

Transzport folyamatok

Molnár Kristóf

egyetemi docens

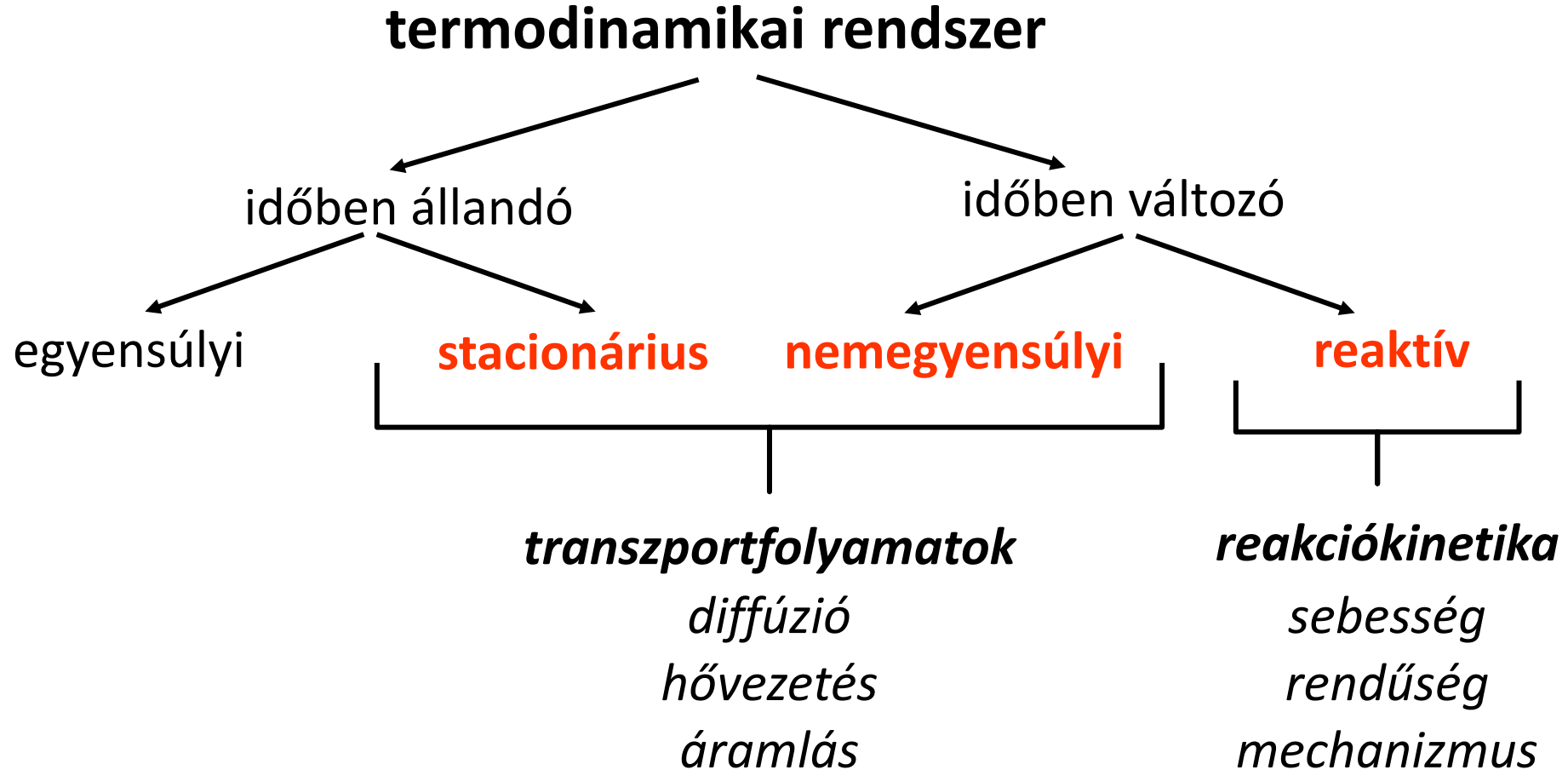
molnar.kristof1@semmelweis.hu

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet, Nanokémiai Kutatócsoport



SEMMELWEIS
EGYETEM 1769

A termodinamikai rendszerek típusai



Transzportfolyamatok

- Azokat a folyamatokat, amelyek során energia, anyag, töltés vagy valamilyen más extenzív jellegű mennyiség egyik helyről egy másik helyre jut, **transzportfolyamatoknak nevezzük.**
- A transzportfolyamatok jellemzésénél alapvető fontosságú mennyiségek: **az extenzív mennyiség árama** és az áramot létrehozó hatás, a **termodinamikai hajtóerő.**

Extenzív mennyiségek:

- Függenek az anyag kiterjedésétől,
- Összeadódnak
- Pl.: tömeg (m), térfogat (V), anyagmennyiség (n)

Intenzív mennyiségek:

- NEM függenek az anyag kiterjedésétől
- Homogén eloszlásra törekszenek
- Pl.: hőmérséklet (T), nyomás (p)

Transzportfolyamatok

Az *extenzív mennyiségek* transzportját az árammal és az áramsűrűséggel (fluxussal) jellemezhetjük.

Az áramsűrűség: megadja a szóban forgó mennyiség egységnyi keresztmetszeten történő áthaladásának mértékét egységnyi idő alatt. Az áramnak iránya is van ezért vektoriális mennyiség.

$$I_E = \frac{dE}{dt}$$

$$j_E = \frac{1}{A_s} \frac{dE}{dt}$$

ahol A_s és I_E az áram irányára merőleges felület.

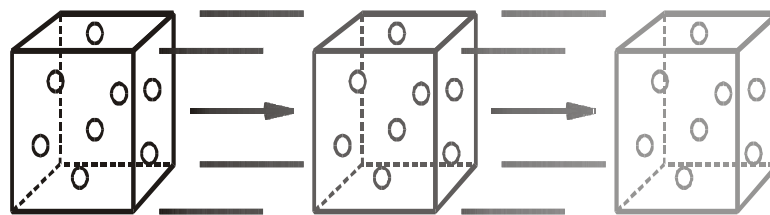
Transzportfolyamatok

Transzportfolyamatok megjelenése mindig valamilyen extenzív mennyiséget hordozó mozgásával függ össze:

- részecskék (atomok, molekulák és ionok), amelyek anyagot, energiát, impulzust és töltést hordozhatnak,
- elektronok, amelyek energiát, impulzust és töltést hordozhatnak,
- fotonok, amelyek energiát hordozhatnak.

A transzportfolyamatokat megkülönböztethetjük aszerint, hogy együtt járnak-e a **közeg makroszkopikus mozgásával, vagy sem**. Eszerint beszélhetünk **áramlásos (konvektív)** transzportfolyamtról

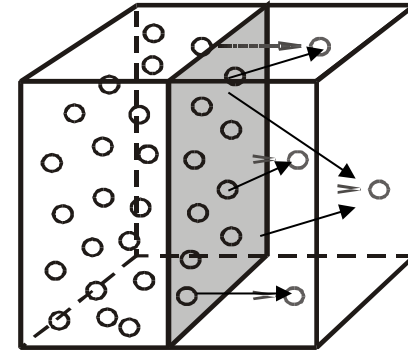
konvektív
anyagtranszport:
molekulahalmaz együttes
elmozdulása



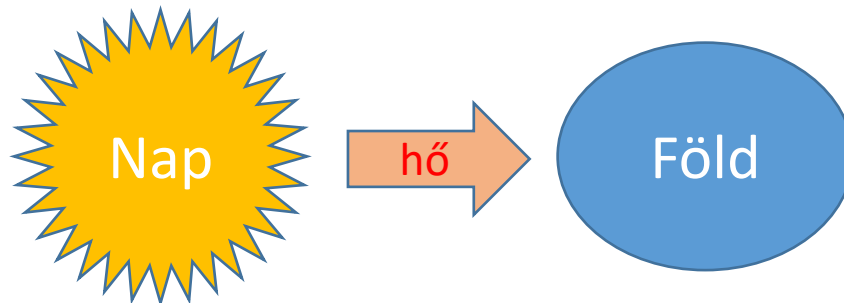
Transzportfolyamatok

és **vezetési (konduktív)**, vagy nyugvó közegű transzportfolyamatokról.

konduktív anyagtranszport:
molekulák elmozdulása “nyugvó
közegben”



Valamint **sugárzásról (radiáció)**, amelynek nincs szüksége közegre.



A transzportfolyamatok biológiai jelentősége

- A termodinamikai egyensúly → a biológiai rendszer számára a halált jelenti
- A biológiai egyensúly → az élő szervezet a környezetében fenn tudja tartani állapota állandóságát

A termodinamika törvényei az élő rendszerek leírására is alkalmazhatók.

**Az életműködés
szempontjából fontos
transzportfolyamatok**

szerv	transzport
légzőrendszer	oxigén → vér széndioxid → tüdő
keringési rendszer	oxigén → vörösvértestek fertőzés → antitestek
emésztőrendszer	emésztés → felszívódás
vese	plazma szűrés metabolikus bomlástermékek kiválasztása plazma térfogat és vér pH állandó szinten tartása

Biológiai anyagtranszport

Sejten belül

- konvektív
- konduktív

Sejtmembránon át

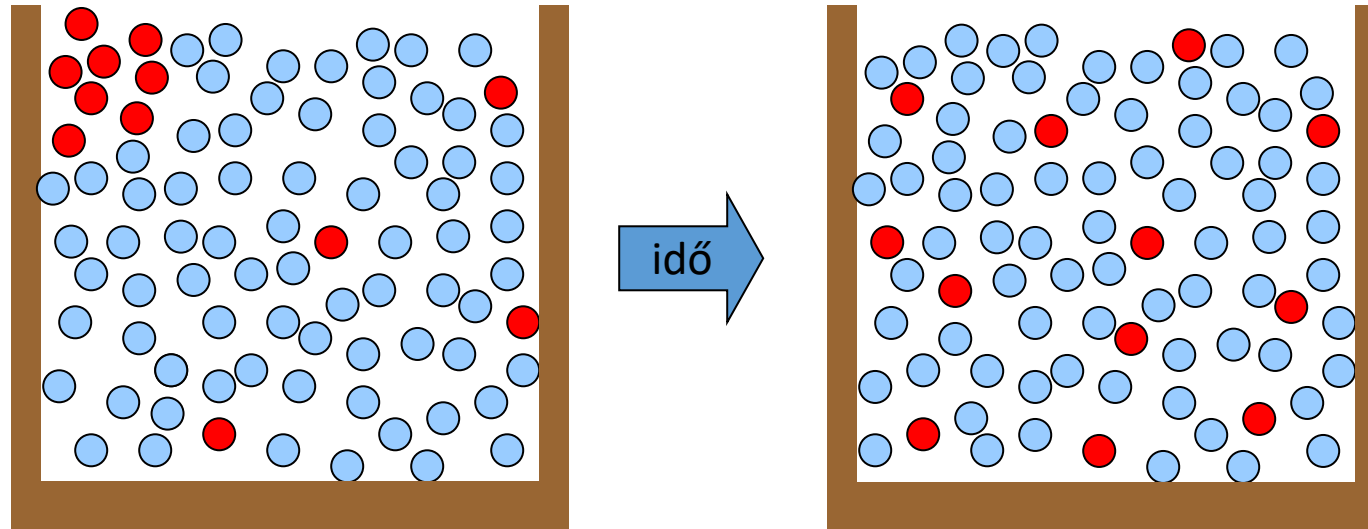
- konduktív (átadásos)

Sejten kívül

- konvektív
- konduktív

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
LOKÁLIS VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

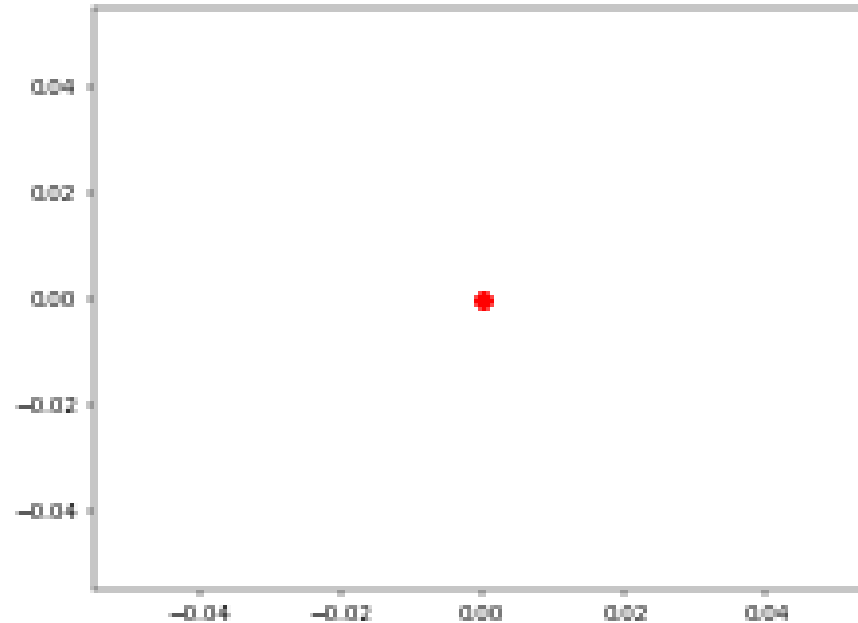
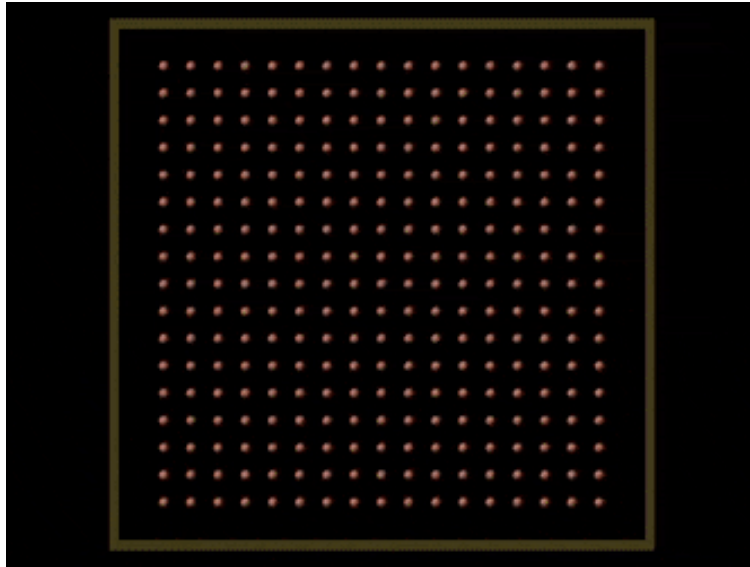
DIFFÚZIÓ



A Brown mozgás és diffúzió

Brown-féle mozgás: Részecskék véletlenszerű, korrelálatlan mozgása, mely a hőmozgás és véletlen ütközések következménye.

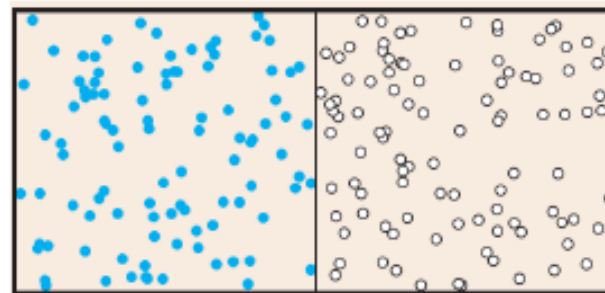
Egyetlen molekula vagy részecske mozgása!



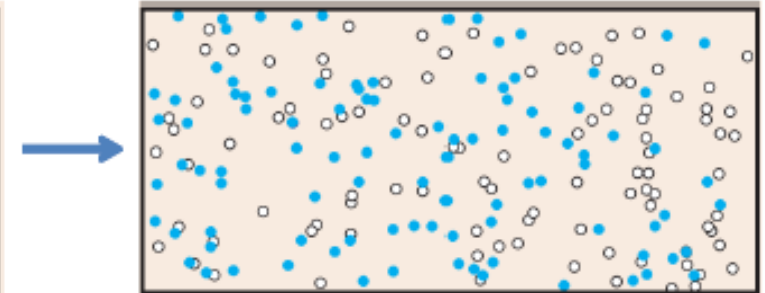
Diffúzió: Nettó (megfigyelhető) anyagtranszport amely a koncentráció térbeli kiegyenlítődségig tart. (termikus egyensúlyban, szabad mozgás esetén)

Nagy anyagmennyiség mozgásáról beszélhetünk

Kezdeti idő



t idő múlva



A diffúzió elmélete: Fick törvények

A diffúziós folyamatok mikroszkopikus leírása az N részecskeszámmal és a makroszkopikus leíráshoz használt $c(x)$ lokális koncentráció-eloszlással.

Fick I. törvénye:

$$j = -D \cdot \text{grad } c$$

$$j = -D \cdot \nabla c$$

1D

$$j = -D \cdot \frac{dc}{dx}$$

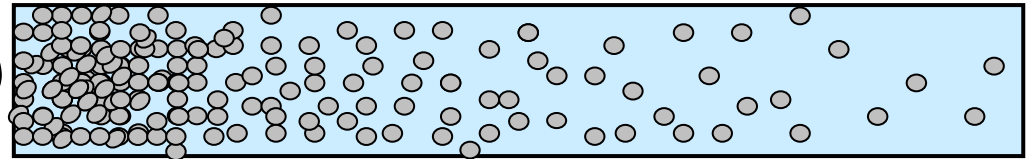
D: Diffúziós
együttható

megoldás:

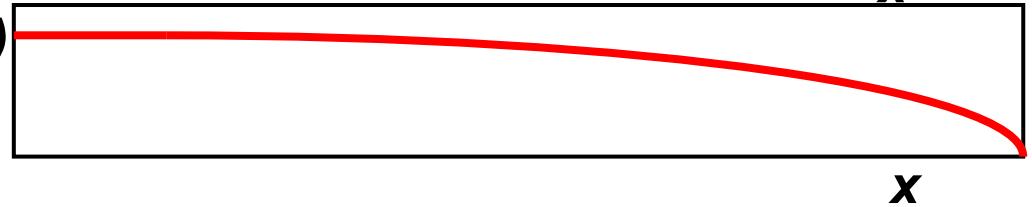
$$c(x,t)$$

$$c(\underline{r},t)$$

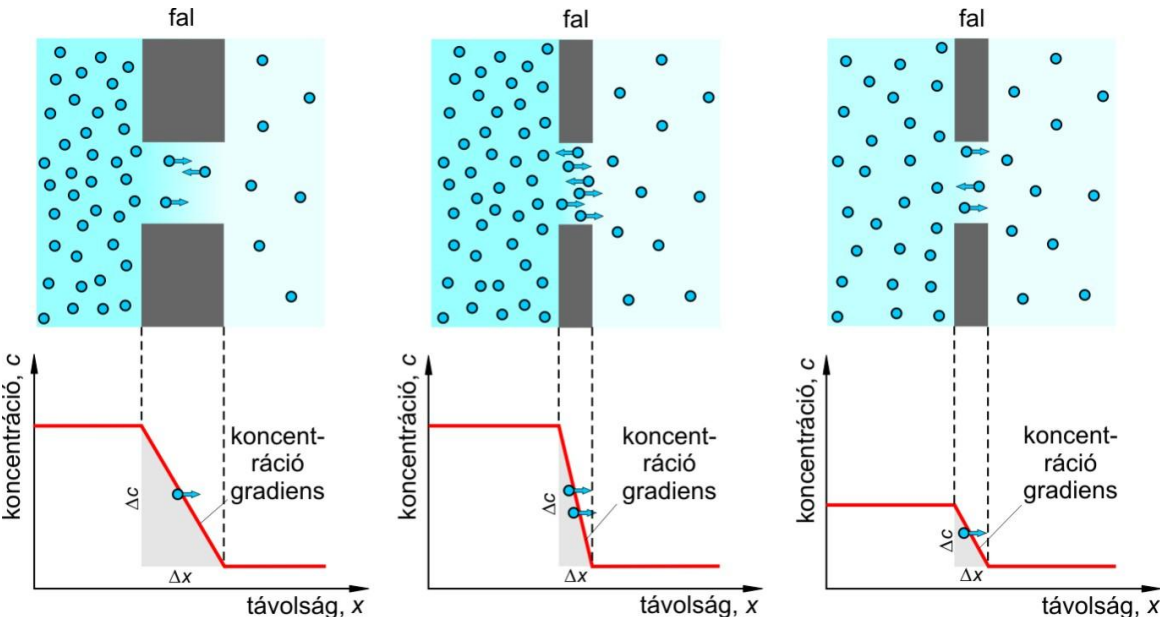
$N(x)$



$c(x)$



- a diffúziós anyagáram a koncentráció térbeli változásának a meredekségével arányos,
- a diffúziós anyagáram a csökkenő koncentráció irányába folyik,
- $D > 0$



Einstein-
Stokes
egyenlet

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

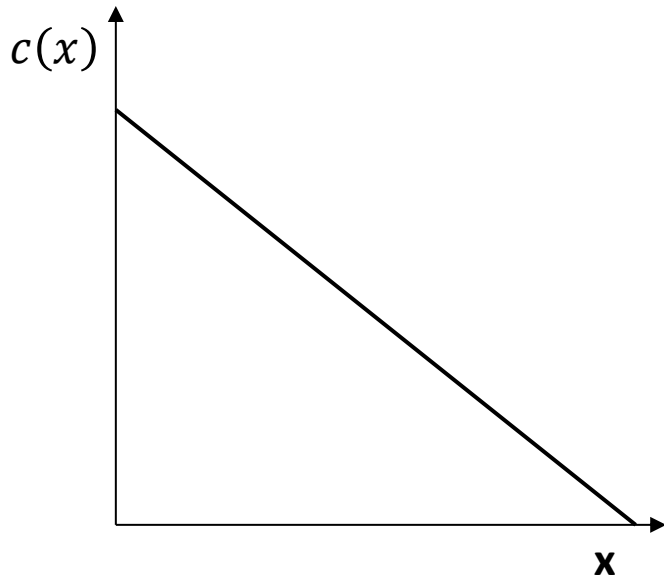
A komponens áramsűrűség és a koncentráció eloszlás kapcsolata

Fick I. törvény

$$j = -D \cdot \frac{dc}{dx}$$

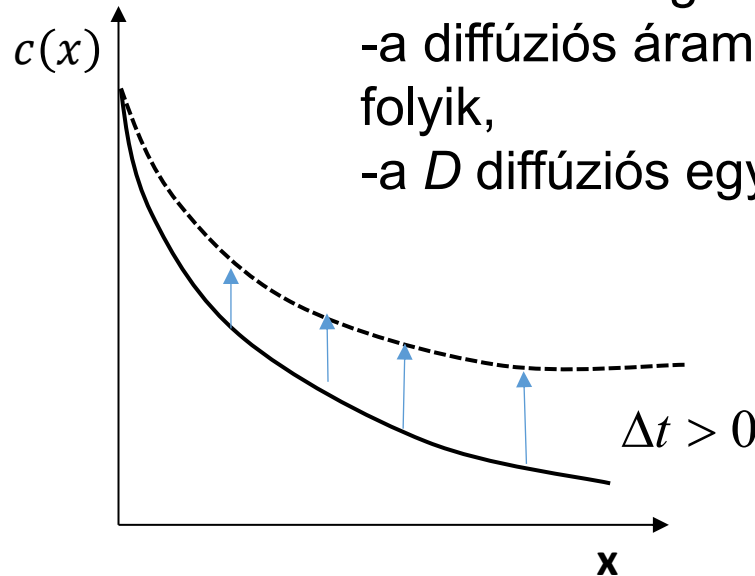
Fick I-es törvénye a következő kísérleti tapasztalatokat foglalja össze:

- a diffúzió anyagáram a koncentráció térbeli változásának a meredekségével, a $c(x)$ függvény deriváltjával arányos,
- a diffúziós áram mindig a csökkenő koncentráció irányába folyik,
- a D diffúziós együttható értéke mindig pozitív.



Stacionárius eset

$$\frac{dc}{dt} = 0$$



$$\frac{dc}{dt} > 0$$

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

A diffúziós áramsűrűség a helykoordinátáktól csak akkor független, ha teljesül a feltétel, azaz a koncentráció a hely függvényében lineárisan változik. Minden más esetben az áramsűrűség maga is függvénye a helynek.

Ebben az esetben **Fick II. törvényét** használhatjuk a diffúzió leírására.

A mérlegegyenlet és a hajtóerő kapcsolata a diffúzió példáján (Fick törvények)

******: az anyagáramra vonatkozó
kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial c(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_n = -\operatorname{div} \mathbf{j}_n$$

$$\mathbf{j}_n = -D \cdot \nabla c$$

Fick I

$\mathbf{j}_n$: komponens áram

$C(\underline{r}, t)$: lokális koncentráció

$$\frac{\partial c(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}(-D \cdot \operatorname{grad} c) = -\nabla \cdot (-D \cdot \nabla c)$$

Fick II

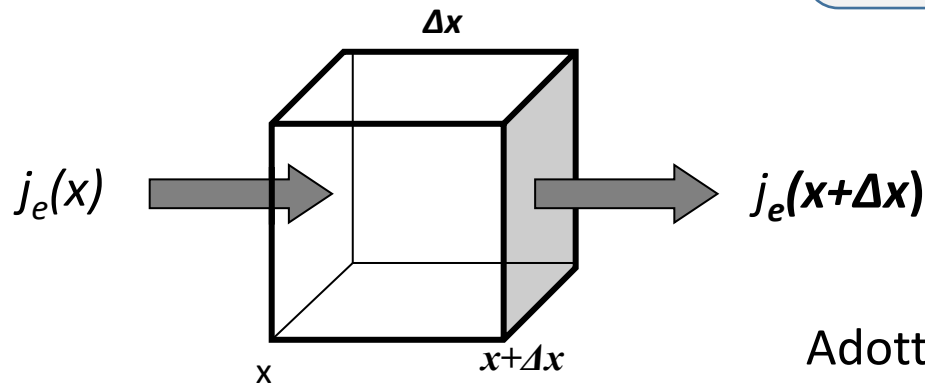
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} c) = D \cdot (\nabla^2 c)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$$

$\xrightarrow{1D}$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_t$$

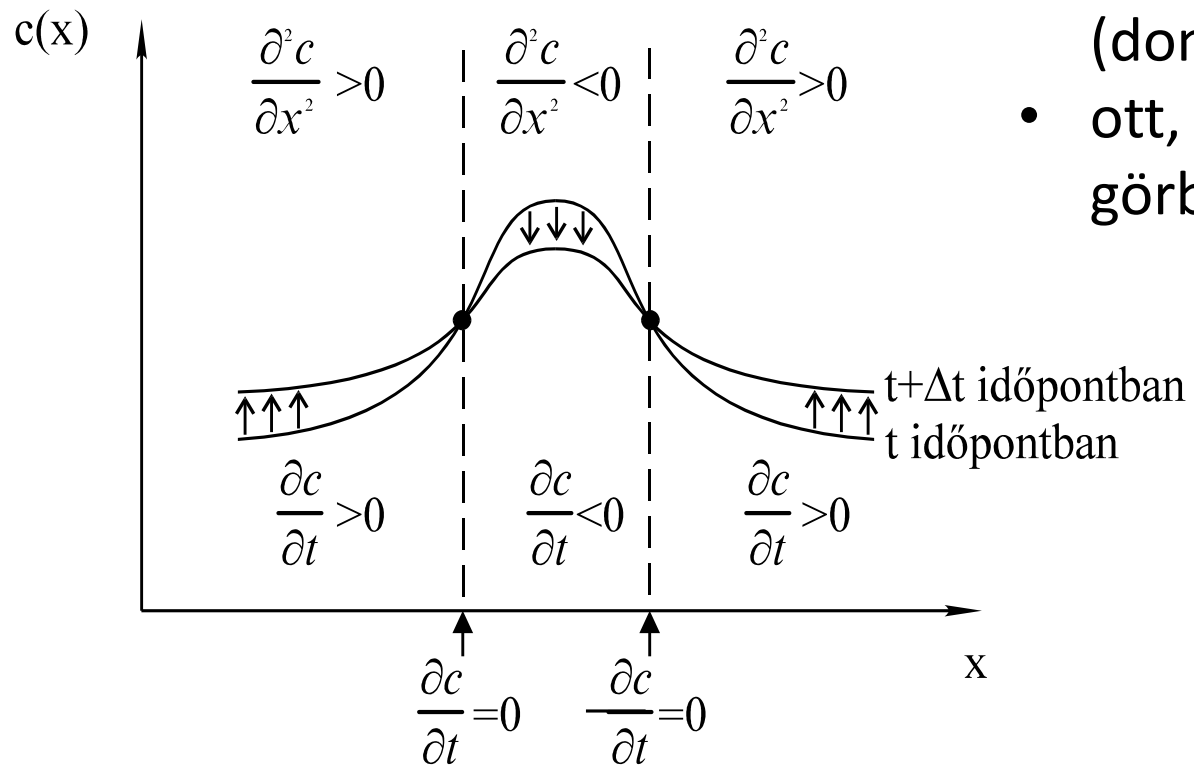
↓
görbület



Adott helyen a koncentráció időbeli változása, a koncentráció-hely szerinti második deriváltjától, a koncentráció eloszlás görbületétől függ.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_t$$

Ez a $c(x)$ függvény görbülete



Fick II. törvénye

Fick II. törvényéből az alábbiak olvashatók ki:

- ott, ahol a $c(x)$ függvény görbülete pozitív („felülről” nézve homorú), a koncentráció az idővel nő,
- ott, ahol a $c(x)$ függvény görbülete negatív (domború), ott a koncentráció csökken,
- ott, ahol a $c(x)$ függvénynek inflexiós pontja van, a görbület zérus, a koncentráció időben nem változik.

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right| < 0$$

A diffúzió nem kedvez a mintázatok kialakulásának!

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{\partial c}{\partial t} \right| < 0$$

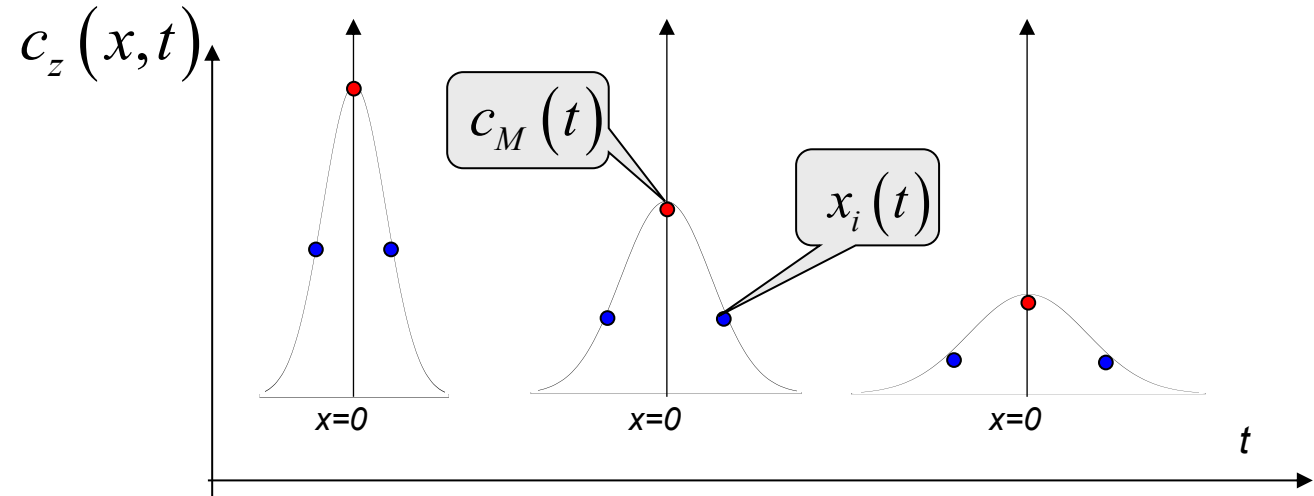
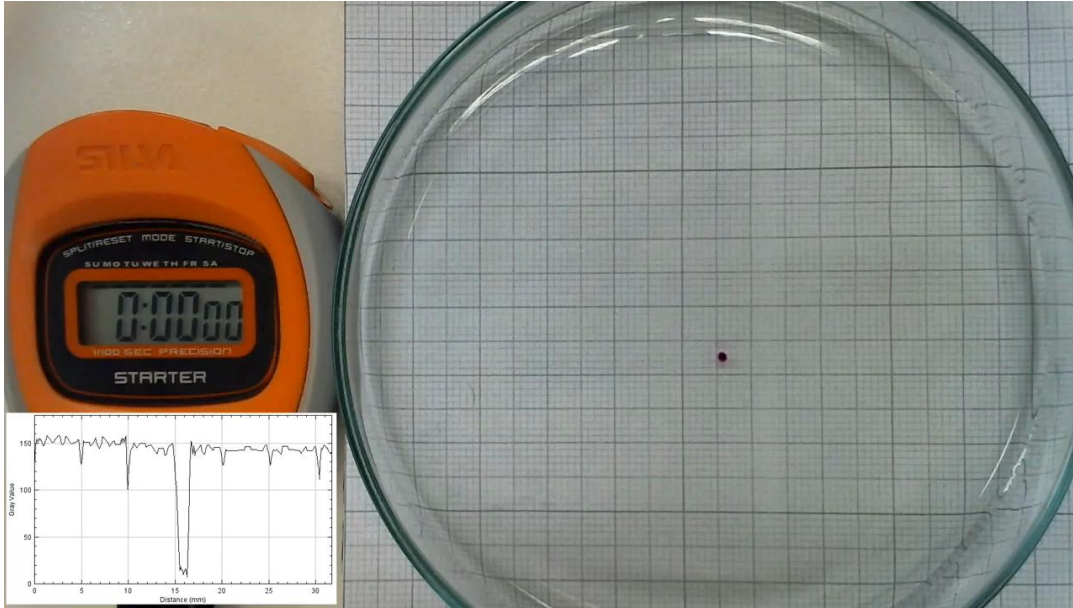
A diffúzió sebessége az időben csökken!

Koncentráció-zóna egydimenziós szabad diffúziója

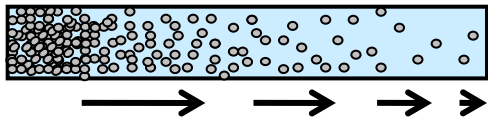
$$c_M(t) = \frac{c_o \delta_x}{(4\pi D)^{1/2}} \cdot t^{-1/2}$$

$$x_i(t) = \sqrt{2D} \cdot t^{1/2}$$

$$c_z(x, t) = \frac{n}{A_s (4\pi D t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = \frac{c_o \delta_x}{(4\pi D t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



Tisztán diffúziós jelenségeknél a karakterisztikus távolságok az idő négyzetgyökével arányosan változnak!

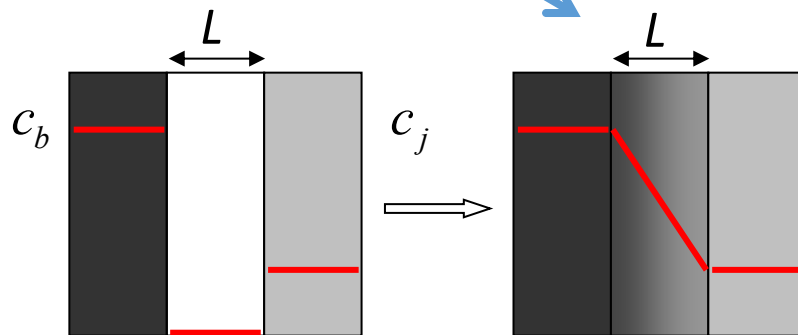


Egyirányú diffúziónál

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_t$$

Stacionárius diffúzió:

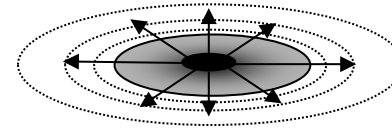
$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_x = 0$$



$$c(x) = -\frac{c_b - c_j}{L}x + c_b$$

lineáris

Fick II. törvénye



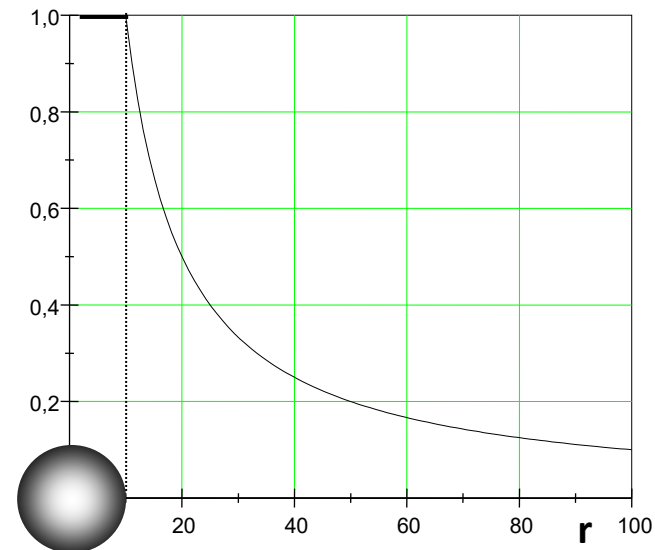
Radiális diffúziónál

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_r = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r}\right)_t$$

Gömb

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

Henger

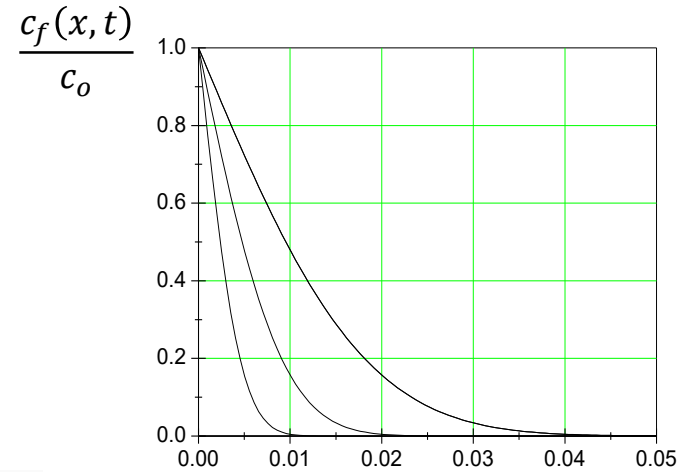


nem lineáris

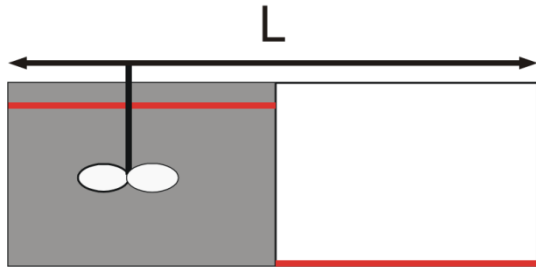
Egyirányú diffúzió végtelen hosszú térfélben



$$c_f(x, t) = c_o \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

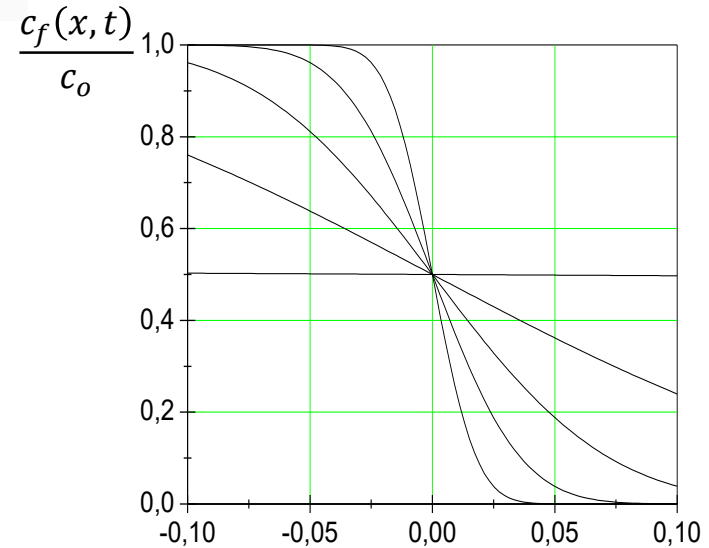


Egyirányú diffúzió véges rendszerben



$$c_f(x, t) = \frac{c_o}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds$$



Membrán permeabilitás: P_{erm}



$$j_n = -D \nabla c \quad \nabla c = \frac{K_m (c_j - c_b)}{d} = -\frac{K_m \Delta c}{d}$$

$$P_{erm} = \frac{j_n}{\Delta c} = \frac{K_m D}{d}$$

K_m : megoszlási hányados

membrán

$V_1 = V_2 = V$

c_1 c_2 $t = 0$

V_1 V_2 $c_2 = 0$

$c_o = c_1 + c_2$

$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{dc_2}{dt}$

d vastagság

A_s felület

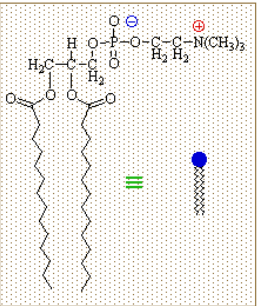
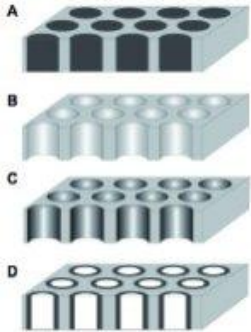
$$-V \frac{dc_1}{dt} = j_n A_s = -A_s \frac{K_m D}{d} \cdot (c_2 - c_1)$$

$$-V \frac{dc_1}{dt} = j_n A_s = A_s P_{erm} \cdot (2c_1 - c_o)$$

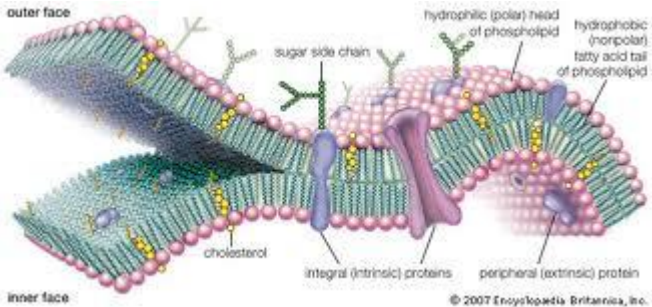
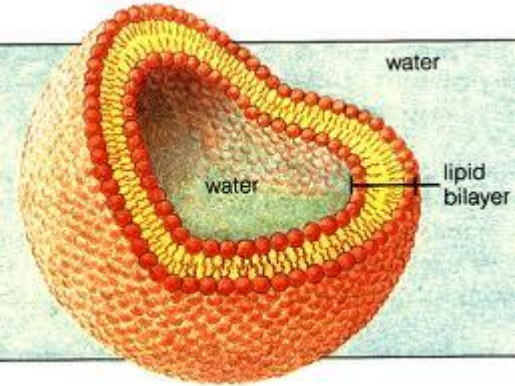
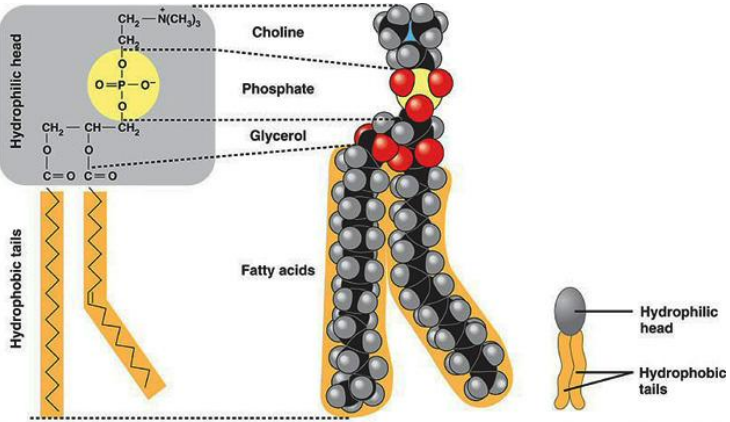
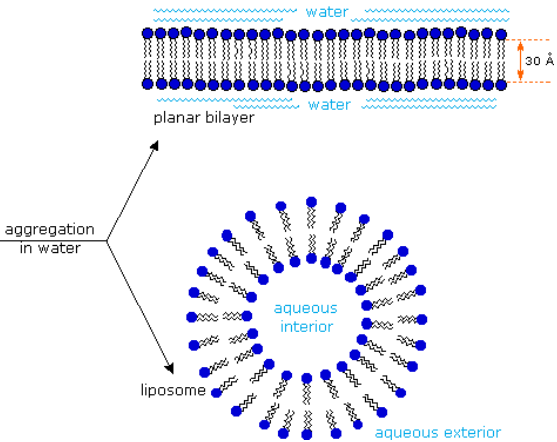
$$\ln \left(\frac{2c_1 - c_o}{c_o} \right) = -\frac{2A_s P_{erm}}{V} \cdot t$$

Membránok

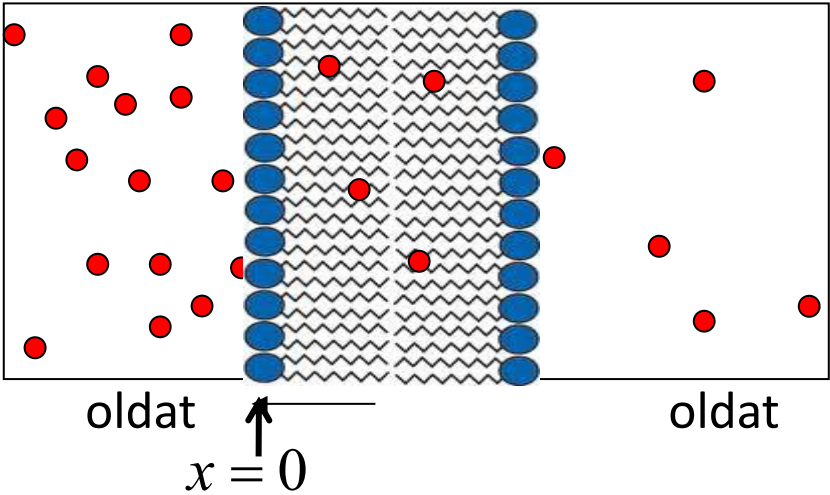
membrán $\begin{cases} \text{szintetikus} \\ \text{biológiai} \end{cases}$



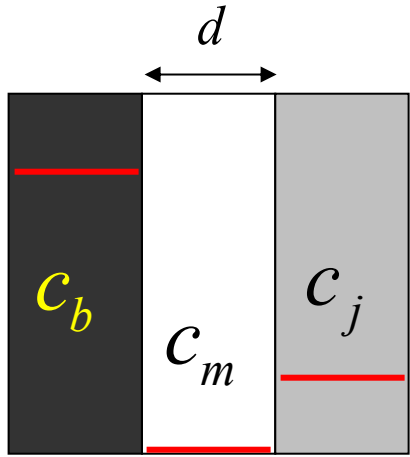
phospholipid



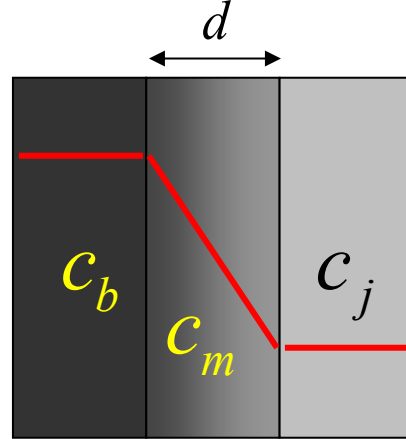
© 2007 Encyclopædia Britannica, Inc.



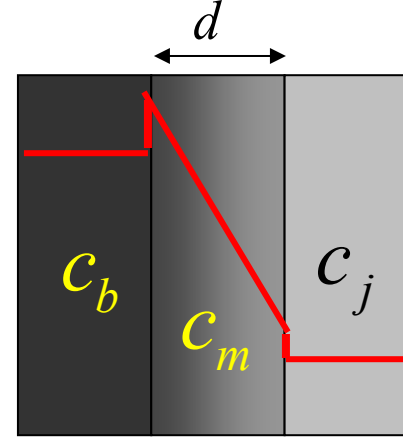
Koncentráció eloszlás stacionárius diffúziónál



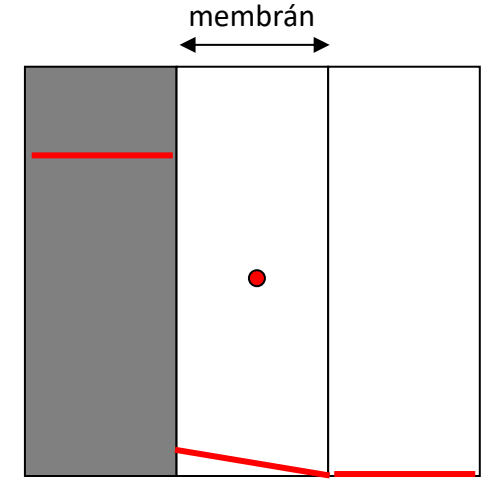
$$c_h = 0 \text{ vagy } K_m = 0$$



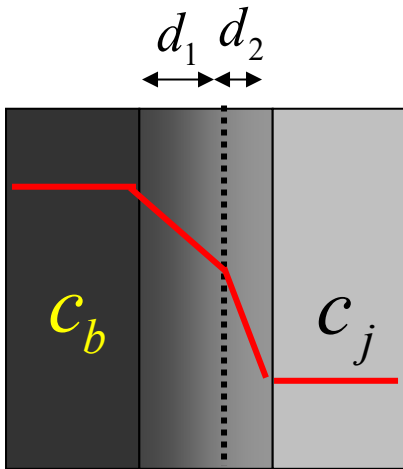
$$K_m = 1$$



$$K_m > 1$$



$$K_m \ll 1$$



$$D_1 > D_2$$

$$K_m = 1$$

$$K_m = \frac{c_m}{c_b} \quad \text{Megosztási hányados}$$

$$c_m(x=0) = K_m \cdot c_b(x=0)$$

$$j_{n,1} = j_{n,2}$$

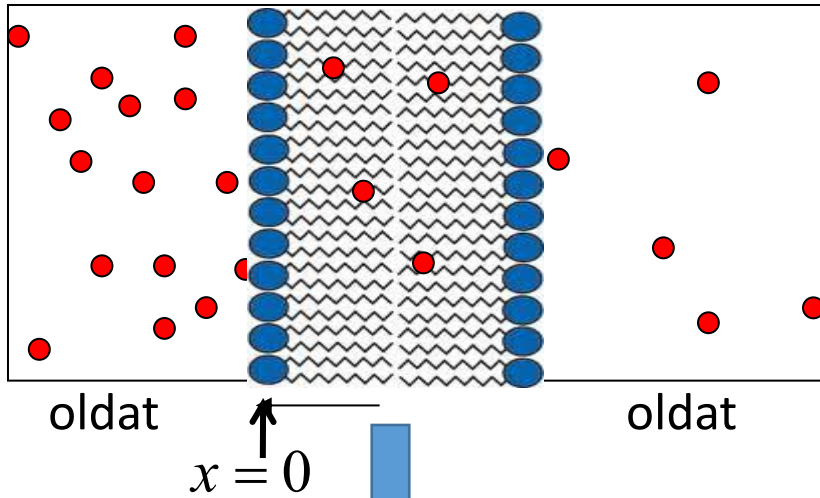
$$-D_1 \cdot (\text{grad } c)_1 = -D_2 \cdot (\text{grad } c)_2$$

Többrétegű membrán esetén

$$c(x) = -K_m \frac{c_b - c_j}{d} x + K_m \cdot c_b$$

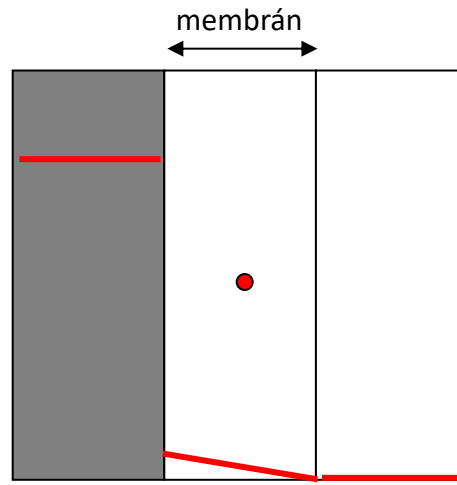
$$P_{erm} = \frac{j_n}{\Delta c} = \frac{K_m D}{d}$$

Megoszlási hányados



Different solubility

K_m

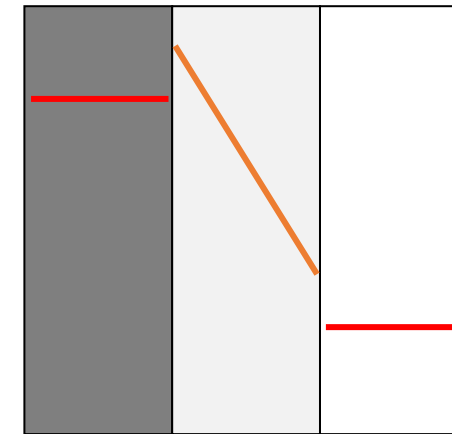


$K_m \ll 1$

$$K_m = \frac{c_m}{c_b} \quad \text{Megoszlási hányados}$$

$$c_m(x=0) = K_m \cdot c_b(x=0)$$

$$c(x) = -K_m \frac{c_b - c_j}{d} x + K_m \cdot c_b$$



$K_m > 1$

Membrán permeabilitás: P_{erm}



$$j_n = -D \nabla c \quad \nabla c = \frac{K_m (c_j - c_b)}{d} = -\frac{K_m \Delta c}{d}$$

$$P_{erm} = \frac{j_n}{\Delta c} = \frac{K_m D}{d}$$

K_m : megoszlási hányados

membrán

$t = 0$
 $c_2 = 0$
 $V_1 = V_2 = V$

c_1 c_2
 V_1 V_2

$c_o = c_1 + c_2$
 $\frac{dc_1}{dt} = -\frac{dc_2}{dt}$

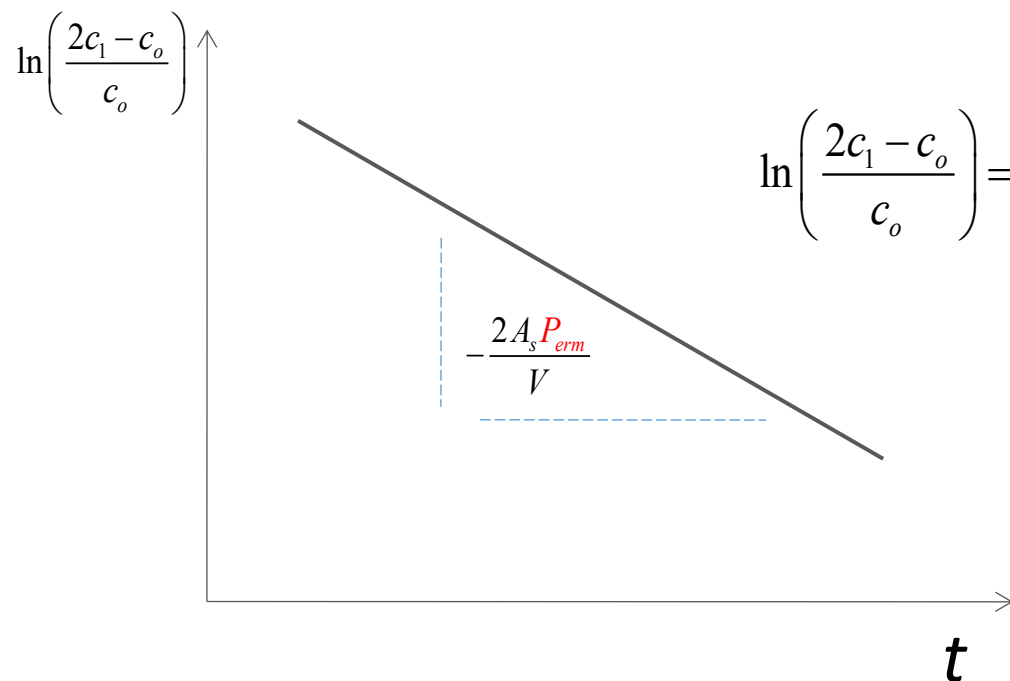
d vastagság A_s felület

$$-V \frac{dc_1}{dt} = j_n A_s = -A_s \frac{K_m D}{d} \cdot (c_2 - c_1)$$

$$-V \frac{dc_1}{dt} = j_n A_s = A_s P_{erm} \cdot (2c_1 - c_o)$$

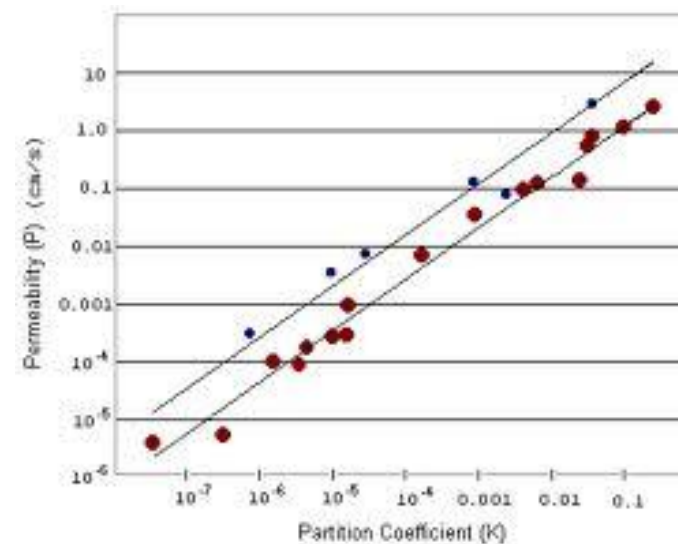
$$\ln \left(\frac{2c_1 - c_o}{c_o} \right) = -\frac{2A_s P_{erm}}{V} \cdot t$$

Permeabilitás mérése



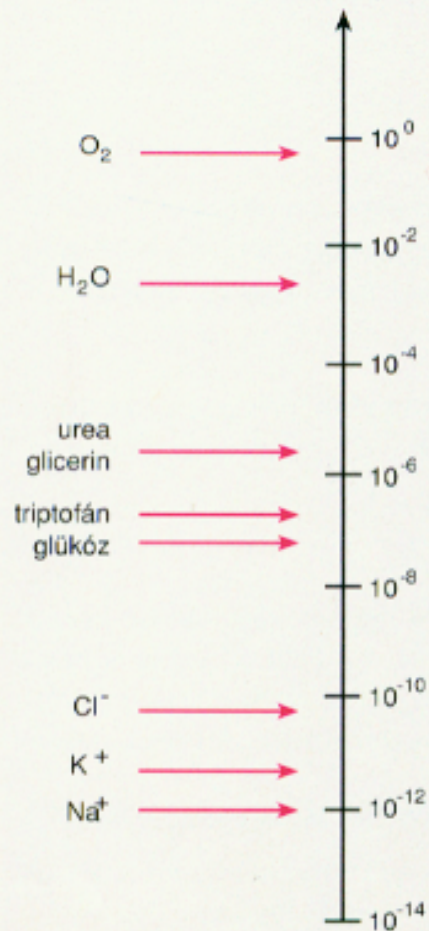
$$\ln\left(\frac{2c_1 - c_0}{c_0}\right) = -\frac{2A_s P_{erm}}{V} \cdot t$$

$$P_{erm} \propto K_m \cdot D$$



$P_{erm} = 10^{-3} \mu ms^{-1}$ Glükóz permeabilitása mesterséges membránban

Permeabilitás / $cm \cdot s^{-1}$



$$P_{erm} \propto D$$

Méret és diffúziós együttható vízben 25°C-on.

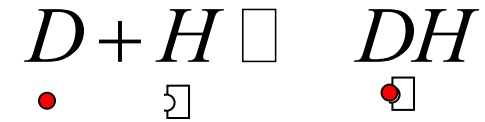
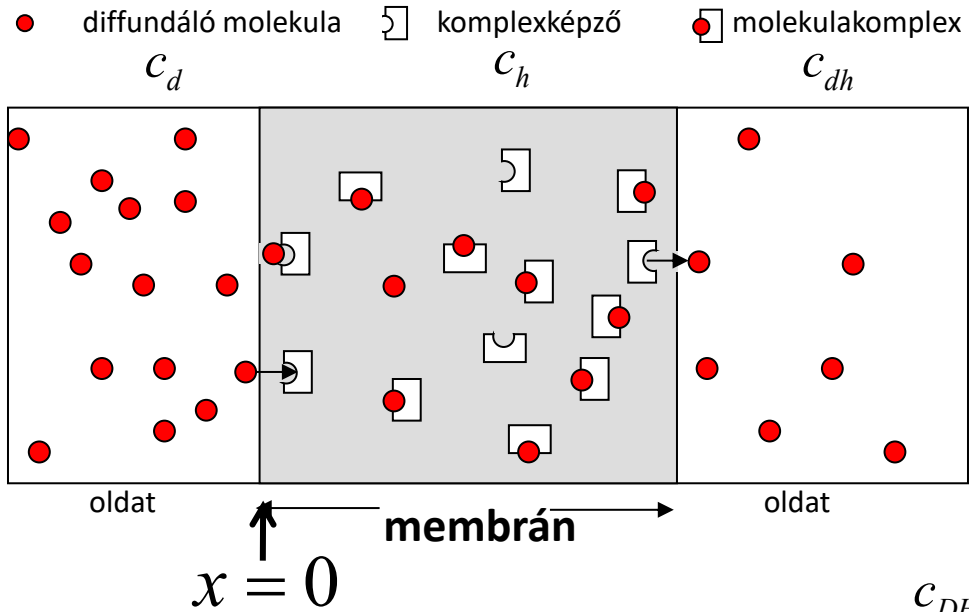
anyag	M	R/nm	$10^9 D / m^2 s^{-1}$
víz	18	0,15	2,0
oxigén	32	0,2	2,1
karbamid	60	0,4	1,38
glükóz	180	0,5	0,7
hemoglobin	68000	3,1	0,069
kollagén	345000	31	0,007
vírus		50	5,0 $cm^2 s^{-1}$
baktérium		1000	0,5 $cm^2 s^{-1}$
sejt		10000	0,05 $cm^2 s^{-1}$

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

$$D\eta = \frac{k_B T}{6\pi} \cdot \frac{1}{R}$$

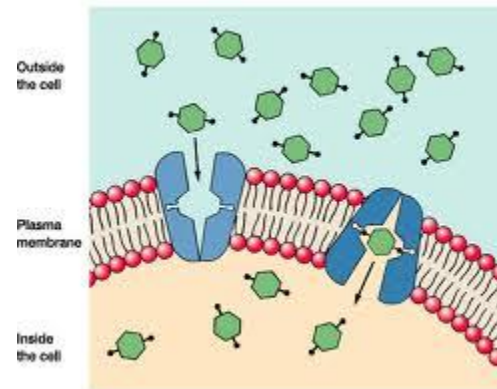
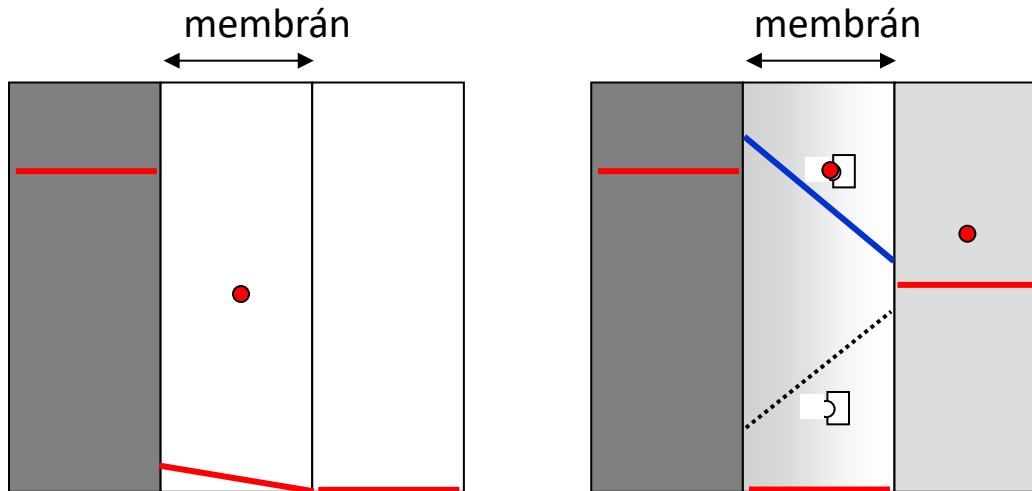
Stokes –Einstein összefüggés

Közvetített diffúzió (Facilitated diffusion)

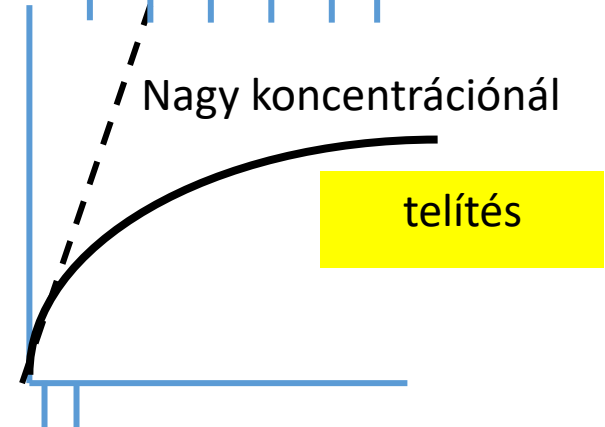
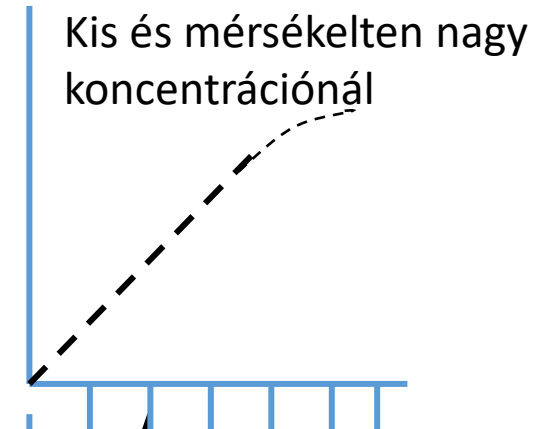
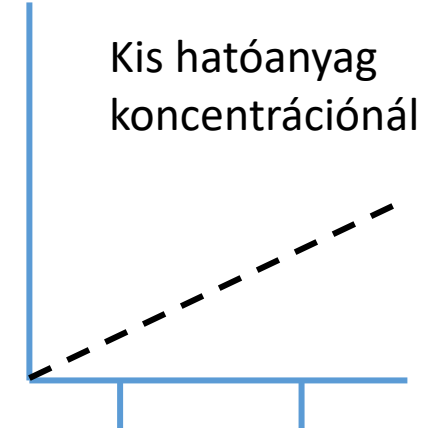
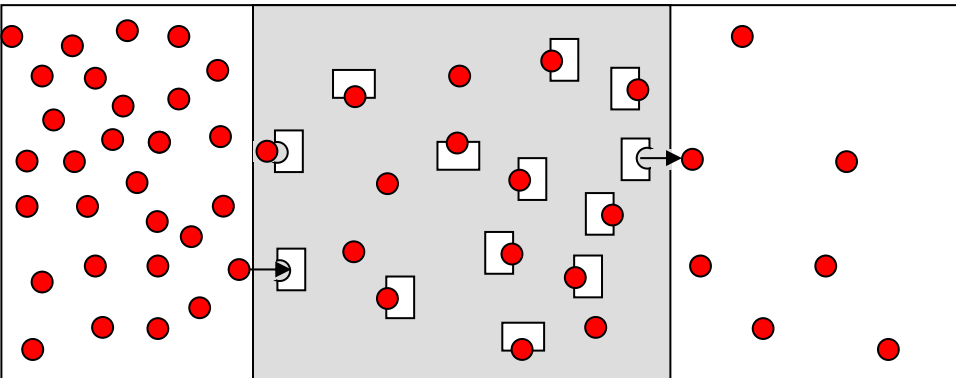
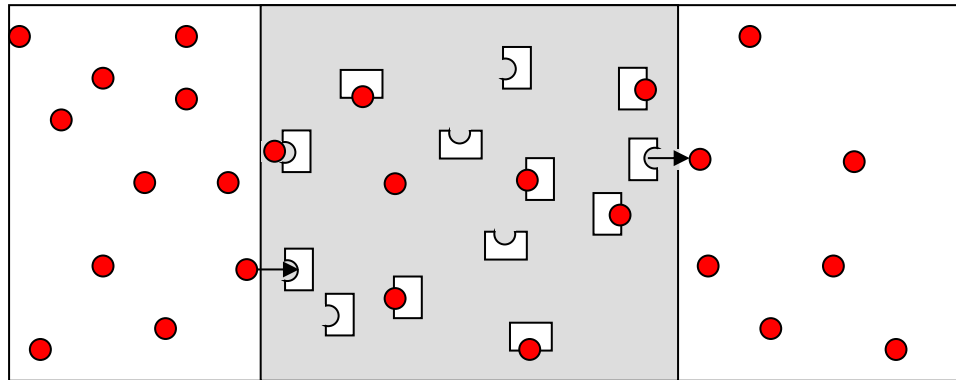
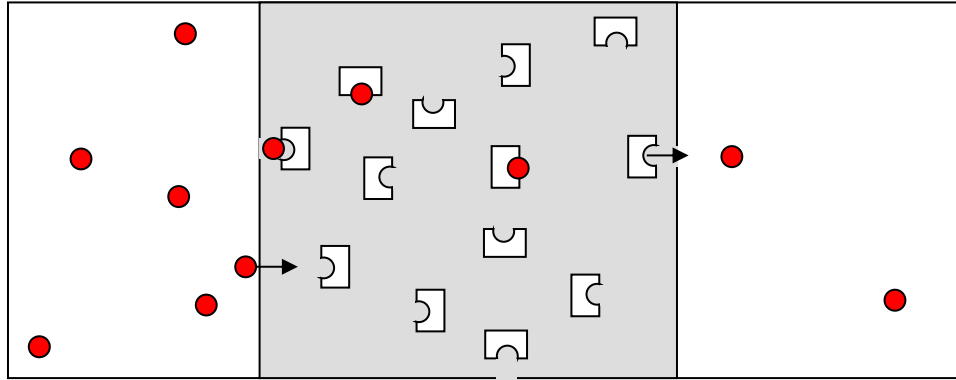


$$K_k = \frac{[DH]}{[D][H]}$$

$$c_{DH}(x=0) = K_k \cdot c_D(x=0) \cdot c_H(x=0)$$

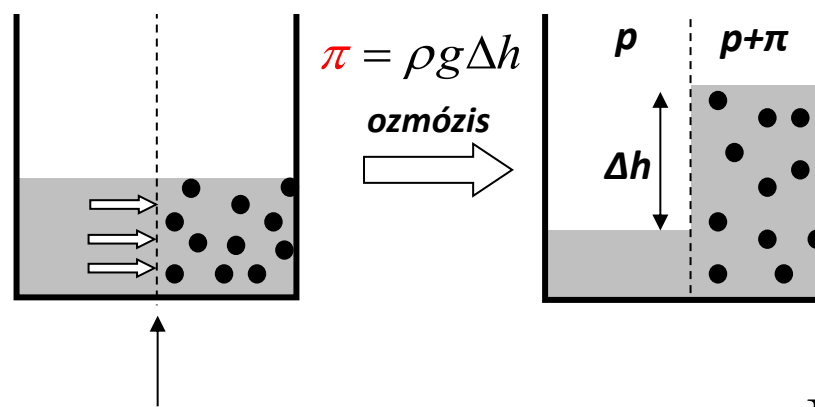


Közvetített diffúzió (Facilitated diffusion)



OZMÓZIS NYOMÁS

ozmózis-
nyomás



szemipermeabilis membrán

Egyensúly feltétele

$$\mu_1^o(p) \equiv \mu_1^s(p + \pi, x_2)$$

$$\pi = \rho g \Delta h$$

$$-\pi V = RT \ln x_1 = RT \ln(1 - x_2)$$

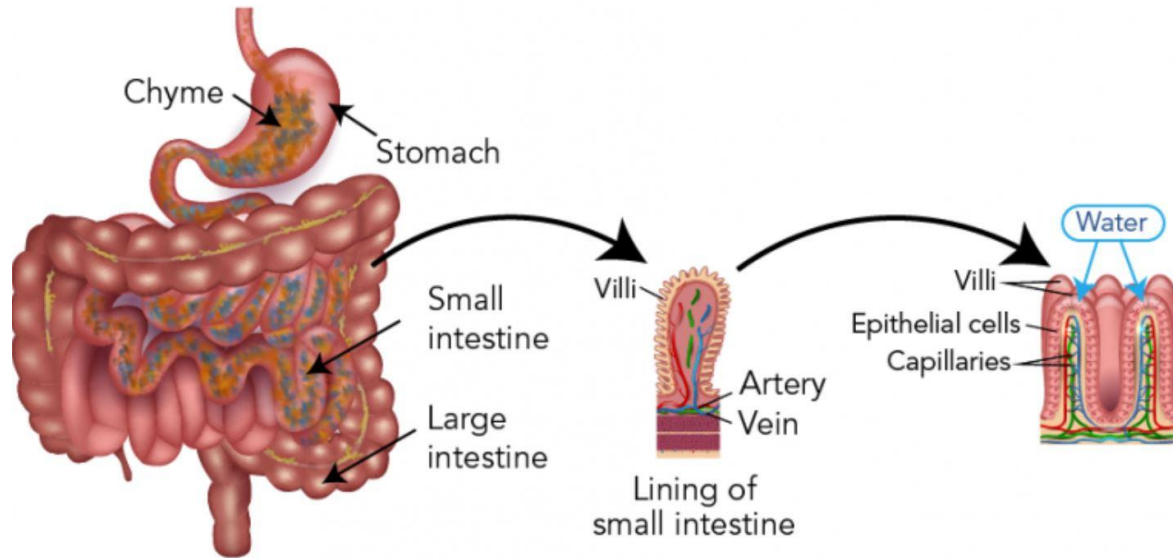
Az ozmózis jelenségéről akkor beszélünk, amikor két eltérő összetételű oldatot olyan **féligáteresztő** hártyával választunk el, amely az oldószer-molekulák számára átjárható, de az oldott anyag molekuláit nem engedi át.

A termodinamikai egyensúly akkor áll be, amikor az oldószer-molekulákat a töményebb oldatfázis irányába terelő **ozmózisnyomás** éppen megegyezik a vele ellentétes irányban ható, a megemelkedett folyadékszint hidrosztatikai nyomásával.

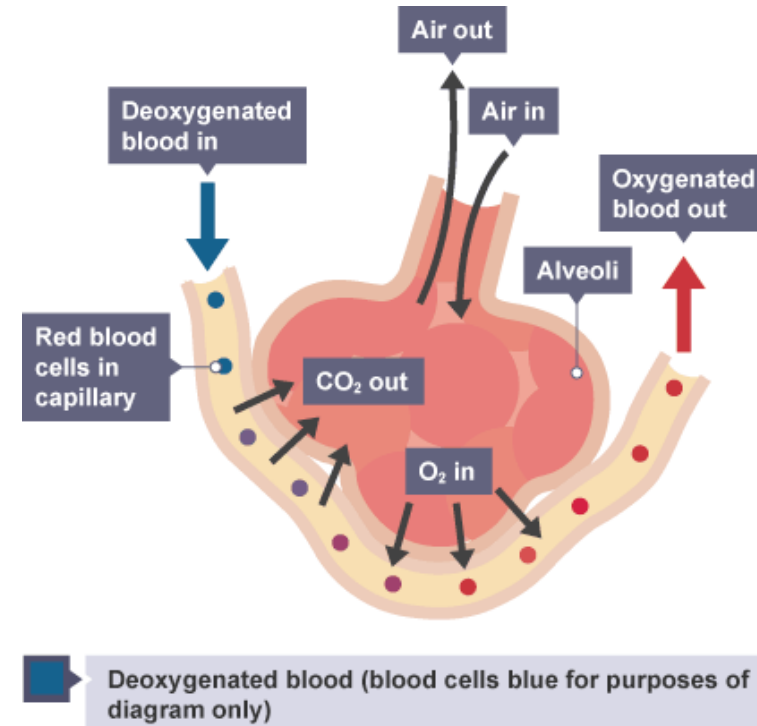
Az ozmózisnyomást az oldószer móltérfogatán és a hőmérsékleten kívül csak a részecskék száma határozza meg: **kolligatív tulajdonság**.

Biológiai példák diffúzióra

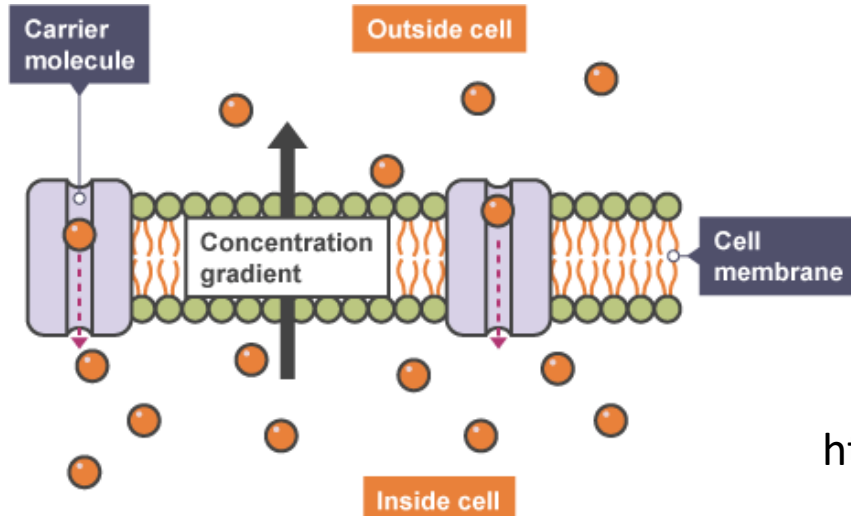
Tápanyagok felszívódása a béltraktusból



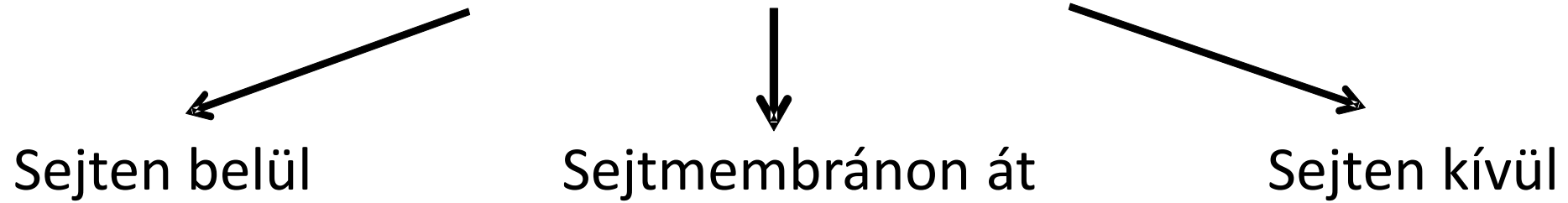
Oxigén és szén-dioxid diffúziója a tüdőben



Aktív transzport (facilitált diffúzió)



Biológiai anyagtranszport



- konvektív
- konduktív

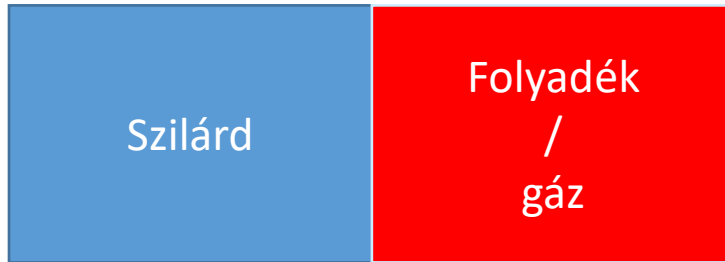
- konduktív (átadásos)

- konvektív
- konduktív

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
LOKÁLIS VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

Hő transzport

Konvekció



$$q_k = h_k (T_S - T_L)$$

h_k a konvektív hőátadási
tényező $W / m^2 K$

Radiáció

Fekete test esetén

$$q_e = \sigma T^4$$

Reális esetben

$$q_e = \varepsilon \sigma T^4$$

Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

Konduktív hővezetés: **Fourier törvények**

$$j_Q = -k_T \frac{dT}{dx}$$

áramsűrűség

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad \leftarrow \text{függvény görbülete} \quad \alpha = \frac{k_T}{\rho \cdot c_p}$$

lokális változás

$$\frac{dQ_{\text{hővezetés}}}{dt} = -k_T \cdot A_s \cdot \frac{dT}{dx}$$

anyag	T/K	$k_T / Wm^{-1}K^{-1}$	α / m^2s^{-1}	$c_p / kJkg^{-1}K^{-1}$
levegő	300	0,025	$2,11 \cdot 10^{-5}$	1,006
víz	300	0,609	$1,5 \cdot 10^{-7}$	4,186
zsír	298	0,21	$0,69 \cdot 10^{-7}$	3,258
vér	298	0,642	$1,76 \cdot 10^{-7}$	3,889
bőr	310	0,442	$1,19 \cdot 10^{-7}$	3,471

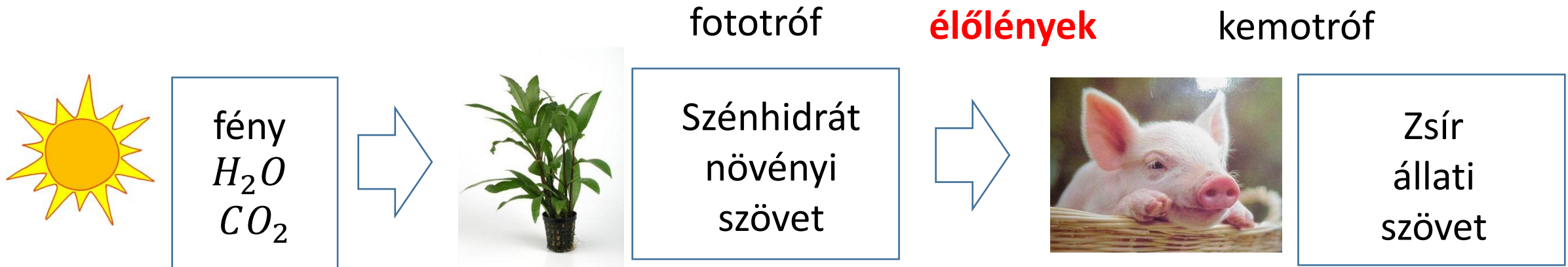
k_T : Hővezetési tényező [W / mK]

α : Hőmérséklet-vezetési tényező [m^2 / s]

c_p : Fajlagos hőkapacitás [J / kgK]

Laplace operátor: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

A nap a földi élet energiaforrása



Az élő szervezet sejtjeiben végbemenő folyamatok összessége: **metabolizmus**

felépítő folyamatok
anabolizmus

rendezetlen + **energia** → rend

lebontó folyamatok
katabolizmus

rend → rendezetlen + **energia**

Alap – energiaforgalom: BMR

Basal metabolic rate

$$BMR = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{nyugalom}$$

$$BMR \propto m_b^{3/4}$$

Kleiber törvény

A BMR a korral csökken

$m_b = 70$ kg 7029 kJ/nap 293 kJ/óra 81 W férfi
60 W nő

Energiaforgalom: (MR) és oxigén fogyasztás

alvás	83 W	O_2 : 0,24 L/perc
séta	265 W	O_2 : 0,76 L/perc
kerékpározás	400 W	O_2 : 1,13 L/perc

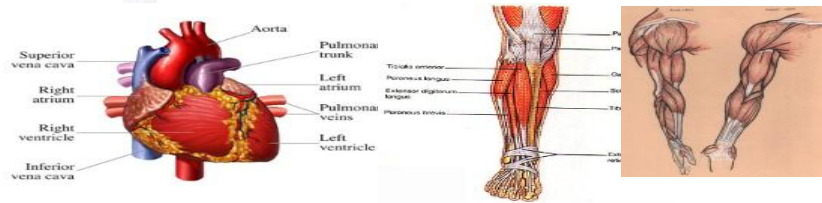
Hol keletkezik a nyugalmi metabolikus hő?

A szervezeten belül a hőmérséklet eloszlás nem homogén.

mag

köpeny

<i>agyvelő</i>	25%
<i>szív</i>	15%
<i>vázizom</i>	25%
<i>hasi zsigerek</i>	25%
<i>vese</i>	6%
<i>bőr</i>	4%



$$\Delta Q = Q_{\text{metabolizmus}} + Q_{\text{veszteség}}$$

Átlagos ember átlagos termikus jellemzői:

Fajhő: 3,47 kJ/kgK

70 kg-os (m_b) személy hőkapacitása (C): 243 kJ/C°

$$Q = C \cdot m_b \cdot \Delta T$$

$$\frac{dQ}{dt} = C \cdot m_b \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C \cdot m_b} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C \cdot m_b} \cdot BMR$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{BMR}{C \cdot m_b}$$



$$\frac{dT}{dt} = 1,2 \text{ C}^\circ/\text{óra}$$

**Ha nem lenne veszteség
és fizikai aktivitás!**

Fizikai aktivitás esetén



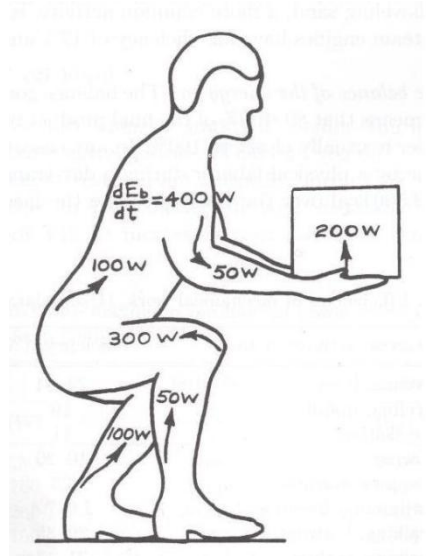
$$\frac{dQ}{dt} = f \cdot BMR$$

$$\frac{dT}{dt} = f \cdot \frac{BMR}{C \cdot m_b} \approx 1,2 f \text{ C}^\circ / h$$

$0 < f < 20$
Fizikai aktivitás

aktivitás	f
alvás	1
ülés	1,5
állás	1,7
gyaloglás	4,7

Energiaforgalom és mozgás

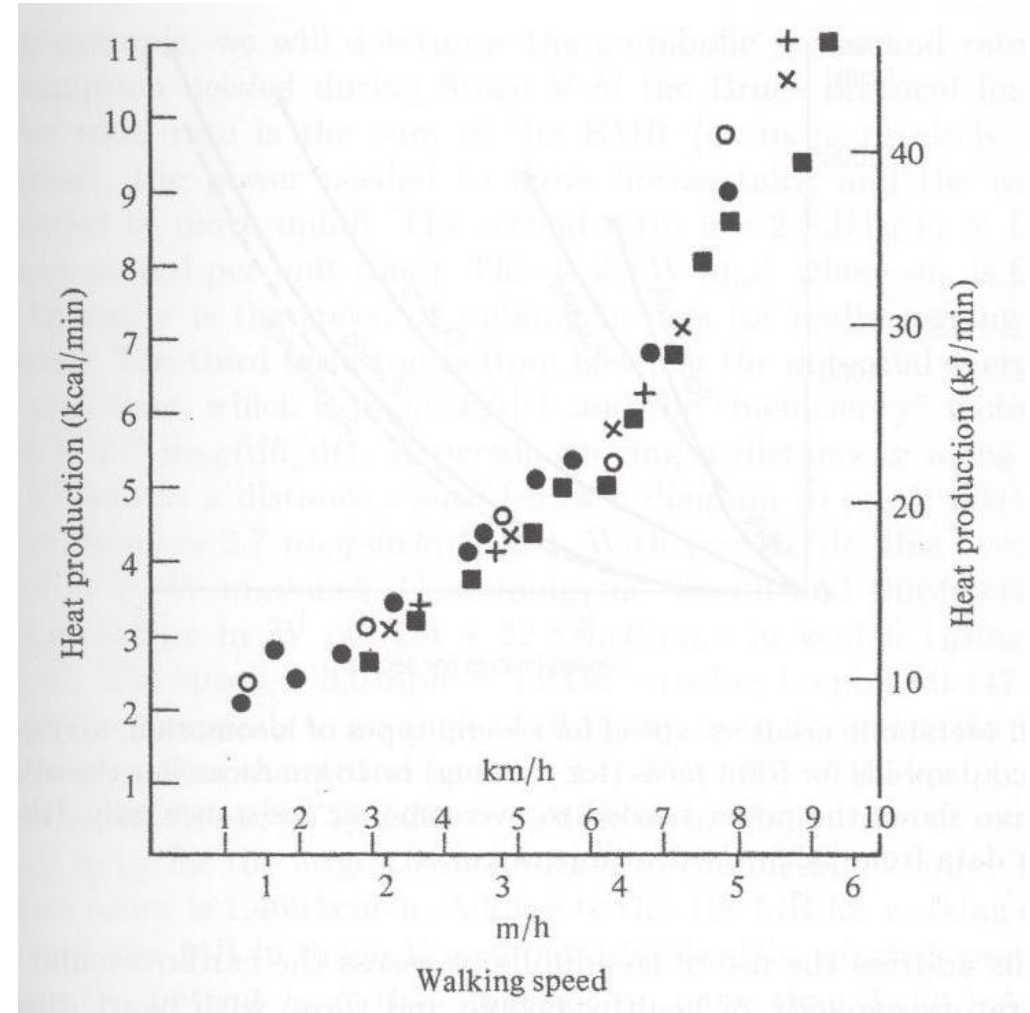


munka(*fizika*) $\neq$ munka(*biológia*)

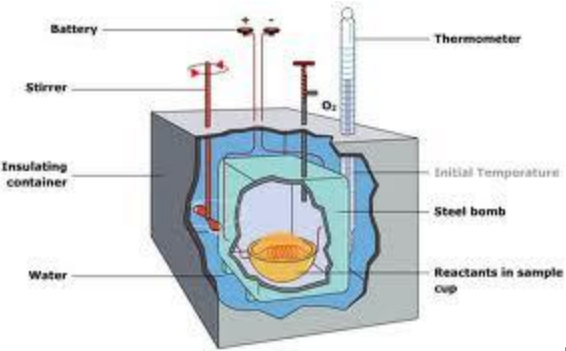
külső

belső

Gyaloglással felszabadított hő függése a sebességtől.

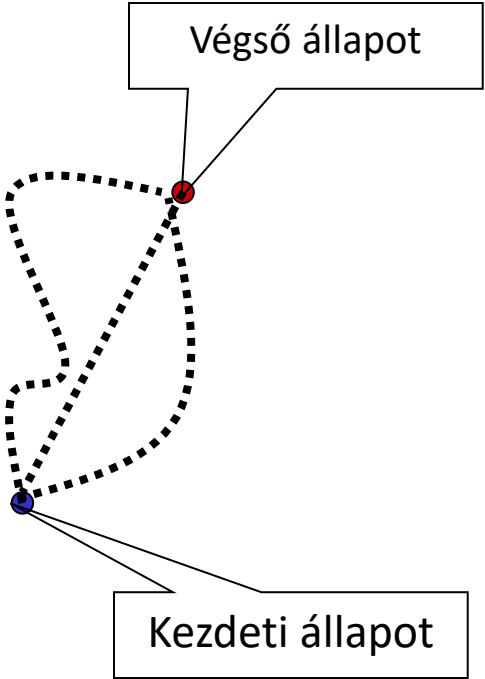


Direkt kalorimetria



Hess tétele:

anyag	kalorimetrikus energia kJ/g
szénhidrát	17,1
fehérje	23,6
etanol	29,7
zsír	39,6



anyag	energia sűrűség J/Kg
ATP	$1,0 \cdot 10^5$
H_2	$1,2 \cdot 10^8$
zsír	$3,9 \cdot 10^7$
glükóz	$1,6 \cdot 10^7$

Direkt és indirekt kalorimetria

1 mól glükóz oxidációjához 6 mól=134,46 L oxigén kell!

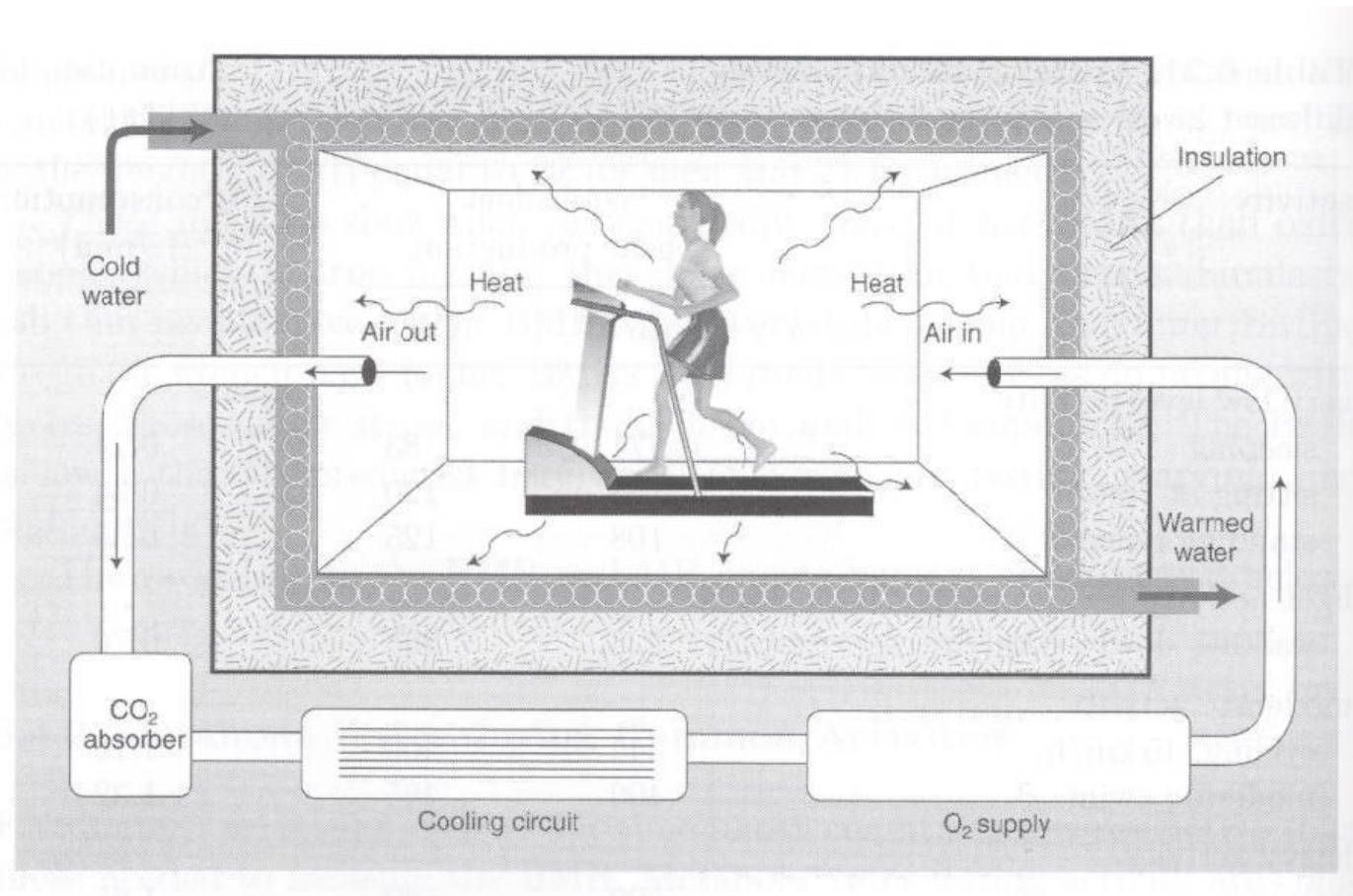
$$\Delta H = +2817 \text{ kJ}$$

Oxigén energia egyenérték

1 L oxigén fogyasztására 21 kJ energiát jelent

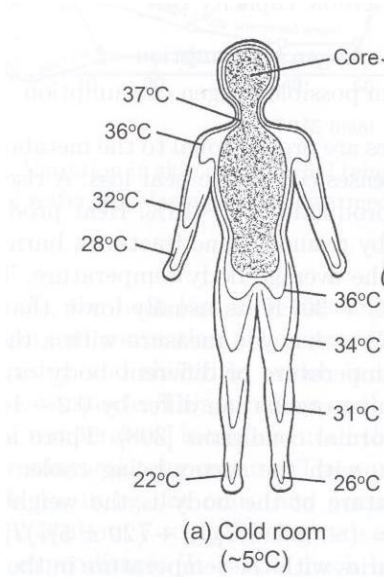
komponens	kalorimetrikus energia kJ/g	Oxigén egyenérték kJ/L	Széndioxid egyenérték kJ/L
szénhidrát	17,1	21,1	21,1
fehérje	23,6	18,7	23,3
etanol	29,7	20,3	30,3
zsír	39,6	19,8	27,9

Direkt és indirekt kalorimetria



Kalorimetria > metabolitika
(V=konst.) (p=konst.)

A BELSŐ ENERGIA (*HŐ*) TRANSZPORTJA



Hol keletkezik a nyugalmi metabolikus hő?

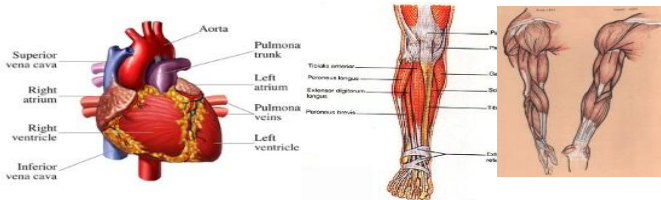
agyvelő	25%
szív	15%
vázizom	25%
hasi zsigerek	25%
vese	6%
bőr	4%

Hol veszik el a metabolikus hő?

A szervezetben belül a hőmérséklet eloszlás nem homogén.

mag

köpeny



$$Q_{\text{veszteség}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

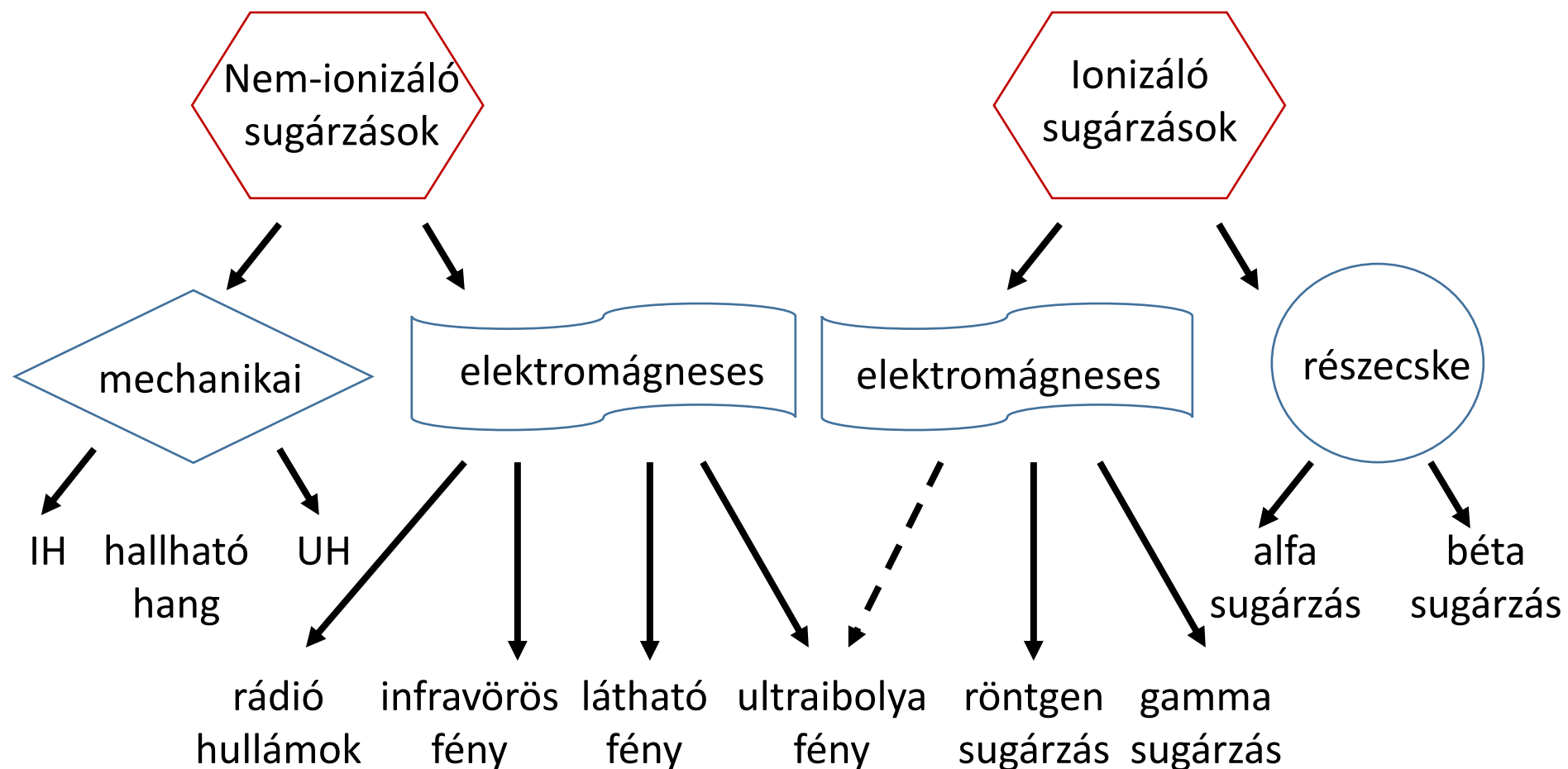
54-60 %

25 %

7 %

14 %

Sugárzások



Hőmérsékleti feketetest sugárzás

Környezetének hőfokától függetlenül **minden test** az abszolút nulla foktól különböző **hőmérsékleten** elektromágneses sugárzást bocsát ki.

Abszolút fekete test: minden rá eső energiát elnyel $\alpha = 1$

$$\alpha = \frac{J_{\text{absz}}}{J_{\text{össz}}}$$

Test által elnyelt/
Testet ért összes
sugárzás intenzitása



Kirchhoff megfigyelése: ha egy test „erősebben” sugároz, akkor jobban el is nyel

Az emberi test kb. 95%-os fekete testnek tekinthető.

$$\frac{M_{\lambda i}}{M_{\lambda j}} = \frac{\alpha_{\lambda i}}{\alpha_{\lambda j}}$$

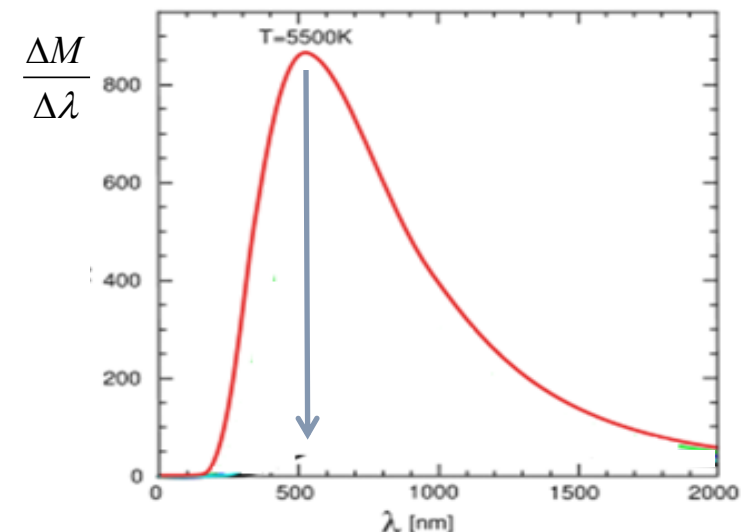
M : kisugárzott felületi teljesítmény [W/m^2]

$$M_i < M_{\lambda(\text{fekete})}$$

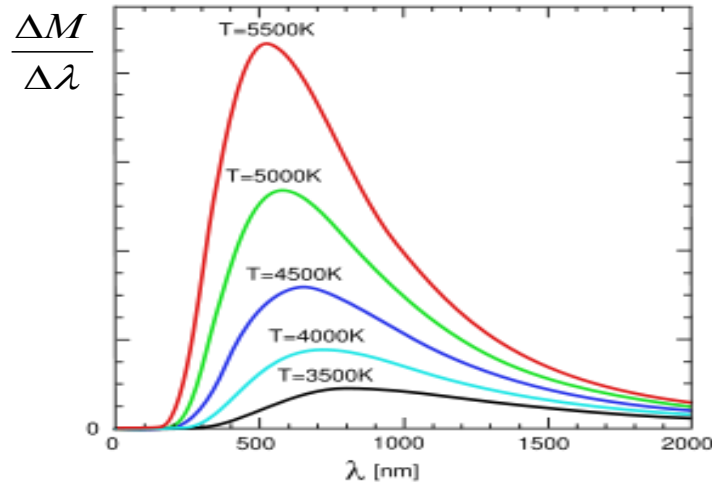
A hőmérsékleti sugárzás emissziós spektruma

- a spektrum folytonos
- egy maximuma van : λ_{max}
- a görbe alatti terület: $M = \sigma T^4$

**Stefan –
Boltzmann
törvény**



Hőmérsékleti feketetest sugárzás



$$T \times \lambda_{\max} = \text{állandó}$$

$$T \times \lambda_{\max} = k$$

Wien-féle eltolódási törvény

Alkalmazások: Stefan Boltzmann törvény alapján
intenzitásokat mérünk

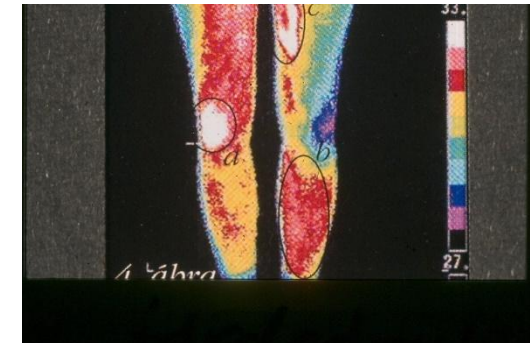
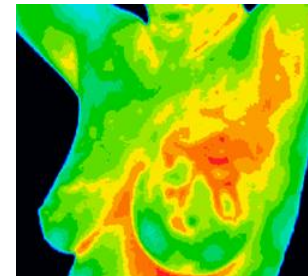
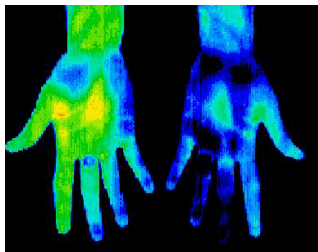
Hőmérsékleti sugárzás detektálása teletermográfia - infradiagnosztika

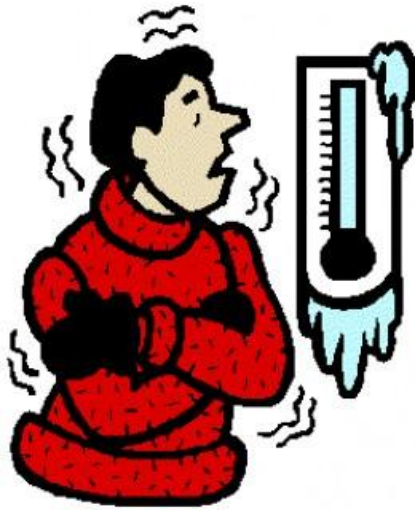
A köpeny hőtérképe – daganatok, gyulladások, érszűkületek diagnosztikája

Wien-féle eltolódás alapján az emberi test spektrumának maximuma

$$\lambda_{\text{peak}} = \frac{2.898 \times 10^6 \text{ K} \cdot \text{nm}}{305 \text{ K}} = 9500 \text{ nm}$$

Emberi hőtérképek készítésében alkalmazott
készülékek érzékenységi maximuma: **7-14
microméter**





Konvektív hővezetés

$$Q_{\text{veszteség}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

$$-\frac{1}{A_s} \frac{dQ_{\text{konvektív}}}{dt} = h_c \cdot (T_{\text{bőr}} - T_{\text{levegő}})$$

h_c :egységnyi felületre vonatkozó

$W / m^2 C^o$ konvektív hővezetési tényező

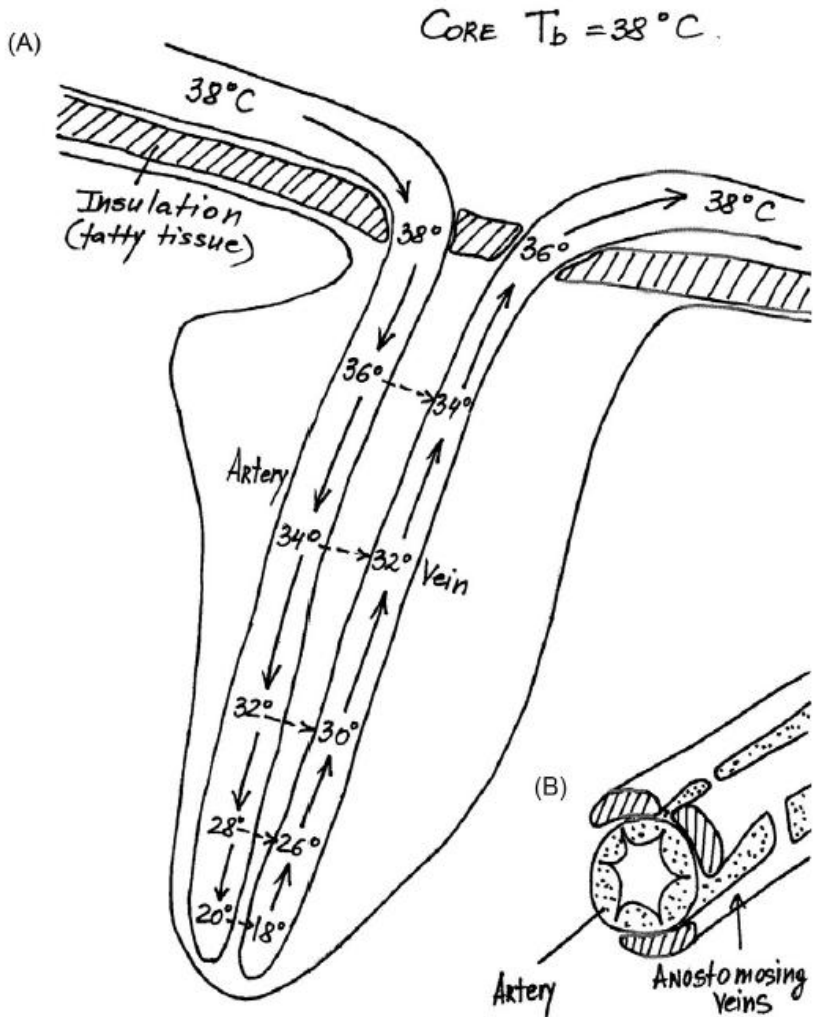
Szél sebessége [m/s]	h_c [$W / m^2 C^o$]
0,1	2,6
0,6	6,4
2,0	11,7
4,0	16,6

Szélben:

$$h_c = 10,45 - v + 10v^{1/2}$$

(közelítés)

v : áramló levegő sebesség: m/sec



Testen belüli hővezetés

$$Q_{\text{veszteség}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

(Test és vér közötti hővezetés)

$$-\frac{1}{A_s} \frac{dQ_{\text{véráram}}}{dt} = h_c \cdot (T_{\text{vér}} - T_{\text{testrész}})$$

Pennes bio-hő egyenlete

Ujjbegy hőmérsékletének
méréséből véráramlás
nyomon követése

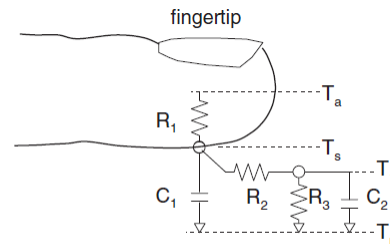
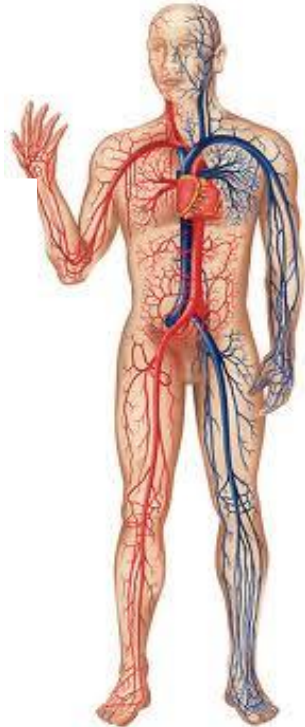


FIG. 3. Heat transfer analysis model with thermal loading (b).

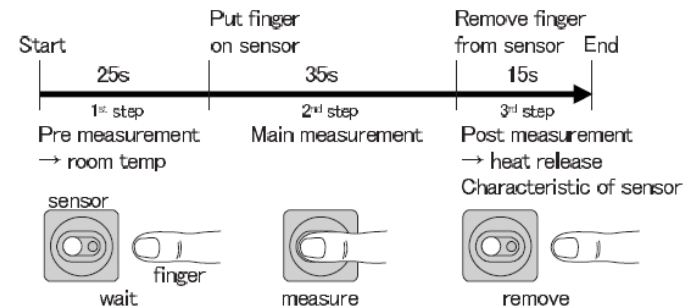


FIG. 7. Measurement procedure.

Nagata et al, 2009

Sokolova, 2018

$$Q_{\text{veszteség}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

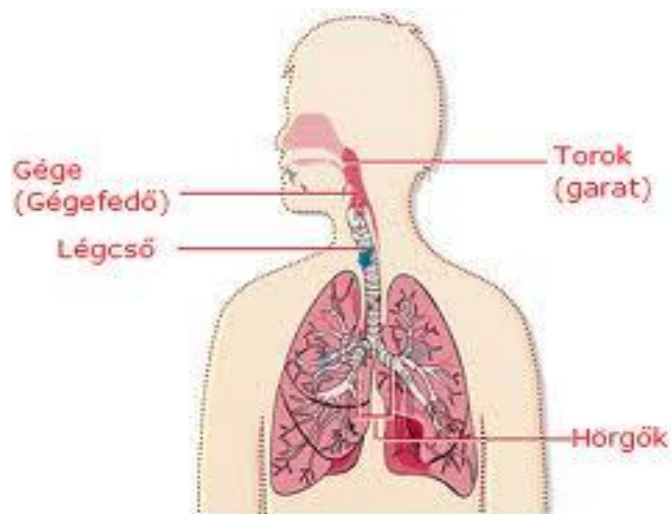
Hőveszteség párolgással izzadás

Víz párolgáshője: $\Delta h_{\text{párolgás}} = 2,25 \text{ kJ / g}$

V_{izz}

$$-\frac{dQ}{dt} = \Delta h_{\text{párolgás}} \cdot (\rho_{\text{lev}}^{\text{ki}} - \rho_{\text{lev}}^{\text{be}}) \frac{dV_{\text{izz}}}{dt}$$

Hővesztés légzéssel



$$Q_{\text{vesztés}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$

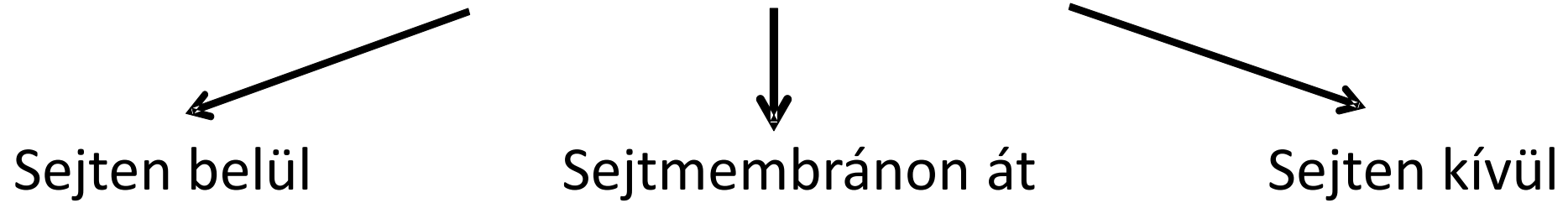
Ki- és belégzés térfogata nyugalomban: 500 ml

Ki- és belégzés frekvenciája nyugalomban: 12 – 14 / perc

$$I_{\text{levegő}} = \frac{dV_l}{dt} \approx 0,1 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$-\frac{dQ}{dt} = \rho_l c_{p,l} (T_{ki} - T_{be}) \frac{dV_l}{dt}$$

Biológiai anyagtranszport



- konvektív
- konduktív

- konduktív (átadásos)

- konvektív
- konduktív

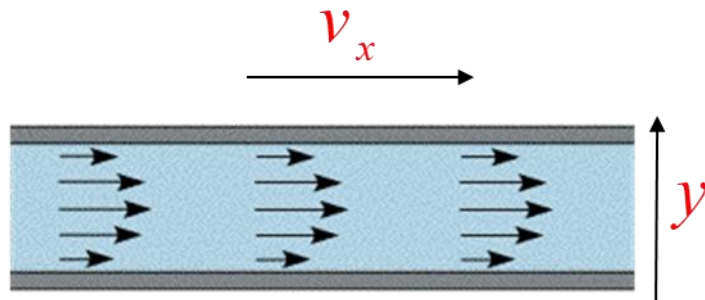
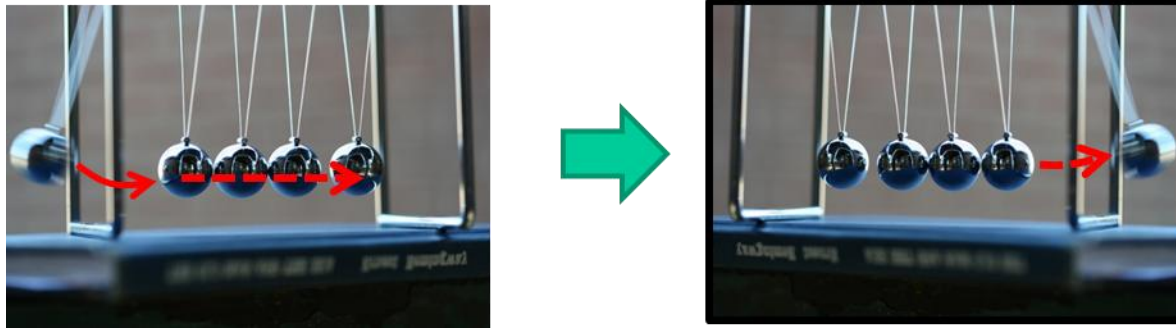
	DIFFÚZIÓ	HŐVEZETÉS	REOLÓGIA
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
LOKÁLIS VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

REOLÓGIA ÉS ÁRAMLÁS

Testek deformációjának és folyásának tudománya (folyástan)

Testre ható anizotróp erők okozta változással foglalkozik

(konduktív impulzustranszport)



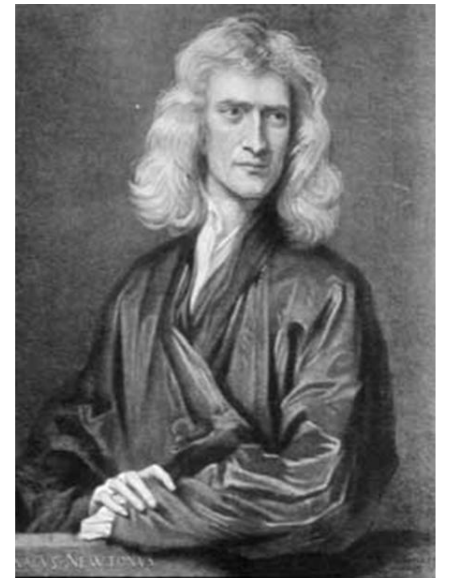
REOLÓGIA

impulzus áram

$$\nabla v$$

$$j_i = -\eta \nabla v$$

$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$



Sir Isac Newton (1642-1727)

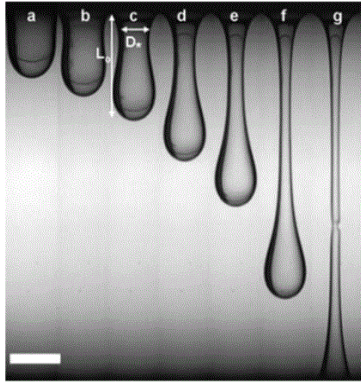
A reológiai viselkedés viszonylagossága

Deborah-szám

$$D_e = \frac{\tau}{t}$$

← Relaxációs idő

← Megfigyelés ideje



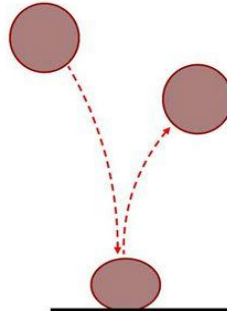
$$D_e \approx 1$$

viszkoelasztikus

$$D_e \gg 1$$

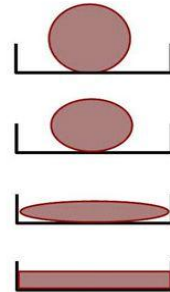
szilárd

rugalmas



$$\tau \gg t$$

viszkózus



$$D_e \ll 1$$

folyékony

$$\tau \ll t$$



CHRISTIAN AAS / UNIVERSITY OF QUEENSLAND

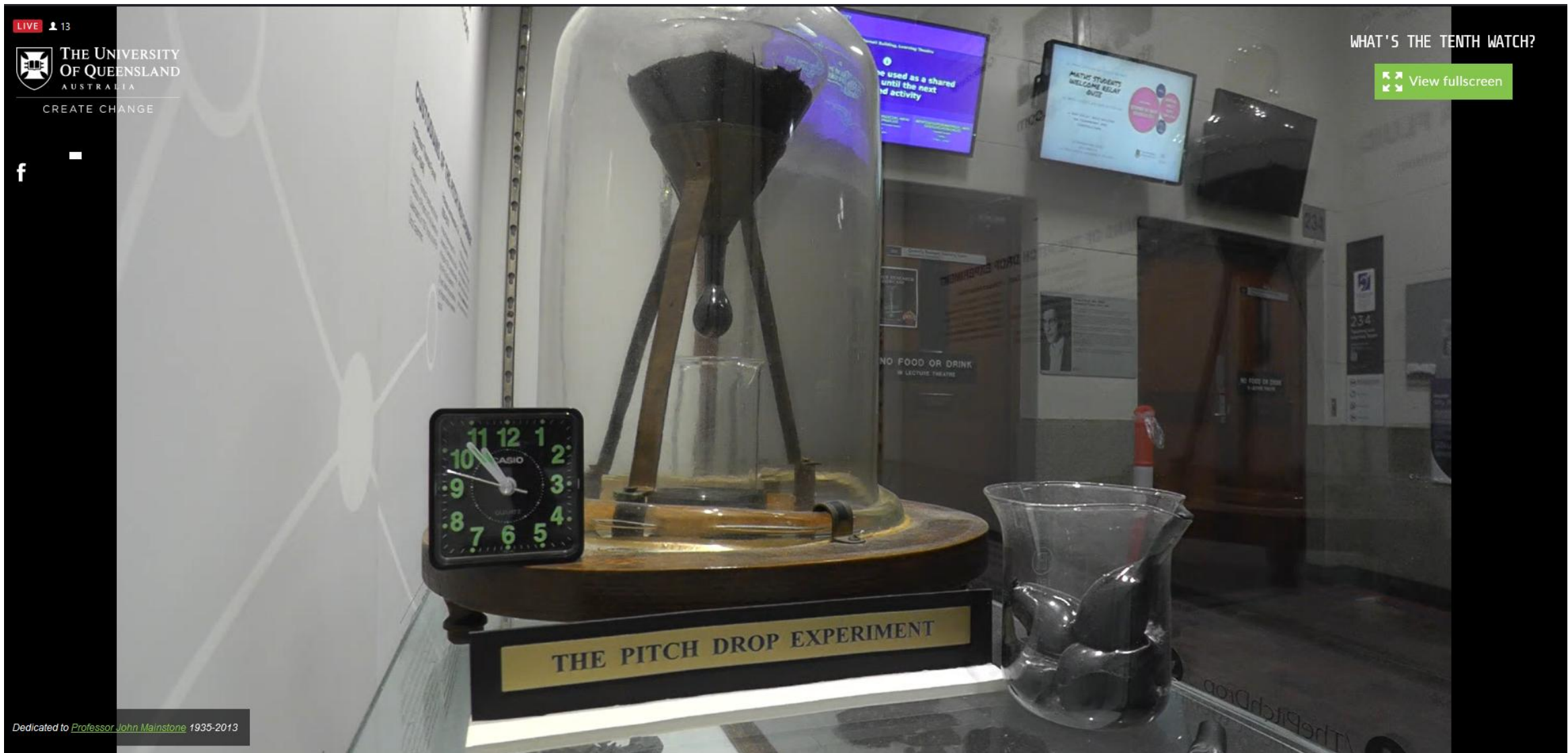
Start: 1927

~9 csepp

Pl.: 1979, 1988, 2000, 2014

Még a kőzetek is folynak a geológiai időtartam alatt!

<https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/science-and-technology/made-in-scotland-changing-the-world/scottish-science-innovations/pitch-drop-demonstration/>



<http://thetenthwatch.com/feed/>

A reológia alapösszefüggése: **Newton egyenlet**

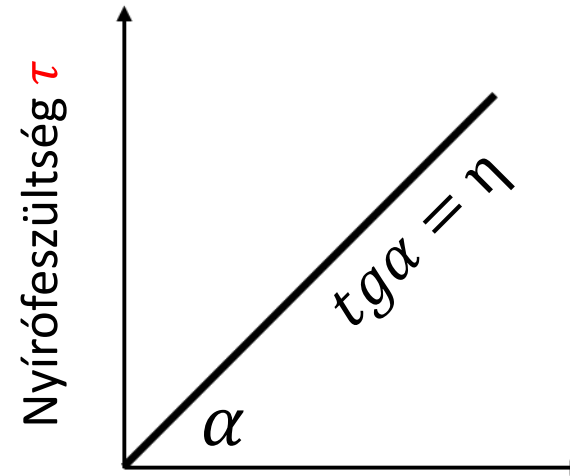
$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Nyírófeszültség:

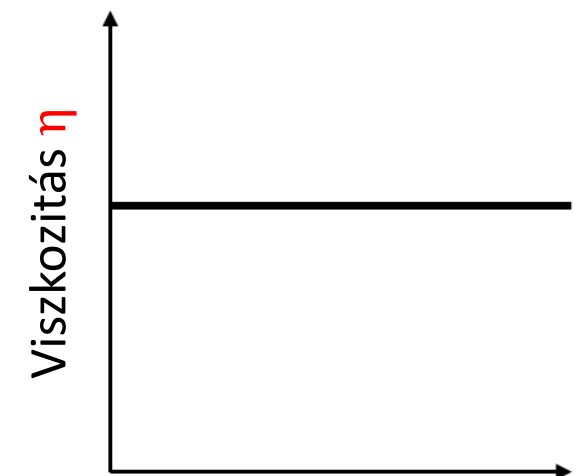
$$\tau = \frac{F}{A_s}$$



Folyás görbe



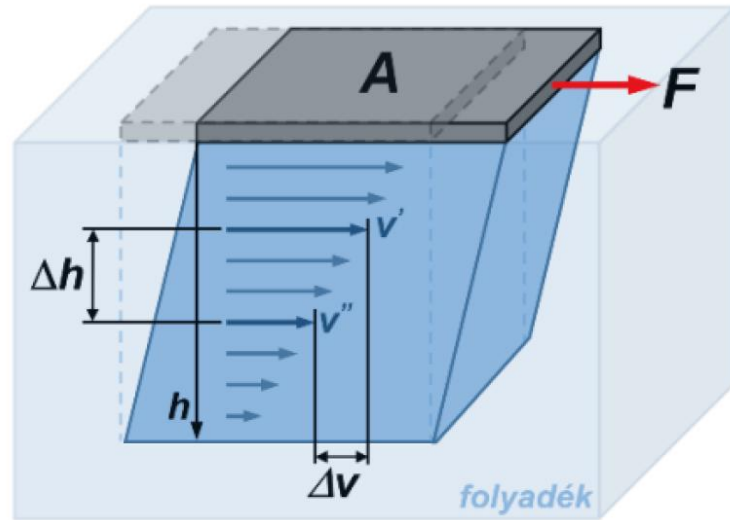
Viszkozitás görbe



Sebesség gradiens G

$$G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}$$

Nyírófeszültség τ



$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h} \rightarrow \tau = \eta \cdot G \rightarrow [s^{-1}]$$

$[Pa]$ $[Pa \cdot s]$

Viszkozitások és mértékegységek

Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt) mértékegysége a pascal secundum (Pa·s) vagy centi Poise (cP, 1 mPas = 1 cP)

Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) vagy stoke (St).

Anyag megnevezése	Viszkozitás (mPa·s; 20 °C)
Etanol	0,248
Kloroform	0,56
Víz	0,89
Vér	4-15 (37 °C)
Olívaolaj	~ 100
Méz	10 000

Reológiai tesztek felosztása

A. Newtoni folyadékok (víz, olajok, glicerín stb.)

B. Nem- newtoni tesztek

I. szerkezeti vagy pszeudoviszkózus

pszeudoplasztikus (nyák)

pszeudodilatáns (keményítőpép)

II. ideálisan plastikus (Bingham-teszt)

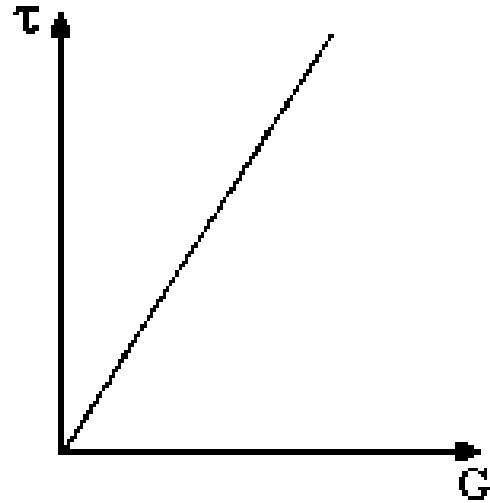
III. reális plastikus tulajdonságú tesztek

plastikus (krém, kenőcs)

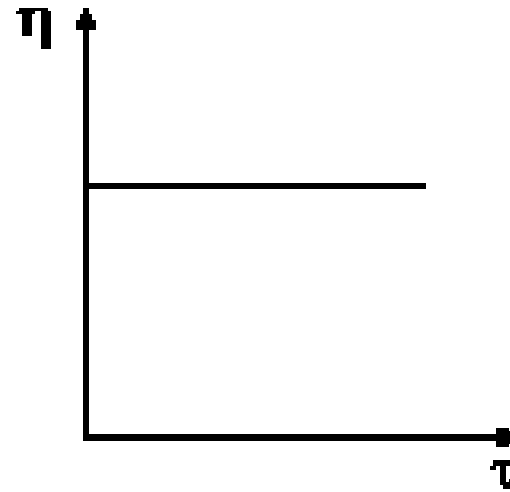
dilatáns (paszta)

A. Newtoni folyadékok

folyásgörbe



viszkozitásgörbe



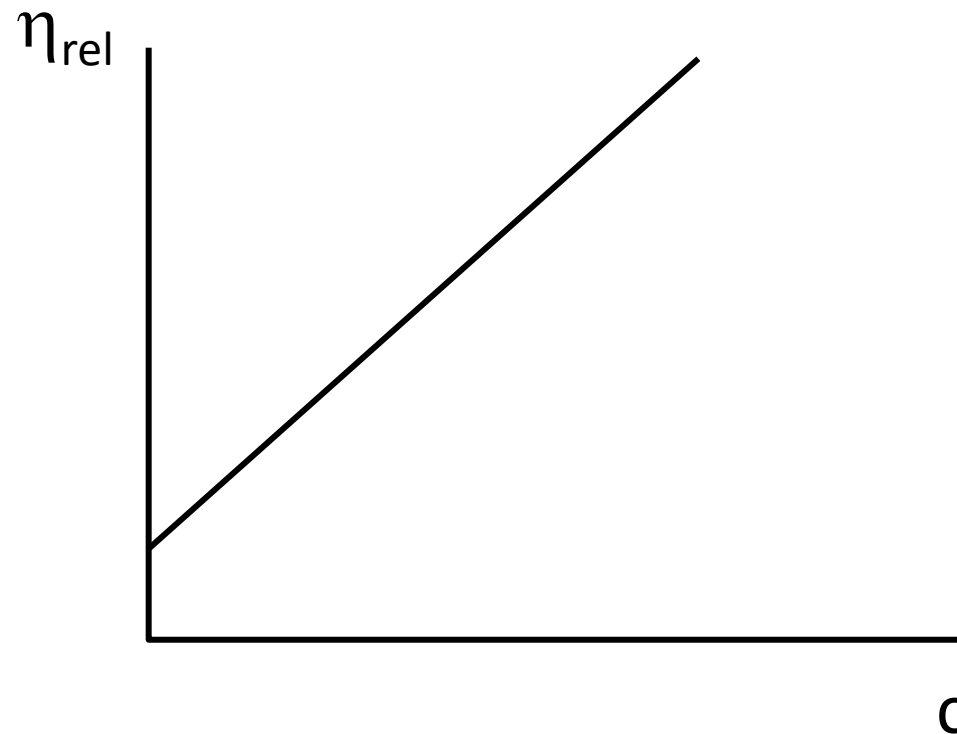
**A cukorszirupok és
növényi olajok Newtoni
tulajdonságú folyadékok.**



A. Newtoni folyadékok

Viszkozitás koncentráció függés

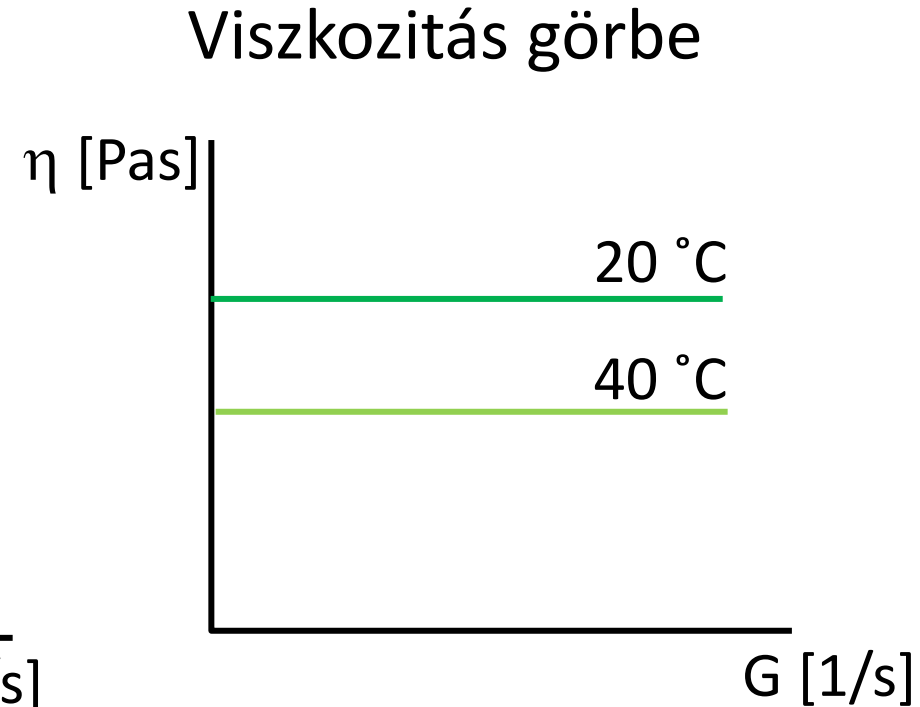
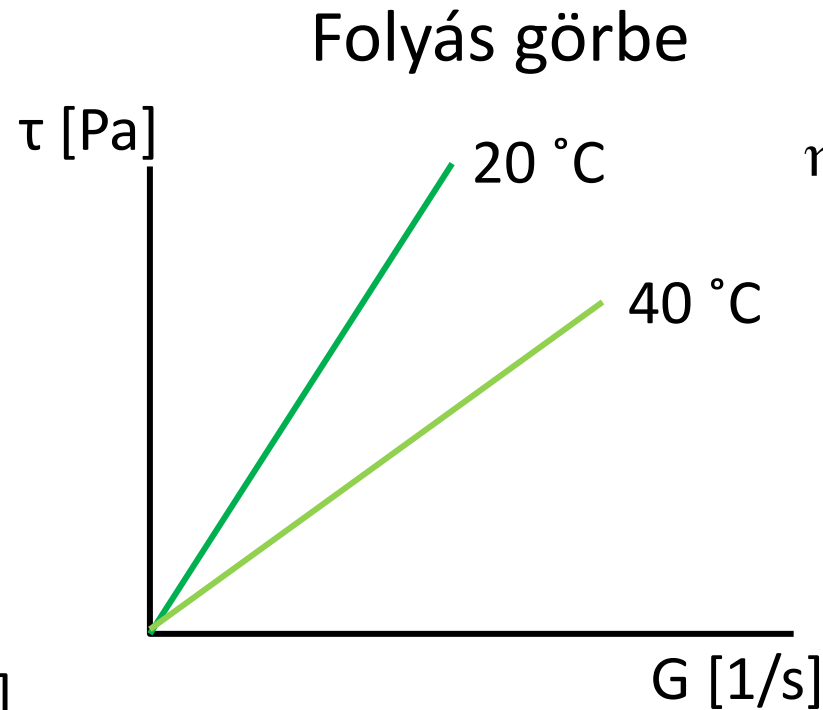
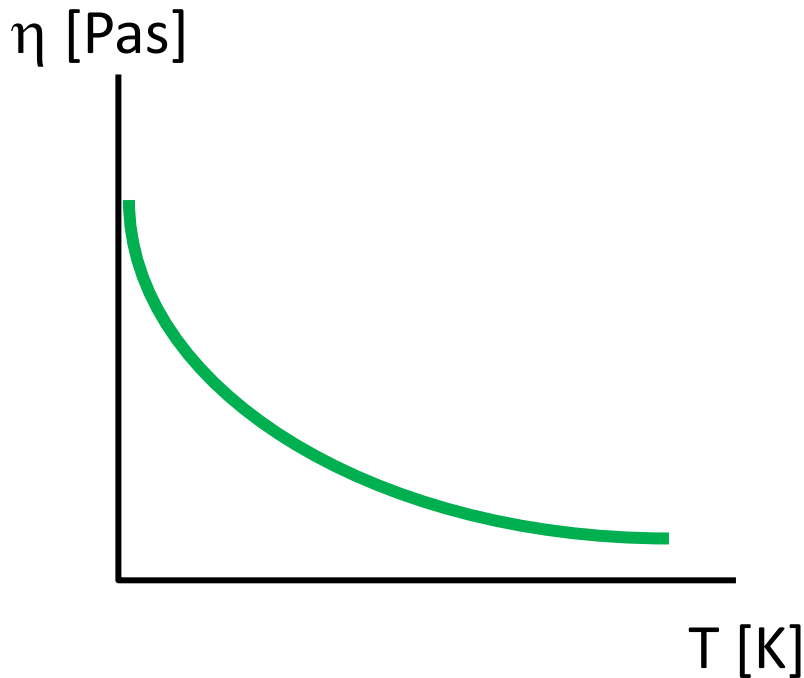
Viszkozitás- koncentráció görbe



Híg oldatok esetén, ha a
sűrűség változás
elhanyagolható.

A. Newtoni folyadékok

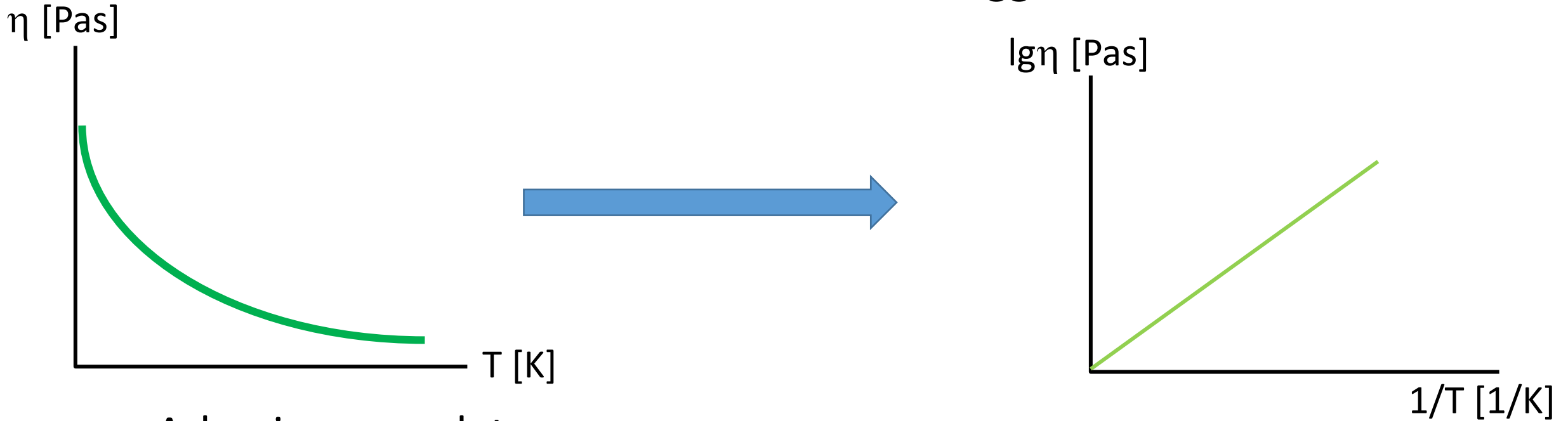
Viszkozitás hőmérséklet függése



A hőmérséklet emelkedésének hatására csökken a viszkozitásuk.

A. Newtoni folyadékok

Viszkozitás hőmérséklet függése



Arhenius-egyenlet

$$\eta = k e^{\frac{E_a}{RT}}$$

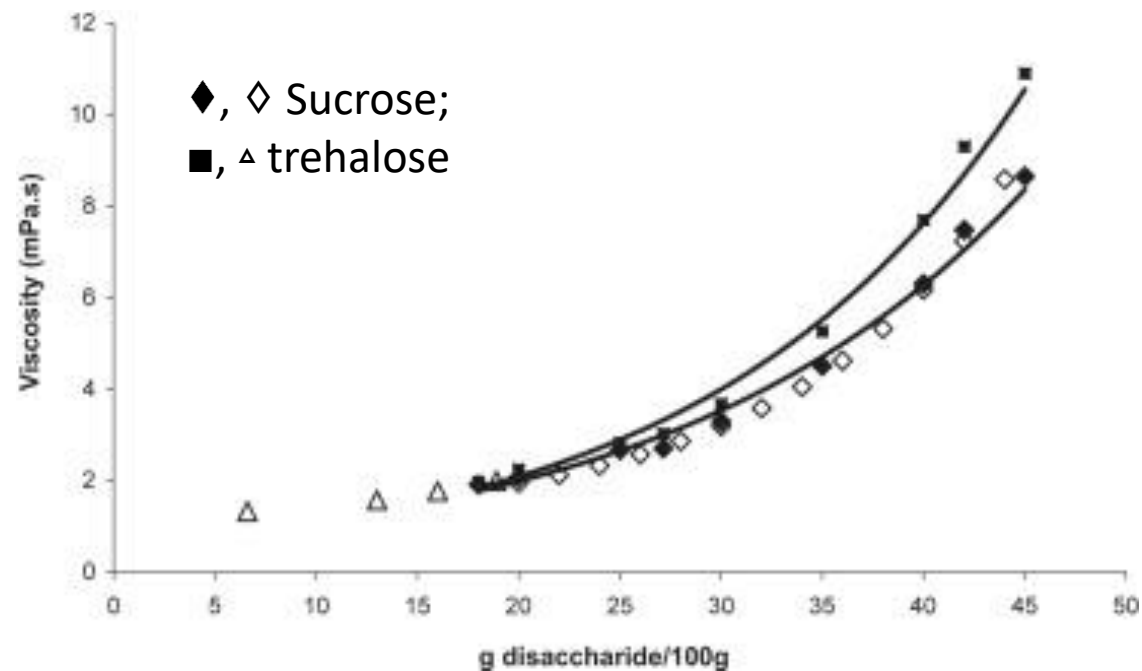
$$\lg \eta = \lg k + \frac{E_a}{2,303R} \frac{1}{T}$$

- η : viszkozitás [Pa·s]
- k : konstans [Pa·s]

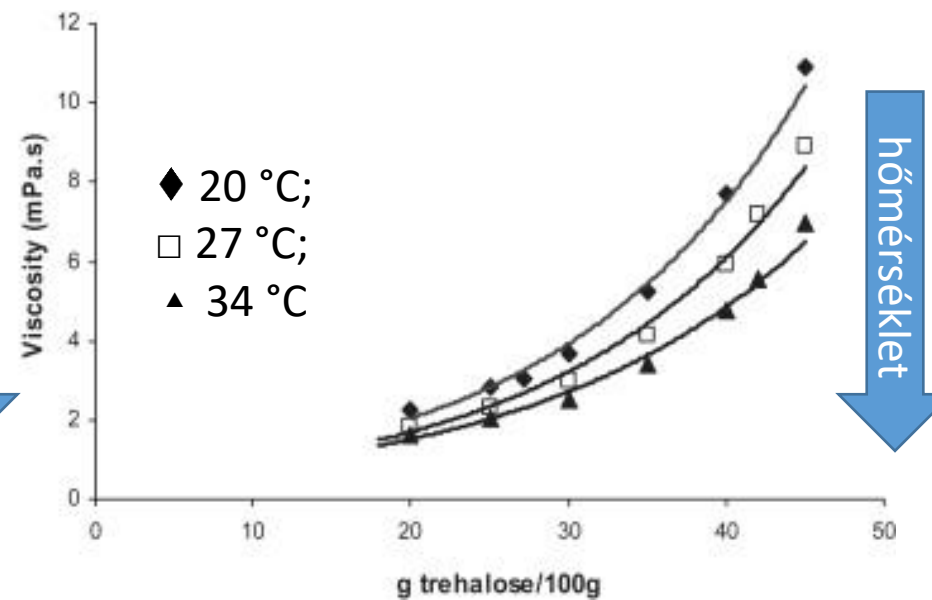
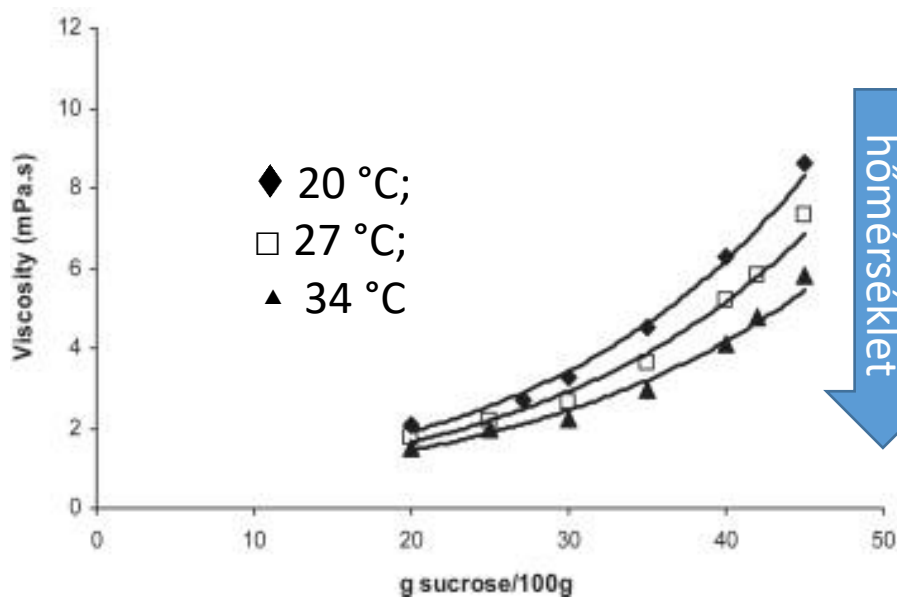
- R : egyetemes gázállandó [J/(mol·K)]

- E_a : viszkózus folyás aktiválási energiája [J/mol]
- T : hőmérséklet [K]

Összetétel
hatása:



Hőmérséklet
és összetétel
hatása



B. Nem-newtoni folyadékok

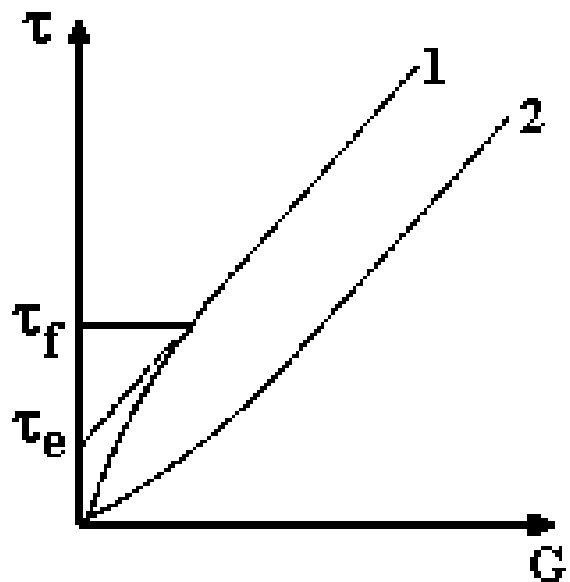
- I. szerkezeti vagy pszeudoviszkózus
- II. ideálisan plasztikus (Bingham-testek)
- III. reális plasztikus tulajdonságú testek

I. Szerkezeti vagy pszeudoviszkózus

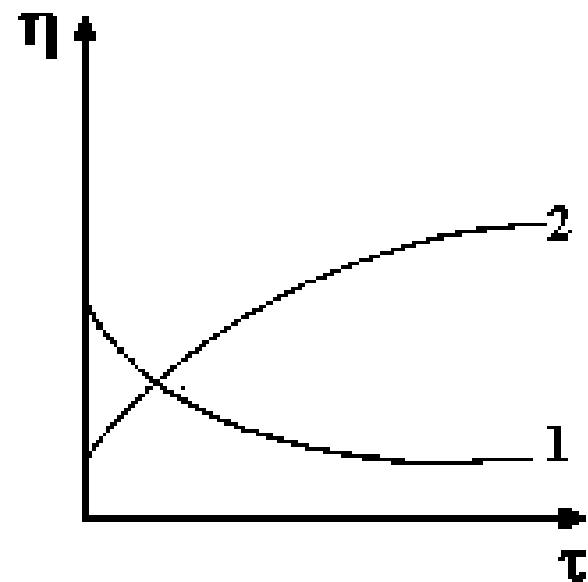
1= pseudoplasztikus, pl. nyákok

2 = pseudodilatans, pl. keményítőpép

folyásgörbe



viszkozitásgörbe



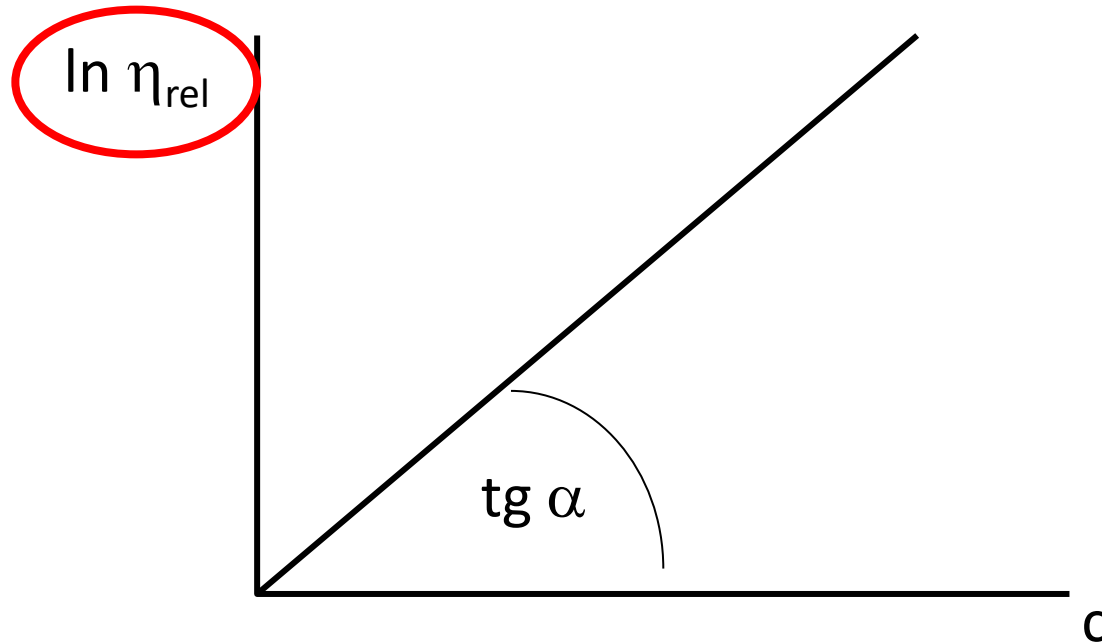
Keményítő + víz



B. Nem- newtoni folyadékok

I. Szerkezeti vagy pseudoviszkózus

Viszkozitás- koncentráció görbe



$$\eta = \eta_o \cdot e^{K \cdot c}$$

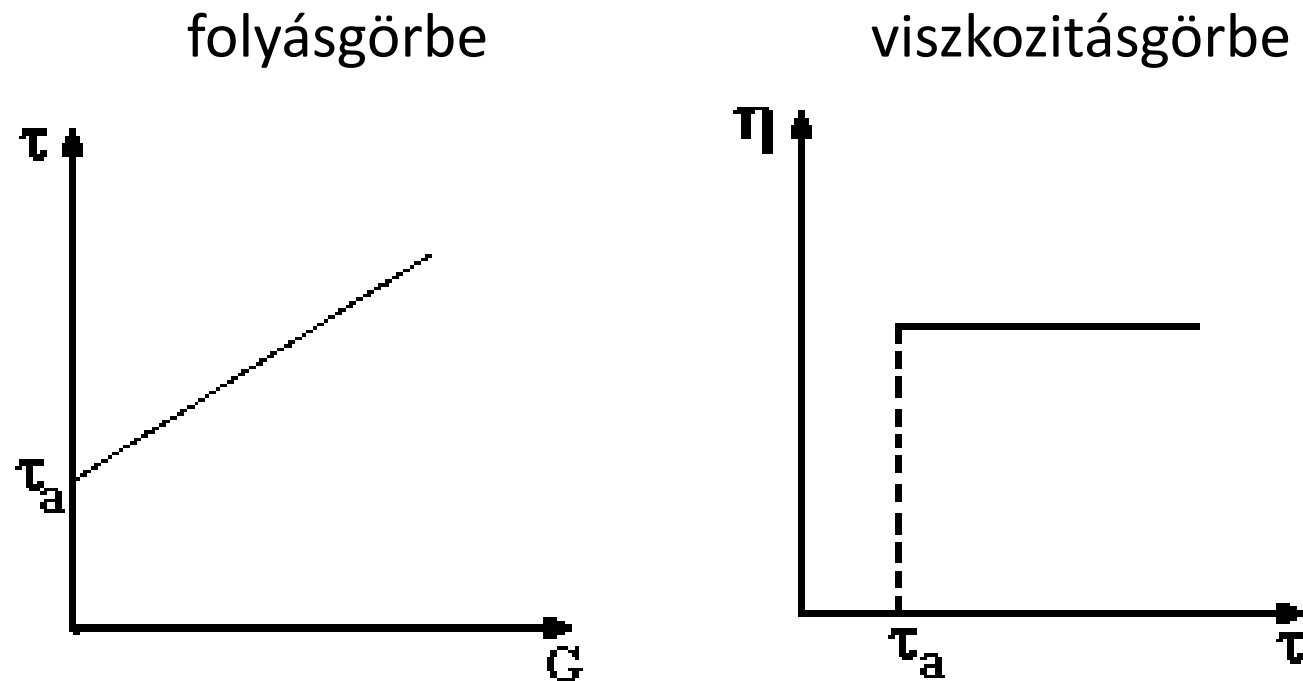
$$\ln \eta_{\text{rel}} = K \cdot c$$

$$\lg \eta = \frac{K \cdot c}{2.303} + \lg \eta_o$$

**$K = \text{tg } \alpha$, anyagi
minőségtől függő állandó**

B. Nem newtoni folyadékok

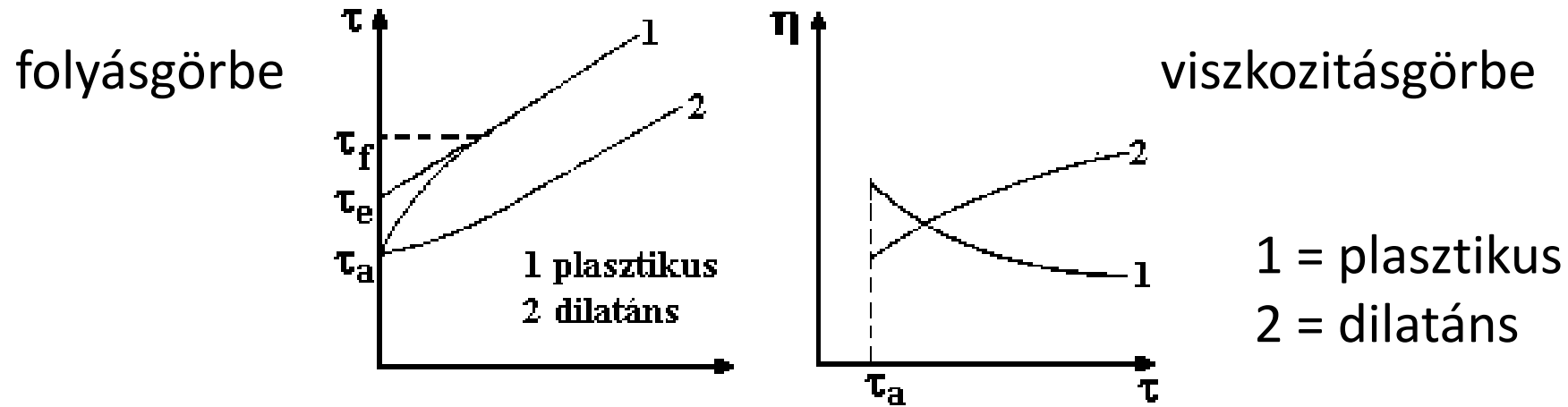
II. Ideálisan plastikus testek (Bingham-testek)



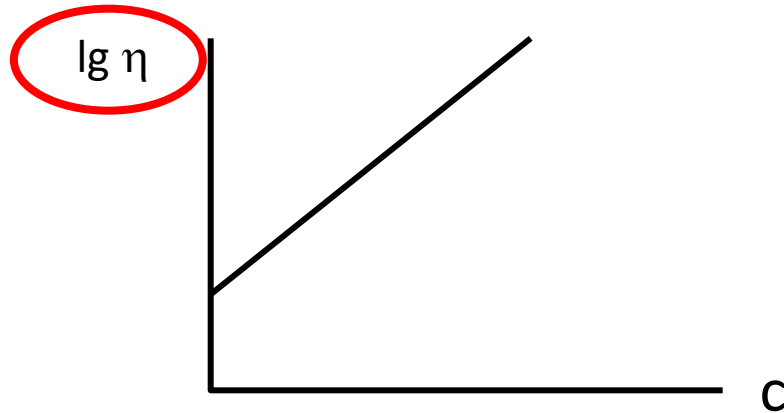
Küszöb feszültség (folyási határ) alatt nem folyik, de felette viszkózus folyadékként viselkedik.
Pl.: fogkrém, majonéz, ketchup

B. Nem- newtoni folyadékok

III. Reálisan plastikus testek



Plasztikus testek:
Paszták,
kenőcsök,
kúpalapanyagok



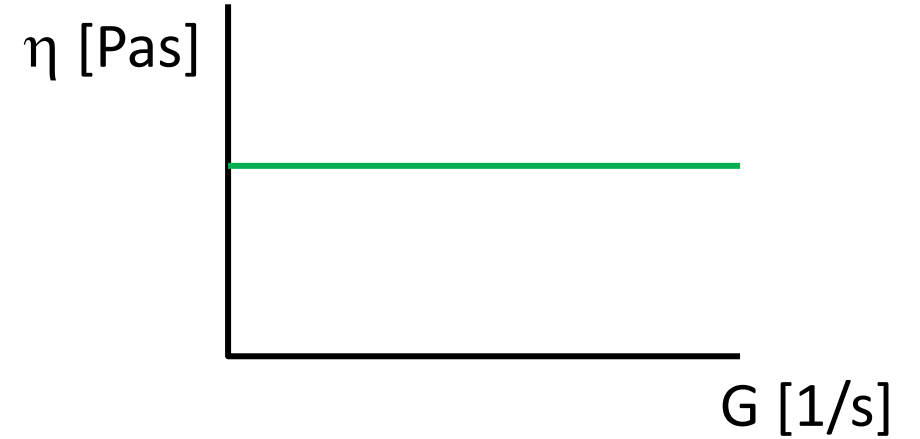
Viszkozitás- koncentráció görbe



Viszkozitásgörbék összefoglalása

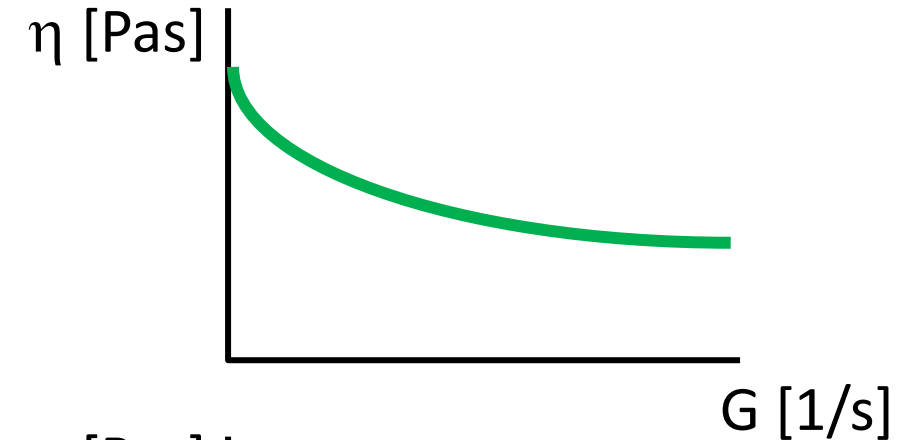
Newtoni folyadékok

Olajok kis molekulás oldatok



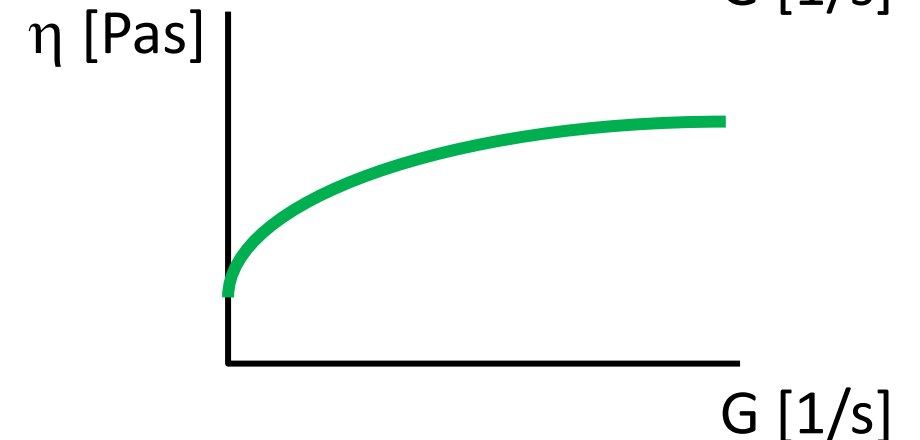
Pszudoplasztikus és plastikus folyadékok

Nyákok, krémek, festékek



Pszudodilatáns és dilatáns folyadékok

Keményítőpép és paszták



Viszkozitás időfüggése - Tixotrópia

A tixotrópiát mutató reológiai rendszerek viszkozitása nyíróerő hatására csökken, a nyíróerő megszűnésével – nyugalmi fázisban - szerkezeti visszarendeződést, regenerációt követően a viszkozitás ismét eléri eredeti, kiindulási értékét.

Ha a reológiai rendszer viszkozitása nyíróerő hatására magasabb viszkozitás értékeket ér el, mint a kiindulási viszkozitás, akkor reopex rendszerekről beszélünk.

A reopexia oka:

pl. párolgás, makromolekulák utópolimerizációja

Tixotrópia vizsgálata

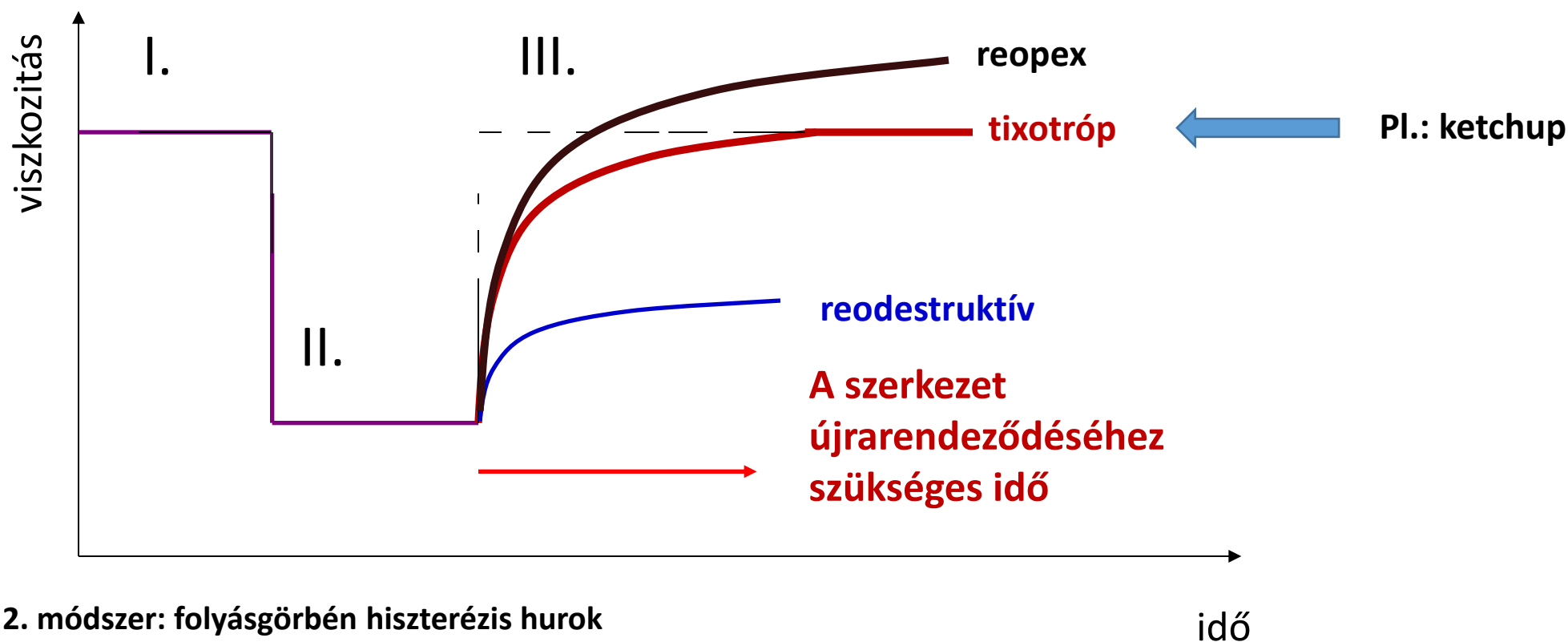
I. alacsony sebességgradiens ($0,1 \text{ s}^{-1}$)

II. magas sebességgradiens (100 s^{-1})

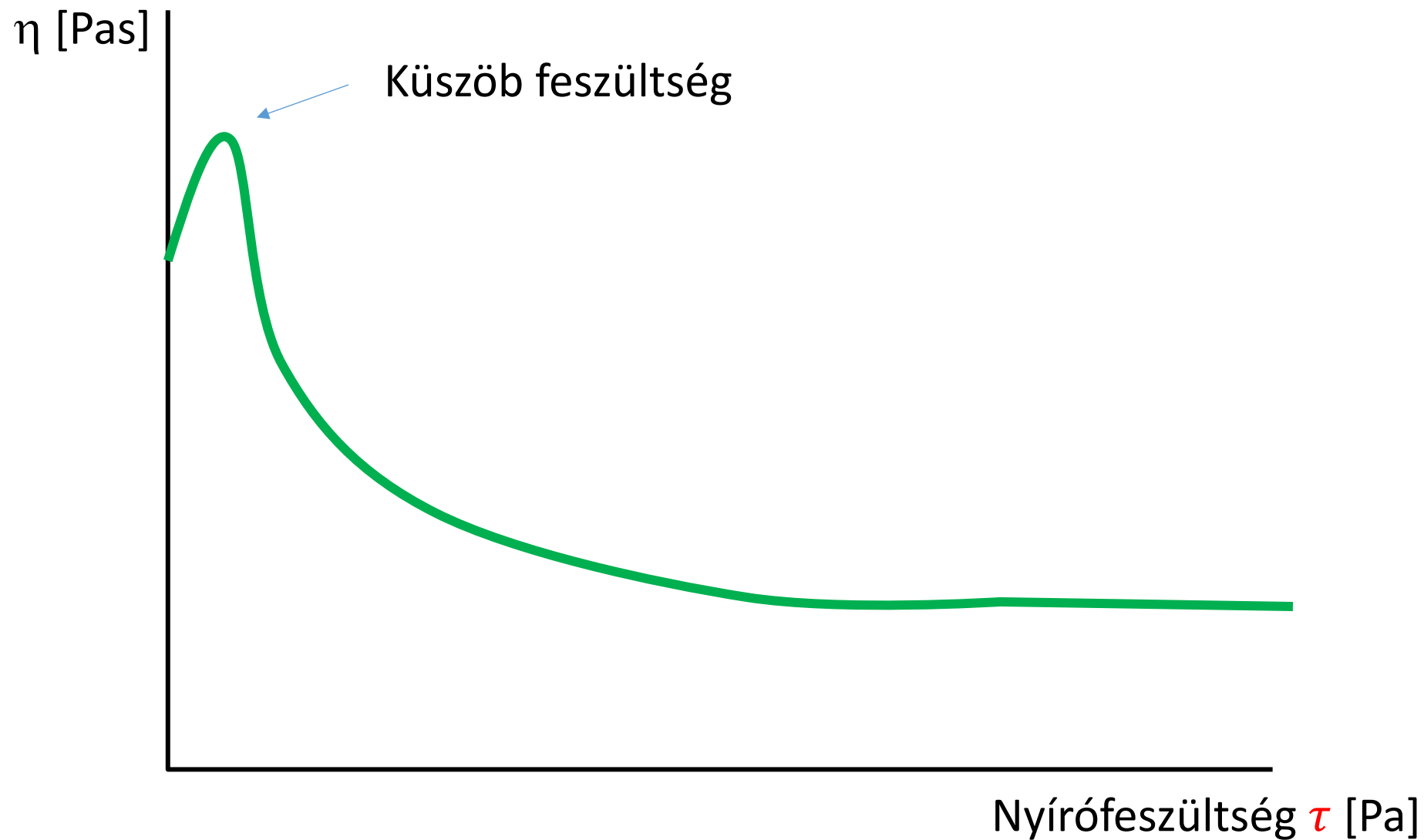
III. alacsony sebességgradiens ($0,1 \text{ s}^{-1}$)

szuszpenziók,

emulziók

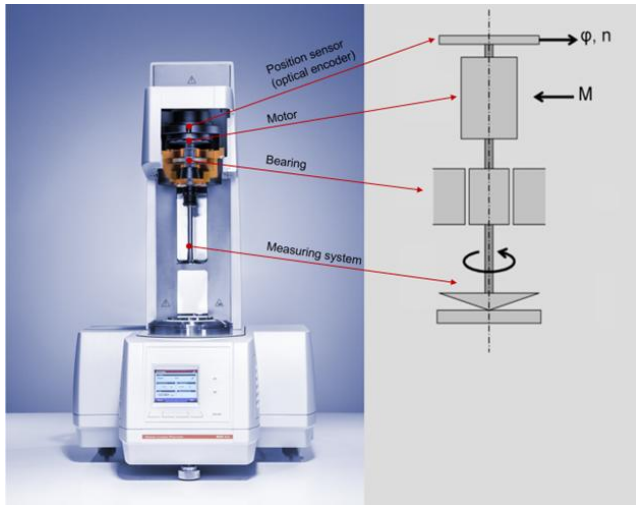
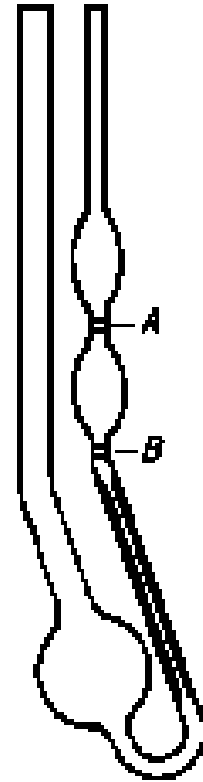
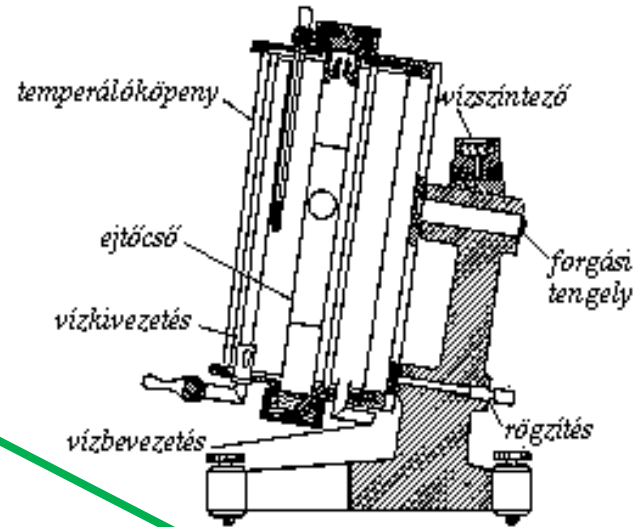


Folyáshatár meghatározása



Viszkozitás mérő módszerek

- Kapilláris viszkoziméter
- Ejtőgolyós viszkoziméter
- Vibrációs viszkométer
- Rotációs viszkoziméter
- Reométer

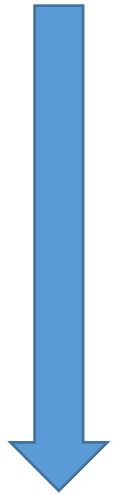


Kapilláris viszkoziméter

Kapillárison történő folyadékáramlás leírása: Hagen-Poiseuille egyenlet

$$I_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l}$$

I_v : térfogatáram r : kapilláris sugara
 ΔV : térfogat Δp : hajtóerő
 Δt : átfolyási idő η : viszkozitás
 l : kapilláris hossza



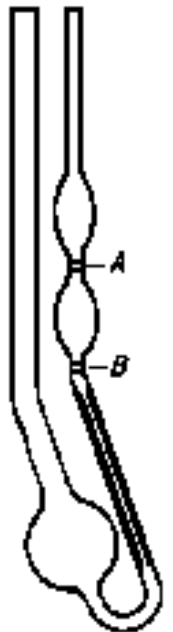
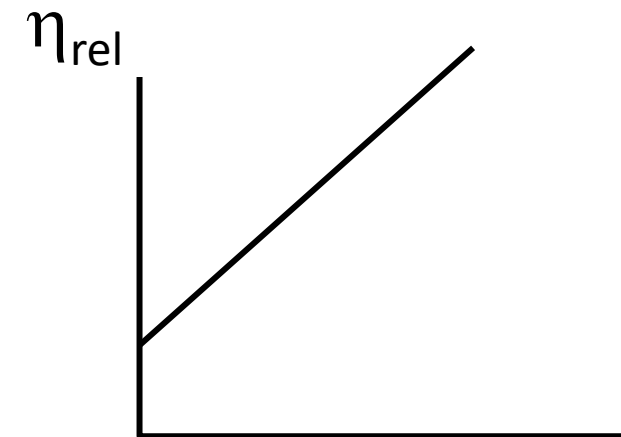
Fix térfogat
Ugyanaz a készülék
Híg oldatok + oldószer
Átfolyási idők mérése

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{\rho_2 \cdot t_2} = \eta_{rel}$$

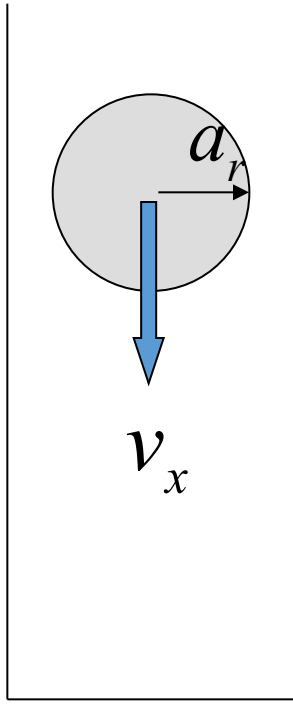
ρ_1 a vizsgált minta sűrűsége [g/cm³]
 ρ_2 oldószer sűrűsége [g/cm³]
 t_1 minta kifolyási ideje [sec]
 t_2 oldószer kifolyási ideje [sec]

Gyakorlat

Koncentráció mérés viszkozitás
alapján Cannon-Fenske
viszkométerrel



Höppler viszkoziméter (ejtőgolyós)



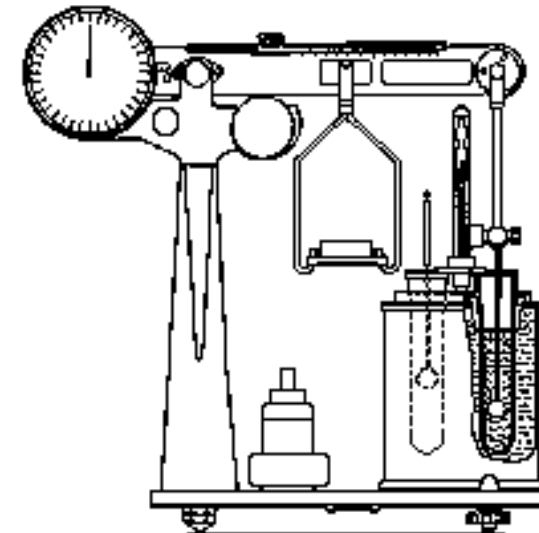
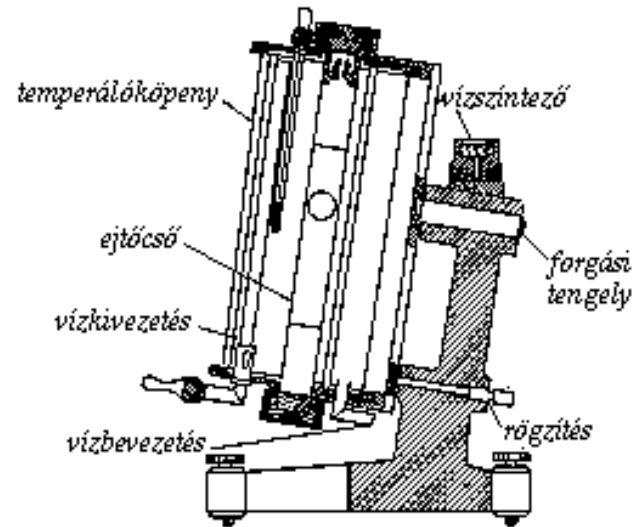
$$\eta = k \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot t$$

k : konstans (gyártó)

ρ_1 : folyadék sűrűsége

ρ_2 : ejtőgolyó sűrűsége

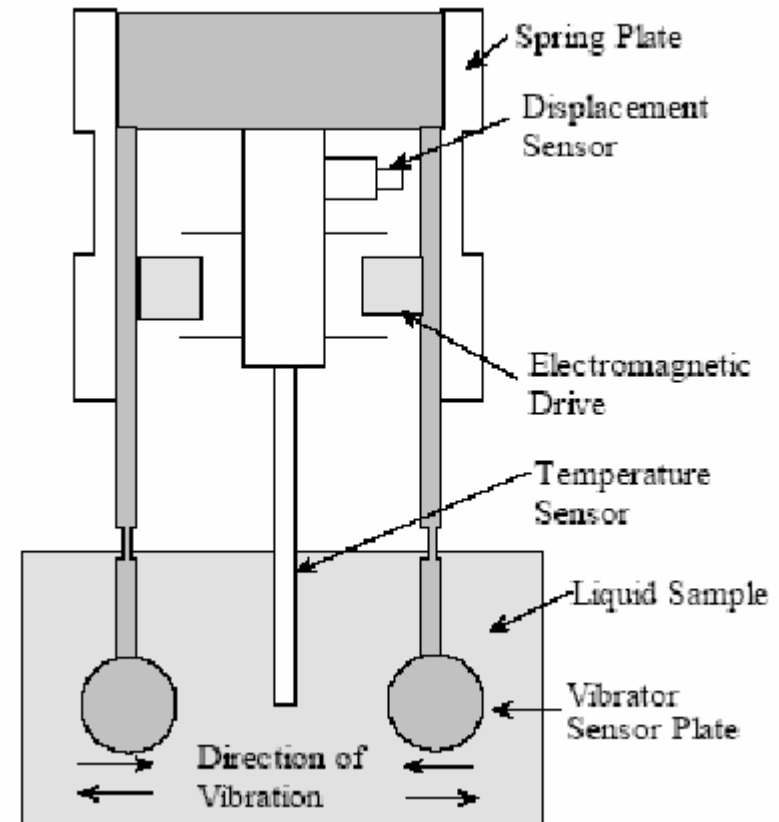
t : idő



$$f_{\eta} = 6\pi \eta a_r v_x$$

Robosztus mérés, de nagy mennyiségű minta szükséges.

Vibrációs viszkoziméter

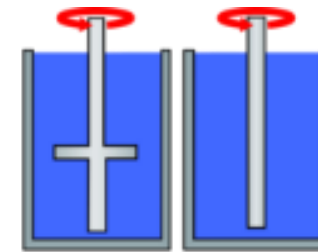


Rotációs viszkoziméter

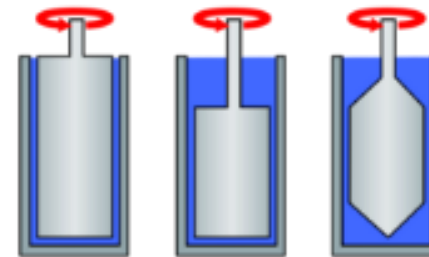
Abszolút viszkozitás mérése
Folyásgörbe és viszkozitásgörbe felvétele



Koncentrikus henger a hengerben.
A forgási sebesség állítható.



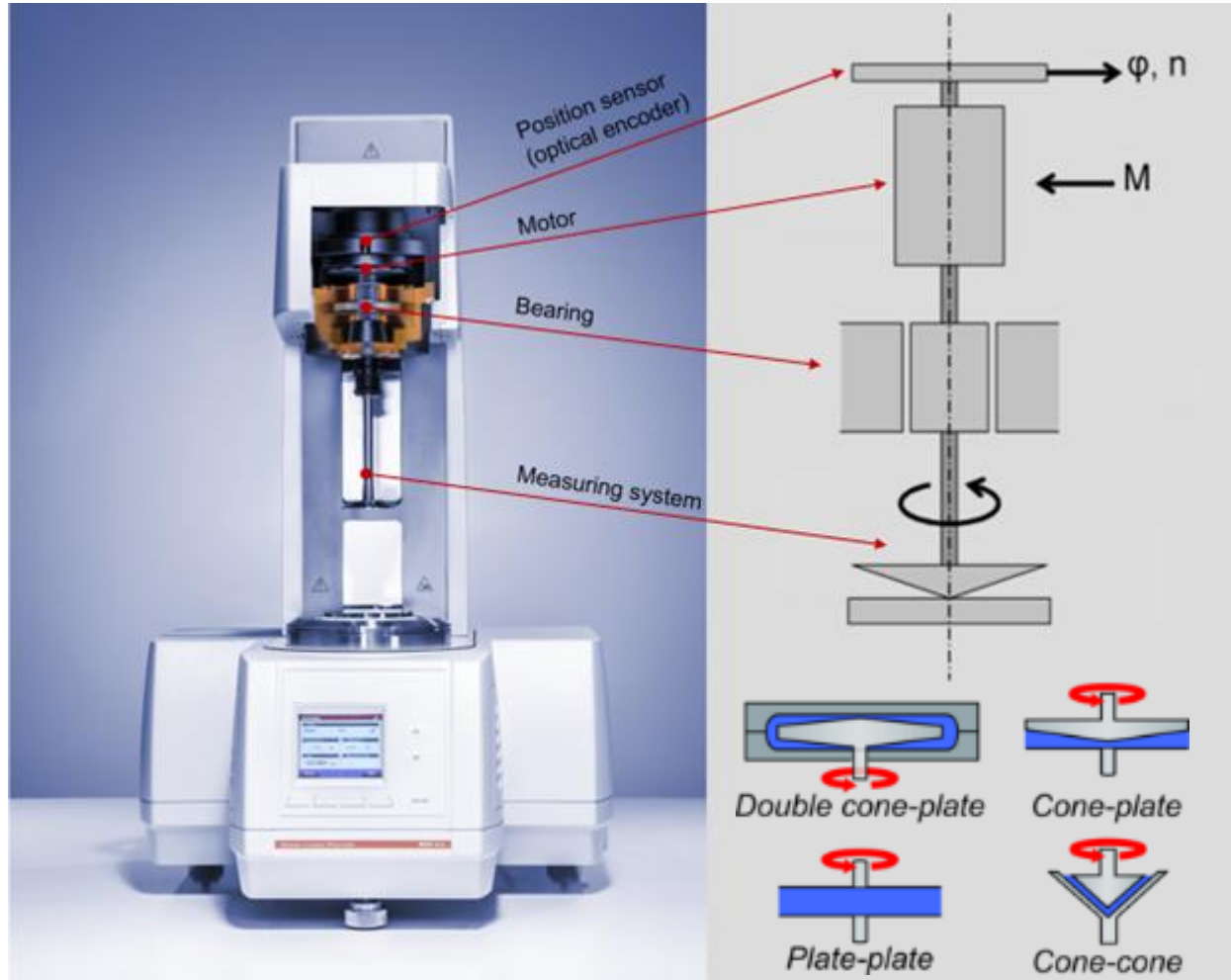
Spindle type



Concentric cylinder

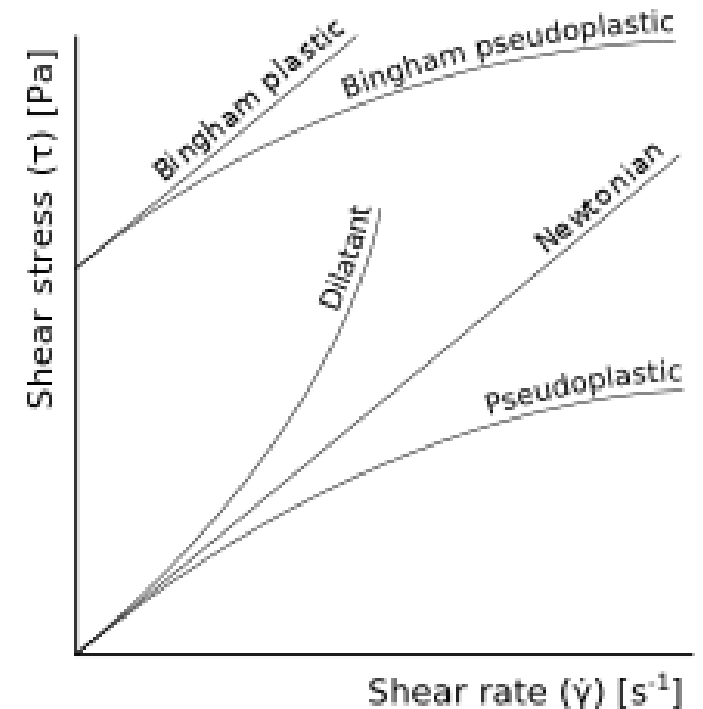
REOMÉTER

Viszkoelasztikus tulajdonságok mérése –oszcillációs mérések



Mérési módok:

- Állandó nyírási sebesség
- Amplitúdó változtatás
- Frekvencia változtatás



Viszkoelaszticitás

Egy folyadék amely egyszerre rendelkezik viszkózus (folyadék szerű) és elasztikus (szilárd-rugalmas) tulajdonságokkal.

Az, hogy éppen melyik tulajdonság dominál függ a nyírás sebességétől vagy frekvenciájától valamint a hőmérséklettől.

Ízületi folyadék 

Vizsgálata oszcillációs mérésekkel!

Viszkoelaszticitás

A reológiában a **tárolási modulus (G')** és a **veszteségi modulus (G'')** közötti kapcsolat leírja, hogyan viselkedik egy anyag feszültség hatására – azaz inkább szilárd (elasztikus) vagy folyékony (viszkózus) jellegű-e.

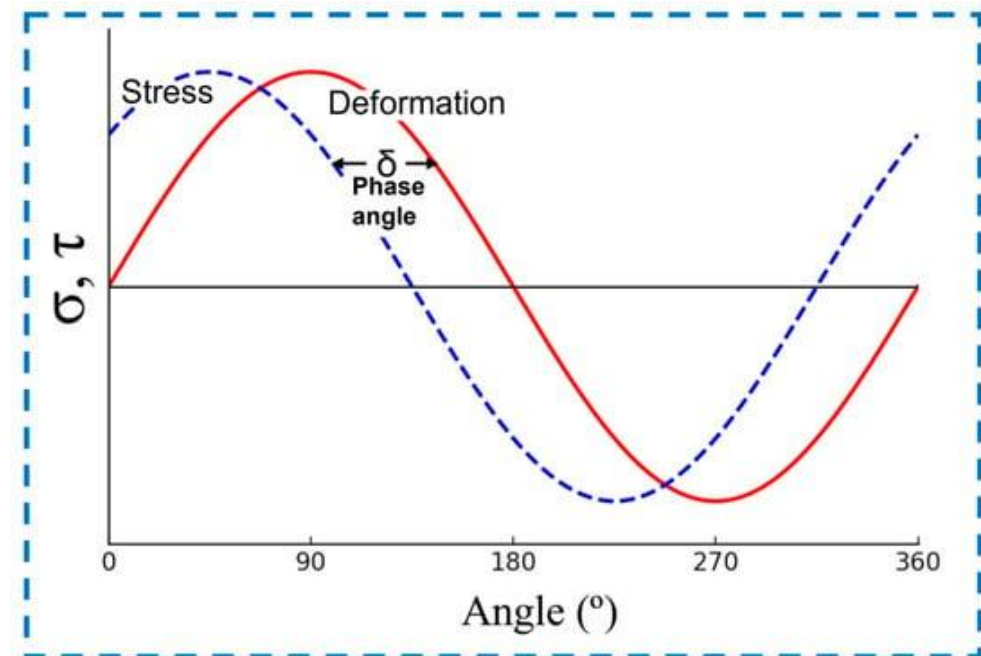
Tárolási modulus (G'): Az anyag rugalmas (**elasztikus**) részét képviseli. A deformáció során tárolt energiát méri, amely a feszültség megszűnése után visszanyerhető. („szilárdszerű” viselkedés).

Veszteségi modulus (G''): A **viszkózus** részt képviseli. A deformáció során hőként disszipálódó energiát méri. („folyadékszerű” viselkedés).

Fáziseltolódási szög (δ): oszcilláló feszültség és válasz közötti eltérés.

$$\text{Veszteségi faktor: } \tan(\delta) = \frac{G''}{G'}$$

Feszültség és az anyag válasza (deformáció) között időbeli eltérés van

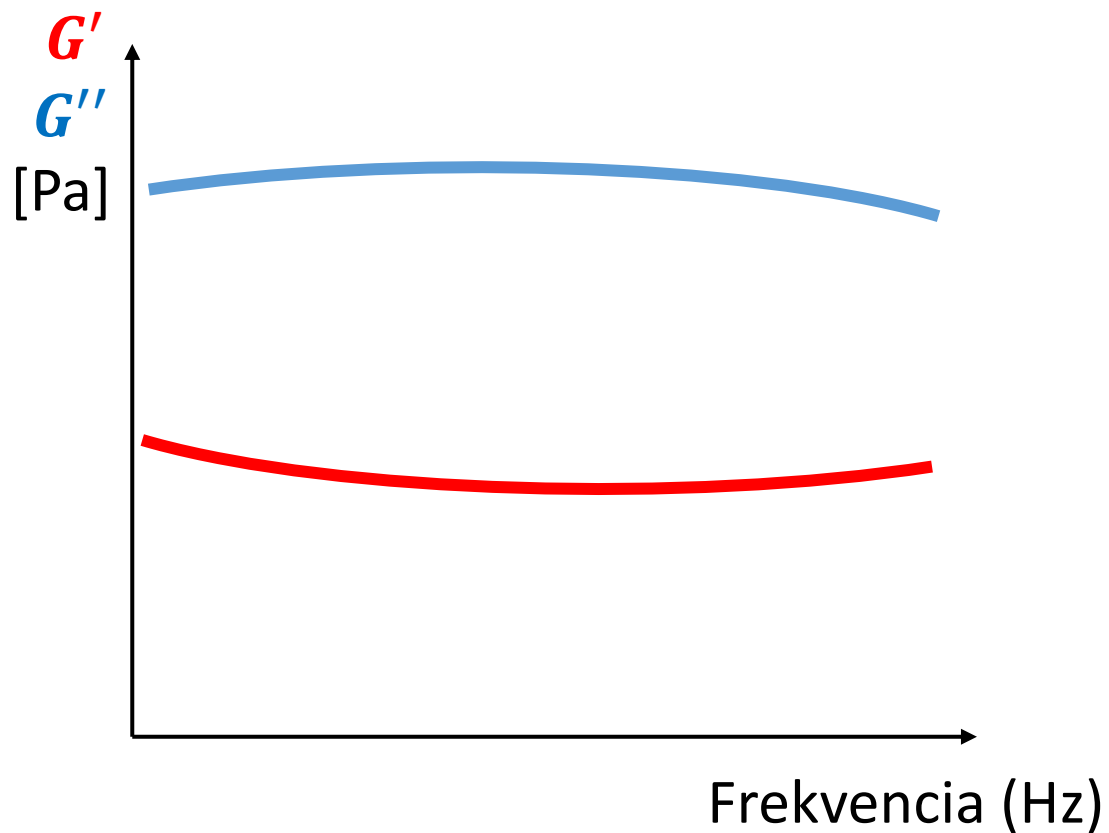


Ha $\tan(\delta) < 1 \rightarrow$ szilárd jelleg

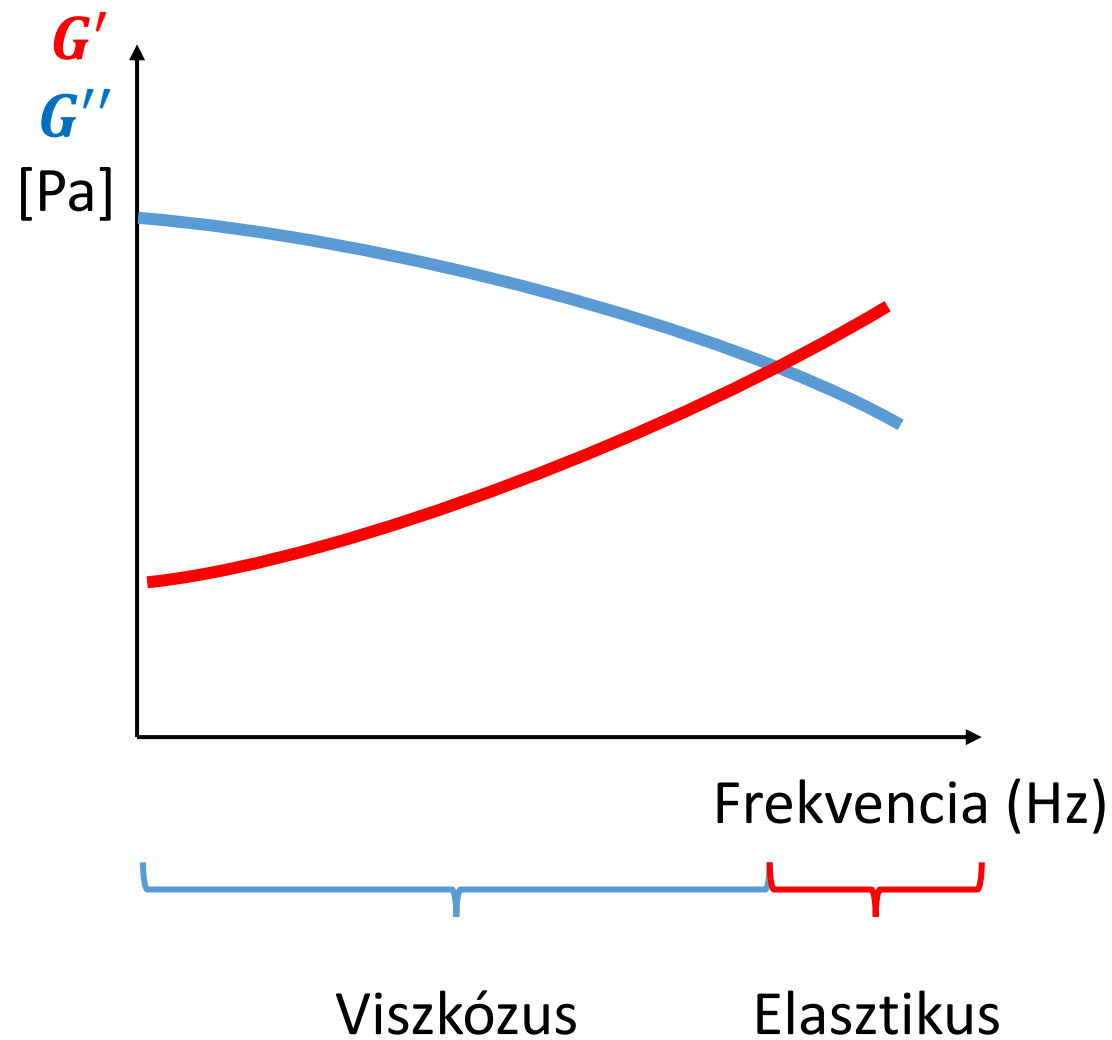
Ha $\tan(\delta) > 1 \rightarrow$ folyadék jelleg

Viszkoelaszticitás

Nem viszkoelasztikus minta



Viszkoelasztikus minta



Reológiai mérések jelentősége

Alkalmazás:

- Stabilitás (diszperz rész ülepedése, fázis szétválás, stb.)
- Retenciós idő alkalmazás helyén
- Konzisztencia
- Kenhetőség
- Hőmérsékletfüggés
- Időfüggés
- Viskozelasztikus jelleg

Ipar:

- Folyadékok szállítása (szivattyúzás, keverés)

Folyadékok áramlása

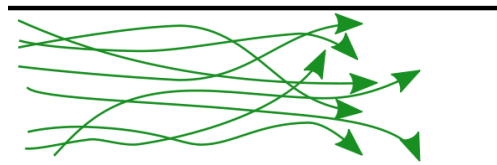
Fluid rendszerekkel kapcsolatos alapfogalmak

Áramlás

- Lamináris
- Turbulens
- Összenyomható
- Összenyomhatatlan
- „Folyékony”
- Viskózus
- Állandó
- Pulzáló



lamináris áramlás

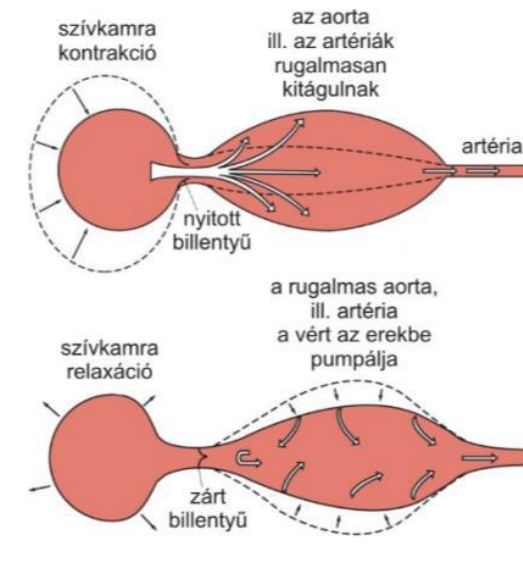
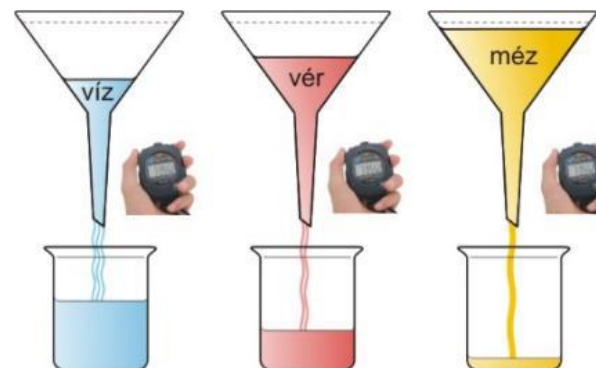


turbulens áramlás

Lexiq.hu

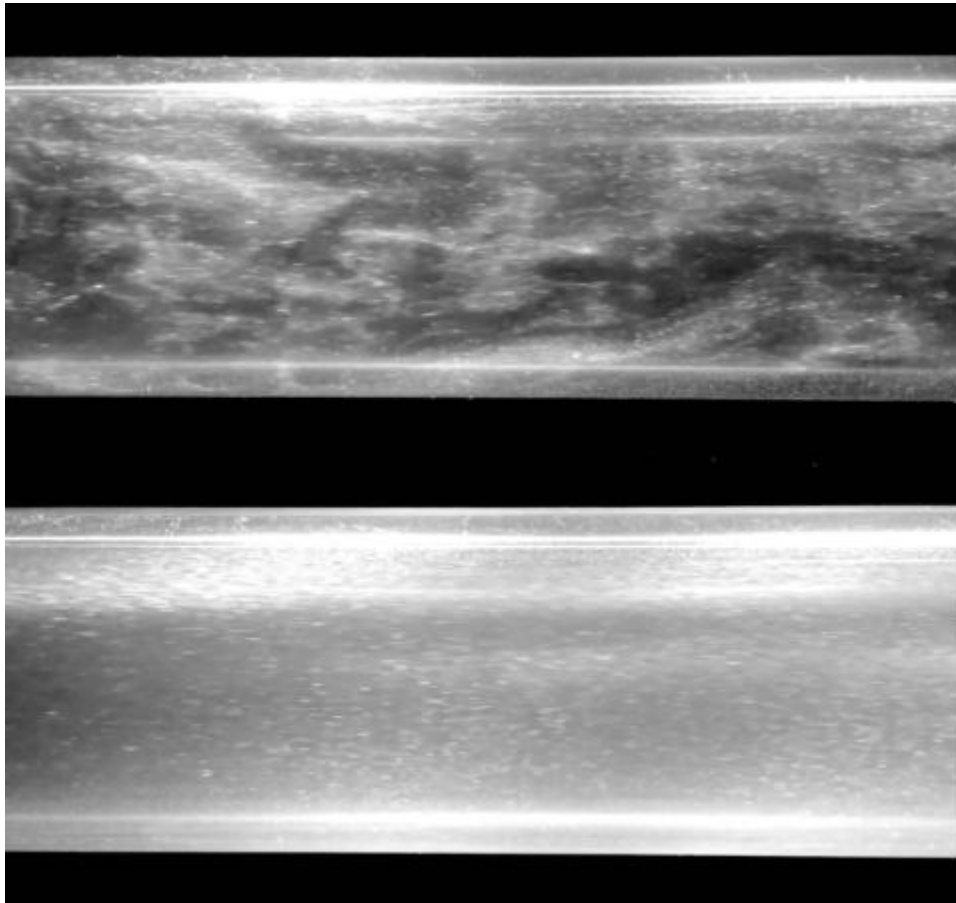
$$v_1 A_1 \neq v_2 A_2$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$$



A kontinuitás elve, lamináris vagy turbulens áramlás

Turbulens



Lamináris

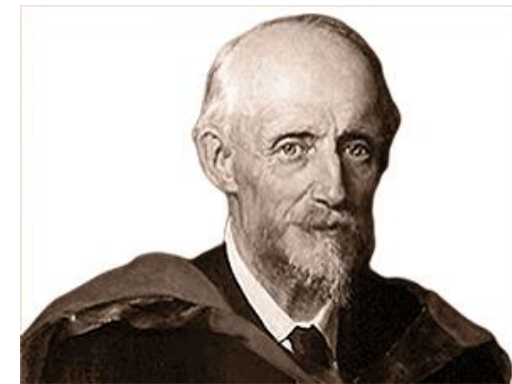
$$R_e = \frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}} \left. \vphantom{\frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}}} \right\} \text{erők}$$



$$R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}$$

Lamináris
 $R_e < 2100$

v : áramlási sebesség
 ρ : sűrűség
 d : cső átmérő
 η : viszkozitás



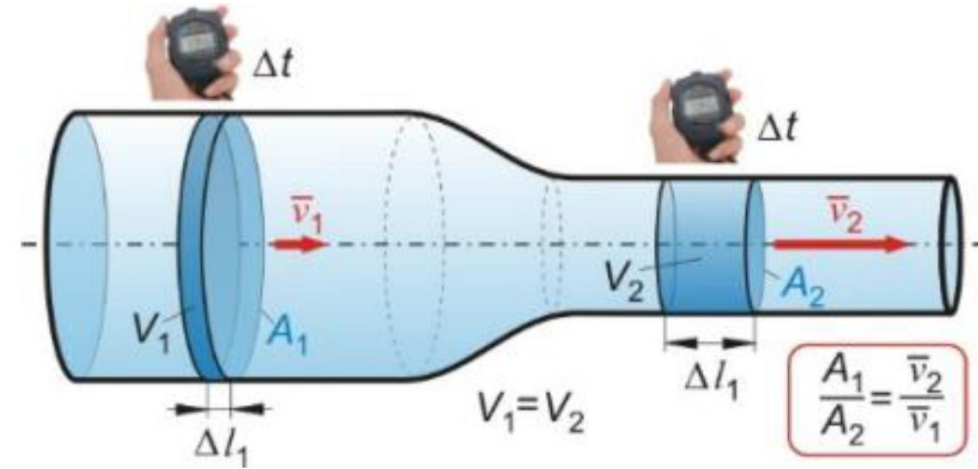
Osborne Reynolds
1842-1912

<https://cosmosmagazine.com/science/physics/researchers-revolutionise-pipeline-design-eliminating-turbulence/>

Az ideális áramlás: Bernoulli-törvény

- **Stacionárius áramlás** esetén az áramlás paraméterei időben állandóak
- Kontinuitás elve: Stacionárius áramlás esetén **térfogatáram állandó:**

$$I_V = A_1 \cdot \bar{v}_1 = A_2 \cdot \bar{v}_2 = konst.$$



- Ideális, súrlódásmentes áramlás esetén **nincs energiavesztés**
 - Befektetett energia CSAK a kinetikus energiát növeli
- Az ideális folyadék a mozgathatához szükséges energiát **teljes mértékben megőrzi**

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_{x,1}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_{x,2}^2 + \rho g h_2$$

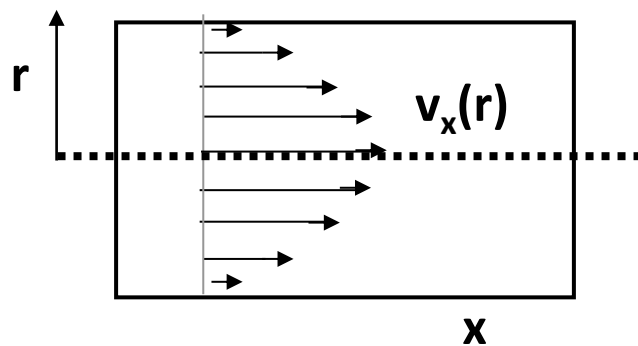
p =stacionárius nyomás

$\rho g h$ =hidrosztatikai nyomás

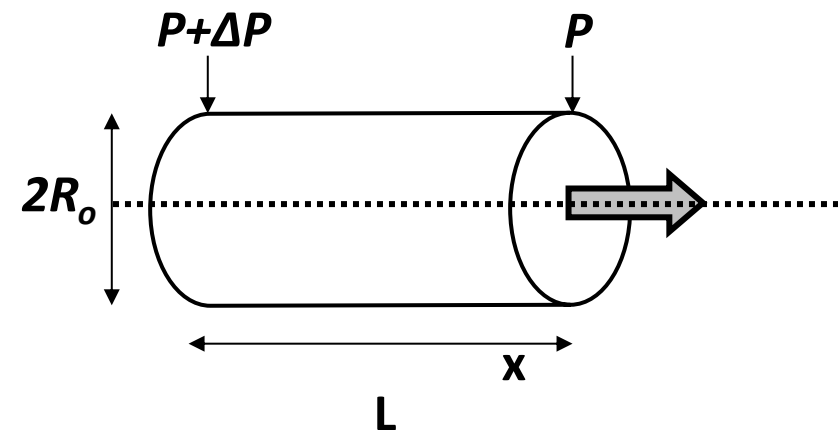
$\frac{1}{2} \rho v^2$ =kinetikus energia

Newtoni folyadék lamináris áramlása

Parabolikus sebesség profil



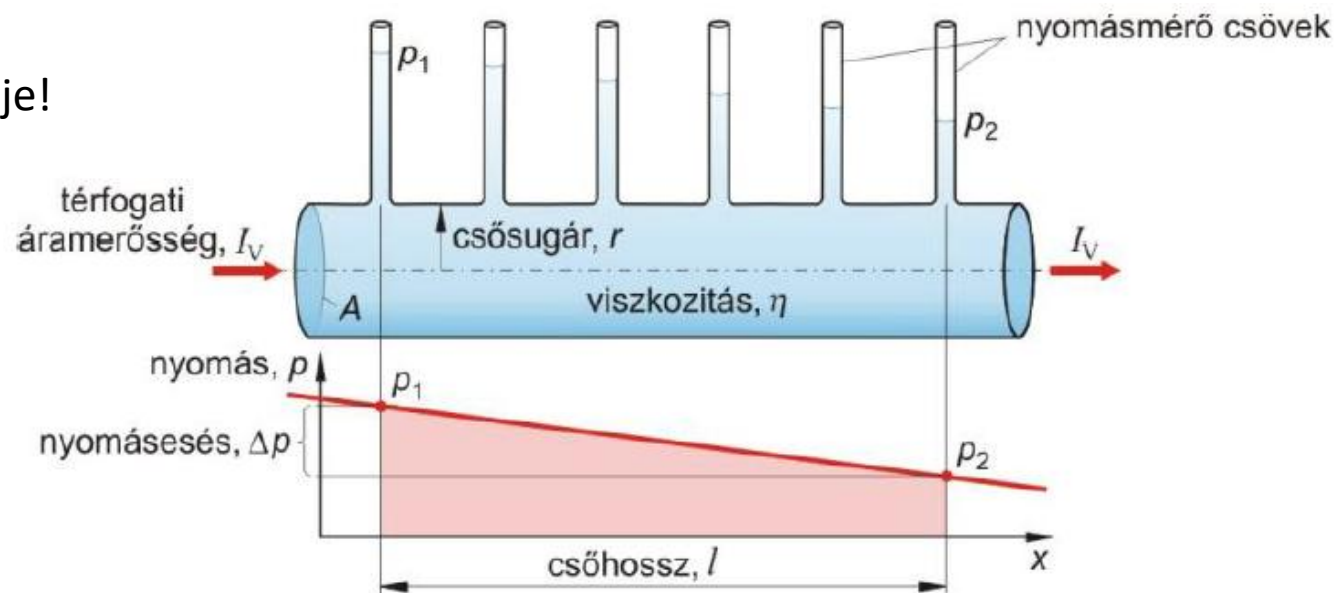
$$v(r) = \frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)$$



Newtoni folyadék, stacionárius és lamináris áramlása esetén a térfogatáramot a **Hagen-Poiseuille törvény** írja le.

Az áramlás hajtóereje!

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}$$



Reális áramlás - csősurdlódás

Reális áramlás esetén az energia veszteség miatt a Bernoulli-törvény is megváltozik

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

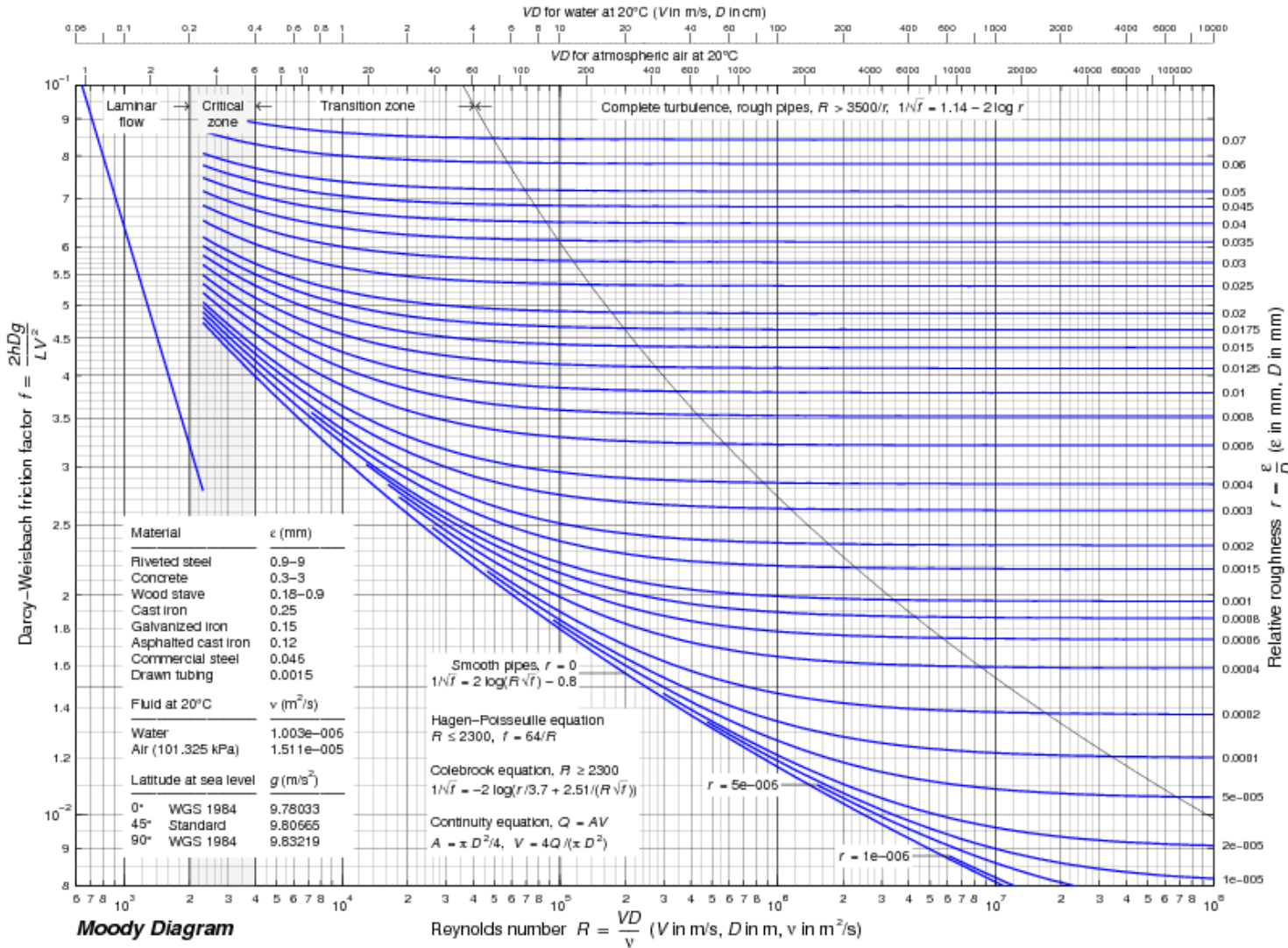
$$\Delta p = f_D \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{D} \quad f_D = 64/Re$$

Darcy-Weisbach súrlódási tényező

Lamináris áramlás esetén

Milyen paraméterek és
hogyan határozzák meg az
áramlás típusát?

A csőszűrlődés, Reynolds-szám és relatív érdesség kapcsolata



$$R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}$$

$$\Delta p = f_D \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{D}$$

Átmeneti tartományt
tervezésnél lehetőleg elkerüljük

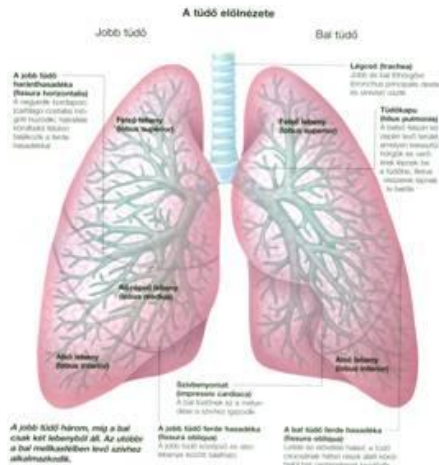
Lamináris eset (Hagen-Poiseuille)

$$f_D = 64/Re$$

Turbulens eset (Corebrook)

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f_D}} \right)$$

Levegő áramlása a tüdőben



23 generáció a légcsövek átmérőjében

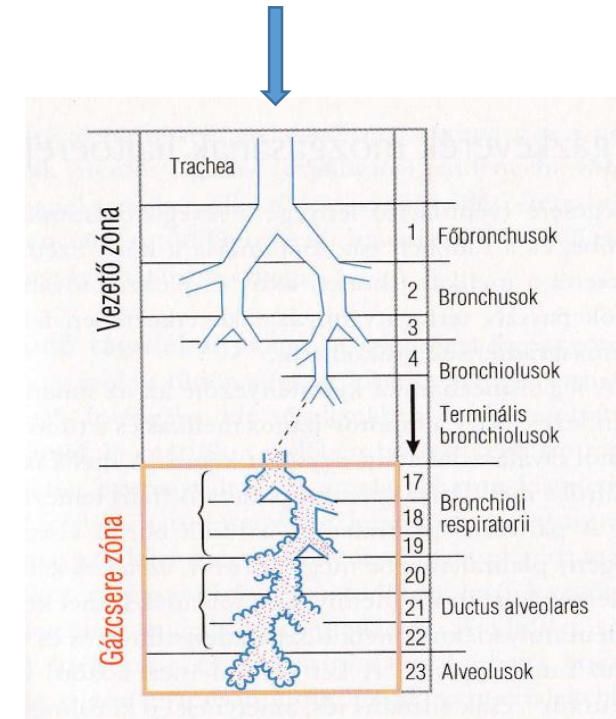
Normál légzés
12/perc

Heves légzés
30/perc

átmérő (cm)	v (cm/s)	Re	v (cm/s)	Re
1,8	197	2325	790	9324
0,56	250	921	1002	3684
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127

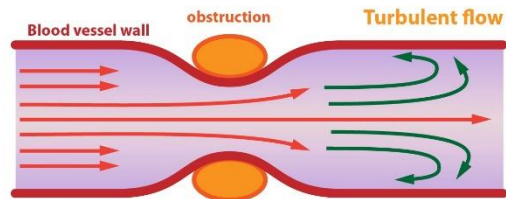
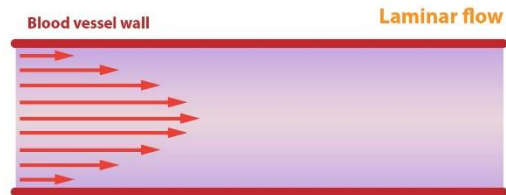
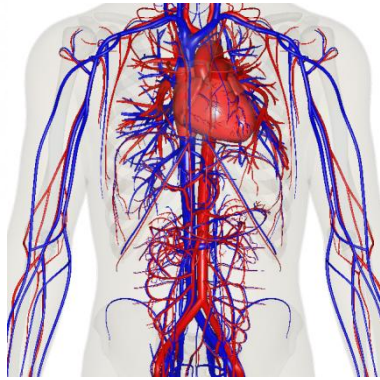
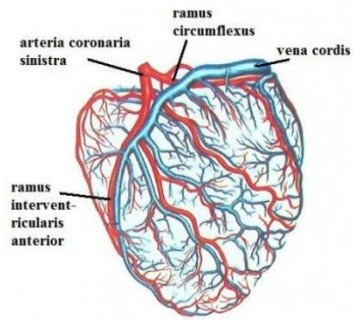
$$\frac{dV_{lev}}{dt} \cong 5L/min \quad \longrightarrow \quad O_2 = 2 \text{ kg/nap}$$

$$I_V = \frac{dV}{dt}$$



Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légcsövekben.

Vér áramlása a szív- és érrendszerben



erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	4500	20	750
↓ aorta	1,3	105	3400	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	10^{-6}

A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris**. Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

molnar.kristof1@semmelweis.hu

Függvény analízis röviden

A függvény első deriváltja a meredekség.

Eredeti függvény:

