Signalverarbeitung für Zahnmediziner

Balázs Kiss

kissb3@gmail.com

Myofilament-Mechanobiophysik Forschungsgruppe,

Semmelweis Universität,

Institut für Biophysik und Strahlenbiologie.

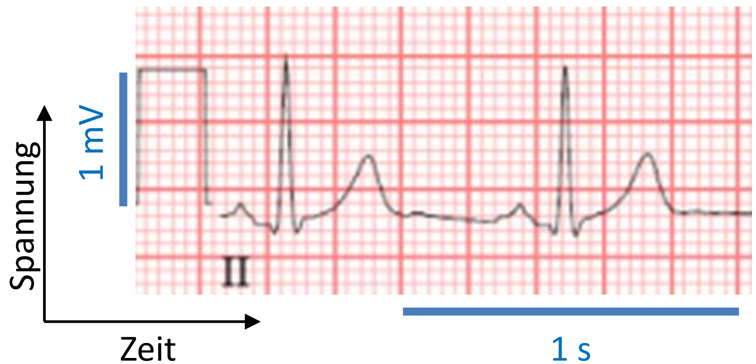
13. März 2025.

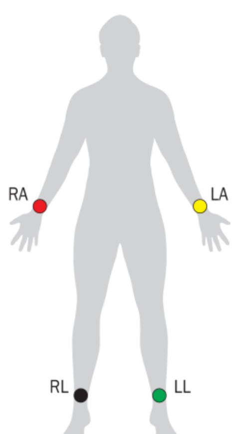
(Zahn)medizinische Signale

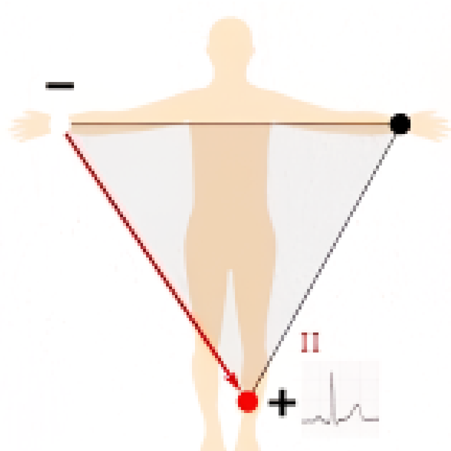
- **Signal: eine physikalische Größe, die Information trägt, weiterleitet oder speichert**

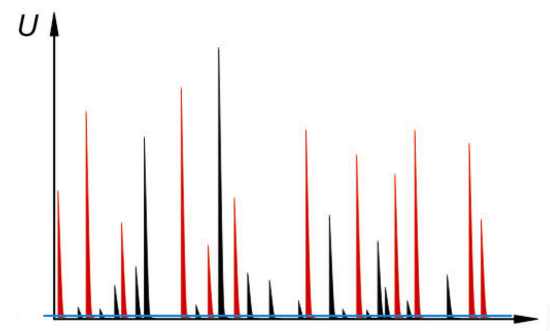
- Beispiel #1: **EKG-Signal**
  - elektrische Spannung, die infolge der Herztätigkeit auf der menschlichen Körperoberfläche erscheint

- Beispiel #2: **Gamma-Quanten**
  - Spannungsimpulse detektiert bei der Isotopendiagnostik



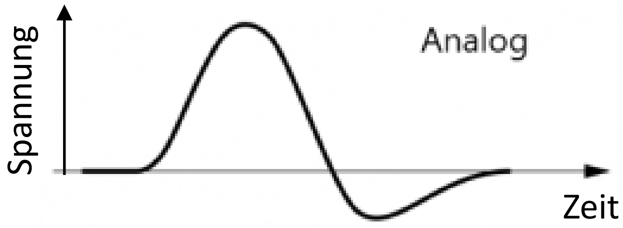


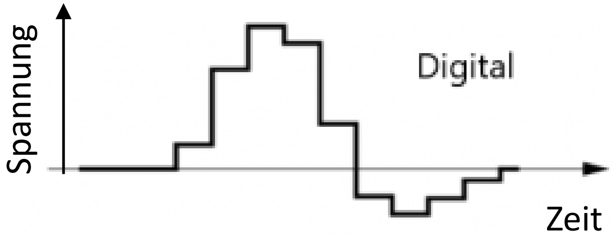




Klassifizierung der Signale

statisches S.	zeitabhängiges S.
(quasi)periodisches S.	nichtperiodisches S.
stochastisches S.	nichtstochastisches S. (deterministisches S.)
elektrisches S.	**nichtelektrisches S.**
analoges S.	**digitales S.**





analoges Signal: unbeschränkte Auflösung in der Zeit und Größe (theoretisch)

digitales Signal: beschränkte Informationsgehalt wegen **zeitliche und wertliche Diskretisierung**

- **Vorteil der elektrischen Signale: Umwandlung, Verstärkung, Weiterleitung ist einfach**
- **Vorteil der digitalen Signale: Speicherung ist einfach, Rausch kann minimalisiert werden**

Information, Bit

Information: **diejenige Bedeutung, welche durch eine Nachricht übermittelt wird.** Beispielsweise eine **Reihenfolge der Zeichen**, worin die **Zeichen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten** auftreten.

Informationsgehalt, Informationsentropie: bezeichnet die **minimale Anzahl von Bits**, die benötigt werden, **um ein Zeichen (also eine Information) darzustellen** oder zu übertragen.

$$H = \sum_i p_i \cdot log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

H: Informationsgehalt eines Zeichens *i* mit einer Auftrittswahrscheinlichkeit p_i

Maßeinheit: Bit

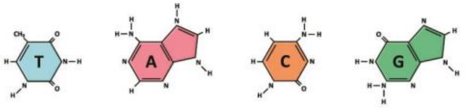
- Beispiel #1: **Münzenwerfen**
  - $p_{Kopf} = 0,5$
  - $p_{Zahl} = 0,5$

$$H = 0,5 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,5}\right) + 0,5 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,5}\right)$$

$$H = 0,5 \cdot log_2(2) + 0,5 \cdot log_2(2)$$

$$H = 0,5 + 0,5 = 1\ bit$$

- Beispiel #2: **ein Nukleotid im DNS**
  - $p_A = 0,25$
  - $p_T = 0,25$
  - $p_G = 0,25$
  - $p_C = 0,25$



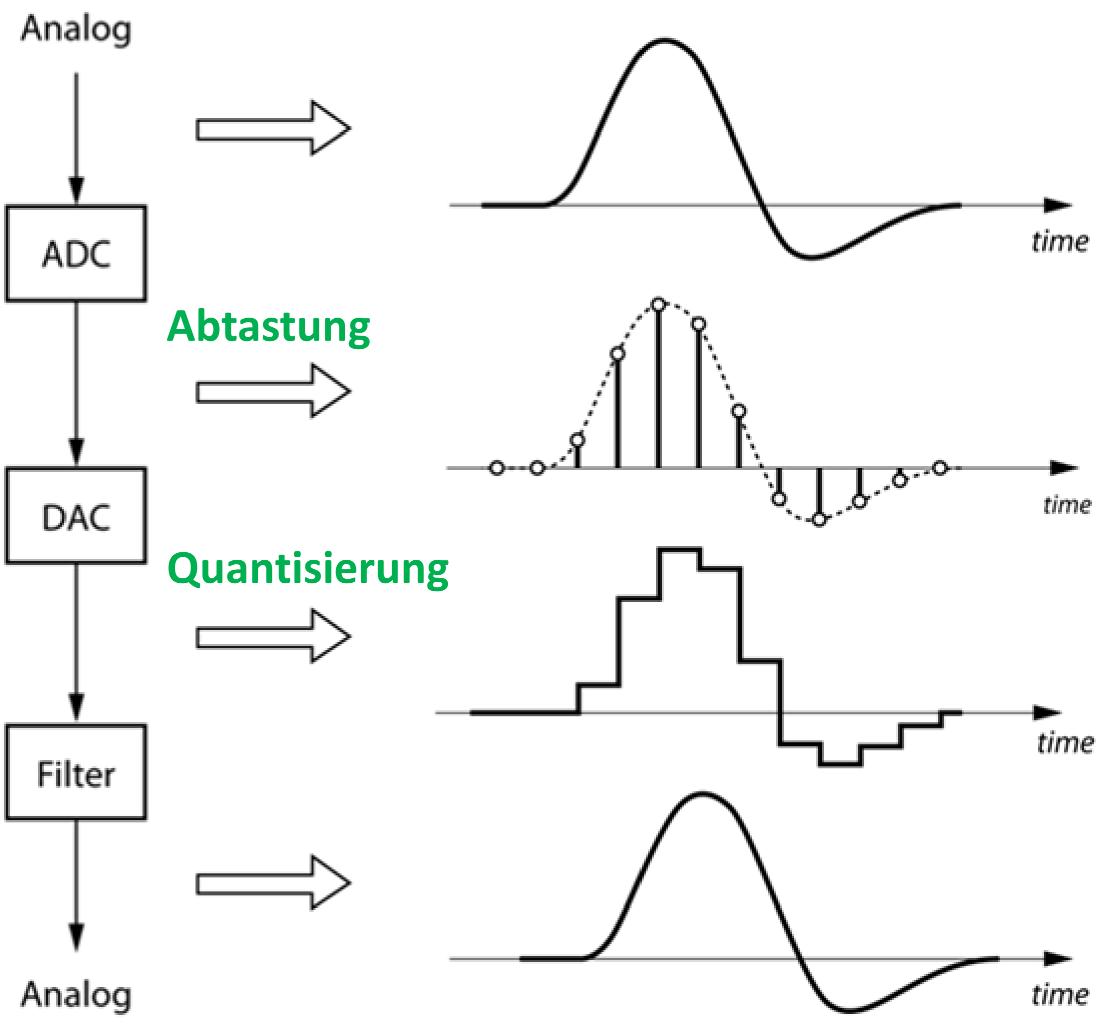
$$H = 0,25 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,25}\right) + 0,25 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,25}\right) + 0,25 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,25}\right) + 0,25 \cdot log_2\left(\frac{1}{0,25}\right)$$

$$H = 4 * 0,25 \cdot log_2(4) = 2\ bit$$

Kodierung, Dekodierung

Analog-Digital-Umsetzer

Digital-Analog-Umsetzer



Nyquist-Theorie: Abtastung (Sampling)

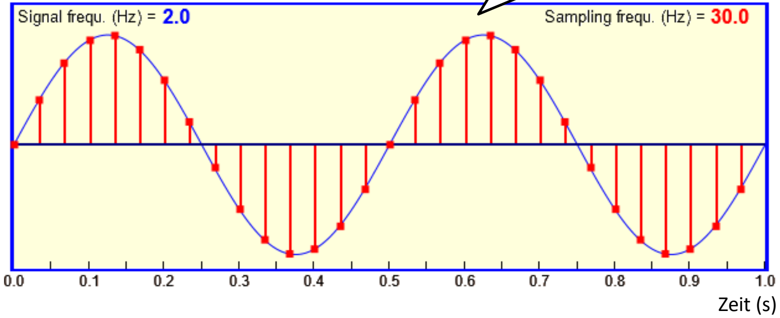
- Wie groß ist die **minimal erforderliche Abtastfrequenz**, die den **Informationsgehalt des Signals nicht verzerrt** und/oder deren genaue Rekonstruktion ermöglicht?

Harry Nyquist
(1889-1976)

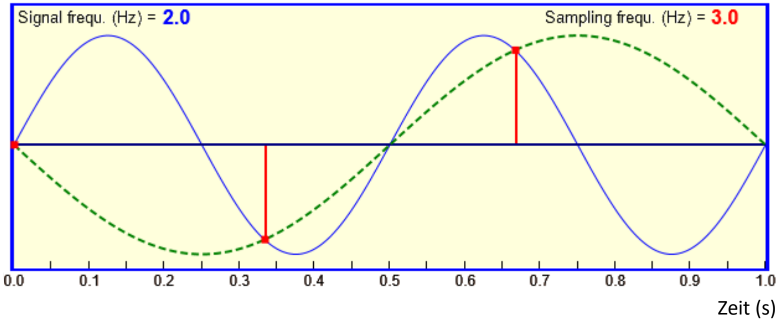
Claude Shannon
(1916-2001)

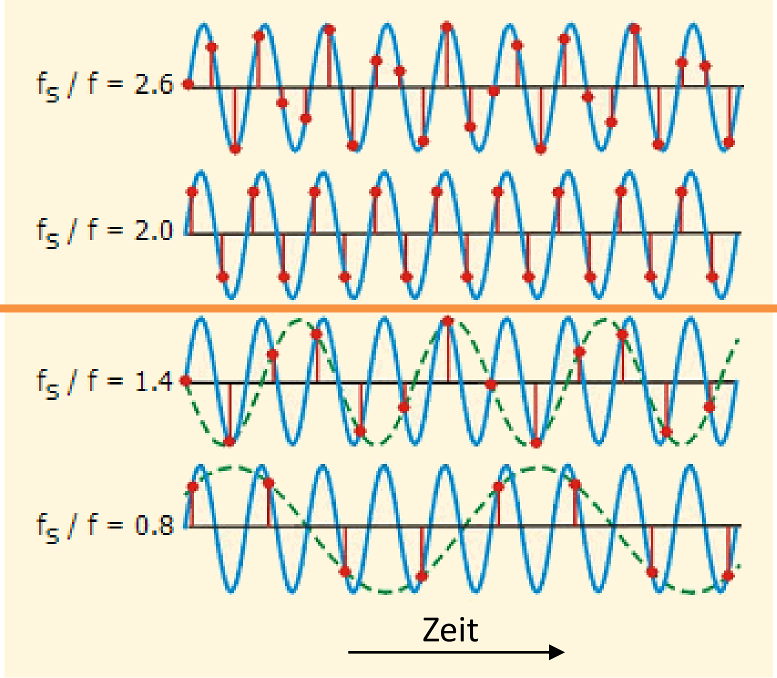
Beispiel: hier die genaue Frequenz ist für uns relevant

„gute" Abtastung



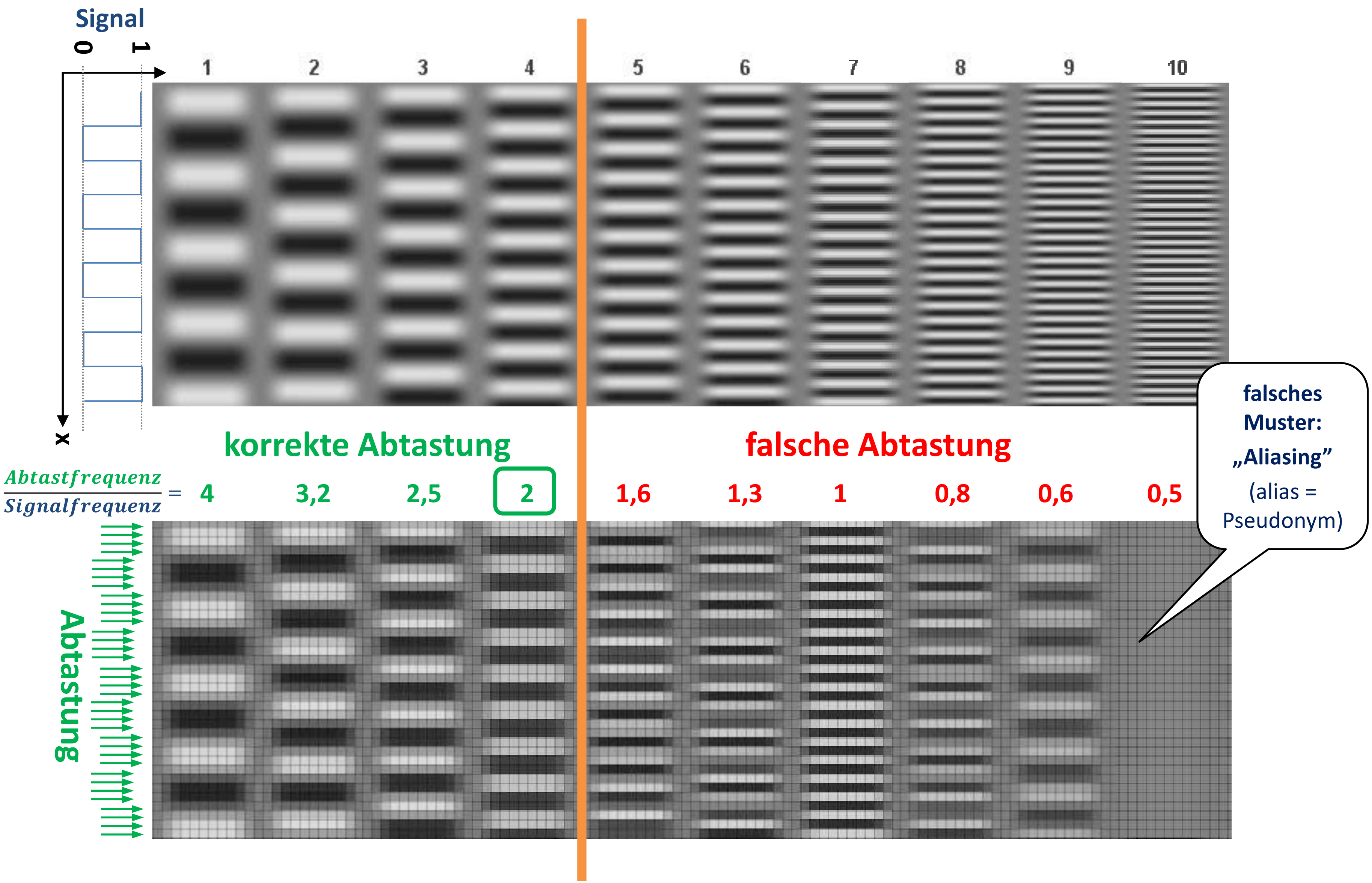
„schlechte" Abtastung





http://webapps.chem.uoa.gr/efs/applets/AppletNyquist/Appl_Nyquist2.html

Beispiel: räumliche Abtastung



Die Abtastfrequenz soll mindestens das Zweifache der Signalfrequenz sein!

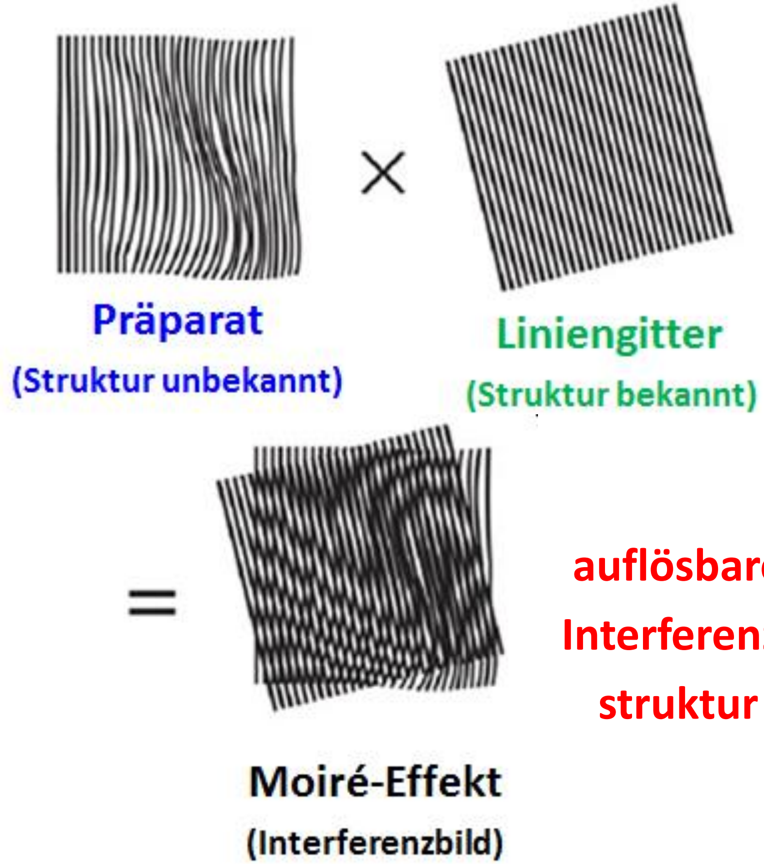
Moiré-Effekt

zur Erinnerung

mit Kamera aufgenommen

Ein optischer Effekt, bei dem durch **Überlagerung von regelmäßigen Rastern** ein wiederum **periodisches Raster** entsteht, das **spezielle Strukturen** aufweist, die in keinem der Einzel-Muster vorhanden sind.

SIM-Superresolutionsmikroskopie



auflösbare Interferenz-struktur

- **Abbé-Grenze: ~200 nm**
- **Auflösungsgrenze des SIM-Mikroskops: ~100 nm**

„Nyquist-Grenze" (zweifach bessere Auflösung)

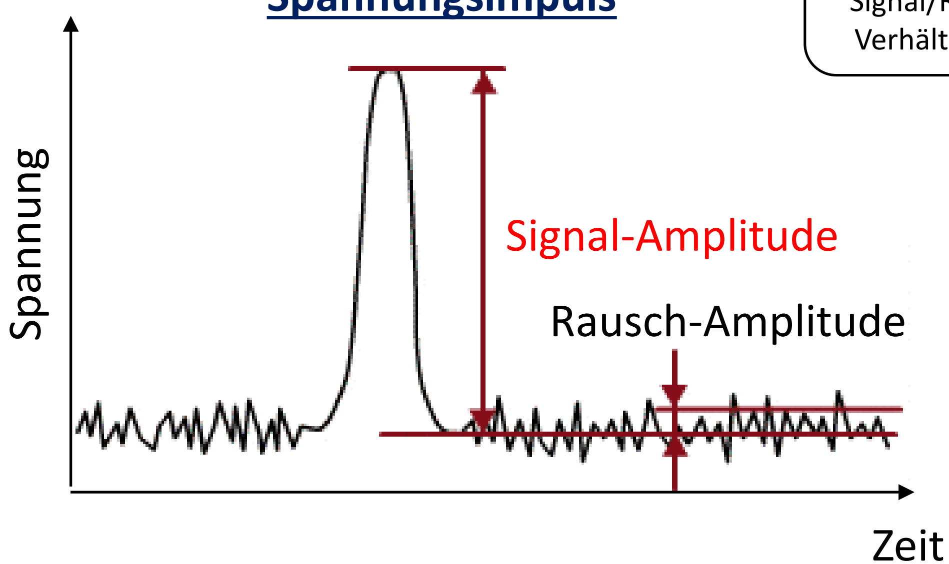
Rauschen, Signal-Rausch-Verhältnis

Signal zu Rausch Verhältnis: SRV

Signal to Noise Ratio: SNR

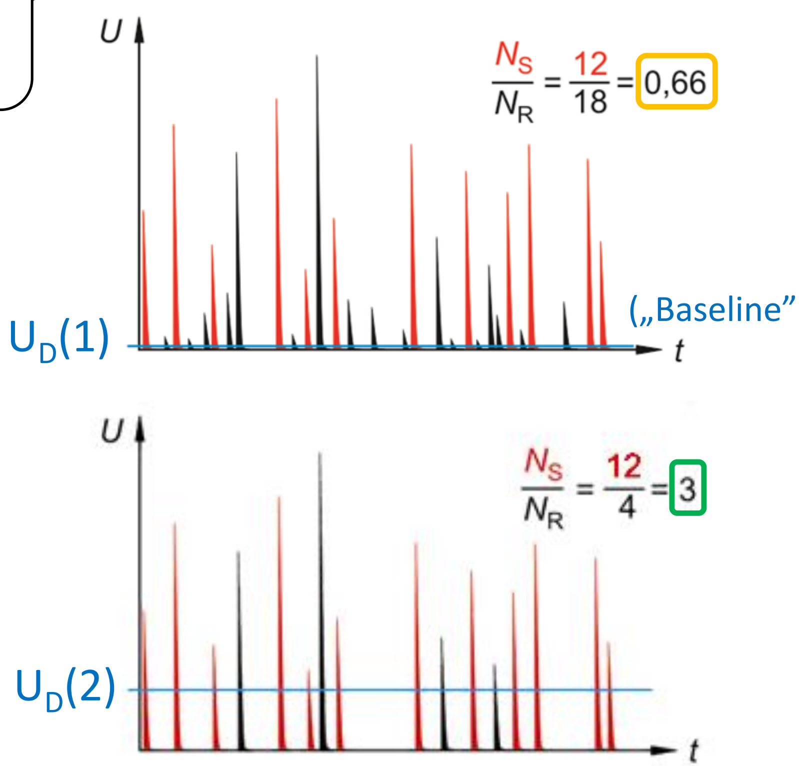
$$SRV = \frac{mittlere\ Nutzsignalleistung}{mittlere\ Rauschleistung} \quad oder \quad \frac{Signalimpulszahl}{Rauschimpulszahl} \qquad oder \left(\frac{A_{Signal}}{A_{Rauschen}}\right)^2$$

Spannungsimpuls



zur Bestimmung des optimalen Signal/Rausch Verhältnisses

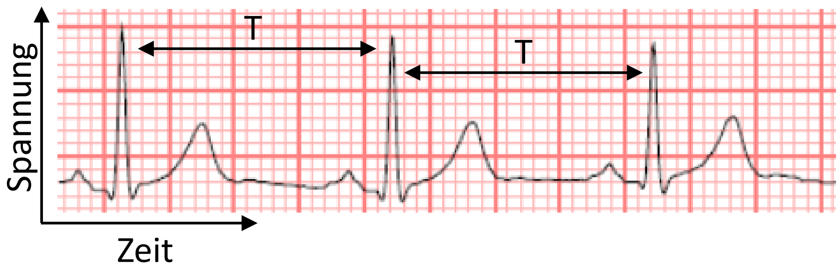
Integraldiskriminator



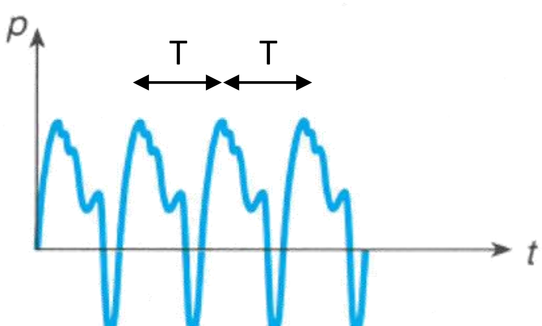
Fourier Prinzip

Alle periodische Signale können als eine Summe von Sinusfunktionen mit fester Frequenzbeziehung hergestellt werden.

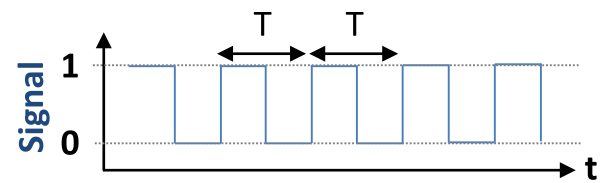
- Beispiel #1: **EKG-Signal**
  - periodisch…
  - …aber kein einfaches Sinussignal



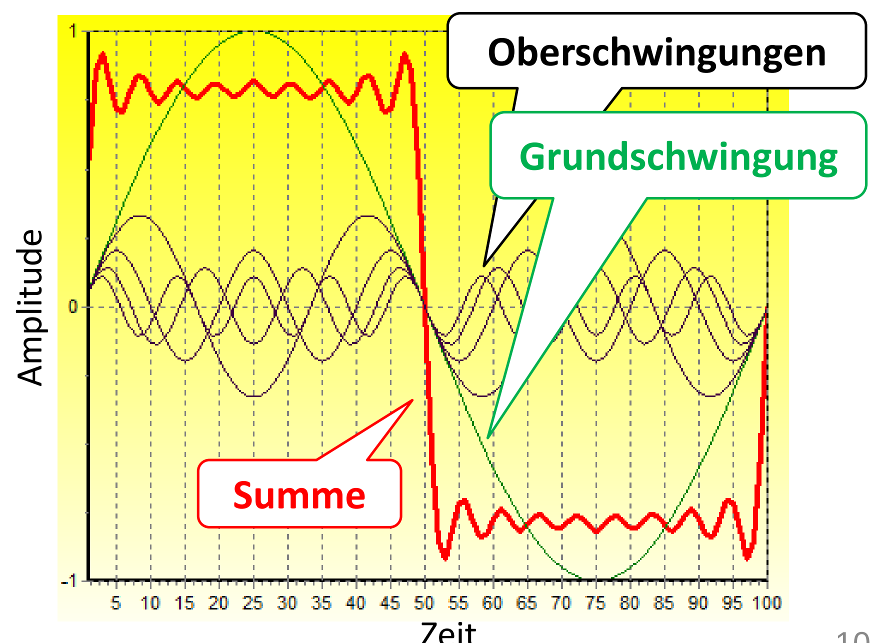
- Beispiel #2: **musikalischer Ton**
  - periodisch…
  - …aber kein einfaches Sinussignal



- Beispiel #3: **Rechteck-Impuls (Signal)**
  - periodisch…
  - …aber definitiv kein Sinus

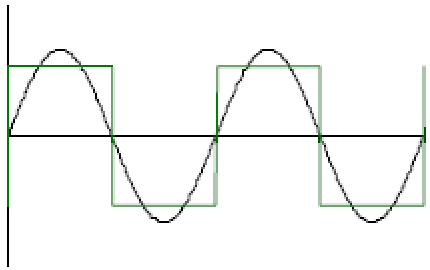


Können wir diese Beispiele mit Sinusfunktionen herstellen? … JA!

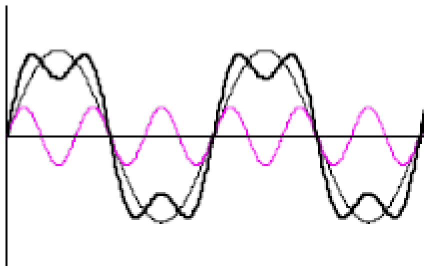


Fourier-Prinzip für periodische Funktionen

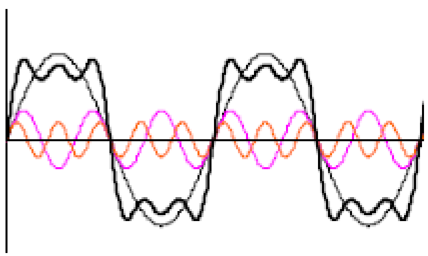
Entstehung des Rechteck-Signals



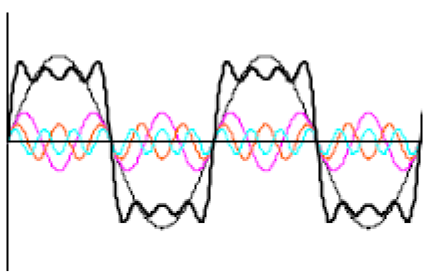
Rechtecksignal
Grundschw.



Grundschw. +
3. Oberton



Grundschw. +
3. Oberton +
5. Oberton



Grundschw. +
3. Oberton +
5. Oberton +
7. Oberton

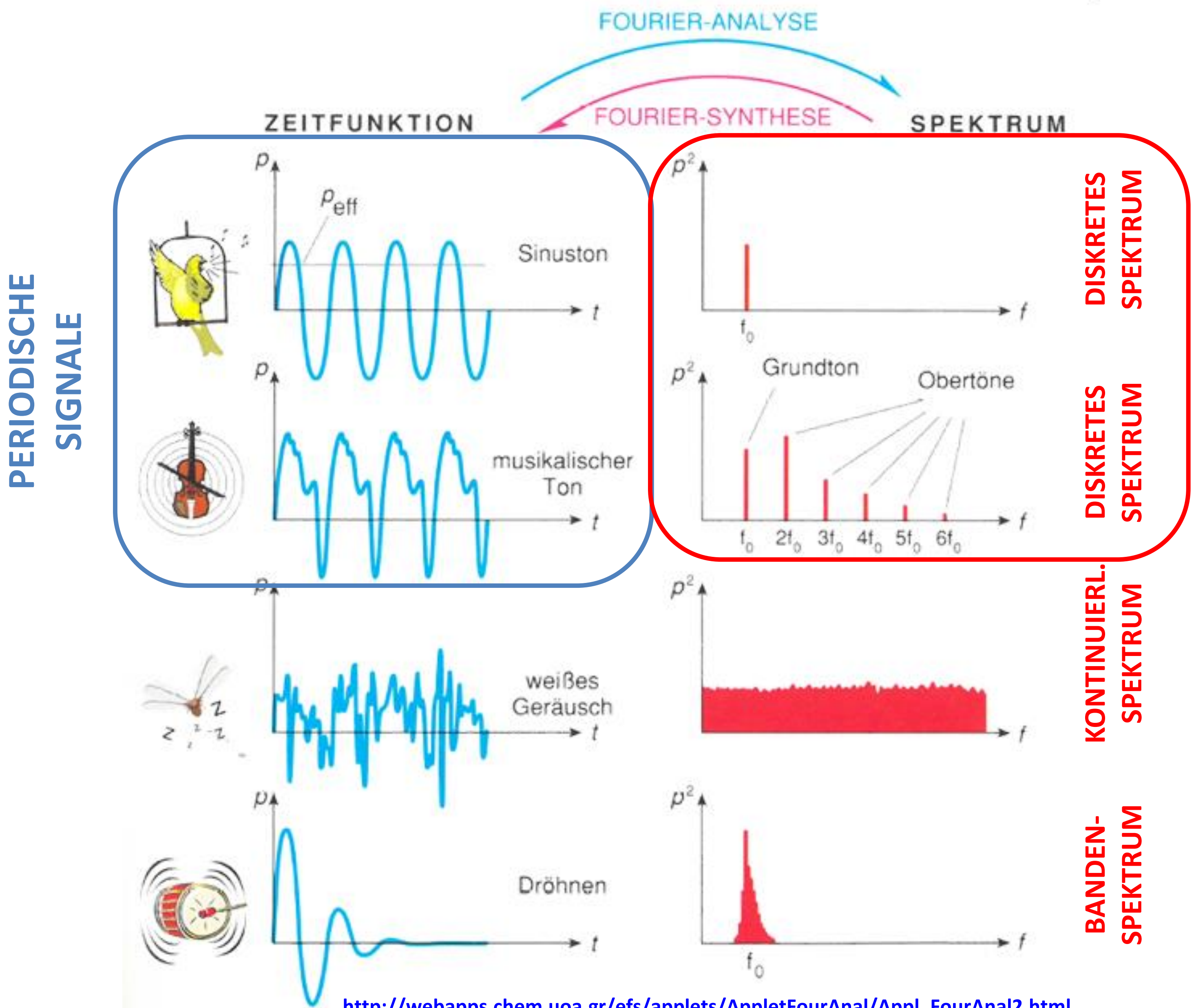
Entstehung des EKG-Signals

Gewünschtes Signal und aus den ersten 3 Fourierkomponenten zusammengesetztes Signal

Gewünschtes Signal und aus den ersten 10 Fourierkomponenten zusammengesetztes Signal

Gewünschtes Signal und aus den ersten 64 Fourierkomponenten zusammengesetztes Signal

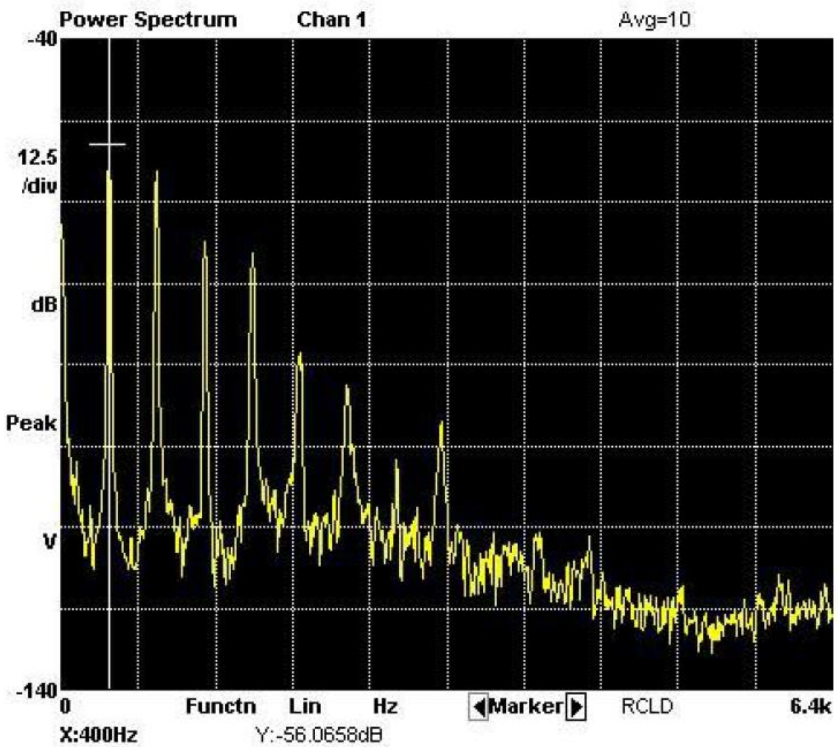
Fourier Spektrum (Frequenzspektrum)



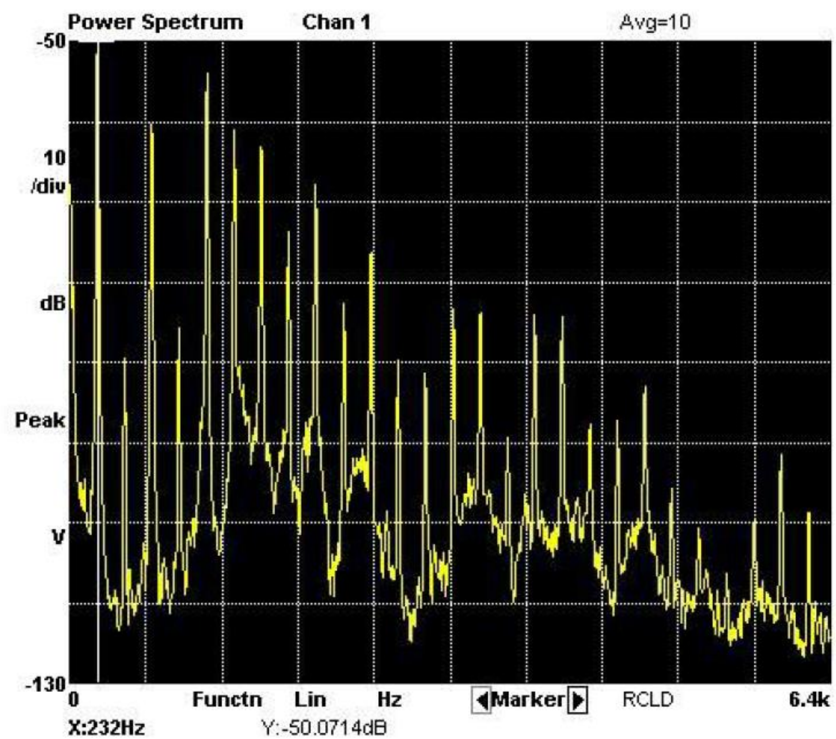
http://webapps.chem.uoa.gr/efs/applets/AppletFourAnal/Appl_FourAnal2.html

Frequenzspektren von unterschiedlichen Musikinstrumenten

Querflöte



Klarinette



[Spektralanalyse: mit Soundcard Scope oder mit Spectroid App]

Anwendungen der Fourier-Analyse

s. **Wellen**: zeitliche und räumliche Ausbreitung des Schwingungszustandes

ZEITfunktion oder **RAUMfunktion**

$$y(t) = \sum_k a_k \cdot sin(k \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_k)$$

$$y(x) = \sum_k a_k \cdot sin(k \cdot \omega_0 \cdot x + \varphi_k)$$

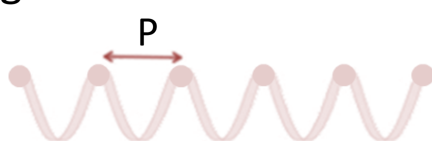
Fourier-Transformation (FT) **invers-FT**

FREQUENZfunktion
(~Spektrum)

zur Erinnerung

- Beispiel #1: **Diffraktionsmethoden**
  - Beugung des Lichtes
  - Röntgendiffraktion:

Raum-funktion

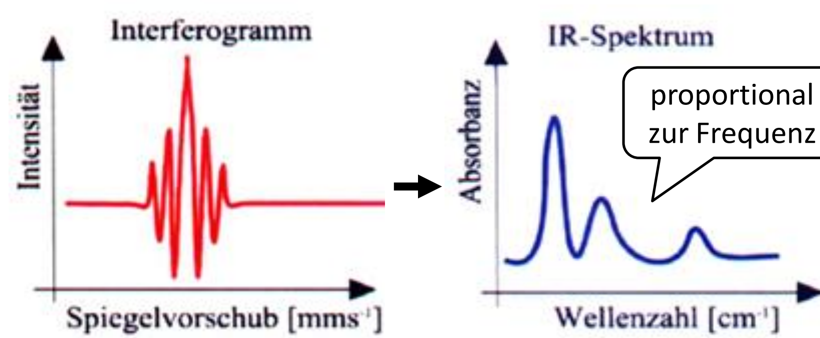


Frequenz-funktion

Untereinheit-Abstand (P): groß, Frequenz (1/P): klein

zur Erinnerung

- Beispiel #2: **IR-Spektroskopie**

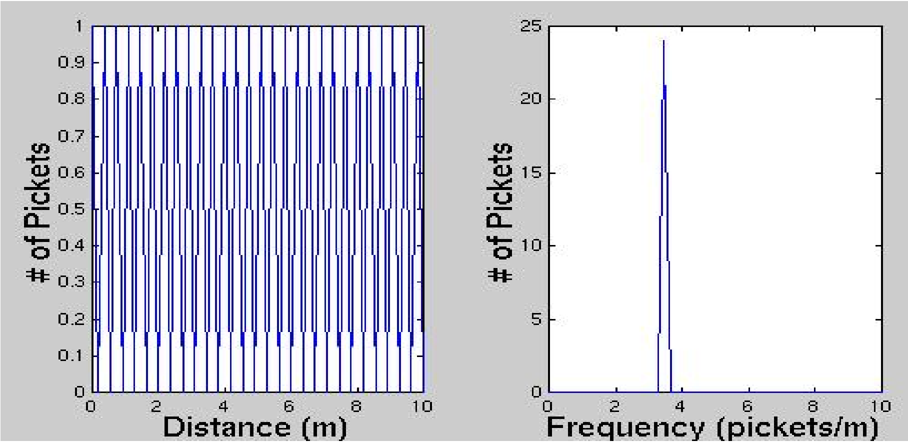


proportional zur Frequenz

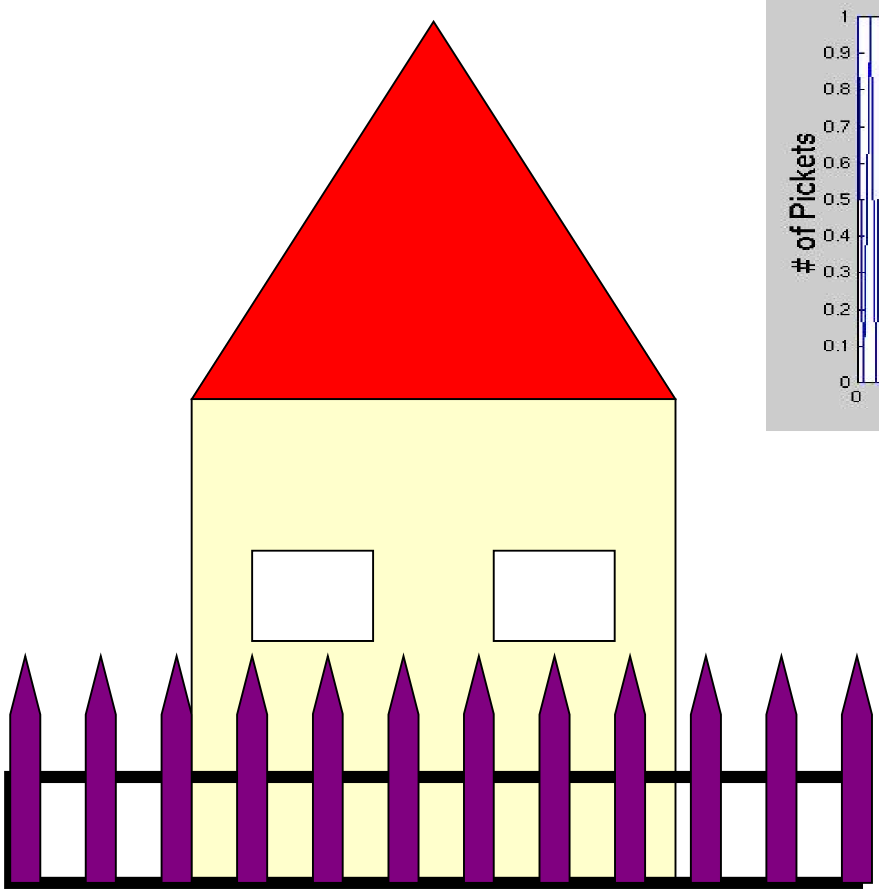
Raumfunktion **Frequenzfunktion**

Fourier Analyse
(Raumdomain → Frequenzdomain)

Raumfunktion **Frequenzspektrum**



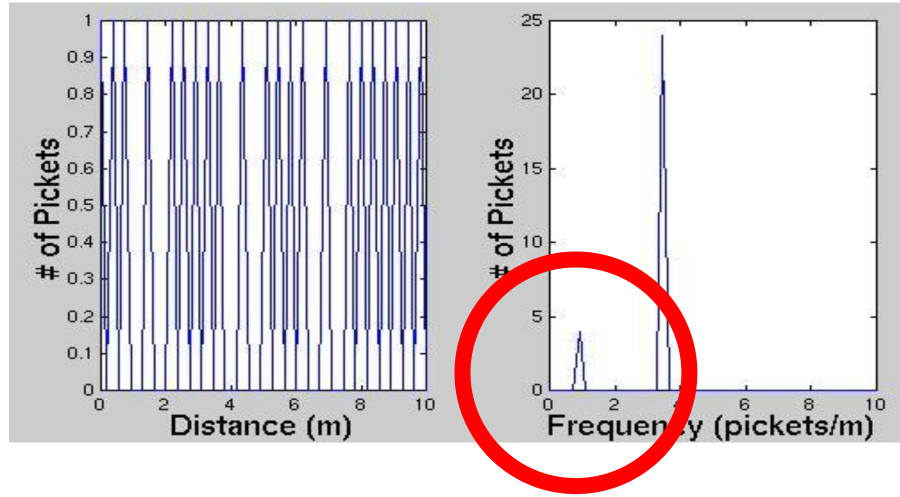
Frequenzdomain
(repetierende Zaunelemente)

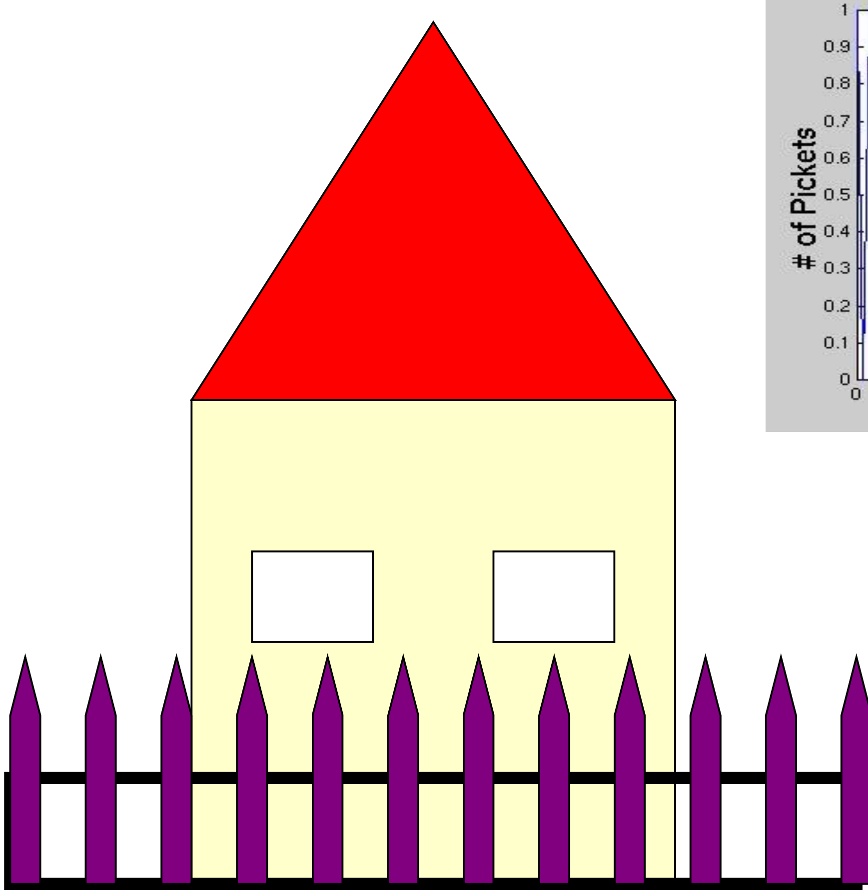


Raumdomain
(Haus mit Zaun)

Fourier Analyse
(Raumdomain → Frequenzdomain)

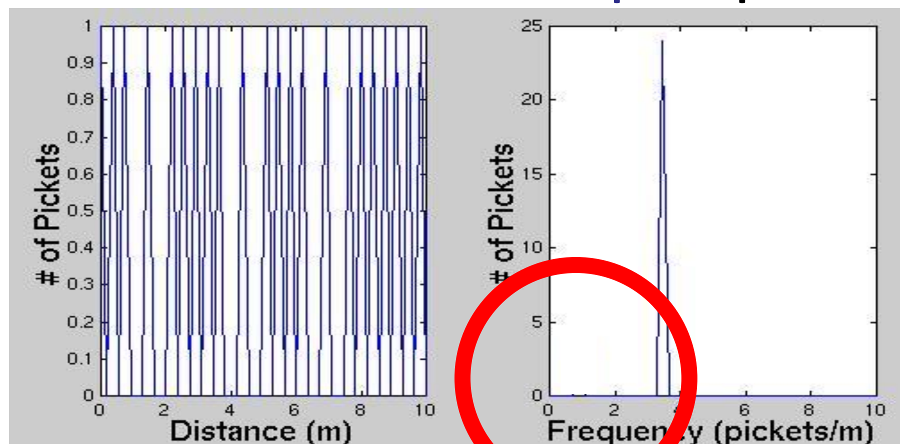
Raumfunktion **Frequenzspektrum**

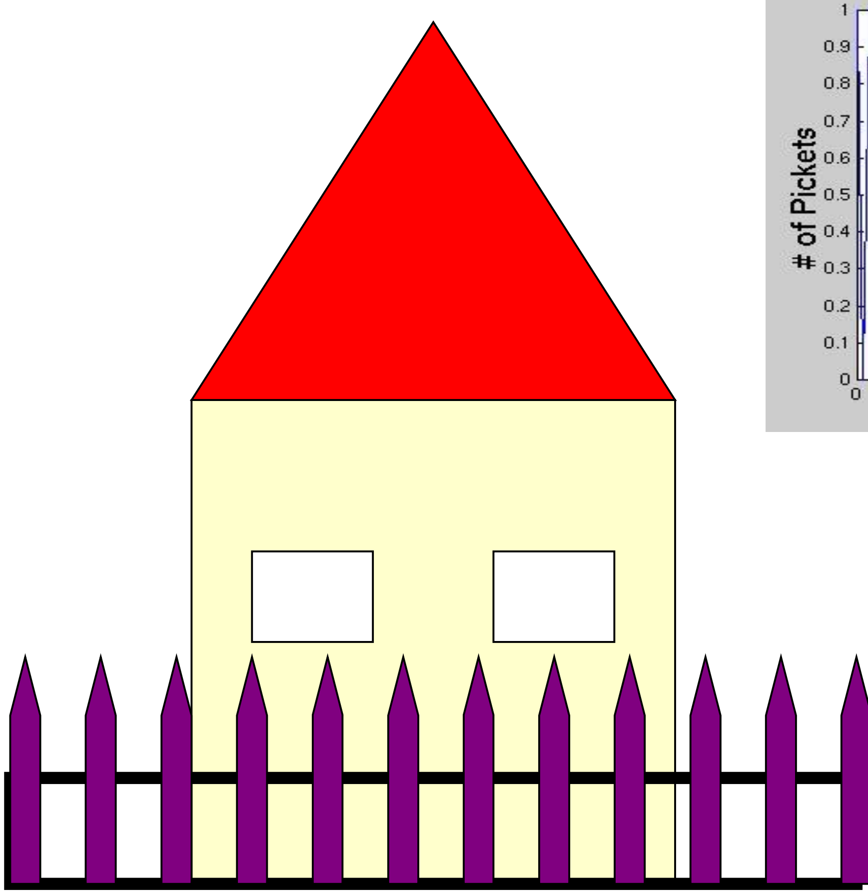




Fourier Synthese
(Raumdomain ← Frequenzdomain)

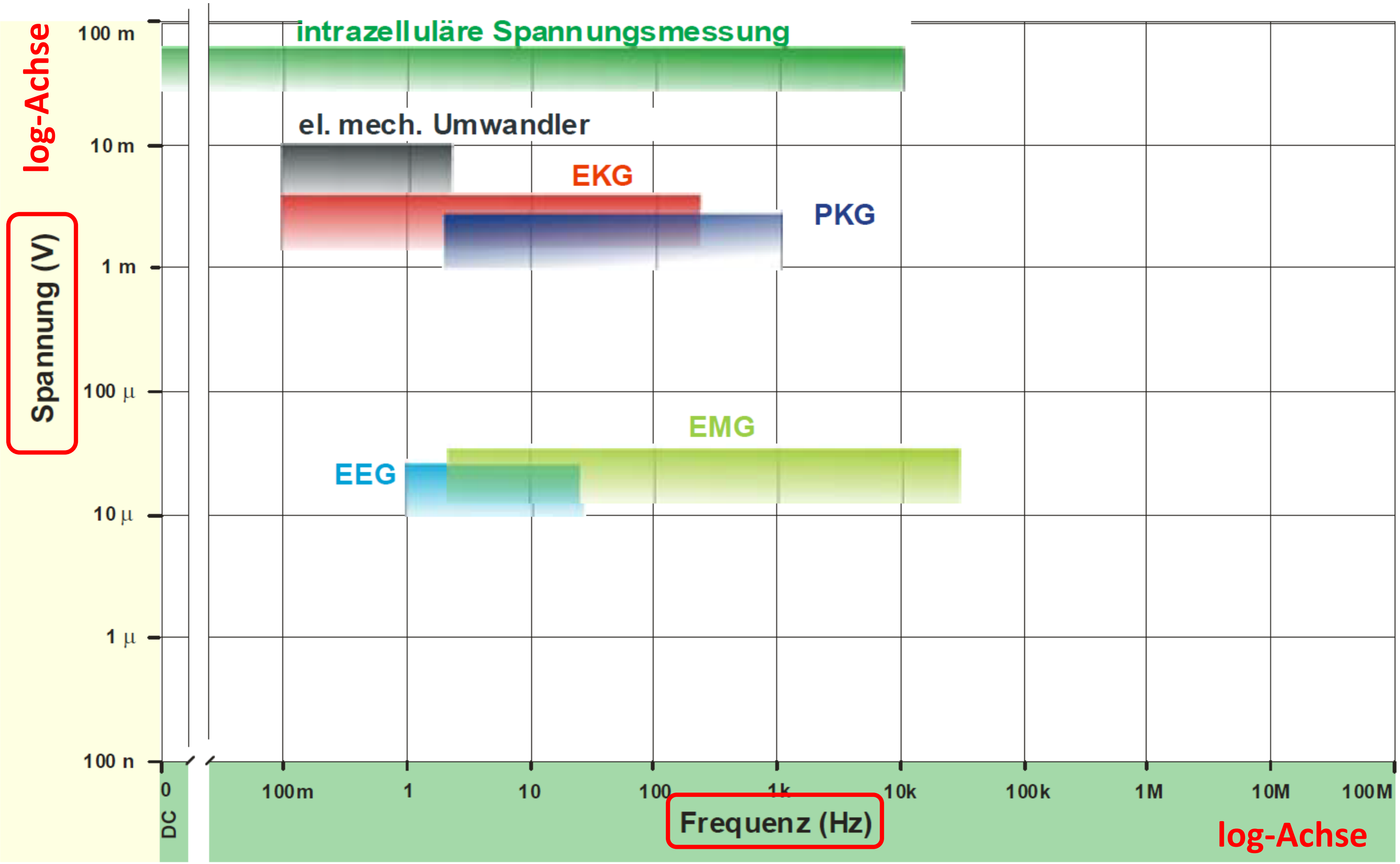
Raumfunktion **Frequenzspektrum**



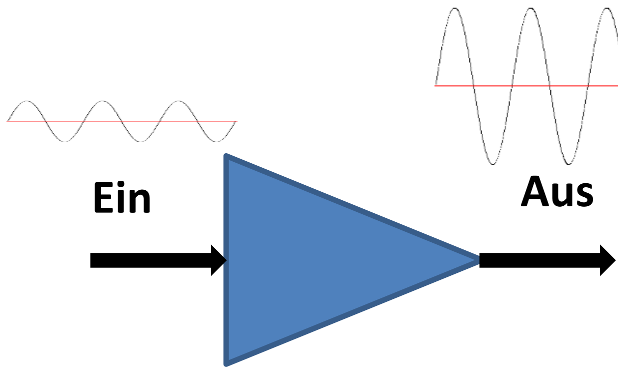


Anwendungsbeispiel der Fourier Synthese: Rauschfilterung

Bioelektrische Potentiale



Verstärker

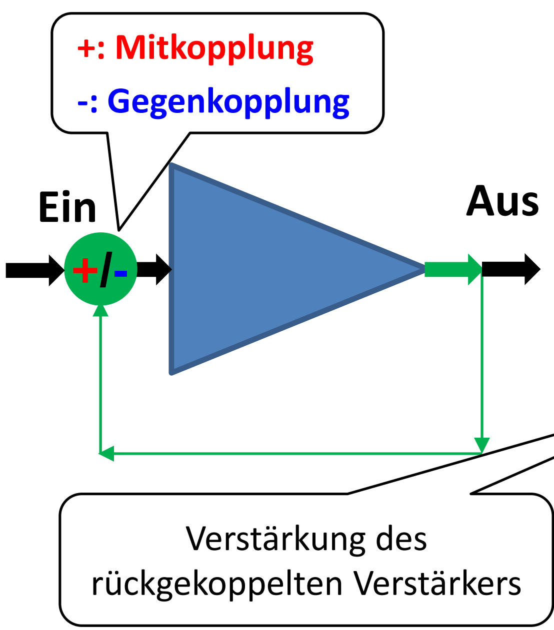


Leistungsverstärkung: $V_P = \frac{P_{aus}}{P_{ein}}$

Spannungsverstärkung: $V_U = \frac{U_{aus}}{U_{ein}}$

Verstärkungspegel: $n(dB) = 10 \cdot log\left(\frac{P_{aus}}{P_{ein}}\right)$

Rückgekoppelter Verstärker



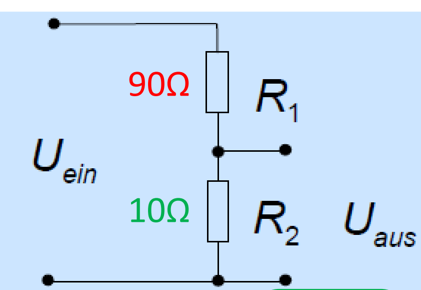
Verstärkung ohne Rückkopplung

$$U_{\text{aus}} = \left(U_{\text{ein}} - U_{\text{aus}} \cdot \beta\right) \cdot V$$

$$V_{\text{R}} = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} = \frac{V}{1 + V \cdot \beta}$$

$$V \cdot \beta >> 1 \qquad V_{\text{R}} \cong \frac{1}{\beta}$$

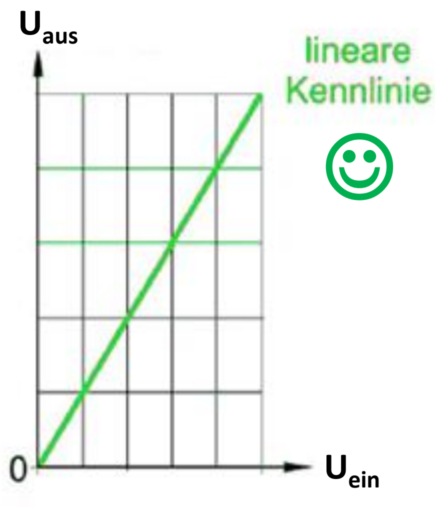
Spannungsteiler

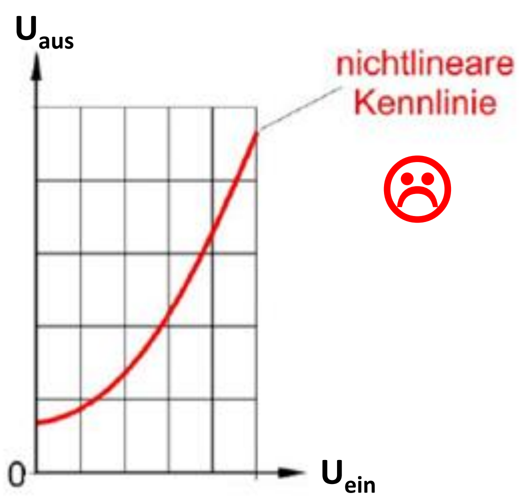


$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}}_{\beta}$$

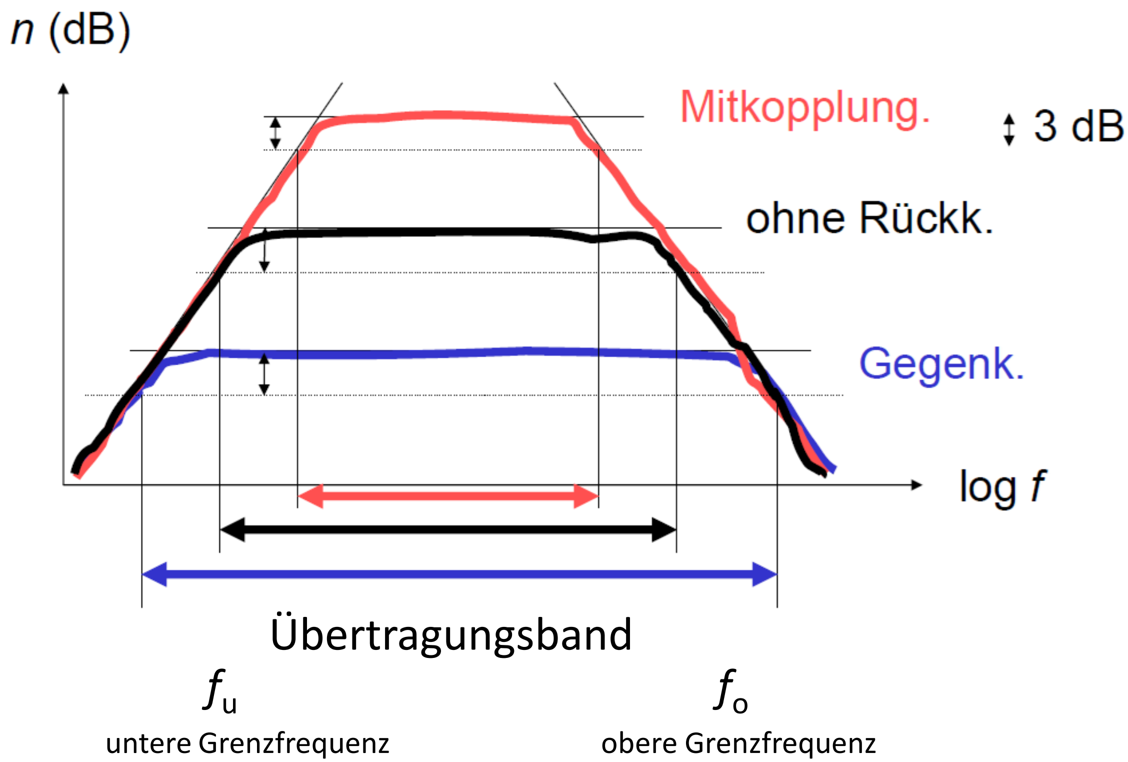
Kennlinie, Frequenzübertragungsfunktion

Kennlinie





Frequenzcharakteristik



Mitkopplung: Übertragungsband: schmaler, Verstärkung größer

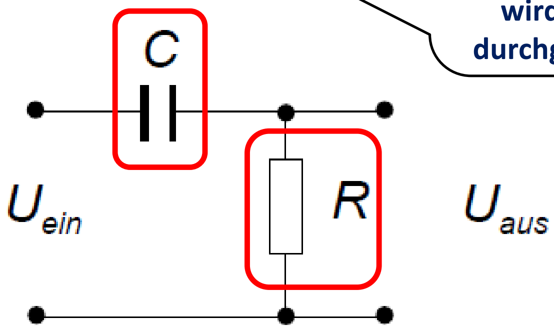
Gegenkopplung: Übertragungsband: breiter, Verstärkung kleiner

Hoch- und Tiefpassfilter

kapazitiver Widerstand

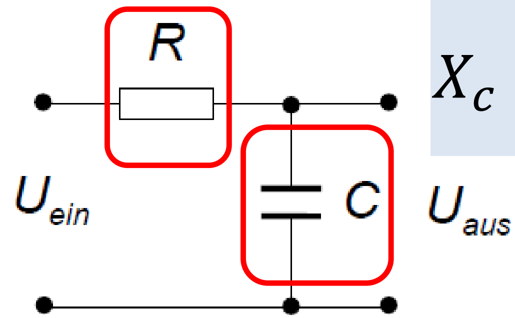
$$X_c = \frac{1}{2\pi f c}$$

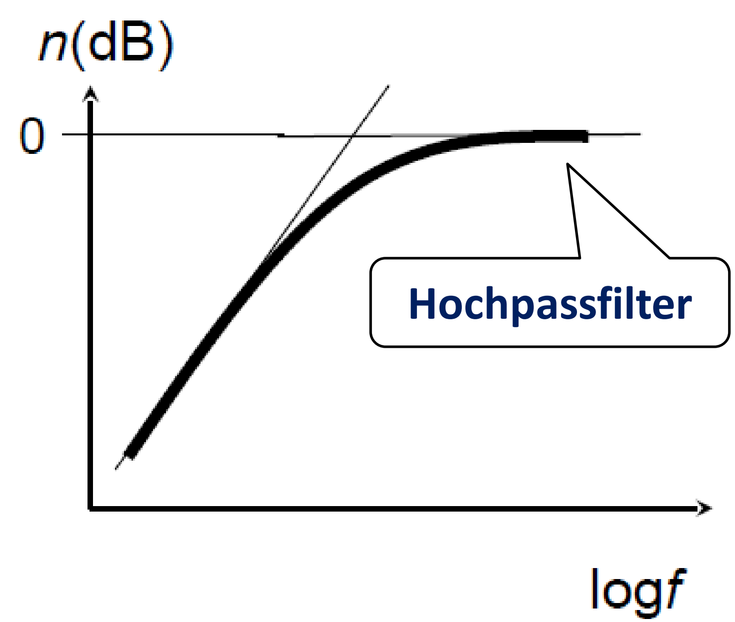
bei niedriger Frequenzen: X_c ist sehr groß: Eingangssignal wird nicht durchgelassen

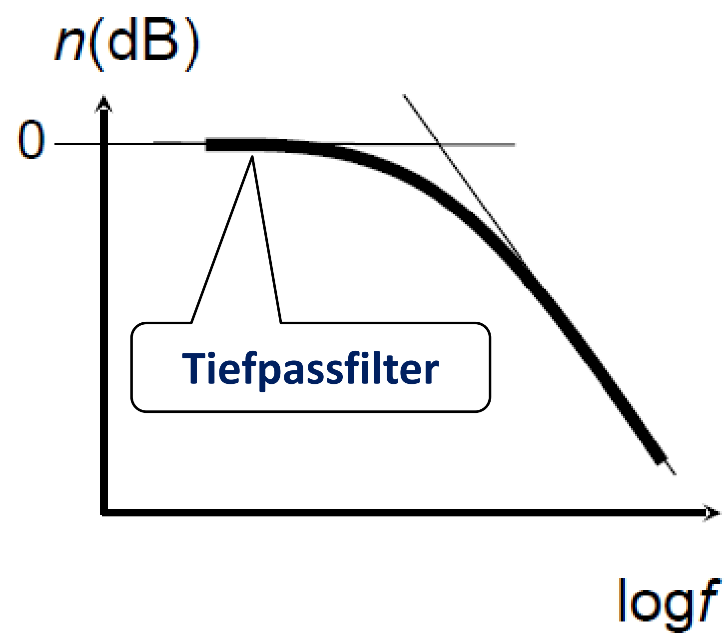


bei hohen Frequenzen: X_c ist klein: Kurzschluss (Shunt) Eingangssignal wird nicht durchgelassen

$$X_c = \frac{1}{2\pi f c}$$







Hausaufgaben

Aufgabensammlung

7.26-28, 7.32-36

Feedback