

# Strömung von Flüssigkeiten und Gasen

**Balázs Kiss**

kissb3@gmail.com



**KISSLAB - Myofilament-Mechanobiophysik Forschungsgruppe,  
Semmelweis Universität,  
Institut für Biophysik und Strahlenbiologie.**

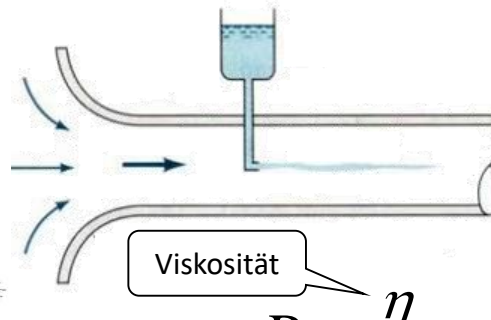
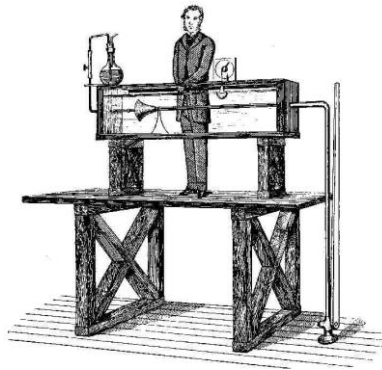
*28. März 2025.*

# Strömung in Röhren (Volumentransport)

- **Stromlinien:** Versuch von Osborne **Reynolds**: mit Farbstoff und Düse



Osborne Reynolds  
(1842-1912)



Viskosität

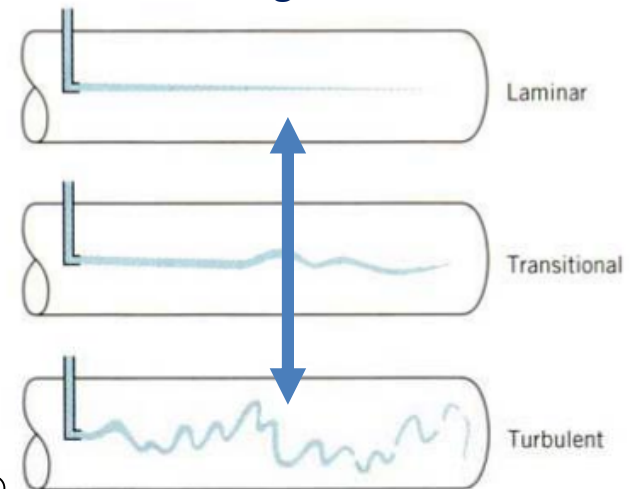
$$v_{\text{krit}} = \text{Re} \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}$$

Reynolds-Zahl  
(für glatte Gefäßwand:  
 $\text{Re} = 1160$ )

Dichte

Radius

- **Strömungsarten:**



laminare Strömung: geschichtet



turbulente Strömung

stationäre Strömung: zeitlich konstant

Im Weiteren werden Flüssigkeiten behandelt, die Begriffe und Gesetze gelten aber auch für Gase.

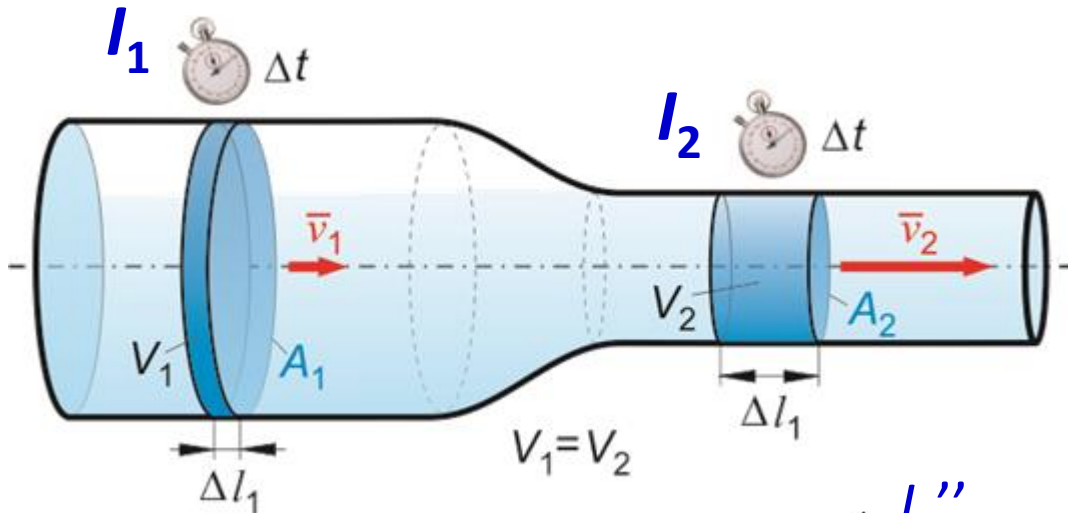
- Allgemeine Gültigkeitsvoraussetzungen:
- Gas oder Flüssigkeit ist inkompressibel
  - laminare Strömung

# Kontinuitätsgleichung

Physikalische Größen:

**Volumenstromstärke ( $I$ ):**  $I = \frac{\Delta V}{\Delta t} \left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)$

**Volumenstromdichte ( $J$ ):**  $J = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta t} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$



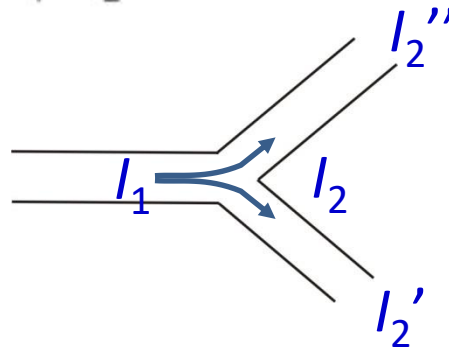
$$I_1 = I_2$$

Durchschnitts-  
Geschwindigkeit

$$A_1 \cdot \bar{v}_1 = A_2 \cdot \bar{v}_2$$

D. h. die Strömung wird in  
engeren Rohrabschnitten  
schneller sein und umgekehrt.

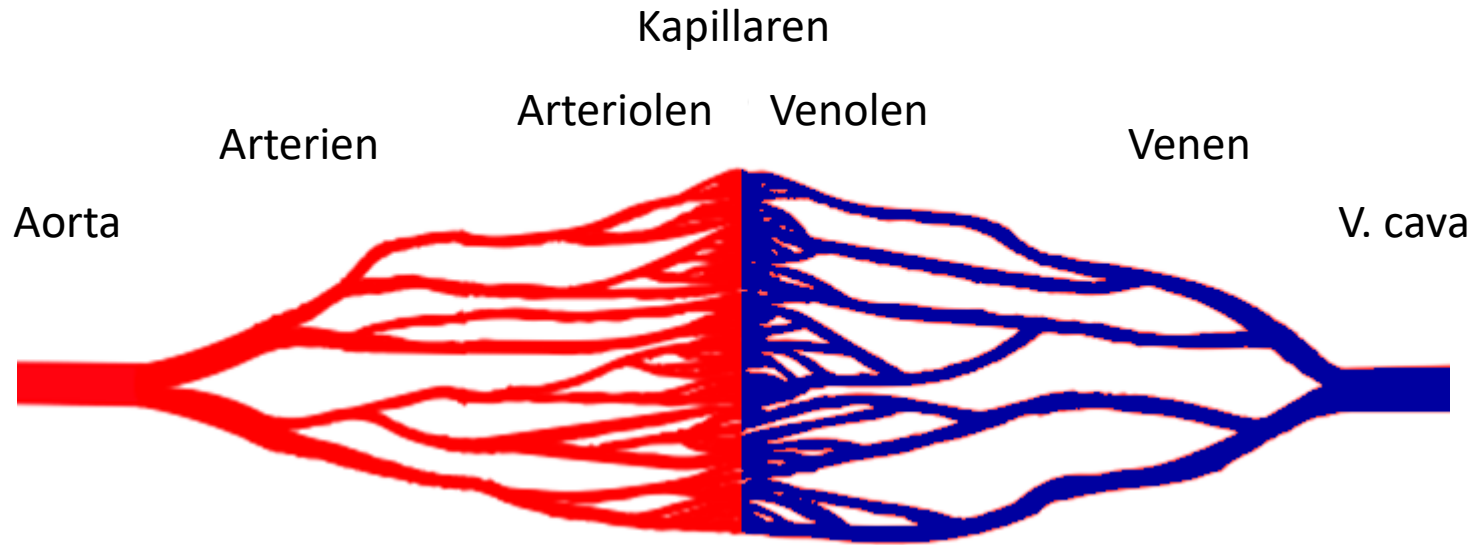
(Siehe kirchhoffsche  
Knotenregel in der  
Elektrizitätslehre)



$$I_1 = I_2 = I_2' + I_2''$$

$$A_1 \cdot \bar{v}_1 = A_2' \cdot \bar{v}_2' + A_2'' \cdot \bar{v}_2''$$

# Kontinuitätsgleichung im Blutkreislauf



Gefäß	Aorta	Arterien	Arteriolen	Kapillaren	Venolen	Venen	Hohlvenen
$R$ (cm)	1,2	0,2	0,0015	0,00035	0,001	0,25	1,7
Anzahl der Äste	1	160	$57 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^9$	$1,3 \cdot 10^9$	200	2
$A_{\text{gesamt}}$ (cm <sup>2</sup> )	4,5	20	400	4500	4000	40	18
$v$ (cm/s)	23	5	0,25	0,022	0,025	2,5	6

$A \cdot v = \text{konst.}$

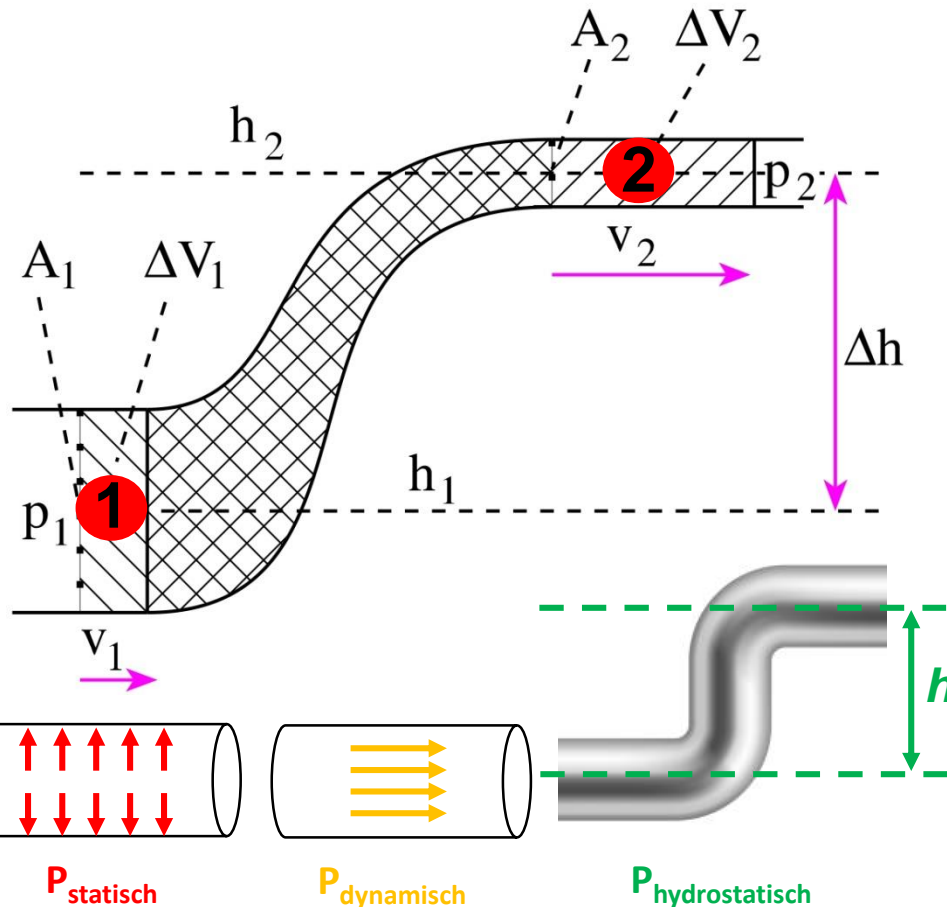
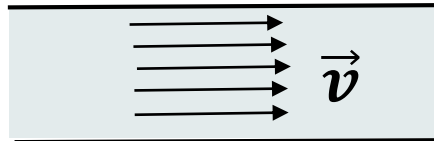
# Bernoulli-Gleichung



Daniel Bernoulli  
(1700-1782)  
Mathematiker  
Physiker  
Anatom

**Ideale Flüssigkeit:** keine innere Reibung  $\Rightarrow$  **Energieerhaltung** ist gültig

**Geschwindigkeitsprofil:**



$$\text{statisch} \quad \text{dynamisch} \quad \text{hydrostatisch}$$

$$\boxed{p} + \boxed{\frac{1}{2} \rho \cdot v^2} + \boxed{\rho \cdot g \cdot h} = \text{konstant}$$

$$\boxed{p} + \boxed{\frac{1}{2} \rho \cdot v^2} = \text{konstant}$$

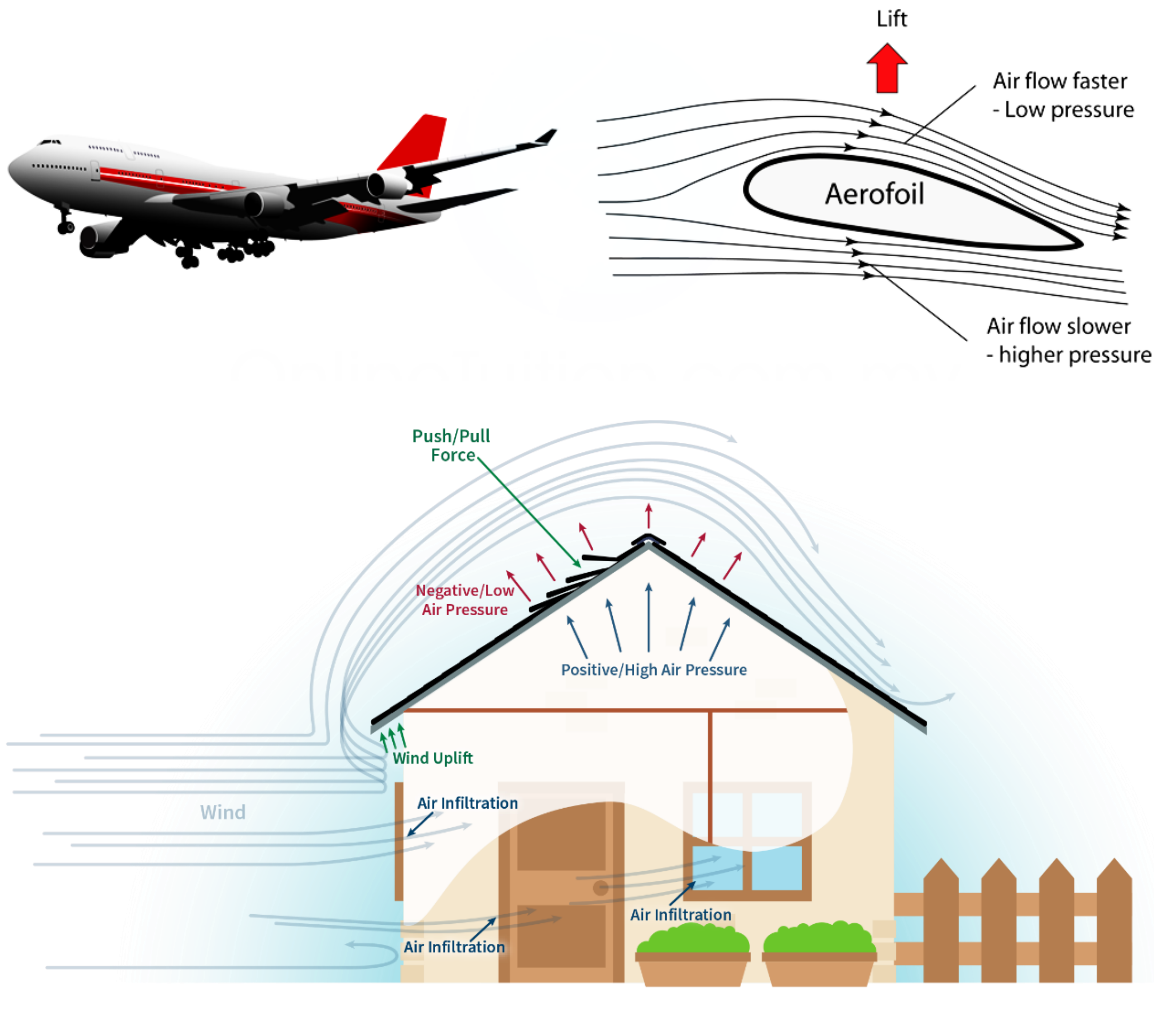
Falls kein  
Höhenunterschied  
vorhanden ist.

**Die Gleichung gilt nur für:**

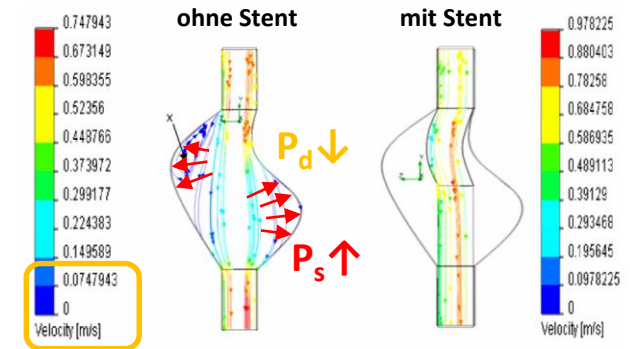
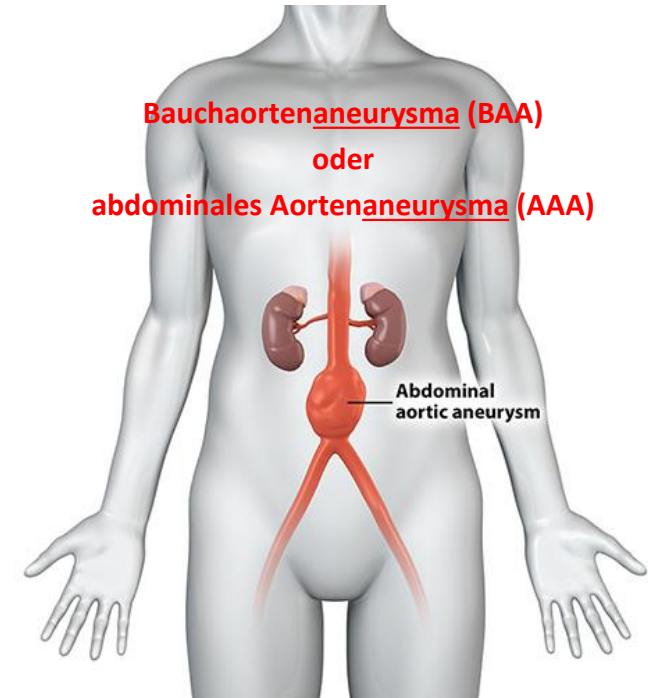
- starres Rohr *oder* stationäre Strömung
- ideale Flüssigkeit

# Anwendungen der bernoullischen Gleichung

## ...im alltäglichen Leben



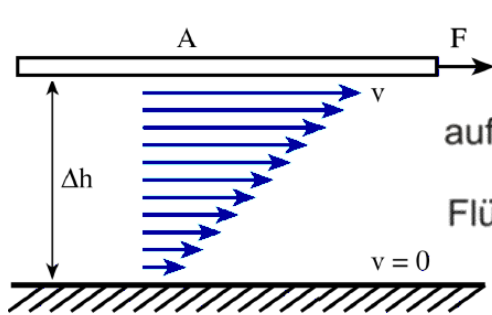
## in der Medizin



Mohammad et al, 2009.

# Newtonsches Reibungsgesetz

Reelle Flüssigkeit: innere Reibung ist nicht vernachlässigbar



aufeinander gleitende  
hypothetische  
Flüssigkeitsschichten

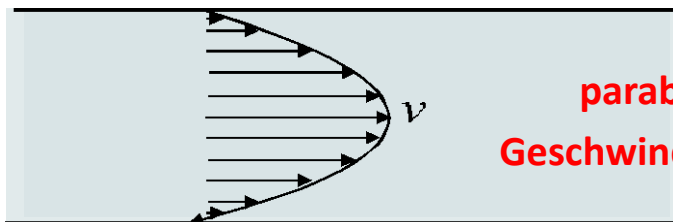
Bei gleichmäßiger Bewegung ( $v = \text{konst.}$ ):

$$F = F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

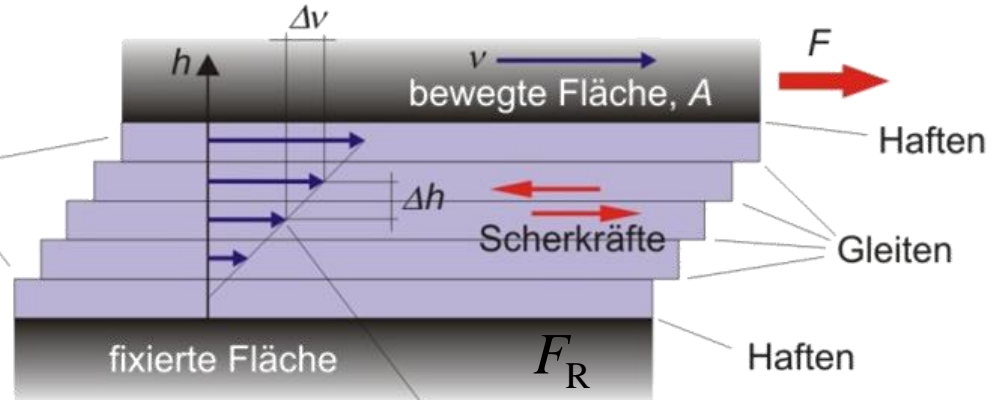
**Viskosität** (innerer  
Reibungskoeffizient)

$\eta$  („Eta“) [Pa·s]

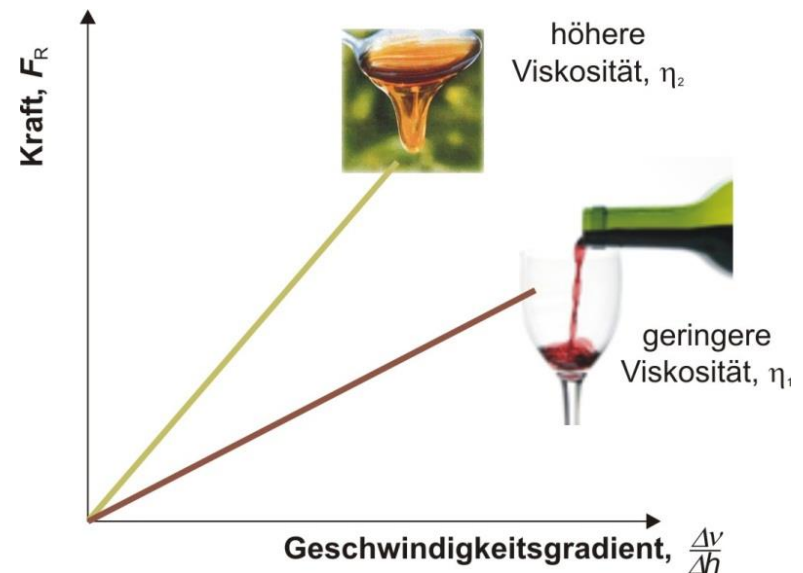
Geschwindigkeits-  
gradient



**parabolisches  
Geschwindigkeitsprofil**



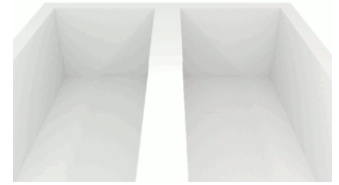
Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschicht  
im Verhältnis zur stehenden Fläche



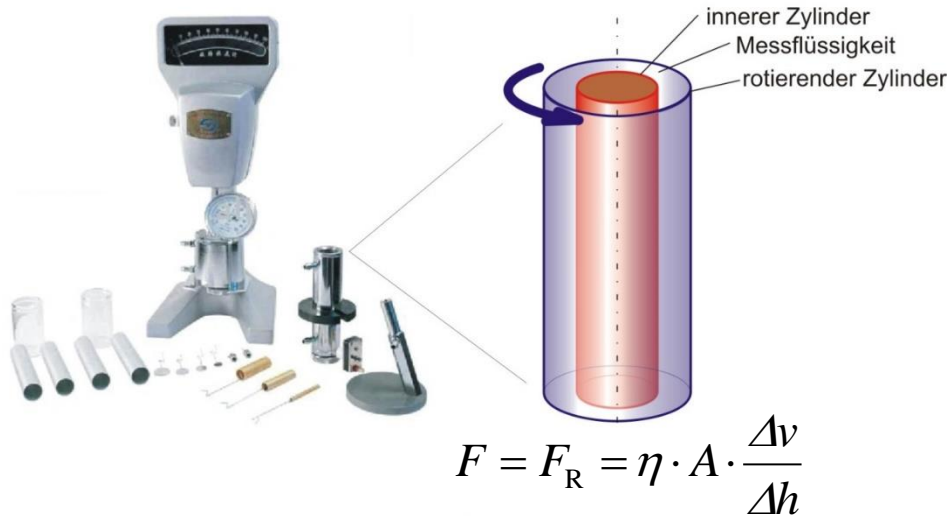


# Viskosität

innere Reibung in reellen Flüssigkeiten

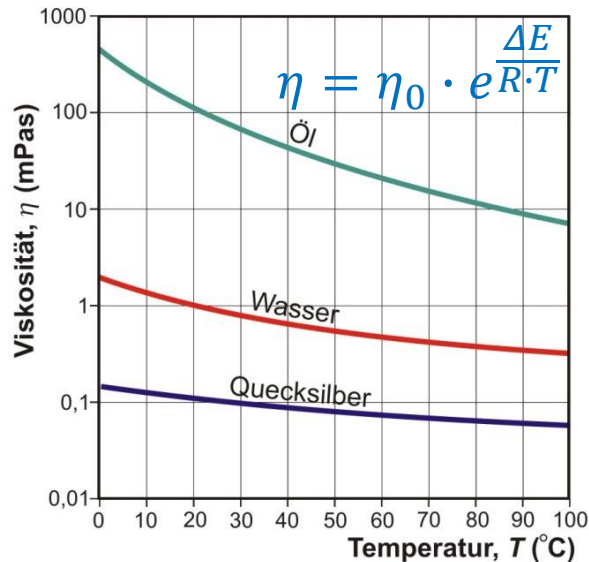


## Messung der Viskosität: mit Rotationsviskosimeter



$$F = F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

Stoff	$\eta$ (mPa·s) 20 °C
Luft	(101 kPa) 0,019
Wasser	1
Äthanol	1,2
Blut (37 °C)	2–8
Glyzerin	1490
Honig	2000–14000

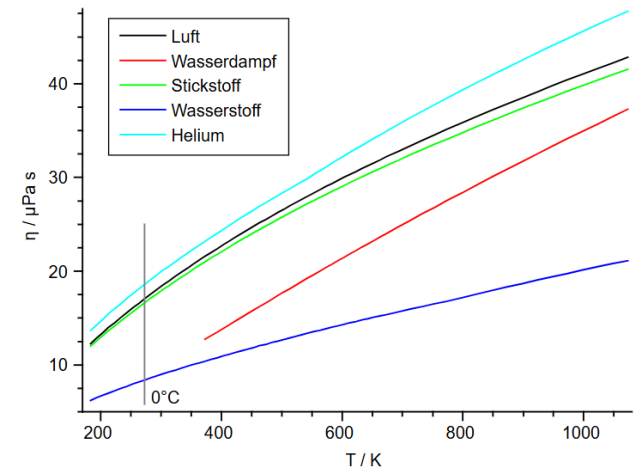


### Bei Flüssigkeiten:

mit zunehmender Temperatur  
sinkt die Viskosität

### Bei Gasen:

mit zunehmender Temperatur  
steigt die Viskosität





# Normale und anomale Flüssigkeiten

newtonsche (normale)  
Flüssigkeit

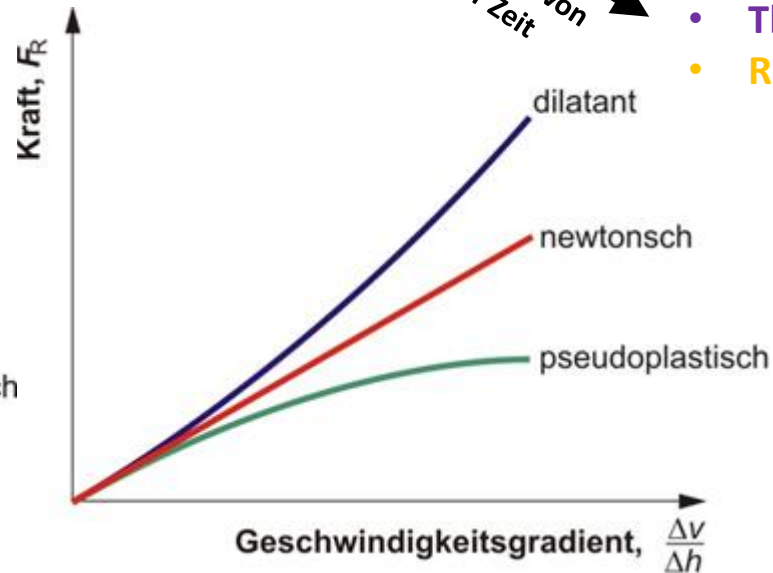
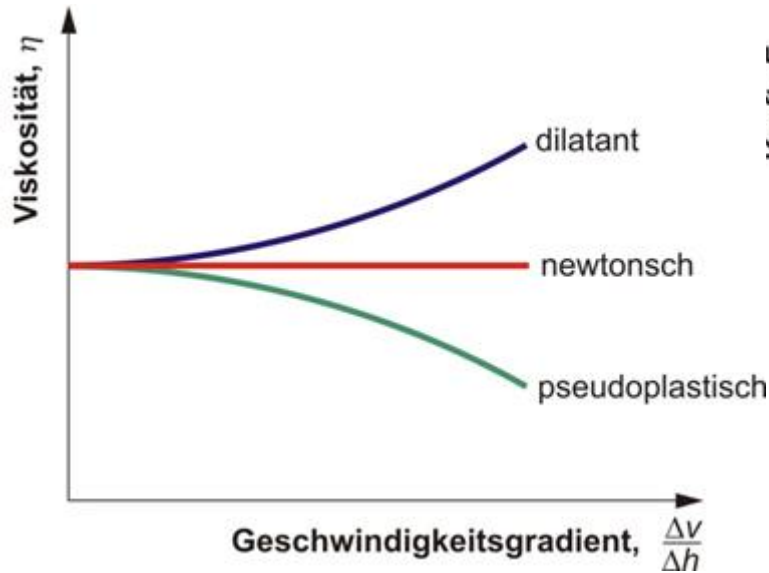


nicht-newtonsche (anomale)  
Flüssigkeit

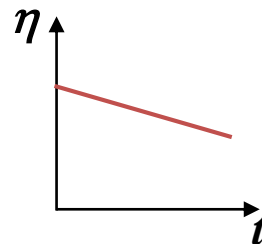
abhängig von  
der Geschwindigkeit

abhängig von  
der Zeit

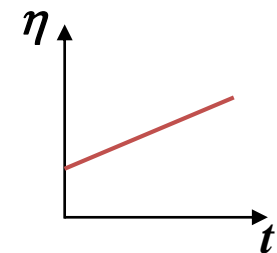
- dilatant
- pseudoplastisch
- Thyxotrop
- Rheopex



Thyxtrope Flüssigkeit



Rheopexe Flüssigkeit



# Viskosität von Körperflüssigkeiten

## Liquor

(Gehirn-Rückenmarks-Flüssigkeit, Cerebrospinalflüssigkeit)

- newtonsche Flüssigkeit
- 0,7-1 mPa·s (37 °C)

## Speichel

- Mucin
- pseudoplastische Flüssigkeit

## Träne

- pseudoplastische Flüssigkeit
- 1-10 mPa·s

## Gelenkflüssigkeit

- Hyaluronsäure
- stark pseudoplastisch

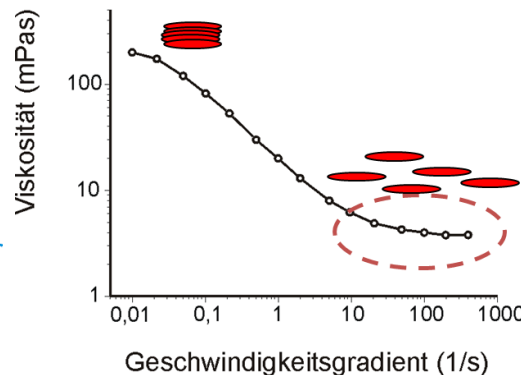
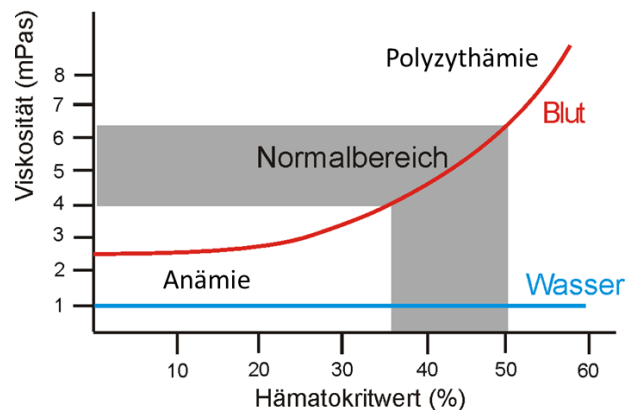
## Bronchialschleim

- pseudoplastisch

## Sperma

- pseudoplastische Flüssigkeit

## Viskosität des Blutes



- bei Körpertemperatur und bei physiologischen Strömungsverhältnissen: 2-10 mPa·s
- hängt von der **Temperatur** ab ( wie bei jeder Flüssigkeit)
- hängt sehr stark von dem **Hämatokritwert** des Blutes ab
- hängt vom **Geschwindigkeitsgradienten** ab, und zwar **pseudoplastisch**
- hängt vom **Blutgefäßdurchmesser** ab, in **kleineren Gefäßen** (< 1 mm) ist die **Viskosität kleiner** (Fahraeus-Lindqvist-Effekt)

# Hagen-Poiseuille Gesetz

Transportgesetz

Triebkraft der Strömung

$$\Delta p = p_2 - p_1 < 0$$



Volumenstromstärke

Druckgradient

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Viskosität

Radius



G. H. L. Hagen  
1797-1884  
Wasseringenieur



J. L. M. Poiseuille  
1799-1869  
Physiologe

Alternativform

$$I_V = -\frac{R^4 \cdot \pi}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p$$

Gültigkeitsvoraussetzungen:

- inkompressible Flüssigkeit/Gas
- laminare Strömung
- stationäre Strömung
- newtonsche Flüssigkeit/Gas

Obwohl nicht exakt, doch ist das Hagen-Poiseuille Gesetz annähernd anwendbar an die Blutströmung...

Um wie viel Prozent verringert sich die Blutflussgeschwindigkeit bei einer 50%-igen Koronarstenose?

# Strömungswiderstand

## Strömung

### Hagen–Poiseuille-Gesetz

$$I_{str} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = - \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

$$\frac{1}{R_{str}}$$

Triebkraft

$$I_{str} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = - \frac{\Delta p}{R_{str}}$$

$$R_{str} = \frac{8}{\pi} \eta \frac{\Delta l}{R^4} = 8\pi\eta \frac{\Delta l}{(\pi R^2)^2} = 8\pi\eta \frac{\Delta l}{A^2}$$

## Elektrischer Strom

$$I = \frac{U}{R}$$

### Ohmsches Gesetz

$$I_{el} = \frac{1}{R_{el}} \cdot U$$

$$I_{el} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{U}{R_{el}} = - \frac{\Delta \phi}{R_{el}}$$

Leitfähigkeit:  
Reziprok Wert der  
Widerstand

$$\frac{1}{R_{el}}$$

Triebkraft

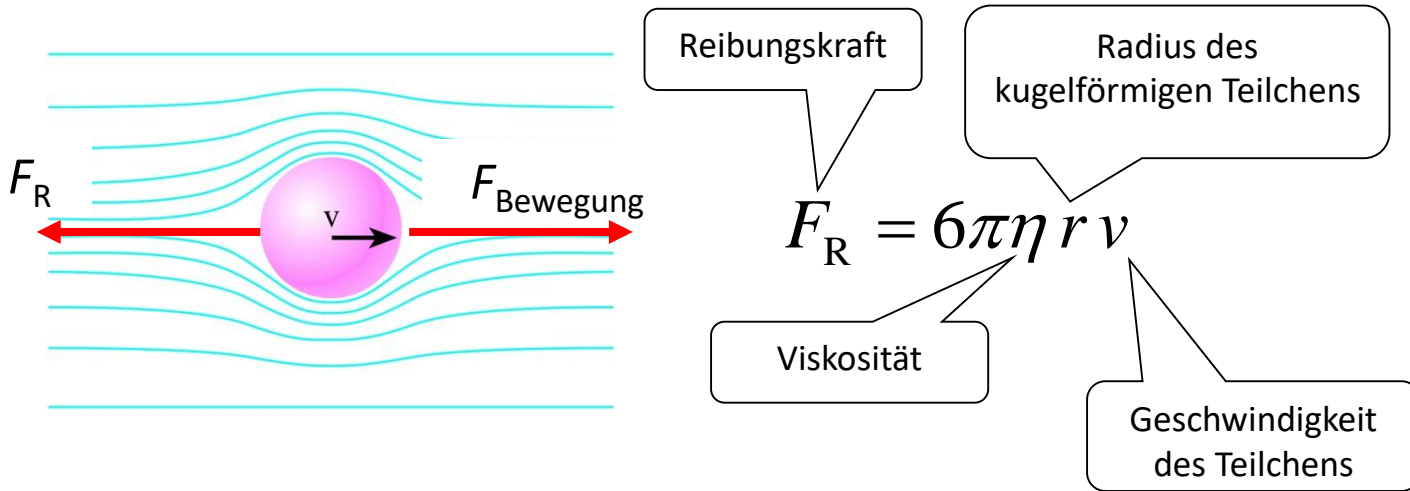
$$I_{el} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \frac{\Delta \phi}{R_{el}}$$

$$R_{el} = \rho \frac{l}{A}$$

spezifischer Widerstand

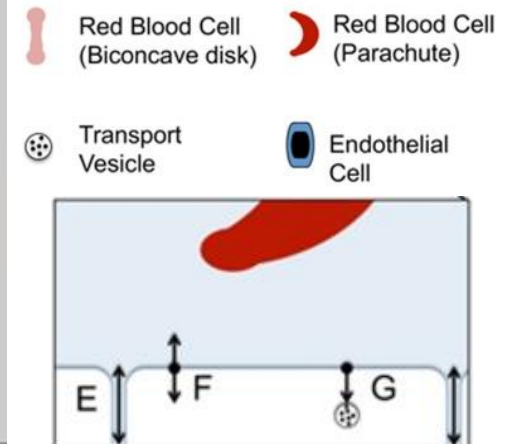
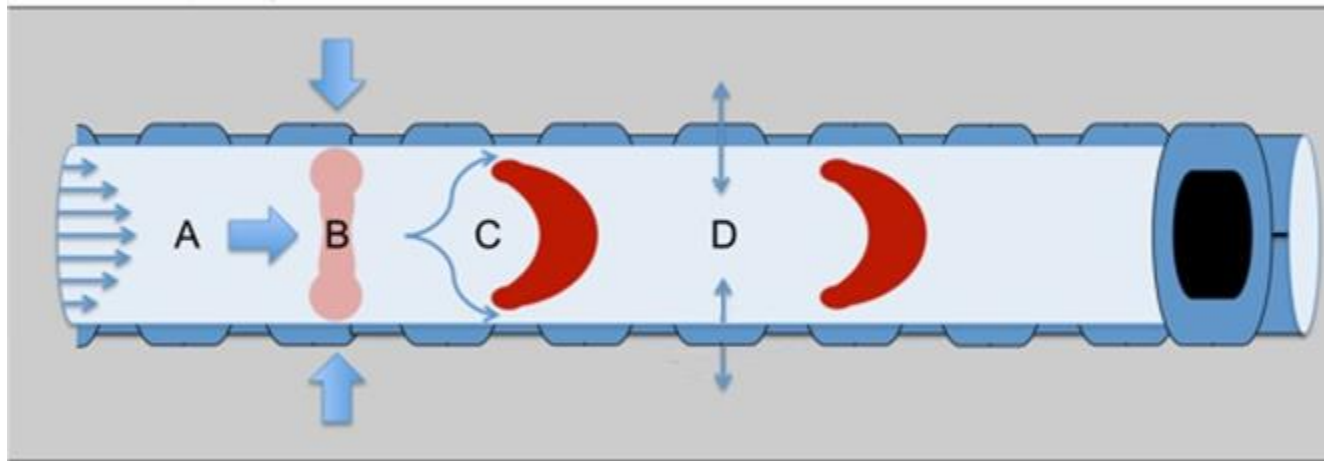
# Stokes'sches Reibungsgesetz

Bewegung von Teilchen in reellen Flüssigkeiten



G. G. Stokes  
1819-1903  
Mathematiker  
Physiker

Bei gleichförmigen Bewegung:  $v = \text{konst.}$   $F_{\text{Bewegung}} = F_R$



# Hausaufgaben

## Aufgabensammlung

3.1 - 4

## Feedback