	1
víz (100°C és 101 kPa mellett)	0,958
jég	0,92
alumínium	2,7
higany	13,6
arany	19,3
emberi test (átlagérték)	1,04

A sűrűség ismeretében most megtárgyalhatjuk a gázokban és folyadékokban a Föld gravitációs erőterében spontán fellépő nyomást, amit *hidrosztatikai nyomás*nak nevezünk — akkor is, ha nem vízről van szó.



Hidrosztatikai nyomás: a gázokban és folyadékokban a nehézségi erő miatt fellépő nyomás. Levezetéséhez tekintsük az ábrán szaggatott vonallal kijelölt folyadékot mint egy különálló testet. Ez a h magasságú test az alatta lévő folyadékot mint „alátámasztást" az A felületen érintkezve

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$$

súlyerővel nyomja. A képletben ρ a folyadék sűrűsége, V a kijelölt test térfogata, g pedig a szabadesés gyorsulása. Ebből az A felületen ható nyomóerőből származó nyomás a definíciós képlet szerint:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot h \cdot g \,.$$

Az eredmény szerint a folyadékban (ill. gázban) uralkodó nyomás a mélységgel egyenes arányban növekszik. A levezetésben azonban feltételeztük, hogy a sűrűség minden mélységben ugyanaz. Ez folyadékokra még elég jó közelítés, gázokra azonban nagyobb tartományban — pl. az atmoszférában — már kevésbé. Emiatt az atmoszférában a nyomásfüggés eléggé különbözik az egyenes arányosságtól.
A hidrosztatikai nyomást jól érzékelhetjük dobhártyánk segítségével, ha pl. egy tóban vagy tengerben egy kicsit mélyebbre merülünk.
Itt jegyezzük még meg, hogy a régi, de az orvosi gyakorlatban még használatos Hgmm egység meghatározása: az a hidrosztatikai nyomás, amelyet 1 mm magas higanyoszlop kifejt. Ha a fenti képletbe behelyettesítjük a h = 1 mm = 0,001 m értéket, valamint a higany sűrűségét (13,6 g/cm^3) és a g értékét, akkor közelítőleg 133 Pa-t kapunk. Ez a korábban már megadott átváltási faktor a Hgmm és a pascal egységek között.

Hidrosztatikai paradoxon: a hidrosztatikai nyomás csak a folyadék sűrűségétől és a folyadékoszlop magasságától függ, tehát pl. a folyadékot tartalmazó edény alakjától nem. Így az ábrán látható edények alján ugyanaz a nyomás, mert a folyadékoszlop magassága is ugyanaz, bár első pillantásra azt gondolhatnánk, hogy pl. a jobb oldali edényben a nagyobb folyadékmennyiség miatt a nyomás is nagyobb.

Röviden foglalkozzunk még a gázokkal.

Gáz nyomásának értelmezése: A gáz részecskéi (atomok vagy molekulák) állandó mozgásban vannak, eközben egymással és a gázt tartalmazó edény falával is ütköznek. Az ütközés során erőt fejtenek ki a falra. Ezek az erők ugyan nagyon kicsik és rövid ideig hatnak, de a részecskék száma óriási. Ezeknek az erőknek együttese adja a gáz nyomását.

Légköri nyomás (légnyomás): A levegő nyomása a tengerszinttől felfelé haladva csökken, de nem egyenletesen, mint ahogy azt már említettük, hanem exponenciálisan. Kb. 5000 méter magasságban a nyomás már csak a fele a tengerszinti értéknek. A levegő nyomása adott helyen és magasságban nem állandó, hanem kisebb-nagyobb mértékben ingadozik a hőmérséklettől és az időjárási viszonyoktól függően. Az önkényesen meghatározott *normál légköri nyomásérték* 101 kPa (1 atm).

Parciális nyomás: gázelegyeknél értelmezhető. A parciális nyomás egy résznyomás, amit akkor fejtene ki a gázelegy valamely komponense, ha az egyedül töltené ki a rendelkezésre álló teljes térfogatot. A komponensek parciális nyomásának összege adja a gáz össznyomását. Például a levegő oxigén, nitrogén, széndioxid, víz, stb. elegye. Az oxigén aránya kb. 21%, így a teljes 101 kPa-os nyomásból kb. 21,2 kPa az oxigén parciális nyomása. Az emberi szervezet oxigén felvétele és leadása egyéb tényezők mellett alapvetően attól függ, mekkora az oxigén parciális nyomása a tüdőben ill. a vérben. Ha a tüdőben túl kicsi az oxigén parciális nyomása (pl. nagy magasságokban), akkor a szervezet oxigén ellátása nem lesz elégséges. Ehhez a szervezet tud alkalmazkodni, pl. megnövekszik az oxigént szállító hemoglobin, ill. a vörösvértestek mennyisége a vérben.

***Feladatok**:*

1. Újraélesztésnél az orvos a tenyerével elég nagy erőt fejt ki a beteg mellkasára. Mekkora a mellkason a nyomás, ha egy adott esetben ez az erő 280 N nagyságú?

2. Embernél a rágóerők nagyjából 100 N nagyságrendűek (krokodilnál inkább 1000 N!). Amikor az ember ráharap egy csontszilánkra, vagy egy pici magra, akkor ez az erő kb. 1 mm^2 felületre koncentrálódik. Mekkora ilyenkor a nyomás?

3. a) Mekkora nyomást fejt ki egy 70 kg tömegű, álló ember a padlóra? (A két talp együttes felületét kb. 200 cm^2-nek becsülhetjük.)
b) Mekkora nyomást fejt ki ez az ember korcsolyázás közben a jégre? (A korcsolya élének felületét vegyük 4 cm^2-nek.)

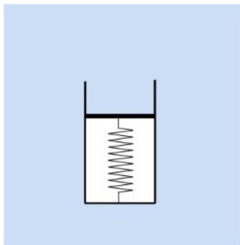
4. Egy kísérletben megmértük Péter tömegét: 82 kg. Testtérfogatát úgy határozzuk meg, hogy megkérjük, merüljön bele teljesen egy álló henger alakú kádban a vízbe. A kád alaplapja éppen 1 m^2 területű. Amikor Péter belemerül, a vízszint 7,9 cm-el emelkedik. Határozza meg
a) Péter testtérfogatát cm^3, valamint liter egységekben és
b) átlagos testsűrűségét!

5. a) Mekkora a tömege egy 10 cm élhosszúságú arany kockának?
b) Mekkora nyomást fejt ki ez a kocka a vízszintes polcra, amelyen nyugszik?

6. Valaki 10 m mélyre merül egy 4°C hőmérsékletű tóban. Határozza meg:
a) az ebben a mélységben uralkodó hidrosztatikai nyomást,
b) a teljes nyomást (a légköri nyomás 101 kPa) és
c) a víz felől az illető dobhártyájára ható nyomóerőt! (A dobhártya felületét vegyük 55 mm^2-nek!)

7. Mekkora a nyomás (azaz a teljes nyomás!) 1 km mélyen a tengerben, ha a tengervíz sűrűsége minden mélységben $1{,}08 \cdot 10^3$ kg/m^3?

8. Az ábrán egy olyan összeállítást látunk, amellyel elvileg egyszerűen mérhetünk nyomást. A kis, henger alakú edényben vákuum van, az edényt egyik oldalról egy könnyen mozgó, de a vákuumot mégis jól záró, kis tömegű dugattyú zárja, amelyet egy nyomó rugó köt a másik oldalhoz. Ha a készüléket vákuumba helyezzük, a rugó összenyomatlan állapotban van. A dugattyú keresztmetszete 2 cm^2, a rugó rugóállandója pedig $4 \cdot 10^3$ N/m.



a) Ha a készüléket a légkörbe helyezzük, a rugó összenyomódása 5,1 mm. Mekkora a légköri nyomás?
b) Mekkora a rugó összenyomódása, ha az előző feladatrészbeli légköri nyomás mellett a készüléket egy 4°C hőmérsékletű tóban 10 m mélyre visszük?

9. Mekkora hidrosztatikai nyomást produkál a nagyvérkörben lévő vér egy álló ember lábfejében? A vér sűrűsége 1,05 g/cm^3, az ember magasságát vegyük 170 cm-nek.

10. Váltsa át!
a) 180 mmHg = ...Pa
b) 16 kPa = ...mmHg
c) 2,5 bar = ...Pa
d) 760 mmHg = ...bar = ...atm

Megoldások:

1. A nyomás a felülettől is függ, amely a feladatban nincs pontosan megadva. De megbecsülhetjük, vagy akár nagyjából megmérhetjük ezt a felületet. Például a szerző tenyerének felülete nagyjából egy 8 cm×17 cm-es téglalap felületével közelíthető, ami 8 cm · 17 cm = 136 cm^2 nagyságú. Mivel elég durva közelítésről van szó, ezt akár 140 cm^2–re is kerekíthetjük. Így a nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{280}{0{,}014} = 20000\,\mathrm{Pa} = 20\,\mathrm{kPa}.$$

2. 100 MPa (!), azaz a normál légköri nyomásnak kb. tízszerese.

3. a) 34,3 kPa; b) 1,72 MPa!

4. a) A kiszorított víz térfogata egy henger térfogata, amelynek alaplapja 1 m^2 = 10 000 cm^2, magassága pedig 7,9 cm: $V = A \cdot h = 10\,000 \cdot 7{,}9 = 79\,000\ \mathrm{cm}^3 = 79\ \mathrm{dm}^3 = 79\,\mathrm{l}$.
b) A sűrűség: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{82\,000}{79\,000} = 1{,}038\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1038\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

5. a) 19,3 kg; b) 18,9 kPa

6. a) Először átváltjuk a megadott sűrűség értéket: 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3. A hidrosztatikai nyomás:
$p = \rho \cdot h \cdot g = 1000 \cdot 10 \cdot 9{,}81 = 98100\,\mathrm{Pa} = 98{,}1\,\mathrm{kPa}$.
(Tehát lefelé haladva a nyomás megközelítőleg 10 m-enként nő egy atmoszférával.)

b) A teljes nyomás a víz által létrehozott hidrosztatikai nyomás és a légköri nyomás összege. A tó felszínére kívülről ható légköri nyomás ugyanis a vízben gyengítetlenül terjed és mindenütt megjelenik. Így a teljes nyomás: $p_{\text{össz}} = p_{\text{hidrosztatikai}} + p_{\text{légköri}} = 98{,}1\,\mathrm{kPa} + 101\,\mathrm{kPa} = 199\,\mathrm{kPa}$.

c) A felület tehát $55 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$ nagyságú. Így a nyomóerő: $F = p \cdot A = 199000 \cdot 55 \cdot 10^{-6} = 10{,}9\,\mathrm{N}$.

7. 10,7 MPa

8. a) $1{,}02 \cdot 10^5$ Pa; b) 10,1 mm

9. 17,5 kPa

10. a) 180 Hgmm = 23,9 kPa
b) 16 kPa = 120 Hgmm
c) 2,5 bar = 250 kPa
d) 760 Hgmm = 1,01 bar = 1 atm

7. Mechanika — rezgések

A rezgések és a velük kapcsolatos jelenségek például az emberi hangképzésnél és hallásnál játszanak fontos szerepet. A hangszálak rezgései keltik a hangokat, míg a dobhártya rezgései jelentik az első lépést a hangérzékelés folyamatában. Ebben a folyamatban több helyen is fellép egy a rezgésekkel kapcsolatos jelenség, a rezonancia. A külső hallójárat és a középfül hallócsontocskáinak rendszere különböző rezonanciafrekvenciákkal bírnak, ezekkel lehet magyarázni, miért éppen az 1000–4000 Hz frekvenciatartományban hallunk a legjobban. A rezgés fogalmát a mechanikán túllépve általánosabban is használhatjuk — egy mennyiség periodikus változását értjük alatta. Elektromos rezgés például az elektromos feszültség periodikus változása. A rezgéstani ismeretek ezeknél a jelenségeknél is jól használhatók. A szervezetben sok periodikus, jobban mondva „kvázi-periodikus" (majdnem periodikus) változás figyelhető meg, pl. a testhőmérséklet napi, vagy bizonyos hormonszintek négyhetes ingadozása, vagy a szívműködés során az elektromos potenciál változása (EKG-jelek).

Rezgőmozgást végez egy test, ha egy egyensúlyi állapot körül periodikus (ismétlődő) mozgást végez. Rezgés például a rugóra függesztett test vagy a hinta mozgása.

Periódusidő vagy **rezgésidő** (szokásos jele T): egy rezgési periódus időtartama. Alapegysége természetesen a másodperc (s).

Frekvencia vagy **rezgésszám** (szokásos jele f): egy időegység alatti periódusok száma, a periódusidő reciproka:

$$f = \frac{1}{T}.$$

A frekvencia SI-mértékegysége a hertz (Hz; 1 Hz = 1/s). Például az emberi szív nyugalmi frekvenciája átlagosan 72 1/perc = 1,2 1/s, azaz 1,2 Hz. A percenkénti 120-as pulzus 2 Hz-et jelent, ekkor a szív periódusideje 0,5 s.

Körfrekvencia (szokásos jele ω): a frekvencia 2π-szerese (a körmozgás szögsebességének felel meg):

$$\omega = 2\pi \cdot f.$$

SI-mértékegysége az 1/s.

Egyensúlyi helyzet: az a helyzet, amely körül a test a rezgőmozgást végzi, és amelyben a testre ható eredő erő nulla, így gyorsulása is nulla.

Kitérés (szokásos jele y): a test pillanatnyi távolsága az egyensúlyi helyzettől.

Amplitúdó (szokásos jele A): a maximális kitérés.

A rezgés időbeli lefutása, azaz a kitérés-idő diagram sokféle lehet, egy speciális esete a *harmonikus rezgőmozgás*.

Harmonikus rezgés: egy egyenes mentén történő rezgés, amelyben a kitérés az idő szinuszos függvénye:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

ahol A az amplitúdót, ω a körfrekvenciát, φ_0 pedig a **kezdő fázisszög**et jelöli. A szinuszfüggvény argumentuma, azaz $\omega \cdot t + \varphi_0$ a **fázisszög** vagy röviden **fázis**. Egy harmonikusan rezgő test sebessége is periodikusan változik a

$$v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

függvény szerint. Maximális értéke $\omega \cdot A$, amelyet az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor ér el, amikor a kitérés nulla. A sebesség a fordulópontokban egy pillanat erejéig zérus, amikor viszont a kitérés maximális.

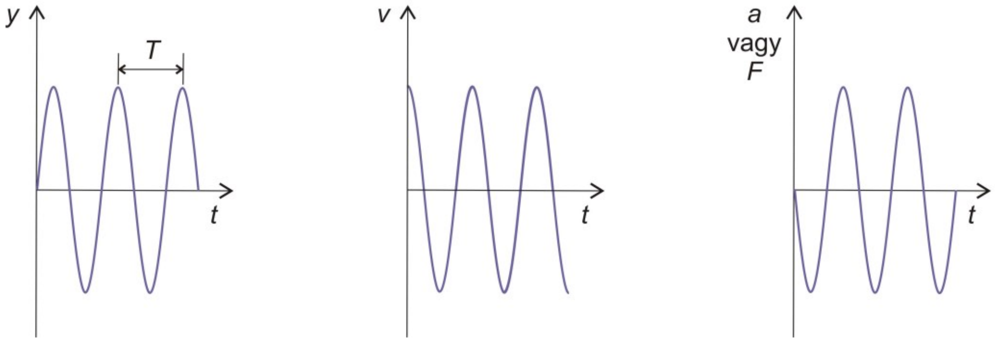
(A kisgyerek is tudja, hogy ha a hintából ki akar ugrani, akkor a legalsó helyzetben igencsak szednie kell a lábát, különben hasra esik. A szélső helyzetben csak lepottyan, igaz, hogy akkor meg kicsit magasabbról.) A rezgést végző test sebessége tehát állandóan változik, gyorsul, ill. lassul, és gyorsulása is periodikusan az

$$a = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

függvény szerint változik. A gyorsulás az egyensúlyi helyzetben nulla, a szélső helyzetekben maximális. A harmonikus rezgőmozgást végző testre ható erő Newton II. törvénye szerint

$$F = ma = -m\omega^2 A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -m\omega^2 y$$

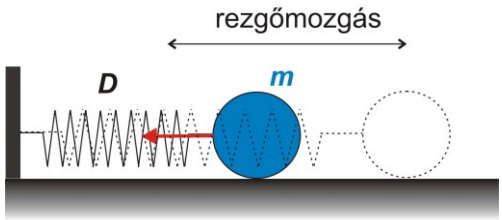
nagyságú kell, hogy legyen. Tehát az erő is periodikusan változik, és minden pillanatban arányos az y kitéréssel, csak éppen ellentétes előjelű. (Ha a hinta jobbra tér ki, a rá ható erő balra, az egyensúlyi helyzet felé mutat.) Ezt a mindig az egyensúlyi helyzet felé mutató erőt visszatérítő erőnek is nevezzük. A következő ábrasor a kitérés, a sebesség és a gyorsulás, ill. erő időbeli változását mutatja harmonikus rezgőmozgásra, ha a kezdő fázisszög $\varphi_0 = 0$.



Oszcillátor: egy fizikai rendszer, amely rezgésre képes (pl. egy rugó a ráfüggesztett testtel). Ha a rendszer harmonikus rezgést végez, **harmonikus oszcillátor**nak nevezzük.

Harmonikus oszcillátor például egy rugó a ráfüggesztett testtel és a matematikai inga (fonálinga). De csak akkor, ha a mozgás során nincs energiaveszteség, ill. az a vizsgált időtartam alatt elhanyagolhatóan kicsi. A *fonálinga* egy vékony fonálon függő test. Az egyensúlyi helyzetből való kis kitérítés esetén a nehézségi erő és a fonálban ébredő erő együttes hatására megközelítőleg szinuszos rezgést végez. A Foucault-inga, amellyel a Föld forgását oly egyszerűen ki lehet mutatni, ilyen fonálingának tekinthető. A továbbiakban azonban a rugós harmonikus oszcillátorral foglalkozunk részletesebben.

Rugós oszcillátor: egy D rugóállandójú rugó és a ráfüggesztett m tömegű test együttese. A test az egyensúlyi helyzetéből való kitérítés után a rugóban ébredő visszatérítő erő hatására spontán módon (tehát további külső behatás nélkül) harmonikus rezgőmozgást végez — feltéve, hogy a súrlódásos energiaveszteség elhanyagolhatóan kicsi. Az ilyen további külső behatás nélküli rezgést nevezzük **szabad rezgés**nek vagy **sajátrezgés**nek. A rugós oszcillátor frekvenciája



$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}\,.$$

Ezt a frekvenciát nevezzük az oszcillátor **sajátfrekvenciá**jának. A képletet a visszatérítő erőre felírt általános

$$F = -m\omega^2 y$$

képlet és a megnyújtott rugóban ébredő erőre korábban, a 4. fejezetben tanult

$$F = -D \cdot s$$

Hooke-törvény összehasonlításával kaphatjuk meg. (Az összehasonlításnál vegyük figyelembe, hogy az y kitérés és az s megnyúlás most ugyanazt jelentik.). Az összehasonlításból adódó összefüggés:

$$D = m \cdot \omega^2,$$

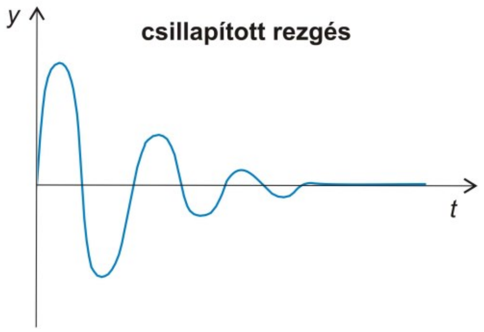
amelyből ω kifejezhető:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

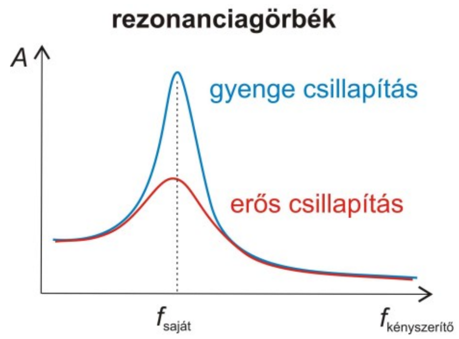
Végül a sajátfrekvencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Csillapított rezgés: az energiaveszteségek miatt egyre csillapodó rezgés, amelynek az amplitúdója folyamatosan csökken. Valójában minden szabad rezgés csillapított, hiszen energiaveszteségek, mégha minimálisan is, de mindig vannak. A rugós oszcillátor vagy a fonálinga rezgésének leírása a fenti szinuszfüggvénnyel csak közelítésnek tekinthető. A csillapodás mértéke az oszcillátor belső felépítésétől és a környezettel való kölcsönhatásaitól függ. Ha például egy rugós oszcillátort levegő helyett vízben vizsgálunk, a sűrűbb közegben a csillapodás sokkal gyorsabb lesz.



Kényszerrezgés: olyan rezgés, amikor a rezgő testre az egyensúlyi helyzetbe visszatérítő erőn és a fékező erőhatásokon kívül egy periodikusan változó külső erő is hat. Kényszerrezgést végez a hinta, amikor a szülő kisgyermekét hintáztatja, és minden lengésnél lök egy picit a hintán, hogy a lengés amplitúdóját fenntartsa. (Ezzel szemben, ha csak egyszer kitéríti a hintát, utána hagyja szabadon lengeni, akkor a hinta rezgése szabad rezgés.) Kényszerrezgések a hangszalagok, vagy a dobhártya rezgései is. Például a dobhártya esetében a külső hallójáraton keresztül érkező hanghullámok fejtenek ki periodikus erőt a dobhártyára.



Rezonancia: Ha kényszerrezgésnél változtatjuk a kényszerítő erő frekvenciáját ($f_{kényszerítő}$), akkor azt tapasztalhatjuk, hogy egy bizonyos frekvencia, az ún. **rezonanciafrekvencia** ($f_{rezonancia}$) közelében a rezgések nagyon felerősödnek. A rezonanciafrekvencia értéke megegyezik a test sajátfrekvencia értékével ($f_{saját}$), amely a test szabad rezgésénél lép fel, amellyel a test „szívesen" rezeg. A **rezonanciagörbe** ábrázolja a rezgés amplitúdóját (A) a kényszerítő erő frekvenciájának függvényében. Az ábrán láthatjuk, hogy a frekvencia növekedésével egyre erősödik a rezgés, maximumát a sajátfrekvencia közelében éri el, majd lecsökken. A rezonancia erőssége a csillapítástól is függ. Kis csillapítás esetén rendkívül erős rezgések is előállhatnak, amelyek akár a rezgő rendszer sérüléséhez, töréshez, szakadáshoz is vezethetnek, ezt nevezzük rezonanciakatasztrófának. A klasszikus példa szerint a rezonancia lehetősége miatt nem szabad egy kisebb hídon átmasírozó katonacsapatnak a lépést tartania. Ha ugyanis véletlenül a lépések frekvenciája a híd — mérete, anyaga által meghatározott — sajátfrekvenciájával egybeesne, akkor még a viszonylag kis erők is, amelyeket a katonák lépéskor a hídra kifejtenek, oly erős kényszerrezgésbe hozhatnák a hidat, ami már veszélyes lehetne. A rezonancia jelensége természetesen nem csak mechanikai rezgéseknél fordulhat elő. Érdekes példaként megemlítjük, hogy egy modern és hatékony orvosi képalkotó eljárás nevében is szerepel a rezonancia szó. Ez a mágneses magrezonanciás képalkotás (angol neve után MRI vagy röviden MR).

***Feladatok**:*

1. Egy kerékpár versenyző pulzusa a verseny közben akár 160 1/perc is lehet. Határozza meg a) a szívfrekvenciát hertz egységben és b) a periódusidőt!

2. Egy gyerek hintázik, hintája 15 másodperc alatt 10 lengést végez. Mekkora a lengés a) periódusideje és b) frekvenciája?

3. Egy fonálinga 15 lengést végez egy perc alatt. Mekkora a frekvenciája 1/perc, ill Hz egységben?

4. A szombathelyi székesegyházban látható az ország legrégebben, 1880 óta működő Foucault-ingája. Hossza 30 m, a rá függesztett golyó tömege 30 kg. Lengésideje kerekítve 11 s.
a) Mekkora a frekvenciája?
b) Hány lengést végez az inga egy egész nap alatt?

5. Határozza meg a 440 Hz frekvenciájú normál „a” hang periódusidejét!

6. Állítólag van olyan abszolút hallással rendelkező zenész, aki akkor is felismeri egy 1000 Hz frekvenciájú hang magasságát, ha az csak 4 ms-ig hangzik fel. Hány periódus fér bele ebbe a egészen rövid időbe?

7. Mobiltelefonok használják az 1800 MHz-es frekvenciát. Mekkora ennek a rezgésnek a periódusideje?

8. Melyik állítás igaz a harmonikus rezgőmozgásra?
A: A rezgés amplitúdója növekszik.
B: A rezgés amplitúdója szinuszosan változik.
C: A visszatérítő erő nagysága arányos a kitéréssel.
D: A rezgő test által megtett út az idő lineáris függvénye.

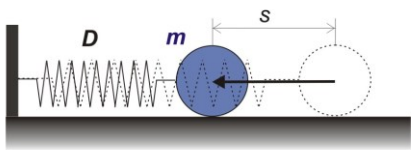
9. Egy harmonikus rezgőmozgás amplitúdója A = 3 cm, periódusideje T = 20 s. Határozza meg
a) a kitérés-idő, a sebesség-idő és a gyorsulás-idő függvényeket,
b) a maximális sebességet,
c) a maximális gyorsulást és
d) a kitérést, a sebességet, valamint a gyorsulást a t = 3 s időpontban!

10. Egy harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye: $y = 3\,\mathrm{cm} \cdot \sin\left(0{,}5\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$. Határozza meg

a) az amplitúdót,
b) a körfrekvenciát,
c) a frekvenciát,
d) a periódusidőt,
e) a maximális sebességet,
c) a maximális gyorsulást és
d) a kitérést, a sebességet, valamint a gyorsulást a t = 2 s időpontban!

11. Vegyük egy hinta lengését harmonikusnak! A legalsó pontban a hinta sebessége 3 m/s nagyságú. A fordulópontokban gyorsulása 3m/s^2 nagyságú. Írja föl a kitérés-idő függvényt!

12. Az ábrán látható rugós oszcillátor paraméterei: m = 3 kg és D = 300 N/m. Kitérítjük a golyót a rugó nyújtatlan helyzetéhez képest s = 10 cm-re balra és elengedjük. Tételezzük fel, hogy nincsen energia-veszteség! Határozza meg
a) a rendszer sajátfrekvenciáját,
b) a rezgés periódusidejét és
c) amplitúdóját!

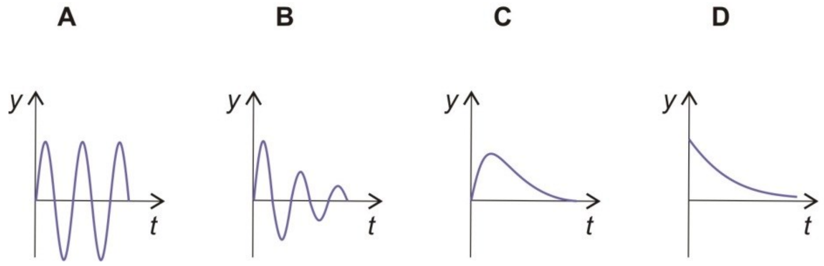


13. Ha egy rugós oszcillátor tömegét 30 g-mal megnöveljük, akkor periódusideje megduplázódik. Mekkora volt az eredeti tömeg?

14. Egy rugós oszcillátor periódusideje 3 s. Ha tömegét 500 g-mal csökkentjük, ez az idő 2 s-ra rövidül. Mekkora a) az eredeti tömeg és b) a rugóállandó?

15. Egy függőlegesen lógó 60 N/m állandójú rugó végére 0,4 kg tömegű golyót kötünk és elengedjük. A rendszer rezgését tekintsük harmonikusnak. Mekkora a mozgás a) amplitúdója és b) periódusideje?

16. Melyik ábra mutat csillapodó rezgést?



Megoldások:

1. a) 2,67 Hz; b) 0,375 s

2. a) 1,5 s; b) 0,667 Hz

3. 15 1/min = 0,25 Hz

4. a) 0,0909 Hz; b) 7854

5. 2,27 ms

6. 4

7. 556 ps

8. C

9. a) Az amplitúdóra (A = 3 cm) és a körfrekvenciára van szükségünk: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
Ezekkel a paraméterekkel, ha a kezdőfázist nullának vesszük ($\varphi_0 = 0$):
$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 3\ \mathrm{cm} \cdot \sin\left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$
$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = 3\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot \cos\left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right) = 0{,}942\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos\left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$
$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -3\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}0986\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin\left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right) = -0{,}296\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin\left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$

b) A maximális sebesség a sebesség-idő függvényből látható: 0,942 cm/s.

c) A maximális gyorsulás a gyorsulás-idő függvényből látható: 0,296 cm/s^2.

d) A kitérés-idő függvénybe a t = 3 s értéket behelyettesítve: $y = 3 \cdot \sin(0{,}314 \cdot 3) = 3 \cdot 0{,}809 = 2{,}43\,\mathrm{cm}$.
(A fenti szögfüggvényekben a fázisszög radiánban értendő, ezért a számológépet radiánra kell beállítani!)
A sebesség: $v = 0{,}314 \cdot 3 \cdot \cos(0{,}314 \cdot 3) = 0{,}554 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. A gyorsulás: $a = -0{,}314^2 \cdot 3 \cdot \sin(0{,}314 \cdot 3) = -0{,}239 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$.

10. a) 3 cm; b) 0,5 1/s; c) 0,0796 Hz; d) 12,6 s; e) 1,5 cm/s; f) 0,75 cm/s^2;
g) y = 2,52 cm, v = 0,81 cm/s és a = 0,631 cm/s^2

11. A legalsó pontban maximális a hinta sebessége, ez az érték: $A \cdot \omega = 3$.
A fordulópontokban pedig a gyorsulás maximális: $A \cdot \omega^2 = 3$.
Két egyenletünk van a két ismeretlen mennyiségre. Osszuk el a második egyenletet az elsővel:
$\frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega = \frac{3}{3} = 1\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.
Ezt a körfrekvencia értéket behelyettesíthetjük pl. az első egyenletbe, amelyből az amplitúdó: $A = 3$ m.
Végül a keresett függvény ezekkel a paraméterekkel: $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 3\ \mathrm{m} \cdot \sin\left(1\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$.

12. a) A sajátfrekvencia: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{300}{3}} =$ 1,59 Hz.

b) A periódusidő a frekvencia reciproka: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}59} = 0{,}629$ s.

c) A maximális kitérés nem lehet nagyobb, mint amivel a mozgást elindítottuk, azaz 10 cm. (Különben növekedne a rendszer energiája.)

13. Mindkét szituációra felírhatjuk a periódusidő képletét:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ és $2 \cdot T = 2\pi\sqrt{\frac{m+0{,}03}{D}}$.

Az első kifejezést behelyettesíthetjük a másodikba: $2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+0{,}03}{D}}$.

2π-vel való egyszerűsítés és négyzetre emelés után:

$4\frac{m}{D} = \frac{m+0{,}03}{D}$

$4m = m + 0{,}03$

és végül $m = 0{,}01\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{g}$.

14. a) 0,9 kg; b) 3,95 N/m

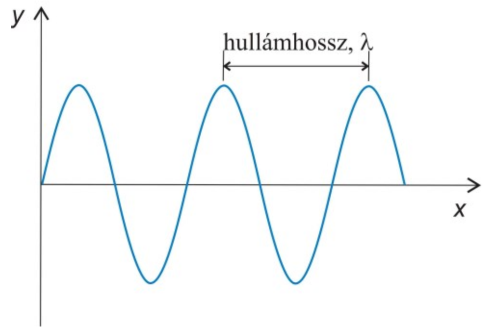
15. a) 6,54 cm; b) 0,513 s

16. B

8. Mechanika — hullámok

A hullámok nem csak érdekes és esetenként szemet gyönyörködtető, hanem az emberi lét számára meghatározó jelentőségű természeti jelenségek. Két hullámféleség — a fény- és a hanghullámok – hozzák számunkra a legtöbb információt a külvilágból. Nagyobbrészt fény- és hanghullámok segítségével kommunikálunk egymással. Ezek nélkül nagyon nehéz lenne az élet.
Az orvosi gyakorlatban fontos szerepet játszanak más hullámok is. Az ultrahangot főként diagnosztikai célra használjuk — képalkotásra, vagy a Doppler-technika segítségével a véráramlás vizsgálatára —, de terápiás célra is, pl. fizikoterápiában izomhúzódások, izomfájdalmak kezelésére. Az elektromágneses hullámok különböző tartományainak — pl. rövid- és mikrohullámok, röntgensugárzás vagy gamma-sugárzás — orvosi alkalmazása bizonyára szintén ismert. Hogy végül egy kevésbé ismert orvosi vonatkozást említsünk: az ún. pulzushullámok fontos szerepet játszanak az érmechanikában, pl. az értágulatok kialakulásában.
A hullámok és rezgések rokon jelenségek, ezért az előző fejezetben megismert fogalmak, mennyiségek ebben a fejezetben is jól használhatók.

Hullám: egy rezgésállapot tovaterjedése egy rezgésre képes közegben. A rezgésekre jellemző időbeli periodicitás mellett a hullámoknál megjelenik a térbeli periodicitás is, amelyet például a vízhullámoknál láthatunk is. Természetük szerint lehetnek pl. mechanikai, elektromágneses vagy anyaghullámok. Míg a mechanikai hullámok terjedéséhez anyagi közeg szükségeltetik, az elektromágneses hullámok (pl. a fény) vákuumban is terjednek — az „ő közegük” az elektromágneses mező. Mechanikai hullámokra példa lehet a vízhullám vagy a hang.



Hullámhossz (szokásos jele λ): két egymás után következő azonos fázisú pont — pl. két szomszédos hullámhegy — térbeli távolsága. A hullámhossz alapmértékegysége természetesen a méter (m).

Terjedési sebesség (szokásos jele c): a hullám egy adott fázisban levő pontjainak (pl. hullámhegyek) mozgási sebessége. A terjedési sebességet a sebesség definíciójából kiindulva felírhatjuk mint a T periódusidő alatt megtett út — amely éppen a hullámhossz λ — és a T hányadosa:

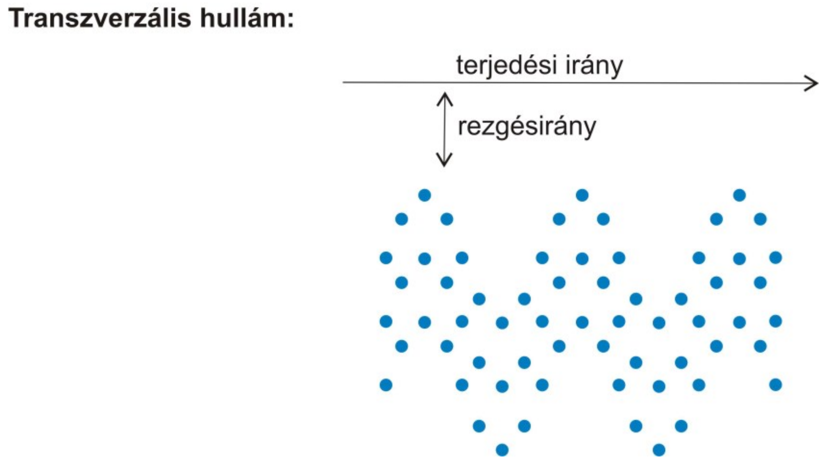
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f \,,$$

ahol f a hullám frekvenciája. Így egy általános, minden hullámféleségre érvényes egyszerű összefüggést kaptunk. Például a fény, ill. általában az elektromágneses hullámok terjedési sebessége vákuumban 300 000 000 m/s = $3 \cdot 10^8$ m/s (!). (Átlátszó anyagokban, pl. vízben, üvegben, a fény ennél valamivel lassabban terjed.) Ehhez a rendkívül nagy sebességhez képest a hang (l. a fejezet végén lévő táblázatot) csigalassúsággal terjed.

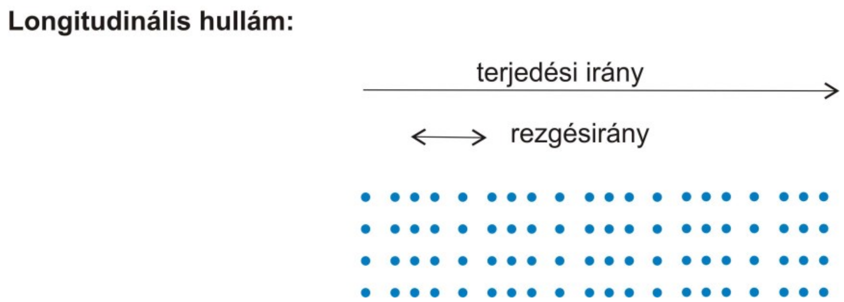
A legutóbbi összefüggéssel kapcsolatban szeretnénk hangsúlyozni, hogy a frekvencia a hullámnak egy „belső” tulajdonsága, amely nem változik, amikor a hullám egyik közegből a másikba halad, pl. amikor a fény levegőből vízbe érkezik. A terjedési sebesség — és ebből következően a hullámhossz is — viszont közegfüggő. Ha egy közegben az adott frekvenciájú hullám például lassabb, mint az előző közegben volt, akkor hullámhossza is lerövidül, és fordítva. Frekvenciája mindkét közegben ugyanakkora.

A hullám terjedési irányának és a hullámban zajló rezgés irányának viszonya alapján a hullámokat két csoportba oszthatjuk: *transzverzális* és *longitudinális* hullámok.

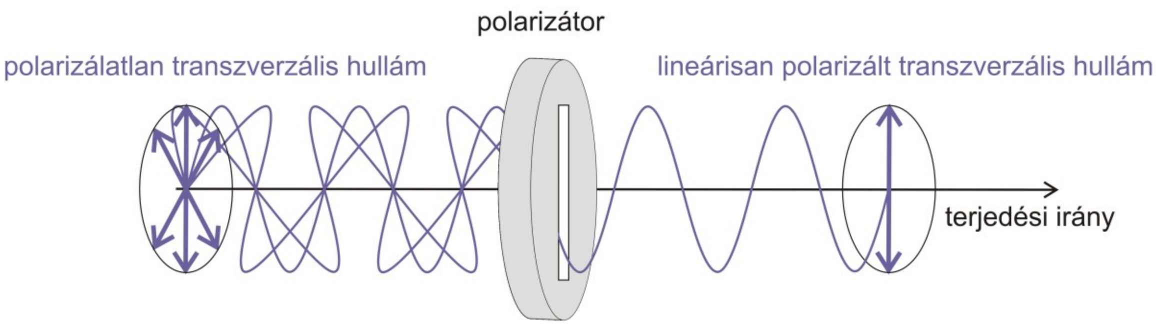
Transzverzális hullám: olyan hullám, amelyben a rezgésirány merőleges a terjedési irányra. Egy vízfelszín hullámai közelítőleg ilyenek. Az elektromágneses hullámok, köztük a fény is, transzverzális hullám. Vegyük észre, hogy egy adott terjedési irány mellett a fenti definíció nem határozza meg egyértelműen a rezgési irányt, hiszen a terjedési irányra merőleges síkban bármilyen rezgésirány megfelel a definíciónak.



Longitudinális hullám: olyan hullám, amelyben a rezgésirány párhuzamos a terjedési iránnyal. Például a hanghullámok levegőben longitudinálisan terjednek.



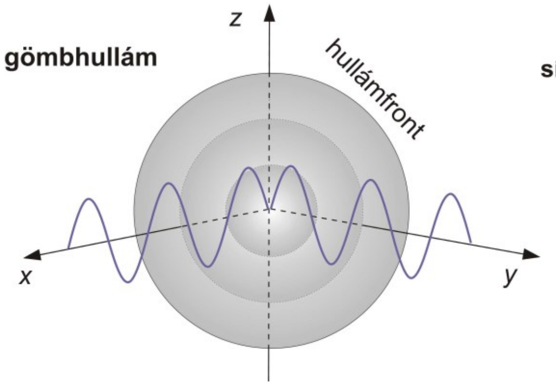
Lineáris polarizáció: Mint említettük, transzverzális hullámoknál egy adott terjedési irány mellett sokféle merőleges rezgésirány előfordulhat. A rezgésirány változhat, miközben mindig a terjedési irányra merőleges síkban marad. Ekkor polarizálatlan hullámról beszélünk. Ha valamiképp egy bizonyos rezgésirányt ki tudunk választani, lineáris polarizációról beszélünk. Ekkor az egymásra merőleges terjedési irány és rezgésirány által meghatározott sík időben állandó marad, az ilyen hullámot **lineárisan polarizált hullám**nak nevezzük. Az eszközt pedig **polarizátor**nak.

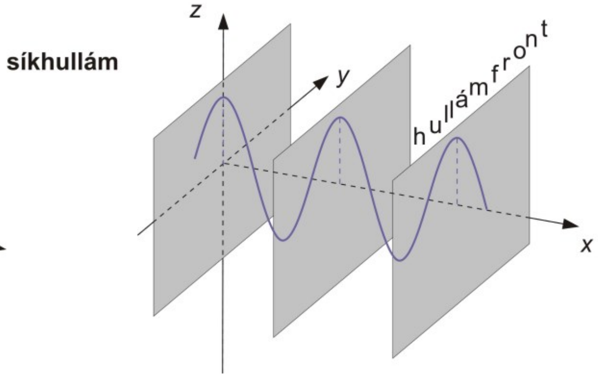


A fény, transzverzális hullám lévén, polarizálható. Egyes rovarok és madarak látják a polarizáció irányát, és fel is használják azt pl. tájékozódásra. Az orvosi gyakorlatban polarizált fényt használ a polarizációs mikroszkóp, a cirkuláris dikroizmus spektroszkópia, és terápiás célokra is igyekeznek felhasználni.

Hullámfront: ugyanabban a rezgési fázisban lévő pontok (pl. hullámhegyek) által meghatározott felület.

Gömbhullám: egy pontból a tér minden irányába induló hullámok. A hullámfrontok koncentrikus gömbfelületek. Például, ha az ember összecsapja a tenyerét, az így keletkező hanghullámok nagyjából gömbhullámok. Kétdimenziós hullámoknál ennek megfelelő hullámtípus a körhullám, mint pl. egy, a tóba dobott kő által keltett hullámok.





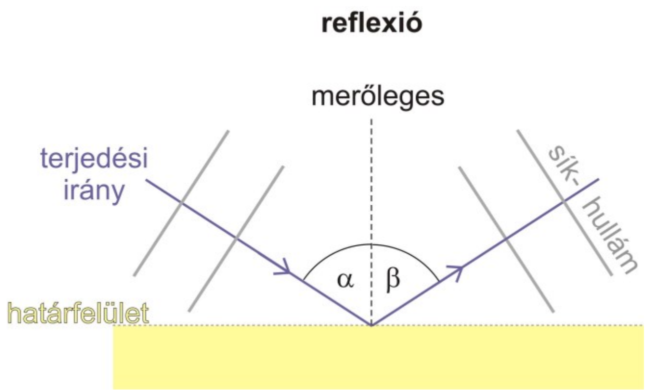
Síkhullám: olyan hullám, amelynek hullámfrontjai olyan párhuzamos síkok, amelyek merőlegesek a terjedés irányára. Például egy lézermutató fénysugara nagyjából síkhullám. Kétdimenziós hullámoknál ennek megfelelő hullámtípus a vonalhullám, mint pl. egy hosszú futószőnyegen futó hullám, ha a szőnyeg végét fel-le mozgatjuk.

Reflexió és *törés* akkor léphet fel a hullám terjedése során, ha a hullám két közeg határfelületéhez érkezik. Egy határfelületen a hullám részben mindig visszaverődik, másik része, továbbhaladva a másik közegbe, megtörik. A két közeg tulajdonságai szabják meg, a hullám mekkora része verődik vissza, és mekkora rész halad tovább.

Reflexió (visszaverődés): határfelületen fellépő jelenség. A határfelületre érkező hullám nem lépi át a határfelületet, „visszafordul". A **visszaverődés törvénye**:

$$\alpha = \beta\,,$$

ahol α a beesési szöget, és β a visszaverődés szögét jelöli. A beérkező hullám és a visszavert hullám terjedési iránya, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak. (Sokszor elkövetett hiba, hogy az α és β szögeket nem a merőlegestől méri a diák, hanem a határfelülettől. A reflexió esetében ez tulajdonképpen mindegy is, de a következő jelenségnél, a törésnél már nem!)

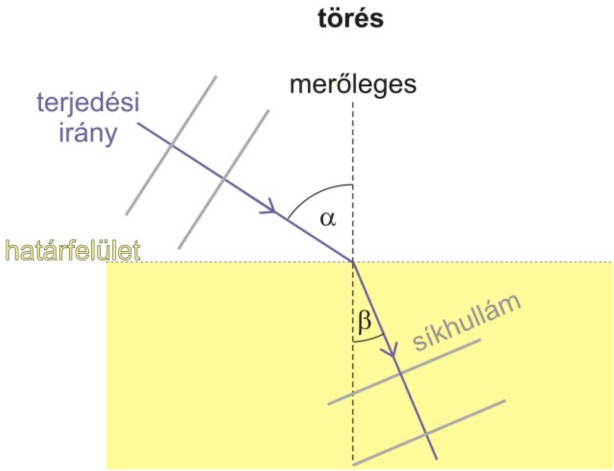


Tükrök nagyok sok optikai eszközben használatosak. A fény visszaverődésének sajátosságai határozzák meg egy tárgy színét (ha nem átmenő fényben nézzük őket, ami persze csak a fényt valamennyire áteresztő tárgyaknál lehetséges). Az ultrahang reflexiója két testszövet határán képezi az ultrahangos képalkotás alapját.

Törés: a hullám terjedési irányának megváltozása két közeg határfelületén való áthaladás során. A határfelület előtti és utáni irányokra vonatkozik a **törés törvénye** vagy — ha fényről van szó — a **Snellius–Descartes-törvény**:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

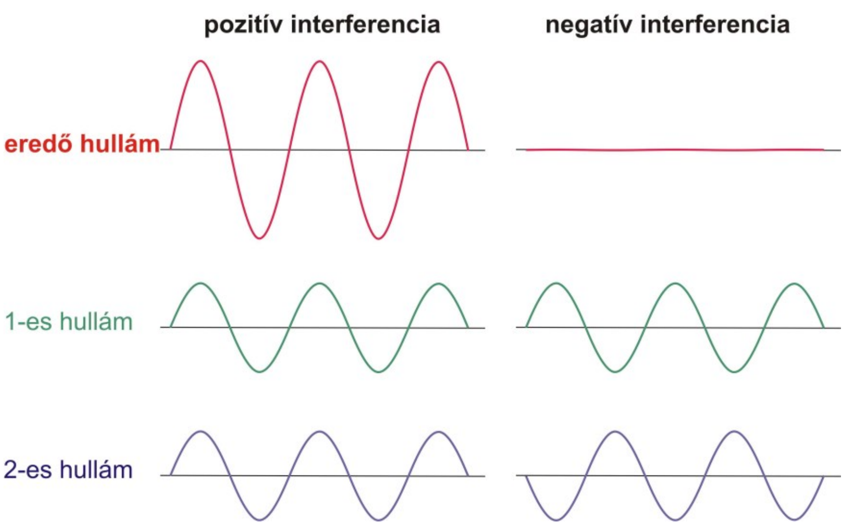
A betűk jelentése: α a beesési szög, β a törési szög, c_1 a hullám terjedési sebessége az első közegben, c_2 pedig a második közegben. A beérkező hullám és a megtört hullám terjedési iránya, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak.



A fény törését kihasználó lencsék, prizmák sok optikai, köztük orvosi eszköznek alkatrészei: pl. mikroszkópoknak, spektrométereknek. A fénytörés természetesen a szem képalkotásának is alapja. Az esőcseppeken megtörő fénysugarak hozzák létre a szivárványt.

Jellegzetes hullámjelenségek az *interferencia*, az *állóhullám* és az *elhajlás*.

Interferencia: két (vagy több) hullám találkozásakor létrejövő jelenség. Feltétele, hogy a hullámok azonos hullámhosszúak és fázisviszonyuk az időben állandó legyen. Ekkor jól megfigyelhető, szép mintázatok alakulnak ki a hullámok szuperpozíciója, „egymásra rakódása” következtében. Ha a két hullám azonos fázisban találkozik, akkor erősítik egymást (pozitív vagy konstruktív interferencia). Amennyiben a két hullám azonos amplitúdóval rendelkezett, akkor az eredő hullám amplitúdója kétszer akkora lesz (l. az ábrát). Ha a két hullám pontosan ellentétes fázisban találkozik, akkor gyengítik egymást (negatív vagy destruktív interferencia). Amennyiben a két hullám azonos amplitúdóval rendelkezett, akkor az eredő hullám amplitúdója nulla lesz, tehát a két hullám kioltja egymást (l. az ábrát). Közbenső fáziskülönbségnél részleges erősítés vagy gyengítés lesz az eredmény.

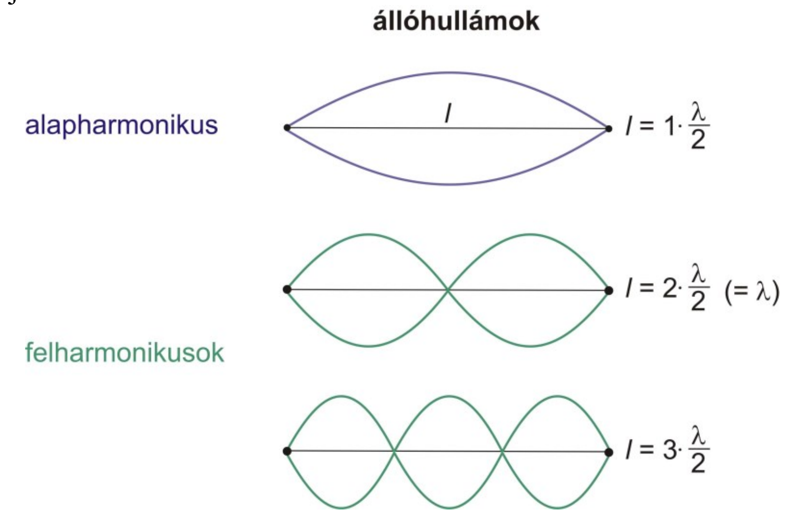


A szappanbuborékokon vagy vékony olajfoltokon látható színes mintázatok a fényinterferencia eredményei. A fényinterferencián alapuló optikai eszközök (szűrők, monokromátorok, stb.) mikroszkópok, spektrométerek tartozékai. Fényinterferencián alapszik a holográfia is. Az interferencia eredménye lehet az ún. *állóhullám*.

Állóhullám: egymással szemben haladó, azonos hullámhosszú és amplitúdójú síkhullámok interferenciájának eredményeként létrejövő mintázat, amelyben a hullám állni látszik. Például reflexiónál léphet fel a jelenség a beérkező és visszavert hullámok interferenciájából. Egy álló hullámban az egyes pontok különböző amplitúdóval rezegnek — az ún. csomópontokban zérus, a csomópontok között félúton található ún. duzzadóhelyeken maximális amplitúdóval. Két csomópont közötti pontok azonos fázisban rezegnek, a szomszédos hasonló tartományban ezzel éppen ellentétesben. Két csomópont távolsága a hullámhossz fele. Például egy mindkét végén rögzített húr végpontjain — a rögzítés miatt — csomópontoknak kell lenniük. Így a húr hossza (l) meghatározza a lehetséges hullámhosszakat (l. az ábrát is):

$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

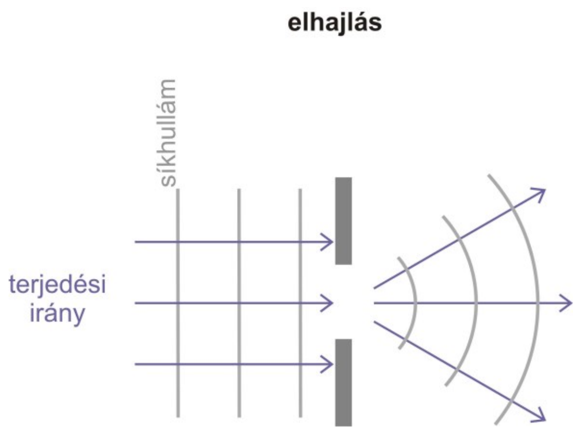
A képletet kielégítő egyes hullámhosszakhoz tartozó frekvenciaértékek a húr sajátfrekvenciái. A legkisebb sajátfrekvenciájú (azaz a legnagyobb hullámhosszúságú) sajátrezgést alaprezgésnek vagy alapharmonikusnak hívjuk, a magasabb frekvenciájúak a felharmonikusok.



Ez a jelenség lép fel például a hegedű húrjaiban zenéléskor. A fenti képlet, ill. ábrasor egyszerűen rávilágít arra, miért lesz magasabb a megszólaltatott hang, ha a húrt lefogással megrövidítjük. Ha l kisebb, λ-nak is kisebbnek kell lennie, a frekvencia nagyobb lesz, mivel a hullámhossz és a frekvencia szorzata állandó. Az alap- és felharmonikusok összessége határozza meg a hegedű hangszínét. Hasonló jelenség lép föl a külső hallójáratban is, azzal a különbséggel, hogy a külső hallójárat egy rögzített (dobhártya) és egy szabad véggel rendelkező rezonátor — ezért a fenti képlet rá nem igaz.

Az *elhajlás* is az interferencia eredménye.

Elhajlás (diffrakció): a hullám terjedési irányának megváltozása a hullám útjában álló akadályokon, nyílásokon (tehát nem két közeg határfelületén!). Ha a hullám hullámhosszához képest az akadály, ill. a nyílás nagyon nagy, akkor ez az irányváltozás észrevehetetlenül kicsi. Minél kisebb az akadály, ill. a nyílás, annál erősebb lesz az elhajlás. Így a hullámok pl. egy nyílás mögött olyan tartományba is behatolnak, amely az egyszerű geometriai várakozás alapján „árnyéktérnek" minősül. A fényelhajlás az oka minden optikai készülék véges felbontóképességének. Például a mikroszkóp felbontóképességét a fényelhajláson alapuló Abbe-elv magyarázza. A biológiai tényezők (receptorsűrűség) mellett a fényelhajlás is szerepet játszik a szem felbontóképességében. Az elhajlást egy modell, az ún. *Huygens–Fresnel-elv* segítségével értelmezhetjük.



Huygens–Fresnel-elv: egy modell, egy elképzelés arról, hogyan is terjed egy hullám. A modell szerint egy érkező hullámfront minden egyes pontja ún. elemi hullámok kiindulópontja. Ezek a nem látható, de elképzelhető elemi hullámok az adott pontból minden irányba induló gömbhullámok. Az elemi hullámok interferenciája adja a makroszkopikusan megfigyelhető hullámfrontot egy későbbi időpillanatban. Az új hullámfrontot mint az elemi hullámok közös burkolófelületét képzelhetjük el. Ennek az elvnek a segítségével a reflexiót, a törést, az elhajlást mindet könnyebben értelmezhetjük. A legegyszerűbb szituációt vegyük csak az elhajlásnál: legyen a nyílás olyan kicsi, hogy csak egy pontot tudunk elképzelni benne. Az elv szerint ebből a pontból egy gömbhullám indul ki, amely — nem lévén több elemi hullám — maga adja az új látható hullámfrontot, amely így aztán a nyílás után minden irányban továbbhalad, nem csak az eredeti terjedési irányban — az elhajlás teljes mértékű.

Végezetül foglalkozzunk röviden a számunkra legfontosabb mechanikai hullámmal, a *hang*gal.

Hang: mechanikai rezgés, amely a levegőben és más anyagi közegekben hullámként terjed. Az emberi fül csak bizonyos frekvenciatartományban képes felvenni ezeket a rezgéseket, ez alapján definiáljuk az egyes tartományokat.

Hangtartományok

Hangtartományok	infrahang	hallható hang	ultrahang	hiperhang
frekvenciaértékek (Hz)	< 20	20–20 000	20 000–10^9	10^9 <

A hanghullámok szilárd anyagokban transzverzálisan és longitudinálisan is terjedhetnek, folyadékokban és gázokban azonban csak longitudinálisan, mivel ezen anyagok belsejében nyugalomban nincsenek nyíróerők. (A víz felületi hullámai mindazonáltal részben transzverzálisak.) A hang terjedése során gázokban és folyadékokban sűrűség- és nyomásingadozások lépnek fel. Egy hang emberi fül által megítélt magasságát a hang frekvenciája, hangosságát a nyomásingadozások erőssége (és persze a fül érzékenysége), a hang színét pedig a hang alap- és felharmonikusainak összessége szabja meg. A hang terjedési sebessége erősen függ a közeg tulajdonságaitól. Gázokban a legkisebb, folyadékokban nagyobb, szilárd anyagokban a legnagyobb. Ez az illető anyagok összenyomhatóságán (kompresszibilitásán) múlik. Minél nagyobb ugyanis egy anyag összenyomhatósága — ilyenek a gázok —, annál később „érzékeli” és veszi át a szomszédos molekula a rezgést. A hang terjedési sebessége függ még a hőmérséklettől is — szilárd anyagoknál a legkevésbé — és a nyomástól is — különösen gázoknál. Viszont nem függ a frekvenciától, azaz egy adott közegben minden hang — a hallható és az egyéb hangok is — ugyanazzal a sebességgel terjed. (Szemben a fénnyel, amelynél a különböző színű fénysugarak terjedési sebessége eltér egymástól, ez a diszperzió jelensége, amely pl. a szivárvány keletkezésének hátterében áll.) Néhány érdekes sebességértéket tartalmaz a következő táblázat.

Hang terjedési sebessége néhány közegben

közeg	c_{hang} (m/s)
levegő (0ºC, 101 kPa)	330
hélium gáz (0ºC, 101 kPa)	965
víz (20ºC)	1483
zsírszövet	1470
izomszövet	1568
csontszövet (kompakt)	3600
vas	5950

***Feladatok**:*

1. Mekkora a normál „a” hang (440 Hz) hullámhossza levegőben, ill. vízben?

2. Egy sziréna hangjának frekvenciája 880 Hz. Mekkora a hang hullámhossza levegőben?

3. Az ultrahangot terápiás célokra is használják, pl. izmok lazítására, ún. mikromasszázsra. Egy ilyen kezelésnél pl. 800 kHz frekvenciájú ultrahangot alkalmaznak. Mekkora az ilyen frekvenciájú ultrahang hullámhossza izomszövetben (azaz milyen távol vannak egymástól a nyomásmaximumok)?

4. Vízhullámok futnak 1,5 m/s sebességgel a part felé. Hat méter két hullámhegy távolsága. Távolabb a parttól egy fadarab úszik a víz felszínén. Hány másodpercenként látja felbukkanni a fát a parton álló megfigyelő?

5. A műtőkben a levegő csírátlanítására használt germicid lámpa ultraibolya (UV) fényének hullámhossza 252 nm (vákuumban és levegőben gyakorlatilag egyformán). Mekkora a frekvenciája?

6. A mikrohullámok terjedési sebessége is $3\cdot10^8$ m/s. Mekkora a mobiltelefon mikrohullámainak hullámhossza, ha a készülék az 1800 MHz-es frekvenciát használja?

7. Egy vízben terjedő hanghullám hullámhossza 3 mm.
a) Számolja ki az illető hang frekvenciáját!
b) Melyik hangtartományba esik a kapott érték?
c) Mekkora lenne a frekvencia és a hullámhossz levegőben?

8. Melyik kijelentés igaz?
A: Longitudinális hullámban a rezgésirány és terjedési irány merőleges egymásra.
B: Mechanikai hullámok csak transzverzálisak lehetnek.
C: Mechanikai hullámok transzverzális módon csak szilárd anyagokban (és közelítőleg folyadékok felszínén) terjedhetnek.
D: A hullámok mindig szállítanak anyagot.

9. Egy hullámkádban 0,5 Hz frekvenciával síkhullámokat generálunk. A kád mélyebb részén sebességük 3 m/s. A hullámok a kád olyan részéhez érkeznek, ahol a víz hirtelen sekélyebb lesz, ahol futásuk 2 m/s-es sebességre lassul. A hullámok a mély–sekély határvonalat $\alpha = 60^\circ$ beesési szöggel érik el. Határozza meg
a) a törési szöget és
b) a hullámhosszat a kád egyes részeiben!

10. Hanghullám érkezik levegőből (0ºC) egy vízfelületre (20ºC). Beesési szöge 10º. Mekkora a törési szög?

11. Egy hullámkádban egy síkhullám fut a sekélyebb rész felől a hirtelen kezdődő mélyebb rész felé. A hullám beesési szöge 22º, a törési szög pedig 31º.
a) Melyik részben nagyobb a hullám terjedési sebessége, és hány százalékkal?
b) Mekkora a hullámhossz a sekélyebb részben, ha a mélyebben 5,5 cm?

12. Határozza meg egy 30 cm hosszúságú, mindkét végén rögzített húr első négy sajátfrekvenciáját. A húrban terjedő transzverzális hullámok sebessége 180 m/s.

13. Határozza meg egy 50 cm hosszúságú, mindkét végén rögzített húr alapfrekvenciáját, ha a hullám terjedési sebessége a húrban 120 m/s.

14. Melyik érték lehet egy 20 cm hosszúságú, mindkét végén rögzített húr állóhullámának hullámhosszúsága?
A: 30 cm **B**: 60 cm **C**: 5 cm **D**: 6 cm

15. A négy levegőben érvényes hullámhossz érték közül melyik tartozik hallható hanghoz?
A: 3,3 cm **B**: 1,1 cm **C**: 0,8 cm **D**: 0,6 cm

Megoldások:

1. A szükséges hangsebesség értékeket a táblázatban találjuk: c = 330 m/s levegőben, és c = 1483 m/s vízben. Így a hullámhosszak:

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{330}{440} = 0{,}75\,\text{m}$ levegőben, és $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1483}{440} = 3{,}37\,\text{m}$ vízben.

2. 37,5 cm

3. 1,96 mm

4. 4 s

5. 1190 THz

6. 16,7 cm

7. a) 494 kHz; b) ultrahang; c) f = 494 kHz és λ = 0,668 mm

8. C

9. a) A törés törvényéből: $\sin\beta = \sin\alpha \cdot \frac{c_2}{c_1} = \sin 60° \cdot \frac{2}{3} = 0{,}57735$ és $\beta = 35{,}3°$.

b) A frekvencia mindkét részben azonos, a hullámhosszak azonban különbözők lesznek. A mélyebb részben $\lambda_1 = \frac{c_1}{f} = \frac{3}{0{,}5} = 6\,\text{m}$, a sekélyebb részben pedig $\lambda_2 = \frac{c_2}{f} = \frac{2}{0{,}5} = 4\,\text{m}$.

10. 51,3°

11. a) Amelyikben nagyobb a szög, tehát a mélyebb részben, mégpedig 37,5%-kal. b) 4 cm

12. Az első (legnagyobb) hullámhossz: $\lambda = \frac{2l}{k} = \frac{2 \cdot 0{,}3}{1} = 0{,}6\,\text{m}$

Igy a hozzátartozó frekvencia (az alapfrekvencia): $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{180}{0{,}6} = 300\,\text{Hz}$.

A további hullámhossz, ill. frekvencia értékeket úgy kapjuk meg, ha a fenti képletekbe a k = 2, 3 és 4 értékeket helyettesítjük be. Összefoglalóan:

k	$\lambda = \frac{2l}{k}$ (m)	$f = \frac{c}{\lambda}$ (Hz)
1	0,6	300
2	0,3	600
3	0,2	900
4	0,15	1200

13. 120 Hz

14. C

15. A

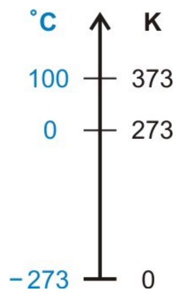
9. Hőtan

Környezetünk hőmérsékletváltozásai és az ebből származó jelenségek, pl. a víz megfagyása, a pára kicsapódása, az eső keletkezése stb. meghatározóak a földi élet szempontjából. Az emberi test viszonylag kis hőmérséklet-ingadozásai is — pl. láz esetén vagy kihűlésnél — jelentősen befolyásolják a biokémiai reakciók lezajlását, és az életfunkciókat.

Mindenkinek van tapasztalatokon alapuló fogalma arról, mit jelent a „meleg” vagy a „hideg”, még ha ez meglehetősen szubjektív is. A testeknek ezt a tulajdonságát a *hőmérséklet* nevű mennyiséggel írjuk le objektíven. Ha ezt a mennyiséget meg akarjuk érteni, a testeket felépítő molekulák, atomok világába kell bepillantanunk.
A testeket felépítő atomok és molekulák (továbbiakban részecskék) állandó mozgásban vannak, haladó mozgást végeznek, forognak, rezegnek. Ezeket a mozgásokat összefoglalóan *hőmozgás*nak nevezzük. A hőmozgás erősségét energiával írhatjuk le. A haladó mozgás erősségét leíró energiafajtát ismerjük, ez az 5. fejezetben bevezetett kinetikus energia. De a többi mozgáshoz, a forgáshoz és a rezgéshez is hasonlóképp rendelhető egy-egy energiafajta. Ezen energiák összességét nevezzük *termikus energiá*nak.

Termikus energia: a részecskék haladó mozgási, forgási és rezgési energiáinak összege, amely általánosan fogalmazva a hőmozgás erősségét jellemzi.

Hőmérséklet (szokásos jele T vagy t): egy test állapotát jellemző mennyiség, amely szoros kapcsolatban áll a test termikus energiájával. Azt mondhatjuk, hogy a hőmérséklet ennek a termikus energiának mintegy a mértéke. Minél nagyobb a test hőmérséklete, annál erősebb a test részecskéinek hőmozgása és a test termikus energiája. Ha egy test hőmérséklete nő, és benne a részecskék hőmozgása erősödik, annak számos megfigyelhető következménye van, pl. a testek — néhány kivételtől eltekintve — kitágulnak (hőtágulás, l. később). Ezt használják ki a régről ismert, egyszerű, folyadékkal (pl. higannyal) töltött hőmérők. Több hőmérsékleti skála létezik: A Kelvin-skála a tudományos, abszolút hőmérsékleti skála. A Celsius-skálát a világ nagy részén a mindennapi életben használjuk. A Fahrenheit-skála jelentősége már kisebb. A **Celsius-skála** rögzített pontjai a 0°C (a jég olvadáspontja) és a 100°C (a víz forráspontja normál nyomáson). Ezzel szemben a **Kelvin-skála** nullpontja az abszolút nulla pont, amelynél alacsonyabb hőmérséklet nem létezik. Ezen a hőmérsékleten megszűnne a részecskék mozgása — ha a 0 K elérhető lenne! Az abszolút nulla pont (0 K) kerekítve –273°C-nak felel meg. A két skála tehát ennyivel van eltolva egymáshoz képest. A lépések azonban egyformák, tehát 1°C hőmérsékletváltozás 1 K hőmérsékletváltozással egyenlő. A kelvinben mért hőmérsékletet általában T-vel, míg a Celsius-fokban mértet t-vel jelöljük. Összefoglalóan az átváltás a két skála között (l. az ábrát is):



$$\frac{T}{\mathrm{K}} = \frac{t}{{}^\circ\mathrm{C}} + 273 \quad \text{és} \quad \frac{t}{{}^\circ\mathrm{C}} = \frac{T}{\mathrm{K}} - 273.$$

Ha két különböző hőmérsékletű test egymással kölcsönhatásban van, akkor a melegebb test termikus energiát ad át a hidegebbnek. Az energiátadás folyamatát hőmunkának, esetleg hőközlésnek, vagy röviden *hő*nek nevezzük.

Hő (szokásos jele Q): két test termikus kölcsönhatásában a termikus energia átadásának folyamata, ill. az átadott termikus energia. SI-mértékegysége természetesen a joule (J). Az orvostudományban sokszor használják még a régi mértékegységet, a kalóriát (cal): 1 cal = 4,186 J.

Ahhoz, hogy fölmelegítsünk egy testet, termikus energiáját növelni kell, ehhez pedig energiát kell közölni vele, pl. az előbb említett hő formájában, vagy mechanikai munka révén, vagy esetleg besugárzással (pl. napsütés). Most csak az első lehetőséggel foglalkozzunk. Hogy mennyi hőt kell közölni a testtel, hogy hőmérséklete egységnyivel emelkedjen, a test *hőkapacitás*ától függ.

Hőkapacitás (szokásos jele C): a testtel közölt hő (Q) és az annak hatására bekövetkező hőmérsékletváltozás (ΔT) hányadosa:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}\,.$$

A hőkapacitás mértékegysége a J/K (vagy, ami ugyanaz: J/°C). Egy test felmelegítéséhez hőt kell közölni, ekkor ΔT és Q pozitív előjellel rendelkeznek. Egy test lehűtéséhez hőt kell elvonni, ekkor ΔT-t és Q-t negatív előjellel látjuk el. (Vigyázat: nem minden hőközlés vezet felmelegedéshez! A jég megolvasztásához hőt kell közölni, miközben hőmérséklete egyáltalán nem változik, 0ºC marad. A fenti képlet tehát ilyen halmazállapot-változásokra nem vonatkozik.) Egy test hőkapacitása anyagától és „méretétől” (pl. tömegétől) függ. Mivel a hőkapacitás a tömeggel egyszerűen arányos, ezért az anyagra jellemző specifikus mennyiséget kapunk, ha a hőkapacitást elosztjuk a test tömegével:

$$c = \frac{C}{m}\,.$$

Az új anyagi jellemző neve: **fajlagos hőkapacitás** (**fajhő**) (szokásos jele c). Szokásos mértékegysége a J/(kg·K) (vagy ami ugyanaz: J/(kg·°C)). Azt a hőt adja meg, amelyet 1 kg-nyi testtel közölni kell ahhoz, hogy hőmérséklete 1 K-nel (azaz 1°C-kal) megváltozzon. Néhány példát mutat a következő táblázat.

Néhány anyag fajlagos hőkapacitása

anyag	c (J/(kg·K))
ezüst	234
üveg	840
víz	4180
testszövet (átlagérték)	3500

A fenti két képlet egy képletben is összehozható, amely közvetlenül megadja, mennyi hőt kell közölni adott anyagú és tömegű testtel, hogy hőmérséklete ΔT-vel megváltozzon:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T.$$

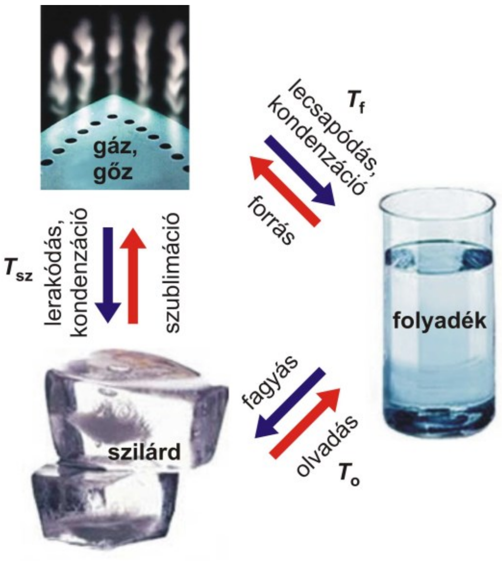
Ahogyan már említettük, felmelegedés (vagy lehűlés) közben egy test sok tulajdonsága megváltozik, többek között geometriai adatai: hossza, térfogata. A jelenséget *hőtágulás*nak hívjuk.

Hőtágulás: a legtöbb test felmelegedésnél kitágul (hossza és térfogata megnő), lehűlésnél pedig összehúzódik (hossza és térfogata csökken). Egy fontos kivételt megemlítünk: a víz 0°C hőmérsékletről 4°C hőmérsékletre való felmelegedése során éppenhogy nem tágul, hanem összehúzódik. (4°C fölött már szokásosan viselkedik.) Ezt a jelenséget nevezzük a *víz anomális viselkedésé*nek, amelynek köztudottan fontos szerepe van a vízi élőlények életében.

A hőtágulásnál is fontosabb jelenség a testeknek bizonyos hőmérsékleteken bekövetkező szerkezetváltozása, a *halmazállapot-változás*.

Halmazállapotok: egy anyag különböző szerkezetű és tulajdonságú megjelenési formái különböző körülmények (pl. hőmérséklet, nyomás, …) között. A három legfontosabb halmazállapot: *szilárd*, *folyékony* és *gáznemű*. Egy **szilárd halmazállapot**ú test térfogata és alakja meghatározott (pl. jégkristály). Egy **folyékony halmazállapot**ú test térfogata meghatározott, alakja azonban az edény alakjától függ, azaz nincs saját alakja (pl. a folyékony víz). Egy **gáznemű halmazállapot**ban lévő testnek nincs sem saját térfogata, sem saját alakja, kitölti a rendelkezésre álló mindenkori térfogatot és felveszi az edény alakját (pl. a vízpára). A halmazállapotot **fázis**nak (szilárd, folyékony, ill. gázfázis) is nevezzük. (Az egyetemi tanulmányok során a fázis szó jelentését némileg kibővítjük.)

Fázisátalakulás (**fázisátmenet**): egy test szerkezet és tulajdonság változásokkal járó átalakulása egyik fázisból a másikba. Az ábra mutatja az összes átalakulási lehetőséget a három klasszikus fázis között. (Az ábrán látható elnevezések mellett használatosak még mások is: pl. a fagyást nevezik még dermedésnek vagy kristályosodásnak is.) Azt a hőmérsékletet, ahol az átalakulás megtörténik, **olvadás**- vagy **fagyáspont**nak (T_o), **forráspont**nak (T_f), ill. **szublimációs pont**nak (T_{sz}) nevezzük. Ezek a hőmérséklet értékek a környezeti nyomástól függenek. Például a víz forráspontja 100°C, de csak a normál nyomás (101 kPa) mellett. Magas hegyekben, ahol a nyomás kisebb, a víz már alacsonyabb hőmérsékleten, akár 70°C-on forrásba jön. A párolgás nincs meghatározott hőmérséklethez kötve, mint a forrás. A folyadék minden hőmérsékleten párolog, persze nem egyforma sebességgel. A párolgás a folyadék felszínén zajlik, a forrás ezzel szemben olyan párolgás, amikor a folyadék belsejében is kialakulnak gőzbuborékok.



A fázisátalakulások során a testet alkotó részecskék közötti kötések felbomolhatnak, ill. újraképződhetnek, és a test szerkezete jelentős változáson megy át. Ezekhez a változásokhoz is energiaközlésre (vagy elvonásra) van szükség.

Fázisátalakulási hő (szokásos jele L): a fázisátalakulás közben közölt (vagy elvont) hő (Q) és a test tömegének (m) hányadosa:

$$L = \frac{Q}{m}.$$

Mértékegysége: J/kg. Megadja, hogy az illető anyag 1 kg-jának átalakításához egyik fázisból a másikba mennyi hő szükséges. Olvadás esetén **olvadáshő**ről (L_o), forrásnál **forráshő**ről (L_f), párolgásnál **párolgáshő**ről (L_p) beszélünk. Néhány példa az alábbi táblázatban található.

Néhány anyag átalakuláshője

anyag	q (kJ/kg)
arany — *olvadáshő*	67
alumínium — *olvadáshő*	396
só (NaCl) — *olvadáshő*	517
jég — *olvadáshő*	334,4
víz — *párolgáshő (30°C és 101 kPa mellett)*	2400
víz — *forráshő (100°C és 101 kPa mellett)*	2257

A halmazállapotok közül a gázok a legegyszerűbb testek: egy gázban a részecskéknek semmiféle rendezettsége nem észlelhető, szinte függetlenek egymástól. A továbbiakban néhány egyszerű mennyiséget és összefüggést frissítünk fel a gázokra vonatkozóan (amelyek azonban széleskörűbben is alkalmazhatók). Először a részecskék számára vonatkozó mennyiséget, az *anyagmennyiség*et definiáljuk.

Anyagmennyiség (vagy **mólszám**; szokásos jele ν (a görög „nü" betű), ill. a kémiában gyakran n): a testet alkotó részecskék számát adja meg egy önkényes mértékegység, a mól segítségével. Egy mól (jele: mol) a test anyagmennyisége, ha $6{,}02 \cdot 10^{23}$ részecskéből (pl. atomból vagy molekulából) áll. Ezt az értéket **Avogadro-állandó**nak (szokásos jele N_A) nevezzük: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mol. Ha egy rendszer anyagmennyiségét (ν) ismerjük, a rendszert alkotó részecskék számát (N) a következő képlettel számolhatjuk ki:

$$N = \nu \cdot N_A\ .$$

Az amúgy is egyszerű gázokat egy modell, az *ideális gáz*, bevezetésével tovább egyszerűsíthetjük.

Ideális gáz: olyan gáz, amely pontszerű (tehát kiterjedés nélküli) részecskékből áll. A részecskék között — az időnként fellépő rugalmas ütközéstől eltekintve — semmiféle kölcsönhatás nincs, egymástól függetlenek. (Egy ritka atomos gáz, pl. egy kisnyomású nemesgáz, közelíti meg legjobban ezt az elképzelést.) Ideális gázban a részecskék csak haladó mozgást végeznek, így a termikus energia a részecskék kinetikus energiáiból adódik össze. Így az ideális gáz hőmérséklete egyszerűen a részecskék átlagos kinetikus energiájával arányos. (Átlagost írtunk, hiszen egy részecske mozgása időben változik, és adott időpillanatban az egyes részecskék is különböznek egymástól.) A részecskék nem csak egymással ütköznek rugalmasan, hanem az edény falával is. Ütközés közben pici erőt fejtenek ki a falra. Ezekből a nyomóerőkből adódik a gáz nyomása.

Egy ideális gáz állapotát leíró mennyiségek — mint a hőmérséklet, a nyomás és a térfogat — között egyszerű összefüggés áll fenn, ez az *ideális gáztörvény*.

Ideális gáztörvény: a gáz nyomása (p), térfogata (V), anyagmennyisége (ν) és hőmérséklete (T) között érvényes összefüggés:

$$pV = \nu RT,$$

ahol R az **általános gázállandó** (R = 8,31 J/(mol·K)). Ha az anyagmennyiséget a részecskék számának és az Avogadro-állandónak hányadosaként ($\nu = N/N_\mathrm{A}$) írjuk fel, a gáztörvény egy másik alakját kapjuk

$$pV = \frac{N}{N_\mathrm{A}} RT = N \frac{R}{N_\mathrm{A}} T = NkT,$$

ahol $k = R/N_\mathrm{A}$ egy új állandó, a **Boltzmann-állandó** ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

Egy gáz állapotváltozásai különböző feltételek mellett mehetnek végbe. Az alábbi fogalmak nem csak ideális gázok, vagy általában gázok esetében, hanem teljesen általánosan használhatók.

Állapotváltozások, folyamatok különböző egyszerű körülmények között: az állandó hőmérsékleten lezajló folyamatokat **izoterm**, az állandó nyomáson végbemenőket **izobár**, végül az állandó térfogat mellett történőket **izochor** folyamatoknak nevezzük.

***Feladatok**:*

1. Adja meg a normális testhőmérsékletet (37ºC) kelvinben!

2. Egy lázzal járó betegség során egy páciens testhőmérséklete 2ºC-kal emelkedett. Mekkora a hőmérsékletváltozás kelvinben?

3. A levegő kb. 73 K hőmérsékleten csapódik le. Adja meg ezt a hőmérsékletet ºC-ban!

4. Mennyi hőt ad le 2 liter víz, miközben hőmérséklete 60ºC-ról 0ºC-ra csökken?

5. Mennyi hő emelné meg egy 70 kg-os ember testhőmérsékletét 0,5ºC-kal?
A: 123 J **B**: 123 kJ **C**: 123 mJ **D**: 123 cal

6. Hány kg 0ºC hőmérsékletű jeget kell 2 liter 60ºC hőmérsékletű vízbe dobni, hogy 0ºC-ra lehűtse? (Tételezzük fel, hogy az edény, amelyben a víz és a bedobott jég van, a környezetétől termikusan szigetelt, tehát onnan nem érkezik hő, ill. hőleadás sincs. Maga az edény pedig elhanyagolhatóan kis tömegű.)

7. Egy pohár (2 dl) meleg (30ºC) vízbe dobunk egy 20 g-os 0ºC hőmérsékletű jégkockát. Mi lesz a végső hőmérséklet a jég elolvadása után? (Alkalmazza ugyanazokat a feltételeket, mint a 6. feladatban!)

8. Egy ember oxigén szükséglete nagyjából 16 mol naponta. Hány O_2 molekulát jelent ez a mennyiség?

9. Egy $V = 1{,}5\ m^3$ térfogatú tartály oxigén gázt tartalmaz. A tartályban a gáz nyomása, ill. hőmérséklete: 5 mbar és 25ºC. Hány mól, ill. hány darab O_2 molekula van a tartályban? (Tekintsük a gázt ideálisnak!)

10. Egy 6 literes palackban $16 \cdot 10^{23}$ N_2-molekula van. Határozza meg a palackban lévő nitrogén gáz
a) anyagmennyiségét és
b) nyomását, ha az ideálisnak tekintett gáz hőmérséklete 0ºC!

11. Egy pumpában lévő levegőt a fele térfogatára nyomjuk össze úgy, hogy a hőmérséklete nem változik. Hogyan változik meg a levegő nyomása? (Tekintsük a levegőt ideális gáznak!)

12. Egy fémpalack a tűző napon fekszik. A benne lévő ideális gáz nyomása kezdetben 50 bar. A napsütés hatására hőmérséklete 12°C-ról 72°C-ra emelkedik. Mekkorára növekszik benne a nyomás?

13. Mit jelent az izochor állapotváltozás?
A: V = állandó **B**: p = állandó **C**: ν = állandó **D**: T = állandó

14. Mit jelent az izobár állapotváltozás?
A: ν = állandó **B**: T = állandó **C**: V = állandó **D**: p = állandó

15. Mit jelent az izoterm állapotváltozás?
A: p = állandó **B**: V = állandó **C**: T = állandó **D**: ν = állandó

Megoldások:

1. 310 K

2. 2 K

3. –200ºC

4. Mivel a víz sűrűsége (l. 6.fejezetet) kb. 1000 kg/m^3, a 2 liter = 2 dm^3 = 0,002 m^3 térfogatú víz tömege: $m = \rho V = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ kg.
A víz fajhőjét a fejezet táblázatában találjuk, ezzel a $\Delta T = -60$ K hőmérséklet változásnál fellépő hőleadás:

$Q = cm\Delta T = 4180 \cdot 2 \cdot (-60) = -502$ kJ.

(A negatív előjel jelzi, hogyhőleadásról, nem pedig hőfelvételről van szó.)

5. B

6. A 4. feladatból már tudjuk, hogy a feladatban megadott hűtéshez 502 kJ hőt kell elvonni a víztől. A rendszer elszigeteltsége (izoláltsága) miatt ezt a hőt csak a vízbe dobott jég tudja fölvenni, amely ennek hatására elolvad. Az m tömegű jég olvadásakor felvett hőt a jég olvadáshőjéből (334,4 kJ, l. a táblázatot a fejezetben) tudjuk kiszámolni: $mL_0 = Q = 502\,000$ J.
Az egyenletből m meghatározható: $m = \frac{Q}{L_0} = \frac{502\,000}{334\,400} = 1{,}5$ kg.
(Ha kevesebb jeget dobnánk a vízbe, a víz nem hűlne le 0ºC; ha többet, akkor a jég nem olvadna el mind.)

7. 20ºC

8. Az Avogadro-állandó (N_A) adja meg 1 mólban a részecskék számát. 16 mol anyagban arányosan több a részecskék száma: $N = \nu \cdot N_A = 16 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 9{,}63 \cdot 10^{24}$.

9. $p = 5$ mbar = 0,005 bar = 500 Pa és $T = 25+273 = 295$ K. Az értékeket az ideális gáztörvénybe behelyettesítve:

$\nu = \frac{pV}{RT} = \frac{500 \cdot 1{,}5}{8{,}31 \cdot 295} = 0{,}306$ mol.

A részecskék száma az Avogadro-állandó felhasználásával:

$N = \nu \cdot N_A = 0{,}306 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}84 \cdot 10^{23}$.

10. a) 2,66 mol; b) 1 MPa

11. Ha az ideális gáztörvényben a jobb oldal állandó (sem az anyagmennyiség, sem a hőmérséklet nem változik), akkor a bal oldalon álló pV szorzatnak is állandónak kell maradnia. Így, ha a térfogat a felére csökken, akkor a nyomásnak meg kell duplázódnia.

12. 60,5 bar

13. A

14. D

15. C

10. Elektromosság — elektrosztatika

Az életfunkciók és az elektromosság kapcsolata Galvani híres kísérletei óta ismertek. Az idegek, az izmok működése elektromos folyamatokkal jár. A szervezetben ílymódon létrejövő elektromos terek mérése diagnosztikus információt szolgáltat az egyes szervek működésére — pl. az elektrokardiográfia (EKG) a szív, az elektroenkefalográfia (EEG) az agy működésére.
Az orvosi terápia is számos elektromos technikát alkalmaz. Például az egyes esetekben életmentő defibrillátor egy kondenzátort tartalmaz, amelyben elektromos töltést, energiát lehet tárolni. Szükség esetén ezzel a tárolt töltéssel, energiával lehet a megállt szívet újraindítani.

Az *elektromos töltés* a testek különleges tulajdonsága. Bizonyos anyagokat például dörzsöléssel lehet elektromosan töltött állapotba hozni. Az így feltöltött testek aztán korábban nem ismert kölcsönhatást mutatnak egymással, erőt fejtenek ki egymásra, ez az *elektromos kölcsönhatás*. Az elektromosságtan egy részterülete az *elektrosztatika*, amely a nyugalomban lévő elektromosan töltött testekkel, a közöttük ható kölcsönhatásokkal foglalkozik.

Elektromos töltés (szokásos jele q): a testek egy tulajdonsága, amely az elektromos kölcsönhatás, az elektromos tér és az elektromos jelenségek alapja. Kétféle elektromos töltés van: **pozitív** és **negatív**. Az azonos előjelű töltéssel rendelkező testek taszítják, a különböző előjelű töltéssel rendelkezők vonzzák egymást. Az elektromos töltés SI-mértékegysége a **coulomb** (C). A legkisebb töltés az ún. **elemi töltés** (szokásos jele e): $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Egy test töltése csak ennek az értéknek az egész számú többszöröse lehet. (Tehát az elektromos töltés kvantált mennyiség, értéke nem lehet akármekkora.) Az elektromos töltés nem létezik önmagában, mindig anyagi testekhez, ún. *töltéshordozó*khoz kötött.

Töltéshordozók: olyan részecskék, amelyek elektromos töltéssel rendelkeznek. A legfontosabb töltéshordozó az **elektron**, amelynek töltése $-e$. Az atommagban található **proton** ugyanakkora, csak pozitív előjelű töltéssel ($+e$) rendelkezik. Az atomok, a molekulák és a belőlük felépülő makroszkopikus testek alaphelyzetben semlegesek, mivel bennük ugyanannyi elektron található, mint proton. Ha azonban az atomból, a molekulából, vagy a makroszkopikus testből elektronokat távolítunk el (pl. dörzsöléssel vagy besugárzással), akkor a töltésegyensúly megbomlik, és az illető test összességében pozitív töltésre tesz szert. Ilyenek például a semleges atomokból keletkező pozitív töltésű ionok, a kationok. Ha ezzel szemben a test többlet elektronra tesz szert, akkor a töltésegyensúly a másik irányban bomlik meg, a test összességében negatív töltésre tesz szert, ilyenek például a többlet elektronnal rendelkező és így negatív töltésű anionok.

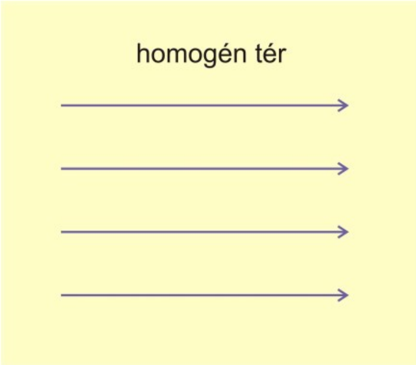
Megfigyelhetjük, hogy az elektromos töltéssel rendelkező testek korábban nem tapasztalt kölcsönhatásban állnak egymással, azaz erőt fejtenek ki egymásra. Ez az elektromos kölcsönhatás, amelynek erőtörvénye a *Coulomb-törvény*.

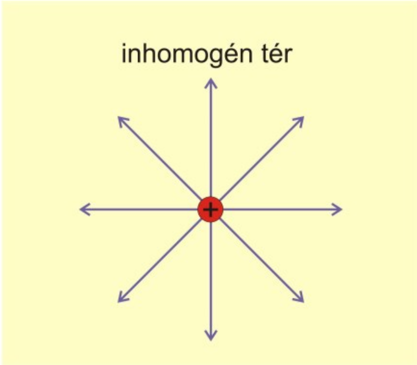
Coulomb-törvény: az elektromos kölcsönhatás erőtörvénye, amely megadja két elektromosan töltött, pontszerű test (töltéseik: q_1 és q_2) között ható erőt, az ún. **Coulomb-erő**t a közöttük lévő távolság (r) függvényében:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

ahol k egy állandó, értéke $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2. A Coulomb-erő a két testet összekötő egyenes mentén hat, ellenkező előjelű töltések esetében vonzó, azonos előjelű töltéseknél taszító. A Coulomb-erő tartja például a negatív elektronokat a pozitív atommag körül az atomokban. A Coulomb-törvény nagyon hasonlít a gravitáció erőtörvényéhez (l. 4. fejezetet). Ugyanaz a struktúra, csak a tömegek helyett a töltések szerepelnek a számlálóban, és egy másik állandó. Ez a hasonlóság azt következményezi, hogy a két kölcsönhatás leírására használt fogalmak, modellek, mennyiségek is nagyon hasonlóak. Például mindkét jelenség értelmezésére használjuk a fizikai erőtér (fizikai mező) modellt, jelen esetben az *elektromos erőtér* elképzelést.

Elektromos erőtér: egy modell az elektromos kölcsönhatás értelmezésére, amely segít elképzelni, hogyan hathat egymásra két, esetleg nagyon-nagyon távoli test. A modell szerint a töltések erőteret hoznak létre maguk körül, és ennek a térnek a közvetítésével fejtik ki egymásra az erőt, nem közvetlen módon. Az erőtér szerkezetét az **erővonal**akkal szemléltethetjük. Az erővonal iránya, pontosabban a vonalhoz a vizsgált pontban húzott érintő iránya adja meg az oda helyezett pozitív próbatöltésre ható erő irányát. Az erővonalak sűrűsége pedig az erő nagyságát mutatja. A **homogén tér** olyan tér, amelynek minden pontjában azonos nagyságú és irányú erő hat a próbatöltésre, ezért az erővonalak párhuzamosak és sűrűségük egyenletes. Ezzel szemben az **inhomogén erőtér**ben a különböző pontokban fellépő erő eltérő nagyságú és irányú lehet. Egy kondenzátor (l. később) belsejében a tér homogén. Egy pontszerű töltés tere inhomogén, azon belül is centrális (l. az ábrát).



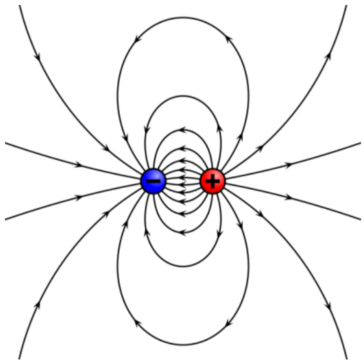


Elektromos dipól: két azonos nagyságú, de különböző előjelű töltés ($+q$ és $-q$) egymástól adott távolságban (d). Ennek a töltés elrendeződésnek is inhomogén a tere (l. az ábrát), amelyet **dipóltér**nek nevezünk. A dipól „erősségét” az ún. **elektromos dipólmomentum**mal (p) adhatjuk meg:

$$p = q \cdot d \ .$$

Például egy vízmolekulának is van ilyen sajátsága. Ugyanis az oxigén nagyobb elektronegativitása („elektront magához húzó” tulajdonsága) miatt az elektronok nem egyenletesen oszlanak el a molekulában, hanem inkább az oxigén atom közelében találhatók. Emiatt az a rész negatív töltés többlettel rendelkezik, míg a hidrogének környezete inkább pozitív lesz. A szív elektromos tere is közelítőleg dipóltér.

Elektromos dipól és tere



Az erővonalakkal szemléltetni lehet az erőtér erősségét, de annak egzakt megadásához mennyiségekre van szükségünk. Két ilyen mennyiség is létezik: az *elektromos térerősség* és az *elektromos feszültség*, ill. a vele majdnem azonos *elektromos potenciál*. Az előbbi az erő szempontjából, a másik kettő a munka, ill. energia szempontjából jellemzi a teret.

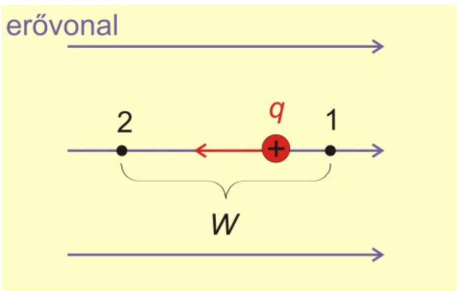
Elektromos térerősség (szokásos jele E): a tér egy adott pontjában lévő pozitív próbatöltésre ható erő (F) és a próbatöltés (q) hányadosa:

$$E = \frac{F}{q} \ .$$

A térerősség tehát az egységnyi pozitív (1 C) töltésre ható erőt jelenti. SI-mértékegysége a N/C vagy V/m (l. később). Az elektromos térerősség vektormennyiség. Egy homogén térben a térerősség minden pontban azonos, mind nagyságát, mind pedig irányát tekintve.

Elektromos feszültség (szokásos jele U): annak a munkának (W) és a próbatöltésnek (q) a hányadosa, amelyet akkor kell végeznünk, ha a próbatöltést egyenletesen mozgatva a tér ellenében az 1-es pontból a 2-es pontba akarjuk vinni (l. az ábrát):

$$U_{21} = \frac{W}{q} \ .$$



A feszültség tehát az egységnyi pozitív töltésen a mozgatás során végzett munkát jelenti. SI-mértékegysége a **volt** (V; 1 V = 1 J/C). Vigyázat: a feszültség nem egy pontot jellemez a térben, hanem két ponthoz tartozik! A képletben szereplő pontos U_{21} jelölés helyett azonban — kissé pongyolán — sokszor lehagyjuk az indexeket, és csak U-t írunk. Az ábrán példaként mutatott esetben a tér ellenében haladunk, és az erőt is ebben az irányban fejtjük ki. Így a munka, ezáltal U_{21} is pozitív lesz. Ekkor azt mondjuk, hogy a 2-es pont magasabb potenciálon van, mint az 1-es pont. Ha a két pontot felcserélnénk, tehát a fordított irányban haladnánk, akkor ugyanakkora, csak negatív értéket kapnánk. A feszültség is a tér erősségét jellemzi, hiszen, ha nagyobb a térerősség, több munkát kell végezni, és a feszültség is nagyobb lesz a két pont között. Egy ingerelhető sejt membránjának két oldala között a sejt nyugalmi állapotában –100 mV nagyságrendű feszültség mérhető. Ez az ún. „nyugalmi feszültség” (pongyolán: „nyugalmi potenciál”) a kationok és anionok aszimmetrikus eloszlásával függ össze. (A mínusz előjel abból adódik, hogy a membránban a tér az extracelluláris oldal felől az intracelluláris oldal felé, a sejt belsejébe mutat, és egy önkényes megállapodás szerint befelé haladunk — tehát a fenti ábrán mutatottal éppen ellentétesen.)

Elektromos potenciál (szokásos jele φ): Rögzítsünk le egy vonatkoztatási pontot (0), amelyben a potenciál értékét önkényesen nullának tekintjük ($\varphi(0) = 0$). Bármely más i pont $\varphi(i)$ potenciál értéke megegyezik a 0 és az i pontok közötti U_{i0} feszültséggel:

$$\varphi(i) = U_{i0} \,.$$

Más szavakkal: két pont közötti feszültség egyenlő a pontok potenciáljának különbségével, azaz

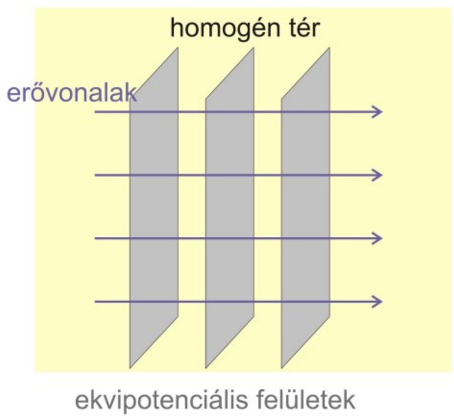
$$U_{i0} = \varphi(i) - \varphi(0),$$

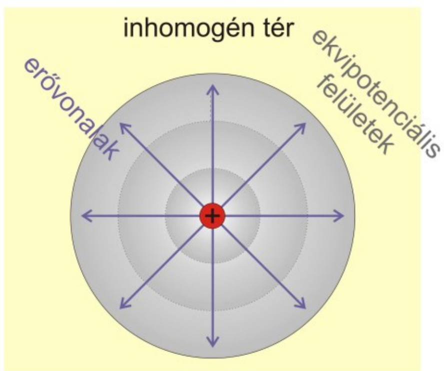
illetve

$$U_{21} = \varphi(2) - \varphi(1).$$

Tehát a potenciálkülönbség és a feszültség ugyanazt jelenti, mértékegységük is nyilvánvalóan ugyanaz. A sejtmembrán két oldala között nyugalmi állapotban mérhető feszültség korrekt elnevezése tehát vagy „nyugalmi feszültség” vagy pedig „nyugalmi potenciálkülönbség”. Az orvostudományban a kissé pongyola „nyugalmi potenciál” elnevezés használatos, amely azonban — ha tudjuk, mit értsünk alatta — nem gond.

Ekvipotenciális felület: azoknak a pontoknak összessége, amelyekben a potenciál értéke ugyanaz. Egy adott pontban az erővonal merőlegesen döfi az ekvipotenciális felületet.





Kondenzátor: elektromos áramköri elem elektromos töltés és energia tárolására, ill. homogén elektromos tér előállítására. Legegyszerűbb formája a **síkkondenzátor**: két egymással párhuzamos fémlemez, közöttük vákuum vagy szigetelő anyag. Ha a kondenzátort feltöltjük, az egyik lemez $+q$, a másik $-q$ töltést kap. A két lemez között jó közelítéssel homogén elektromos tér jön létre. A tér erőssége (E) és a két lemez közötti potenciálkülönbség (U) egymással arányosak:

$$U = E \cdot d \,,$$

ahol d a két lemez távolságát jelöli. (Az összefüggést átalakítva $E = U/d$-t kapunk. Ebből a kifejezésből E mértékegysége a V/m, amely tehát azonos a korábban megismert N/C-al.) A sejtmembrán két oldalán viszonylag jól vezető oldat található, maga a membrán inkább jó szigetelő, ez az elrendeződés tehát hasonlít a kondenzátorhoz. A sejtmembrán elektromos modelljében szerepel is a kondenzátor. Minél nagyobb a kondenzátor lemezeinek töltése, annál erősebb a tér, és annál nagyobb a két lemez közötti feszültség is. Végeredményben a töltés a feszültség egymással arányosak, a közöttük lévő arányossági tényezőt *kapacitás*nak nevezzük.

Kapacitás (szokásos jele C): a kondenzátor töltésének (q) és feszültségének (U) hányadosa:

$$C = \frac{q}{U}\,.$$

A kapacitás SI-mértékegysége a **farad** (F; 1 F = 1 C/V). A kapacitás a kondenzátor töltéstároló képességének mértéke, megadja, hogy 1 V erősségű tér mellett mennyi töltést tárol a kondenzátor. A kapacitás elsősorban a kondenzátor méreteitől függ: minél nagyobb a lemezek felülete (A), annál több töltést tudnak tárolni adott feszültség mellett, és minél kisebb a távolságuk (d), annál erősebb tér, egyúttal annál több töltés szükséges az adott feszültség létrehozásához. Összefoglalva:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d}\,,$$

ahol ε_0 a vákuum dielektromos állandója ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm)), ε_r pedig a lemezek közé esetlegesen bevitt szigetelő anyag relatív dielektromos állandója. Ez utóbbi a szigetelő anyagra jellemző puszta szám, amely megadja, hogy hányszorosára nő a kondenzátor kapacitása, ha a lemezek közötti teret vákuum helyett az illető szigetelő anyag tölti ki. A kondenzátor (vagy kapacitás) áramköri szimbóluma:

A kondenzátor feltöltéséhez munkát kell végezni, ez a munka a kondenzátorban levő elektromos tér energiájában tárolódik. (A feltöltés elvileg lehetséges például a következőképpen: Az eredetileg semleges lemezek egyikéről egy elektront átviszünk a másikra. Ez még munka nélkül megy. A következő elektron átviteléhez azonban már munkát kell végeznünk, hiszen az elektront már egy kis negatív töltésű lemezről kell egy kis pozitív töltésű lemezre átvinni a taszító erő ellenében. Ha a töltést tovább akarjuk növelni, minden újabb elektron átviteléhez több és több munkát kell végezni.)

A kondenzátorban tárolt elektromos energia: a kondenzátor feltöltéséhez szükséges munka (W), amely a kondenzátor elektromos terében mint energia tárolódik. Minél több töltést viszünk a kondenzátor lemezeire, annál erősebb az elektromos tér, és annál nagyobb ez az energia is:

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2\,.$$

(Az összefüggés átalakításánál felhasználtuk a kondenzátorra felírt előző $q = CU$ összefüggést is.)

A kondenzátorokat különböző eszközök, pl. defibrillátor, áramköreiben használjuk. Előfordulhat az, hogy több kondenzátort kell alkalmazni. Két kondenzátort vagy egymással párhuzamosan, vagy egymás után sorba kapcsolhatunk.

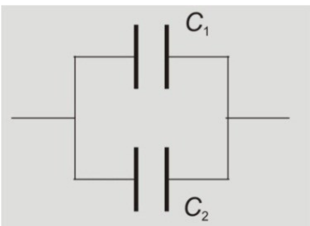
Kondenzátorok kapcsolása:

- **párhuzamos** kapcsolásnál a kondenzátorok kapacitásai egyszerűen összeadódnak. Az eredő kapacitás (C):

$$C = C_1 + C_2 + \ldots$$

- **soros** kapcsolásnál a reciprokok adódnak össze:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\,.$$



párhuzamos kapcsolás

soros kapcsolás

Feladatok:

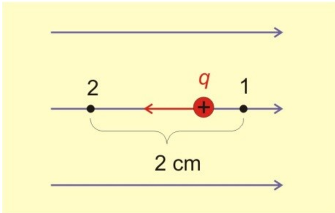
1. Mekkora a hidrogén atomban a magot alkotó egyetlen proton és az egyetlen elektron közötti Coulomb-erő, ha távolságukat 100 pm-nek vesszük?

2. Egy Cl^--ion és egy Na^+-ion egy sejtmembrán két oldalán éppen egymással szemben helyezkedik el. Mekkora erővel vonzzák egymást, ha a sejtmembrán vastagsága 6 nm?

3. Két ugyanakkora pozitív töltéssel bíró test egymástól 1 m távolságban van. $9 \cdot 10^9$ N erővel taszítják egymást. Mekkora a töltésük?

4. A test és B test is ugyanakkora töltéssel rendelkezik ($q_A = q_B$), közöttük valamekkora erő hat. Megduplázzuk a q_B töltést. Melyik állítás igaz?
A: Mindkét testre dupla akkora erő hat.
B: Csak az B testre ható erő duplázódik meg, mert a q_B töltést dupláztuk meg.
C: Az A testre ható erő nem változik, mert a q_A töltés sem változik.
D: A B test jobban fogja taszítani az A testet, mint az A test a B-t.

5. Egy q = 0,1 C töltéssel rendelkező testet egy homogén elektromos térben (E = 1200 N/C) az erővonalakkal párhuzamosan egyenletesen mozgatunk az 1-es pontból a 2-es pontba.
a) Mekkora a testre ható erő?
b) Mekkora munkát végzünk a mozgatás során?
c) Mekkora a feszültség a két pont között?



6. Mekkora a térerősség abban a pontban, ahol egy 0,5 C nagyságú töltésre 480 N nagyságú erő hat?

7. Egy q = 5 nC töltéssel rendelkező testet helyezünk egy elektromos tér egy pontjába. A tér a testet egy olyan pontba viszi, amelynek potenciálja 2000 V-tal alacsonyabb, mint az első ponté. Mekkora munkát végez a mozgatás során a tér?

8. Egy röntgencsőben 80 kV nagyságú feszültség gyorsít egy elektront a cső katódja felől az anód felé.
a) Mekkora gyorsítási munkát végez a tér?
b) Ez a munka az elektron kinetikus energiájaként jelenik meg. Mekkora az elektron sebessége, ha tömegét állandónak ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg) vesszük?

9. Egy síkkondenzátor feszültsége 600 V. Mekkora a lemezek közötti tér erőssége, ha a lemezek távolsága 2 mm?

10. Egy ingerelhető sejt membránjának két oldala között mérhető „nyugalmi potenciál” –90 mV. Tegyük fel, hogy az elektromos tér a 10 nm vastagságú membránban homogén. Mekkora a tér erőssége?

11. Egy defibrillátorban a kondenzátor kapacitása 50 μF. Beavatkozás előtt meglehetősen nagy, 5000 V feszültségre töltjük fel.
a) Mekkora a kondenzátor töltése?
b) Mennyi energiát tárol a kondenzátor?

12. Egy 50 nF kapacitású kondenzátor töltése 30 μC. Határozza meg
a) a kondenzátor feszültségét és
b) a kondenzátorban tárolt energiát!

13. Két, egyenként 10 nF kapacitású kondenzátort összekapcsolunk. Mekkora az eredő kapacitás
a) párhuzamos és b) soros kapcsolás esetén?

14. Tíz, egyenként 3 nF kapacitású kondenzátort egymással párhuzamosan kapcsolunk össze. Mekkora az eredő kapacitás?

15. Két kondenzátort (C_1 = 10 nF és C_2 = 40 nF) sorosan kapcsolunk össze. Mekkora az eredő kapacitás?

Megoldások:

1. A távolság tehát 100 pm = 10^{-10} m. Mindkét részecske töltése az elemi töltés, csak különböző előjellel. A Coulomb-törvény szerinti vonzóerő nagysága:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(10^{-10}\right)^2} = 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N} = 23\,\mathrm{nN}.$$

Ez az erő jóval nagyobb, mint a két részecske közötti $1{,}01 \cdot 10^{-47}$ N nagyságú gravitációs vonzóerő (l. 4. fejezetet 7. feladatát).

2. $6{,}4 \cdot 10^{-12}$ N

3. 1 C (Ilyen módon is lehetne definiálni az 1 C töltésmennyiséget.)

4. A

5. a) Az erő a térerősség definíciós képletéből számolható ki: $F = q \cdot E = 0{,}1 \cdot 1200 = 120\,\mathrm{N}$.

b) Az egyenletes mozgatáshoz éppen akkora erőt kell kifejtenünk, mint amekkora erőt a tér fejt ki a töltésre, hiszen nincs gyorsulás és így a testre ható erők eredője nulla kell legyen. A mozgás és az erő egy irányba mutatnak, így a munka:
$W = F \cdot s = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4\,\mathrm{J}$.

c) A feszültség definíciós képletéből: $U_{21} = \frac{W}{q} = \frac{2{,}4}{0{,}1} = 24\,\mathrm{V}$. (A 2-es pont potenciálja 24 V-tal nagyobb az 1-esénél.)

6. 960 N/C

7. 10 μJ (A tér a mozgatás során fel is gyorsítja a testet, és a tér munkája a test kinetikus energiájában fog megjelenni.)

8. a) 12,8 fJ; b) $1{,}68 \cdot 10^8$ m/s

9. A kondenzátor homogén terében: $E = \frac{U}{d} = \frac{600}{0{,}002} = 300\ 000\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. (A V/m mértékegység azonos a N/C-al.)

10. $9 \cdot 10^6$ V/m

11. a) A töltés: $q = C \cdot U = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 5000 = 0{,}25\,\mathrm{C}$.

b) Az energia: $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 5000^2 = 625\,\mathrm{J}$.

12. a) 600 V; b) 9 mJ

13. a) Párhuzamos kapcsolásnál egyszerű összegzést kell alkalmazni: $C = C_1 + C_2 = 10 + 10 = 20\,\mathrm{nF}$.

b) Soros kapcsolásnál a reciprok szabály érvényes: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$. Vigyázat, a feladatnak még nincs vége! Az utolsó lépésben a kapott érték reciprokát kell venni: $C = \frac{10}{2} = 5\,\mathrm{nF}$. (Az eredő tehát soros kapcsolásnál kisebb, mint az egyes összegzendő kapacitások.)

14. 30 nF

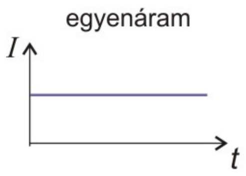
15. 8 nF

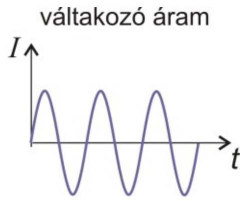
11. Elektromosság — elektromos áram

Elektromos áramok folynak az emberi testben, pl. az izomsejtekben, az idegekben, a szívben, az agyban stb. Elektromos áramot használ a defibrillátor a szív újraindítására és a szívritmus szabályozó. Fizioterápiában a galvanizáció és az iontoforézis egyenáramot, a nagyfrekvenciás hőterápia váltakozó áramot alkalmaz. Szinte minden orvosi berendezés használja az elektromos áramot — többféle értelemben is. Például az orvosi képalkotó eljárásokban az emberi testből vett különböző természetű jeleket mindig elektromos jellé alakítják, mert azzal lehetséges a további feldolgozás, pl. a jelerősítés, -szűrés, -digitalizálás.

A testet alkotó részecskék, mint pl. az ionok vagy az elektronok állandó véletlenszerű mozgásban vannak. Ha elektromos térbe kerülnek, akkor ehhez a mozgáshoz hozzáadódik még egy kollektív irányított mozgás, hiszen a fent említett részecskék elektromos töltéssel bírnak, és így rájuk az elektromos tér a tér az erővonalaknak megfelelő irányú erővel hat. Ez a kollektív mozgás az *elektromos áram*.

Elektromos áram: elektromos töltést hordozó részecskék kollektív mozgása. Ehhez persze a töltéshordozók viszonylag szabad mozgása előfeltétel. Ha egy anyag tartalmaz ilyen szabadon mozgó töltéshordozókat, akkor az elektromosan **vezető** lesz. Ilyenek a fémek a fémes kötés következtében előálló kvázi-szabad elektronfelhő miatt, vagy az elektrolit oldatok, ahol az ionok viszonylag szabadon mozoghatnak a folyadék fázisban. Ha nincsenek szabadon mozgó töltéshordozók egy anyagban, az elektromosan **szigetelő** lesz. Az időben állandó áram az **egyenáram**, a **váltakozó áram**nál az áram erőssége szinuszosan változik. Az áram iránya megegyezés szerint a pozitív töltéshordozók mozgási iránya, ez az ún. **technikai áramirány**. A fémekben az elektronok — negatív töltésük miatt — éppen az ellenkező irányban mozognak.





Elektromos áramerősség (szokásos jele I): a vezető adott keresztmetszetén áthaladó töltésmennyiség (Δq) és az eközben eltelt idő (Δt) hányadosa:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Az áramerősség tehát az időegység alatt átáramló töltésmennyiséget adja meg. SI-mértékegysége az **amper** (A; 1 A = 1 C/s). A szívritmusszabályzó 1 mA nagyságrendű áramot produkál a szívben, a defibrillátor — igaz, nagyon rövid ideig — ezerszer erősebbet.

Egy vezetőben, pl. egy fémben folyó áram erőssége függ egyrészt a töltéshordozókat mozgató tér erősségétől, amelyet pl. a feszültséggel jellemezhetünk. A fémben mozgó elektronok azonban nem mozognak teljesen szabadon, ütköznek a fémrács atomjaival, eközben energiát adnak le, majd újra gyorsulnak, megint ütköznek, és így tovább. Tehát kollektív mozgásuk sebessége függ a fémrács által kifejtett *ellenállás*tól is.

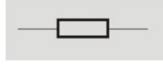
Ohm-törvény: egy vezetőben az áramerősség (I) a vezető két pontja között fennálló feszültséggel (U) arányos:

$$U = R \cdot I,$$

ahol az arányossági tényezőt R-rel jelöljük, és elektromos ellenállásnak nevezzük. (Tehát az R egy állandó — legalábbis abban az értelemben, hogy a feszültségtől nem függ.)

Elektromos ellenállás (szokásos jele R): a vezető két pontja közötti feszültség és az áramerősség hányadosa:

$$R = \frac{U}{I}.$$

SI-mértékegysége az **ohm** (Ω; 1 Ω = 1 V/A). Ezt a fajta ellenállást — megkülönböztetésül a később említendő egyéb ellenállásféléktől — **ohmos ellenállás**nak is nevezzük. Az áramkörökben használt vezetékek és egyéb részek ohmos ellenállását az áramkör rajzában a következő szimbólummal jelöljük: 

Egy vezető ellenállása méreteitől és anyagától függ. A méretek szerepéről: ha hosszabb a vezető, ugyanaz a feszültség gyengébb teret jelent, a töltések mozgása és az áramerősség is gyengébb lesz, a vezető ellenállása tehát nagyobb. Nagyobb keresztmetszeten az adott feszültség és térerősség mellett több töltéshordozó jut át, az áramerősség nagyobb, tehát az ellenállás kisebb lesz. Ezért a vezető ellenállása:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A},$$

ahol l a vezető hossza, A a keresztmetszete, és ρ az anyagi minőségre jellemző **fajlagos ellenállás**. A fajlagos ellenállás alapegysége az $\Omega \cdot \mathrm{m}$. A legtöbb anyag fajlagos ellenállása a hőmérséklet emelkedésével nő, mivel az erősebb hőmozgást végző részecskék miatt több az ütközés.

Folyadékoknál, de az emberi testszövetek elektromos tulajdonságainak jellemzésénél is, az ellenállás és a fajlagos ellenállás helyett inkább azok reciprokértékeit használják.

Elektromos vezetőképesség (szokásos jele G): az ellenállás reciproka, azaz

$$G = \frac{1}{R}.$$

SI-mértékegysége a **siemens** (S; 1 S = 1/Ω). (A vezetőképességgel is fel lehetne írni az Ohm-törvényt: $I = GU$.)

Fajlagos vezetőképesség (szokásos jele σ): a fajlagos ellenállás reciproka, azaz

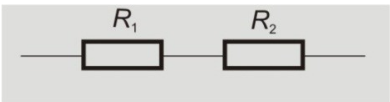
$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

SI-mértékegysége a S/m. A fajlagos ellenálláshoz hasonlóan az anyagra jellemző mennyiség. Egy elektrolit oldatnál például az ionok fajtájától és koncentrációjától függ. Bizonyos határig a koncentrációval egyszerűen arányos. A testszövetek közül legnagyobb a vér fajlagos vezetőképessége, mivel sok iont tartalmaz, amelyek ráadásul a folyadékban könnyen mozognak. Az izomszövet fajlagos vezetőképessége is viszonylag nagy, de már a bőré például, még inkább a csontszöveté, kisebb. (Több diagnosztikus eljárás is van, amely ezeket a különbségeket használja ki, például az impedancia kardiográfia.)

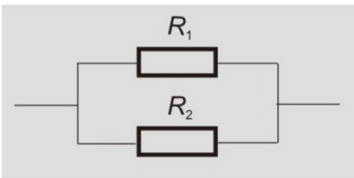
Áramkörökben az ellenállásokat sorosan vagy párhuzamosan lehet egymással összekapcsolni.

Ellenállások kapcsolása:

- **soros** kapcsolásnál az ellenállások egyszerűen összeadódnak. Az eredő ellenállás (R):
$$R = R_1 + R_2 + \ldots$$
- **párhuzamos** kapcsolásnál a reciprokok adódnak össze:
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$



soros kapcsolás



párhuzamos kapcsolás

Ahogyan már említettük, egy vezetőben a töltéshordozók az ismétlődő ütközések miatt állandóan energiát veszítenek. Az elektromos tér gyorsító munkája végül is a részecskék hőmozgását erősíti, tehát termikus energiává alakul — ez az ún. *Joule-féle hő* —, és a vezető felmelegszik.

Az elektromos áram munkája vagy **Joule-féle hő** (szokásos jele W): az elektromos tér által a töltéshordozók mozgatása során végzett munka, amely valamilyen más energiaformává alakul, egy ohmos ellenállásban teljes mértékben termikus energiává. A Joule-féle hő arányos az áramerősséggel (I), az ellenállás két vége közötti feszültséggel (U) és az idővel (t).

$$W = U \cdot I \cdot t.$$

Mértékegysége a joule, mint általában. Az Ohm-törvény segítségével a képletet más alakba is hozhatjuk:

$$W = R \cdot I^2 \cdot t \text{ vagy } W = \frac{U^2}{R} \cdot t\,.$$

Elektromos teljesítmény (szokásos jele P): az időegység alatt végzett elektromos munka:

$$P = U \cdot I\,.$$

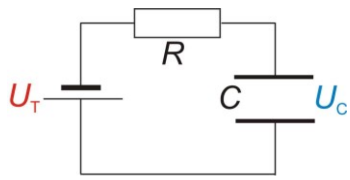
Mértékegysége a watt, mint általában.

Áramkör: áramköri elemek — mint pl. kondenzátor, ellenállás, feszültségforrás — összekapcsolása, amelyben áram folyhat.

Kirchhoff-törvények: áramkörökben az áramerősség és feszültség eloszlására vonatkozó törvények. **Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény)** szerint a töltésmegmaradás miatt egy elágazási pontba (csomópontba) befolyó és az onnan kifolyó áramok erősségének meg kell egyeznie. **Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény)** szerint egy zárt áramköri hurok mentén haladva az áramköri elemek feszültségeinek előjeles összege nulla.

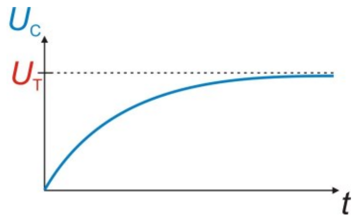
Egy speciális áramkörrel, az RC-körrel külön foglalkozunk. RC-körrel lehet például a sejtmembránt, vagy az emberi bőrt elektromosan modellezni. RC-körök az orvosi jelfeldolgozás során is alkalmazást nyernek.

RC-kör: egy ohmos ellenállásból és egy kondenzátorból álló kör. Két átmeneti (ún. tranziens) jelenséget beszélünk meg, a kondenzátor feltöltődését, ill. kisülését. A feltöltéshez az áramkörbe még egy feszültségforrást (telepet) is bekapcsolunk. Kisülésnél a telepet eltávolítjuk az áramkörből, majd a kondenzátor két lemezét az ellenálláson keresztül összekötjük egymással. Kezdjük a feltöltődéssel!



RC-kör feltöltődése:

- A kezdő $t = 0$ időpillanatban legyen a kondenzátor üres, azaz töltése és feszültsége nulla: $U_C = 0\ V$.
- A huroktörvény szerint a telep feszültsége (U_T) az ellenállás és a kondenzátor feszültségeinek összegével egyezik meg (természetesen ellentétes előjellel, hogy összegük nulla legyen). Mivel a kondenzátor feszültsége kezdetben nulla, a telep feszültsége az ellenállás feszültségével egyezik meg.
- Az ellenálláson keresztül az Ohm-törvény szerinti erősségű áram folyik, amely arányos a feszültségével.
- Az áram töltéseket szállít, és elkezdi feltölteni a kondenzátort. A kondenzátor töltésével együtt feszültsége (U_C) is nő.
- A kondenzátor feszültségének növekedése miatt a telepfeszültségből egyre kevesebb jut az ellenállásra. A kondenzátor feszültsége addig nő, mígnem eléri a telepfeszültséget, ekkor az ellenállásra jutó feszültség nullára csökken.
- Az ellenállás feszültségének csökkenésével az Ohm-törvény szerint arányosan csökken az áramerősség is. A kondenzátor feltöltődése tehát tovább folyik, de egyre lassabban, mígnem feszültsége aszimptotikusan (matematikailag nézve csak végtelen idő múlva) eléri a telepfeszültséget (l. az ábrát), és az ellenálláson lévő feszültség, valamint az áramerősség nullára csökken. A feltöltődés befejeződött.



- Az ábrán látható feltöltődési görbe a következő függvénnyel írható le:

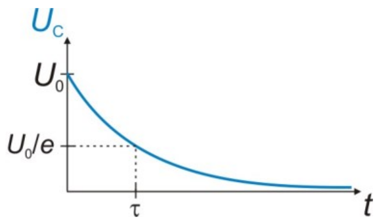
$$U_C = U_T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right),$$

ahol U_C a kondenzátor feszültsége a t pillanatban, U_T a telep feszültsége, R az ellenállás, és C a kondenzátor kapacitása. Az exponenciális tag kitevőjében látható RC szorzat idődimenziójú (a kitevőben lévő kifejezésnek összességében dimenziótlan puszta számnak kell lennie). Az RC időtartamot a kör **időállandó**jának nevezzük és τ-val jelöljük. Szemléletes jelentéséről majd a kisülést tárgyaló pontban.

Még egyszer felhívjuk a figyelmet arra, hogy miután a feltöltődés gyakorlatilag befejeződött, a körben nem folyik áram, hiszen a kondenzátor két lemeze között szigetelő van — a kondenzátor végtelen nagy ellenállást képvisel egy egyenáramú körben.

RC-kör kisülése:

- Legyen a kondenzátor kezdeti feszültsége U_0. (Amennyiben az előzetes feltöltés elég sokáig tartott, ez a feszültség gyakorlatilag megegyezik a telepfeszültséggel, egyébként kisebb annál.) Most az áramkörben összesen két elem található, a kondenzátor és az ellenállás. A huroktörvény szerint az ellenállás feszültsége megegyezik a kondenzátor feszültségével, csak ellentétes előjelű.
- Mivel a két lemez az ellenálláson keresztül egymással össze van kötve, a magasabb potenciálú lemez felől elkezdenek áramlani a töltések az alacsonyabb potenciálú lemez felé, áram folyik. (Ez a technikai áramirány, az elektronok ténylegesen az ellenkező irányba mennek, azaz az elektrontöbblettel rendelkező negatív lemez felől az elektronhiányban „szenvedő” pozitív lemez felé.) Ahogy a kondenzátor töltése apadni kezd, feszültsége (U_C) is arányosan csökken.
- A kisülés kezdetén a kondenzátor és ezzel együtt az ellenállás feszültsége is a legnagyobb. Az Ohm-törvény szerint az áram erőssége is maximális. Ahogyan csökken a kondenzátor (és az ellenállás) feszültsége, úgy gyengül az áram is. Emiatt a kondenzátor kisülése, azaz feszültségének (és töltésének) csökkenése egyre lassabb és lassabb (l. az ábrát), mígnem a feszültsége aszimptotikusan (matematikailag nézve csak végtelen idő múlva) nullára csökken. A kisülés befejeződött.



- Az ábrán látható kisülési görbe a következő függvénnyel írható le:

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} .$$

Ahogyan már említettük, a $\tau = RC$ szorzat a kör időállandója. Szemléletes jelentése (l. az ábrát): az az időtartam, amely alatt a kondenzátor feszültsége a kezdeti U_0 érték e-ed részére (tehát U_0/e értékre) csökken.

Több olyan diagnosztikus és terápiás eljárás is van, ahol az orvos váltakozó áramot használ. Ilyen például a már említett impedancia kardiográfia, amellyel a szív perctérfogatát lehet egyszerűen és főleg noninvazív módon meghatározni. Ebben az eljárásban azért használnak nagyfrekvenciás váltakozó áramot, mert azzal el lehet kerülni az áram ingerhatását — magyarul: nem fogja megrázni a beteget a készülék a vizsgálat közben. Nagyfrekvenciás áramot használnak még pl. hőterápiában. Ezek miatt végezetül röviden kitérünk még a váltakozó áramú körökre is.

Váltakozó áramú kör: az áramerősség és a feszültség időben periodikusan, színuszfüggvény szerint változik:

$$I = I_{\max} \sin \omega t \qquad \text{és} \qquad U = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi) ,$$

ahol I_{max} és U_{max} a maximális értékek, az ún. **csúcsérték**ek, ω a körfrekvencia és φ a fáziseltolódás az áramerősség- és a feszültségváltozás között. (Ha csak ohmos ellenállás van a körben, akkor fáziseltolódás nincsen, de ha pl. kondenzátor is található a körben, akkor már van.) A csúcsértékek mellett használjuk még az ún. **effektív érték**eket is. Ezek bizonyos értelemben átlagértékek. Effektív áramerősségen, ill. effektív feszültségen annak az egyenáramnak az áramerősségét, ill. feszültségét értjük, amely az adott ellenálláson ugyanannyi Joule-hőt fejleszt, mint a vizsgált váltakozó áram. Az effektív értékekre igaz:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad U_{\text{eff}} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Egy váltakozó áramú körben a kondenzátor érdekesen viselkedik. Míg egyenáramú körben végtelen nagy ellenállást jelent (hiszen a két lemez között nincs vezetés a vákuum vagy a szigetelő anyag miatt), addig váltakozó áramú körben véges ellenállást képvisel, amit **kapacitív ellenállás**nak (X_C) nevezünk. Ha ugyanis egyenáramú körben van egy kondenzátor, ott csak rövid ideig, a feltöltődés (vagy kisülés) lezajlása alatt folyhat áram. Váltakozó áram esetén azonban állandóan. A váltakozó áramirány miatt ugyanis a kondenzátor töltődik, majd kisül, és az ellentétes irányban töltődik, és így tovább. A C kapacitású kondenzátor kapacitív ellenállása:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} ,$$

ahol ω a váltakozó áram körfrekvenciája. Ha ω nő, a kapacitív ellenállás csökken. Nagyfrekvenciás áramnál a kapacitív ellenállás elhanyagolható.
Egy ohmos és kapacitív ellenállásokat is tartalmazó, váltakozó áramú kör eredő ellenállását **impedanciá**nak nevezzük.

***Feladatok*:**

1. Egy reumás beteg iontoforetikus kezelésénél (ionos gyógyszermolekulák bevitele a testbe egyenáram segítségével) 40 V feszültséget kapcsolnak a kezelt testrészre, amelynek ellenállása 12 500 Ω.
a) Mekkora a kezelt testrészen átfolyó áram erőssége?
b) Mennyi töltés áramlik át a kezelt testrészen egy 10 perces kezelés alatt?
c) Mennyi gyógyszermolekula jut be a testbe a kezelés alatt, ha egyértékű ionok formájában kerülnek alkalmazásra? Adja meg a gyógyszermolekulák mennyiségét mólban is!

2. Egy egy perces röntgenátvilágítás alkalmával $1{,}875 \cdot 10^{18}$ elektron fut át a röntgencsövön.
a) Mennyi töltés áramlik át a csövön?
b) Mekkora a röntgencsőben folyó áram erőssége?

3. Egy defibrillátoros kezelés első pillanatában a testre kapcsolt 6 kV feszültség hatására 0,2 A erősségű áram folyik át a testen. Határozza meg a testrész a) ellenállását és b) vezetőképességét!

4. Egy 20 m hosszúságú hosszabbító rézvezetéke 1,5 mm^2 keresztmetszetű. A réz fajlagos ellenállása $1{,}78 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Határozza meg
a) a vezeték ellenállását,
b) a vezeték vezetőképességét és
c) a réz fajlagos vezetőképességét!

5. A biofizika gyakorlatok során végzett egyik mérésben 12 mS/m fajlagos vezetőképességű sóoldattal töltünk fel egy l = 6 cm hosszúságú és A = 2 cm^2 keresztmetszetű üvegcsövet. Határozza meg a csőben lévő oldat
a) vezetőképességét,
b) fajlagos ellenállását és
c) ellenállását!

6. Két egyenként 5 kΩ nagyságú ellenállást kötünk össze. határozza meg az eredő ellenállást
a) soros kapcsolás esetén és
b) párhuzamos kapcsolásnál!

7. Ötven egyenként 10 kΩ, nagyságú ellenállást kapcsolunk össze a) párhuzamosan és b) sorosan. Határozza meg mindkét esetben az eredő ellenállást!

8. Egy hagyományos villanykörtében lévő volfrámszál ellenállása — üzemi hőmérsékleten — 529 Ω. A körtét a 230 V effektív feszültségű hálózatra kapcsoljuk.
a) Mennyi hő keletkezik a körtében egy nap alatt?
b) Mekkora a körte teljesítménye?

9. Egy hagyományos villanykörte teljesítménye 15 W.
a) Mennyi hő keletkezik a körtében egy hét folyamatos üzem alatt?
b) Milyen erősségű áram folyik a körtében, ha 230 V feszültséget kapcsolunk rá?

10. Kicsit leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy egy defibrillátor RC-körként működik. A készülékben alkalmazott kondenzátort (C = 20 μF) kezelés előtt egy meglehetősen nagy feszültségre, pl. 5 kV-ra töltik fel, majd a két kezelő elektród segítségével a mellkasra kapcsolják. A kondenzátor a mellkason mint ellenálláson (R = 1200 Ω) keresztül kisül.
a) Mekkora a feltöltött kondenzátorban tárolt energia?
b) Mekkora a testen átfolyó áram erőssége az első pillanatban?
c) Mekkora a kezelés során előálló RC-kör időállandója?
d) Mekkora a kondenzátor feszültsége 0,1 s–al a kezelés megkezdése után?
e) Mennyi idő múlva csökken a kondenzátor feszültsége az ezredrészére, azaz 5 V-ra?

11. a) Egy RC-körben lévő ellenállás 10 MΩ nagyságú, a kör időállandója 1 s. Mekkora a körben lévő kondenzátor kapacitása?
b) Kisülés során hány százalékra csökken a kondenzátor feszültsége 2 s alatt?

12. Egy RC-kör időállandója 0,6 s.
a) Mekkora feszültségre tudjuk feltölteni a kondenzátort egy másodperc alatt 100 V-os töltőfeszültséggel?
b) Mennyi idő alatt sül ki a kondenzátor az a) részben kiszámolt feszültségről annak felére?

13. Egy RC-kör időállandója 40 s. A kondenzátort egy 9 V-os teleppel töltjük. Mennyi ideig tart feltölteni a kondenzátort 8,9 V feszültségre?

14. Európában a háztartásokban használt hálózati váltakozó feszültség az $U = 325\ \mathrm{V} \cdot \sin\left(314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$ függvény szerint változik. Határozza meg:
a) a feszültség csúcsértékét,
b) a feszültség effektív (hatásos) értékét,
c) a váltakozó áram körfrekvenciáját és
d) frekvenciáját!

15. Egy 20 μF kapacitású kondenzátort kapcsolunk egy feszültségforrásra. Mekkora a kondenzátor kapacitív ellenállása, ha a feszültségforrás
a) egyenfeszültséget ad,
b) az Európában szokásos hálózati feszültséget adja,
c) 5000 Hz frekvenciájú váltakozó feszültséget ad!

16. Egy, az $U = 34\ \mathrm{V} \cdot \sin\left(6283\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$ függvény által jellemzett váltakozó feszültséget kapcsolunk egy 500 nF kapacitású kondenzátorra. Határozza meg
a) a feszültség csúcsértékét,
b) a feszültség effektív értékét és
c) a kondenzátor kapacitív ellenállását!

Megoldások:

1. a) Az Ohm-törvényből: $I = \frac{U}{R} = \frac{40}{12500} = 0{,}0032\text{ A} = 3{,}2\text{ mA}$.

b) A Δt = 10 perc = 600 s kezelési idő alatt átáramlott töltésmennyiség az áramerősség definíciós képletéből kapható meg: $\Delta q = I \cdot \Delta t = 0{,}0032 \cdot 600 = 1{,}92\text{ C}$.

c) Egy egyértékű ion töltése *e*. Ezért a gyógyszermolekulák száma: $N = \frac{\Delta q}{e} = \frac{1{,}92}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}2 \cdot 10^{19}$.

A mol-ban kifejezett anyagmennyiség pedig: $\nu = \frac{N}{N_\text{A}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{19}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}99 \cdot 10^{-5} = 19{,}9\ \mu\text{mol}$.

2. a) 0,3 C; b) 5 mA

3. a) 30 kΩ; b) 33,3 μS

4. a) A keresztmetszet: A = 1,5 mm^2 = 1,5·10^{-6} m^2. Az ellenállás pedig:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 1{,}78 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{20}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}237\,\Omega .$$

b) A vezetőképesség az ellenállás reciproka: $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{0{,}237} = 4{,}21\text{ S}$.

c) A fajlagos vezetőképesség a fajlagos ellenállás reciproka: $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1{,}78 \cdot 10^{-8}} = 5{,}62 \cdot 10^{7}\ \frac{\text{S}}{\text{m}}$.

5. a) 40 μS; b) 83,3 Ωm; c) 25 kΩ

6. a) Soros kapcsolásnál az ellenállások egyszerűen összeadódnak: $R = R_1 + R_2 = 5 + 5 = 10\,\text{k}\Omega$.

b) Párhuzamos kapcsolásnál a reciprokértékek (tehát a vezetőképességek) adódnak össze:

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, ebből pedig $R = \frac{5}{2} = 2{,}5\,\text{k}\Omega$.

7. a) 200 Ω; b) 500 kΩ

8. a) A 230 V effektív feszültségű váltakozó áram (ilyen folyik a hálózatban) hőhatás szempontjából egyenértékű 230 V egyenfeszültséggel. A volfrám fémből készült szál ohmos ellenállás, a benne keletkező Joule-hő egy nap (= 24·3600 s) alatt: $Q = W = \frac{U^2}{R} \cdot t = \frac{230^2}{529} \cdot 24 \cdot 3600 = 8{,}64 \cdot 10^{6}\text{ J} = 8{,}64\text{ MJ}$.

(Ennek az energiának csak kis része fog látható fény formájában megjelenni.)

b) A körte elektromos teljesítménye: $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = \frac{230^2}{529} = 100\text{ W}$.

9. a) 9,07 MJ; b) 65,2 mA

10. a) A kondenzátorban tárolt energia: $W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 5000^2 = 250$ J.

b) A testen átfolyó áram erőssége az Ohm-törvényből: $I = \frac{U}{R} = \frac{5000}{1200} = 4{,}12$ A . (Csak az első pillanatban, aztán gyorsan lecsökken!)

c) A τ időállandó az ellenállás és a kapacitás szorzata: $\tau = RC = 1200 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 24$ ms.

d) A kondenzátor feszültsége (U_C) kisülés közben exponenciálisan csökken:
$U_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = 5000 \cdot e^{-\frac{0,1}{0,024}} = 77{,}5$ V.

e) Most a *t* az ismeretlen, amely a kitevőben található, tehát exponenciális egyenlettel van dolgunk. Megoldása a logaritmus felhasználásával:
$5 = 5000 \cdot e^{-\frac{t}{0,024}}$
$0{,}001 = e^{-\frac{t}{0,024}}$
$1000 = e^{+\frac{t}{0,024}}$
$\ln 1000 = \frac{t}{0{,}024}$
$t = 0{,}024 \cdot \ln 1000 = 0{,}166$ s.

11. a) $C = 0{,}1$ μF; b) 13,5%

12. a) A feltöltődés az $U_C = U_T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ függvény szerint zajlik, ahol U_T a töltőfeszültség, U_C a kondenzátor feszültsége a *t* időpontban és τ (= *RC*) a kör időállandója. A kérdéses feszültség:
$U_C = U_T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{0,6}}\right) = 81{,}2$ V.
b) A 10. feladat e) részében alkalmazottakhoz hasonló lépésekkel:

$t = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{U_C} = \tau \cdot \ln \frac{U_0}{\frac{U_0}{2}} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}415$ s.

13. 3 min

14. a) A csúcsérték a függvényből egyszerűen kiolvasható: 325 V.

b) Az effektív feszültség: $U_{\text{eff}} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 230$ V. (Ez az érték az, amit hálózati feszültségként emlegetni szoktunk.)

c) A körfrekvencia szintén a függvényből olvasható ki: 314 1/s.

d) A frekvenciát a — már a körmozgásnál megismert — képletből kapjuk meg: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50$ Hz.

15. a) Egyenfeszültségnél ($\omega = 0$) a kapacitív ellenállás végtelen nagy.

b) A szokásos hálózati feszültség frekvenciája (l. pl. a 14. feladatot) 50 Hz. Így a kapacitív ellenállás:
$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159\ \Omega$.

c) Ha a frekvencia 5000 Hz, azaz éppen 100-szor több, mint az előző 50 Hz, akkor az ellenállás meg 100-szor kisebb, tehát 1,59 Ω.

16. a) 34 V; b) 24 V; c) 318 Ω

12. Mágnesesség és elektromágneses indukció

Egyes madarak, halak és másféle állatok is érzékelik a mágneses teret, és régóta használják a Föld mágneses terét tájékozódásra. Az ember — mai tudásunk szerint — csak kb. két és fél ezer éve. Kínában többek között kis halakat használtak iránytűként. Még ennek a nagyon különleges jelenségnek is van számos orvosi vonatkozása. Az izom- vagy idegi tevékenység során folyó áramok mágneses teret is keltenek, amelynek mérése — például a magnetoenkefalográfiás (MEG) vizsgálatban — plusz információkat adhat a vizsgált szerv működéséről. Mágneses terek valamilyen mértékben minden bizonnyal befolyásolják a sejtek és a szervek működését, még ha erről viszonylag kevés tudásunk is van, és ezért vita tárgya is. Vannak azonban bíztató próbálkozások terápiás alkalmazásra, például az inkontinencia kezelésében.
De mágneses teret használ az egyik modern és nagyon jó felbontású, információgazdag képeket szolgáltató képalkotó eljárás, a mágneses magrezonanciás képalkotás (angol neve után MRI vagy röviden MR) is.

Az ókori Görögországban figyelték meg, hogy a kisázsiai Magnesia város környékéről származó egyes kövek vonzzák, ill. taszítják egymást. Innen ered a *mágnes* elnevezés. A szóban forgó kövek *mágneses kölcsönhatás*t mutatnak. A mágneses jelenségek leírása nem egyszerű, ezért ebben a fejezetben lemondunk az egzakt, képletszerű tárgyalásról — és ennek megfelelően a gyakorló számolási feladatokról is.

Mágnes: egy különleges tulajdonsággal rendelkező test. Mágnesek olyan erőket fejtenek ki egymásra, amelyeket más ismert kölcsönhatásokkal (pl. gravitációval vagy elektromos kölcsönhatással) nem tudunk megmagyarázni. Ezt az erőhatást **mágneses kölcsönhatás**nak nevezzük. Vannak az előbb már említett kövek, az állandó mágnesek, amelyek általában sok vasat, nikkelt vagy kobaltot tartalmaznak. És vannak elektromágnesek (l. később), amelyek csak addig mutatják a mágneses tulajdonságot, amíg áram folyik bennük. Egy mágnes két pólussal rendelkezik, amelyeket északi, ill. déli pólusnak nevezünk. Az azonos pólusok taszítják egymást, a különbözőek vonzást mutatnak.

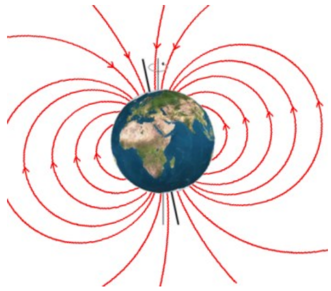
Vannak gyengébb és erősebb mágnesek, ezt a közöttük ható erő nagysága alapján ítélhetjük meg. A mágnes erősségét a *mágneses momentum*mal adjuk meg.

Mágneses momentum vagy **mágneses nyomaték** (szokásos jele m vagy μ (görög „mü" betű)): egy, a mágnes erősségét leíró fizikai mennyiség. Az atomot, ill. atommagot alkotó elemi részecskék —az elektron, a proton és a neutron — is bírnak mágneses tulajdonsággal, mágneses momentummal. (Egészen apró kis mágneseknek, iránytűknek is tekinthetjük őket.)

Ahogyan más nagy távolságra ható kölcsönhatásoknál — mint a gravitációnál vagy az elektromos kölcsönhatásnál — itt is élünk a mező vagy erőtér fogalmával.

Mágneses tér: egy modell, amely szerint a mágnesek maguk körül mágneses erőteret hoznak létre, és ennek közvetítésével fejtenek ki egymásra erőt, még viszonylag nagy távolságból is. A mágneses tér szerkezetét, irányát és erősségét erővonalakkal szemléltetjük. Ha egy tű alakú mágnest (iránytűt) a tér egy adott pontjába helyezünk, akkor ott olyan erők hatnak rá, amelyek a tűt a ponton átmenő erővonal irányába forgatják be. Az erővonalak sűrűsége a tér erősségét mutatja. Ahogyan már említettük, egyes elemi részecskék is pici „iránytűk". Mágneses térben ezek is — vagy legalábbis mágneses momentumaik — befordulnak az erővonalak irányába. Ezt a jelenséget kihasználjuk a mágneses magrezonanciás képalkotásnál. Az MR-vizsgálat első lépéseként ugyanis a pácienst egy nagyon erős mágneses térbe helyezik. A mágneses momentummal rendelkező atommagok — pl. a hidrogén atommag, amely egy protonból áll — az erővonalaknak megfelelően beállnak, rendeződnek. (Mágneses tér nélkül az egyes momentumok irányai véletlenszerűen oszlanak el). A rendeződés következtében a páciens egészében nézve egy eredő mágneses momentumot kap, „felmágneseződik". Ennek az eredő momentumnak a változásait fogják aztán a vizsgálatban követni.

Mielőtt továbbmennénk, tegyünk egy kis kitérőt, amelyben összehasonlítjuk az elektromos és mágneses kölcsönhatásokat — mely tekintetben hasonlóak és mely tekintetben eltérőek? Mindkét jelenségnél kétféle „töltéssel" találkozunk: pozitív és negatív elektromos töltés, ill. északi és déli pólus. Mindkét jelenségnél az azonos nemű „töltések" taszítják, a különneműek pedig vonzzák egymást. Különbség viszont az, hogy az elektromosságban egy test vagy pozitív, vagy negatív töltésű, tehát a töltések testenként különválaszthatóak, míg a mágnességben a két pólus nem választható el egymástól. Tehát egy test nem hordozhat csupán egy pólust. Ha egy mágnest kettévágunk, akkor mindkét félben megtaláljuk az északi és a déli pólust is. Ezzel van kapcsolatban a megfelelő tér szerkezete. Az elektromos erőtérben az erővonalak a pozitív töltésű testről indulnak és a negatív töltésű testen végződnek. A mágneses erővonalak önmagukba záródó hurkok, ugyanazon a mágnesen végződnek, amelyről indultak (l. például a Föld mágneses terét).



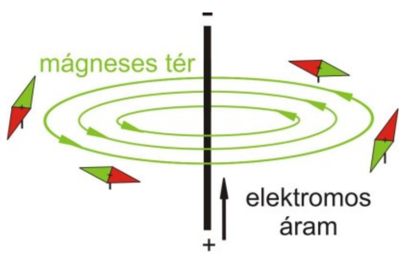
A Föld is egy mágnes, mágneses terét az ábra mutatja. A mágneses iránytű az erővonalaknak megfelelően észak-déli irányba áll be. A Föld mágneses tere messze nem homogén, azaz viszonylag nagy különbségek vannak a tér erősségében. A tér erősségének jellemzésére vezetjük be a *mágneses indukció* nevű mennyiséget.

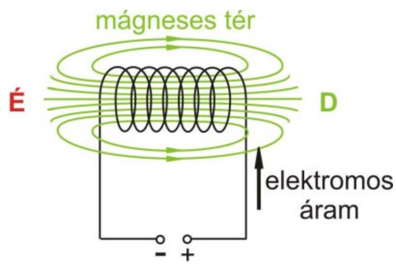
Mágneses indukció (szokásos jele B): a mágneses tér erősségét, a térbe helyezett mágnesekre kifejtett erőhatást jellemző mennyiség. Bár a tér erősségét jellemzi, mégsem „*mágneses térerősség*" a neve — a jegyzet röviden tartása végett nem tudunk kitérni arra, miért nem —, legfeljebb a pongyola szóhasználatban. A mágneses indukció SI-mértékegysége a **tesla** (T). Például a Föld mágneses terében a mágneses indukció nagysága átlagosan csak kb. 50 μT. Ezzel szemben egy MR-készülékben alkalmazott mágneses tér 1–10 T erősségű. (Tehát durván 100 000-szer erősebb a Föld mágneses terénél!) A homogén mágneses mező minden pontjában azonos a mágneses indukció nagysága és iránya. Ahogy az ábrán is látható, a Föld mágneses tere inhomogén.

Az eddigiek rövid *összefoglalásaként* nézzük meg még egyszer, mi történik, ha egy mágnest egy mágneses térbe helyezünk? A mágnes és a mágneses tér között kölcsönhatás lép fel. A kölcsönhatás erőssége két tényezőtől függ: a mágnes mágneses momentumától (m) és a tér erősségétől (B). A kölcsönhatás során olyan erők hatnak a mágnesre, amelyek beforgatják a tér adott pontján átmenő erővonalának irányába. Ezt a kölcsönhatást energetikailag is leírhatjuk. A mágnes és a tér közötti kölcsönhatás energiája szintén az előbb említett két tényezőtől függ, pontosabban fogalmazva: arányos a két tényező $m \cdot B$ szorzatával. Amikor a mágnes momentuma a tér irányába áll be, az energetikailag kedvezőbb, kisebb energiájú állapotot jelent. Ha a mágnest a tér jelenlétében át akarjuk forgatni pont az ellenkező irányba, ahhoz erőt kell kifejtenünk, munkát kell végeznünk, azaz energiát kell közölnünk vele, ami növeli a rendszer energiáját.

A fejezet elején már említettük, hogy az állandó mágneseken kívül vannak elektromágnesek is. Az elektromágnes az *elektromos áram mágneses hatásán* alapszik.

Az elektromos áram mágneses hatása: egy áramjárta vezető maga körül mágneses teret hoz létre, amelyet nagyon egyszerűen, kis mágnesek, iránytűk segítségével ki is mutathatunk (l. az ábrát). A tér erőssége arányos a vezetőben folyó áram erősségével. Koncentrálhatjuk a teret, és így növelhetjük a tér erősségét, ha a vezetőt feltekercseljük. (Ekkor ugyanis az egyes menetek által létrehozott terek összeadódnak, így a tekercs belsejében a menetszámmal arányos erősségű tér lesz.) A tekercs belsejében és közelítőleg a végeinél is a tér nem csak erős, hanem jó közelítéssel homogén is, különösen hosszú tekercseknél.



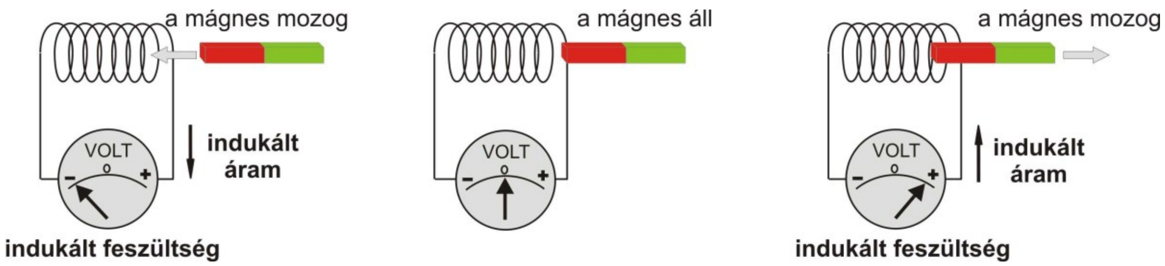


Az elektromágnes egy áramjárta tekercs. Az áram megszűnésével megszűnik mágnessége is. Elektromágneseket használnak a technikában, az iparban, de az orvosi gyakorlatban is, pl. az MR-készülék nagyon erős mágneses terét csak elektromágnesekkel lehet biztosítani. Az elektromágnes praktikus előnyei az állandó mágnessel szemben: az erős és homogén tér, a tekercsben folyó áramerősség révén szabályozható térerősség és a kikapcsolhatóság.

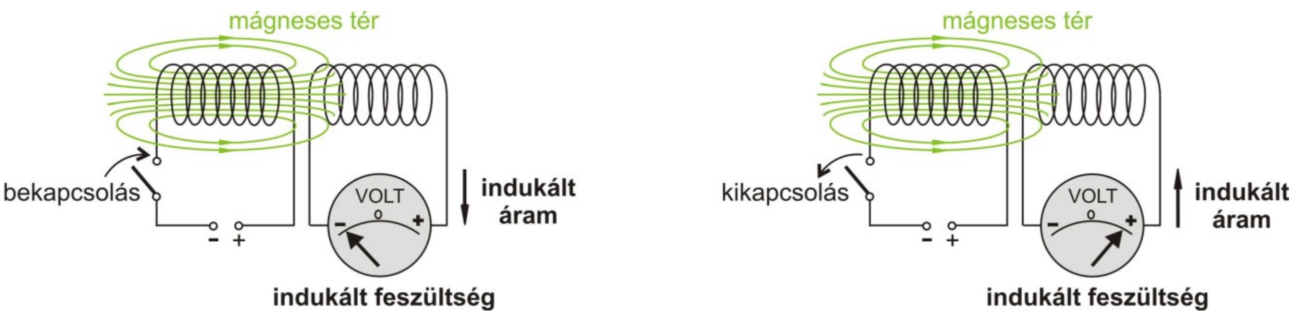
Azt a jelenséget, hogy egy vezető körül, amelyben áram folyik, mágneses tér jön létre, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mozgó töltések mágneses teret keltenek. A természetben sokszor tapasztalhatunk szimmetriát. Ha a szimmetria iránti vonzalmunk most azt kérdezteti velünk, hogy vajon akkor fordítva, a mozgó mágnesek is keltenek-e elektromos teret, akkor a válasz — Faraday megfigyelései óta tudjuk —: igen. A jelenséget *elektromág-*

*neses indukció*nak nevezzük. *Vigyázat*: a korábban *B*-vel jelölt mágneses indukció egy mennyiség, a most említett elektromágneses indukció egy jelenség! Az elnevezések — hasonlóságuk ellenére — egészen mást jelentenek!

Elektromágneses indukció: Elektromágneses indukciónak nevezzük azt a jelenséget, hogy a mágneses tér időbeli változása elektromos teret hoz létre.
Egy példa az elektromágneses indukcióra: Vegyünk egy tekercset és kössünk rá egy voltmérőt — az így kialakított áramkörben nincsen feszültségforrás, és a voltmérő természetesen nulla feszültséget mutat. Ha most veszünk egy állandó mágnest, és azt befelé mozgatjuk a tekercsbe, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy a mozgatás ideje alatt a voltmérő feszültséget jelez. Minél gyorsabban mozgatjuk a mágnest, annál nagyobbat. Az így keletkező feszültséget **indukált feszültség**nek nevezzük. Ha a mágnest kifelé mozgatjuk, ellentétes irányú feszültség indukálódik. (A jelenséget akkor is megfigyelhetjük, ha nem a mágnest, hanem a tekercset mozgatjuk.) Végeredményben azt mondhatjuk, hogy a mozgás miatt fellépő mágnesestér-változás a tekercsben elektromos teret, feszültséget, ill. áramot indukál. Az indukálódott áram persze mágneses teret hoz létre a tekercsben, mégpedig olyan polaritással, hogy a tekercs mágneses tere taszítja a befelé mozgatott állandó mágnest, ill. vonzza a kifelé húzott mágnest. Ezeket az erőket az állandó mágnes mozgatásánál jól érzékelhetjük. Az indukálódott feszültség és áram tehát mindig a létrehozó jelenség (itt a mágnes mozgatása) ellenében hat, ez az ún. **Lenz-törvény**. (Ez a természet egyszerű „trükkje", hogy ne lehessen elektromos energiát munka, befektetett energia nélkül, a semmiből létrehozni!)



Másik példa az elektromágneses indukcióra: Vegyünk két tekercset. Az elsőre kössünk egy feszültségforrást. A közvetlen közelben elhelyezett másodikra csak egy voltmérőt. Amikor az első tekercs áramkörét zárjuk, rövid ideig feszültséget jelez a második tekercsre kapcsolt voltmérő. Amikor az első tekercs körét megszakítjuk, megint jelentkezik a feszültség, csak ellentétes előjellel. Magyarázat: Az első tekercsben zárt áramkör esetén áram folyik, ez a tekercsben — és a végek közelében elhelyezett második tekercsben is — mágneses teret hoz létre. Amikor az áramkört zárjuk, ill. megszakítjuk, a mágneses tér változik, záráskor felépül, megszakításkor leépül. A mágneses tér változásának időtartama alatt a második tekercsben feszültség indukálódik.



Az elektromágneses indukcióra általában igaz, hogy *minél gyorsabb és erőteljesebb a mágneses tér megváltozása, annál nagyobb az indukált feszültség.*

Az elektromágneses indukció második példájában nem csak a második tekercsben indukálódik feszültség, hanem az elsőben is, tehát ugyanabban, amely a mágneses teret létrehozza. Ezt nevezzük *önindukció*nak.

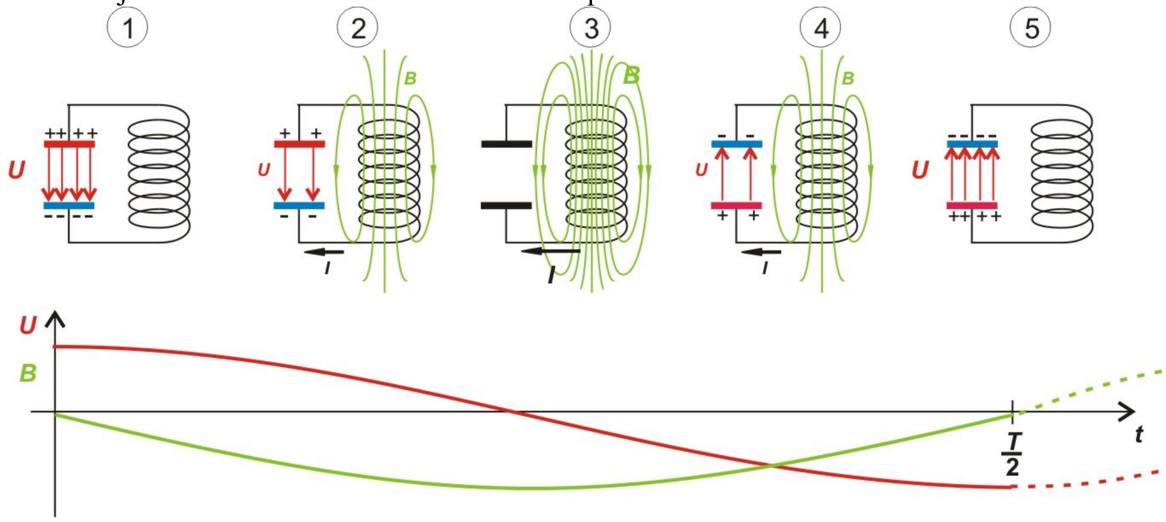
Önindukció: feszültség indukálódása ugyanabban a tekercsben — ill. általában egy vezetőben —, amelyben az áramerősség változik, és ezért mágneses tere is változik. Az önindukció minden be- és kikapcsolásnál fellép.

Az elektromágneses indukció a gyakorlatban pl. az áramgenerátoroknál, a transzformátoroknál játszik fontos szerepet. Az önindukció szerepére egy példa a *rezgőkör*, amellyel elektromágneses rezgéseket lehet létrehozni. Mivel rezgőköröket az orvosi gyakorlatban, pl. a nagyfrekvenciás hőterápiában, vagy az ultrahang előállításánál is használunk, ezért a fejezet végén röviden és csak kvalitatívan tekintsük át a rezgőkör működését.

Rezgőkör (LC-kör): egy tekercsből és egy kondenzátorból álló áramkör, ideális esetben ohmos ellenállás nélkül. (Az L betű a tekercset jelenti.) A kondenzátor feltöltésével indíthatjuk a kör rezgését (természetesen nem mechanikai értelemben). A rezgés egy félperiódusának néhány jellegzetes pillanatát ragadjuk ki a következőkben (l. az ábrát is):

1. Az első pillanatban a kondenzátor töltése és feszültsége (U) maximális, áram a körben még nem folyik, ezért a tekercsben sincs még mágneses tér.
2. A kondenzátor kisülése megkezdődik, áram (I) folyik a pozitív lemeztől a negatív felé, és az áram a tekercsben mágneses teret (B) hoz létre. Az áram és a mágneses tér „felépülése” azonban fokozatosan megy végbe, mivel a tekercsben fellépő önindukció a Lenz-törvény értelmében ezeket a változásokat akadályozni igyekszik.
3. A kondenzátor kiürült, feszültsége nulla. Ebben a pillanatban éri el az áram és a mágneses tér erőssége is a maximális értéket.
4. Az áramerősség és ezért a tekercsben a mágneses tér erőssége is csökkenni kezd. A Lenz-törvény értelmében azonban ez is csak fokozatosan megy végbe. Az önindukció miatt ugyanis a tekercsben olyan áram indukálódik, amely az áram csökkenését akadályozni, azaz az eredeti áramot fenntartani igyekszik. Az áram tehát, bár egyre gyengébben, de az eredeti irányban folyik tovább, és a kondenzátort ellentétes polaritással tölti fel. Az áram és a mágneses tér gyengülnek, a kondenzátor elektromos tere és feszültsége viszont erősödik.
5. Az áramerősség nullára csökken, egyúttal eltűnik a tekercs mágneses tere is, viszont a kondenzátor töltése és feszültsége az eredeti, maximális értékre áll vissza, csak éppen ellentétes polaritással.

Ezzel véget ért egy félperiódus. A felsorolt jelenségek újrakezdődnek, csak ellentétes irányban, mígnem egy teljes periódus lezajlása után visszaérkezünk az eredeti állapotba.



A rezgőkör működése során több mennyiség is periodikusan változik: a kondenzátor töltése, feszültsége, az elektromos tér erőssége és a benne tárolt elektromos energia, valamint az áram és a mágneses tér erőssége és a térben tárolt mágneses energia. Elektromos és mágneses rezgések zajlanak le, méghozzá egymáshoz kapcsoltan, ezért beszélünk összefoglalóan **elektromágneses rezgés**ekről.
A kör működése során energiátalakulásoknak is szemtanúja lehetünk: az 1. pillanatban a kondenzátorban tárolt elektromos energia fokozatosan — a 3. pillanatra már teljes egészében — mágneses energiává alakul, aztán vissza. Összegük az energiamegmaradás értelmében minden pillanatban állandó, a rezgések csillapítatlanul, állandó amplitúdóval, szinuszosan történnek. Természetesen csak az ideális rezgőkörben, amelyben nincsen ohmos ellenállás. Valóságos rezgőkörben mindig van ohmos ellenállás, már csak a vezetékek ellenállása miatt is. Valóságos rezgőkörben ezért mindig van energiaveszteség — Joule-féle hő —, a rezgések csillapodnak, a kör spontán, szabad rezgése előbb-utóbb leáll. Ez pl. az orvosi ultrahangos vizsgálat folyamán enyhén szólva nem lenne szerencsés. A rezgéseket mesterségesen, „energia utánpótlással”, kényszerrezgést kialakítva fenn lehet tartani, pl. a szinuszoszcillátor nevű eszközben, de erről többet majd a biofizika tárgyban!

Feladatok:

1. Melyik mennyiséggel jellemezhetjük egy mágnes erősségét?

2. Hasonlítsa össze az elektromos és mágneses kölcsönhatásokat! Melyik állítás igaz?
A: Az azonos nemű elektromos töltések vonzzák, viszont az azonos nemű mágneses pólusok taszítják egymást.
B: Elektromos töltések között vonzó és taszító erők is felléphetnek, míg mágnesek között csak vonzóak.
C: Az elektromos töltések szétválaszthatók egymástól, a mágneses pólusok nem.
D: A mágneses pólusok szétválaszthatók egymástól, az elektromos töltések nem.

3. Melyik mennyiség jellemzi a mágneses tér erősségét —, amelyet ezért néha pongyolán mágneses térerősségnek is nevezünk?

4. Mi a mágneses indukció (B) SI-mértékegysége?
A: tesla (T) **B**: volt (V) **C**: amper (A) **D**: siemens (S)

5. Egy mágnest helyezünk egy külső mágneses térbe. Hányszorosára növekedne a köztük lévő kölcsönhatás erőssége, ha mind a mágnes momentumát, mind pedig a külső tér erősségét a kétszeresére növelnénk?
A: 1 **B**: 2 **C**: 4 **D**: 8

6. Mivel lehet közelítőleg homogén mágneses teret létrehozni?

7. Mi az „elektromágneses indukció“ jelensége?
A: Mágneses tér létrehozása tekercs segítségével.
B: Egy test felmágnesezése.
C: Elektromos tér létrehozása változó mágneses tér segítségével.
D: Iránytűk orientálása, egy irányban rendezése mágneses tér segítségével.

8. Melyik esetben nem indukálódik feszültség az „elektromágneses indukció” szócikk második ábráján lévő második tekercsben?
A: Az első tekercsben állandó áram folyik, közben a második tekercset az első felé mozgatjuk.
B: Az első tekercsben állandó áram folyik, közben a tekercset a második tekercs felé mozgatjuk.
C: Mindkét tekercs áll, az első tekercsben erősödő áram folyik.
D: Mindkét tekercs áll, az első tekercsben állandó erősségű áram folyik.

9. Hogyan nevezzük azt a jelenséget, amikor egy tekercsben a rajta átfolyó változó erősségű áram miatt feszültség indukálódik?

10. Milyen elemekből áll egy ideális rezgőkör?

Megoldások:

1. mágneses momentum (nyomaték)

2. C

3. mágneses indukció (B)

4. A

5. C

6. például áramjárta tekerccsel

7. C

8. D

9. önindukció

10. tekercsből és kondenzátorból (ohmos ellenállás nélkül)