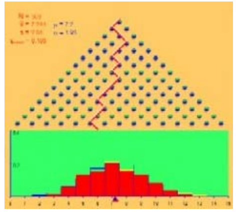
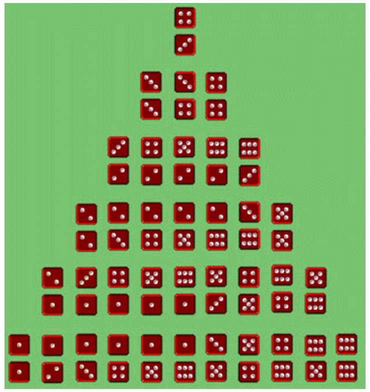
Wichtigste Verteilungen der Biostatistik





László Smeller
2012/3

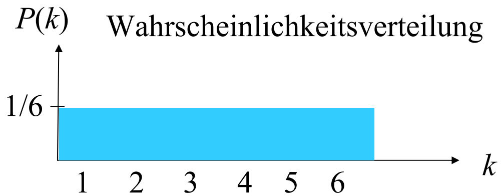
Zur Erinnerung

Klassifizierung der Verteilungen

Diskrete	Kontinuierliche
Diskrete Gleichverteilung	Kontinuierliche Gleichverteilung
Binomialverteilung	Normalverteilung
Poisson Verteilung	Chi-Quadrat Verteilung
...	*t*-Verteilung (Student-Verteilung)
diskrete Zufallsgröße	kontinuierliche Zufallsgröße
zB: Anzahl der Kranken, Augenzahl der Würfel	zB: Blutdruck, Körperhöhe,...

Diskrete Gleichverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung



Lageparameter der diskreten Verteilungen: Erwartungswert (μ)

$$\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

Streuung der diskreten Verteilung

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2, \ldots$ und mit Erwartungswert μ. Dann nennt man die Zahl

$$Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

als Varianz von *X*, ihre Wurzel als (theoretische) Streuung (σ).

$$s \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma$$

Standardabweichung → theoretische Streuung

Erwartungswert und Streuung der Gleichverteilung

$x_i=1,2,\ldots,n$ $\qquad$ $P(x_i)=1/n$

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_iP(x_i)=\sum_{i=1}^{n}i\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{n+1}{2}}$$

$$\sigma^2=\frac{n^2-1}{12}$$

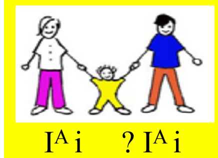
zB: Würfel: $n=6$ $\qquad$ $\mu=3{,}5$ $\qquad$ $\sigma^2=35/12=2{,}92..$ $\qquad$ $\sigma=1{,}71..$

Erwartungswert ≠ Wert was mit größten Wahrscheinlichkeit vorkommt!

Binomialverteilung (Einführung mit Beispiel)

Blutgruppenexperiment:

Genotyp:	$I^A I^A$,	$I^A i$,	iI^A,	ii
Wahrscheinlichkeit:	1/4	1/4	1/4	1/4
Phenotyp	A			0
Wahrscheinlichkeit:	3/4			1/4



Nennen wir als „Erfolg" (E) wenn das Kind eine Glutgruppe von 0 hat und „Miserfolg" ($\bar{E}$) wenn seine Blutgruppe nicht 0 ist.

$p(E)=1/4$ $\quad$ $p(\bar{E})=3/4$ $\qquad$ $p(E)+p(\bar{E})=1$

Die Familie hat ***n*** Kindern. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ***k*** Kindern die Blutgruppe 0 haben?

Für $n=1$ $\qquad$ $p(0)=0{,}75=p(\bar{E})$ $\qquad$ $p(1)=0{,}25=p(E)$

Für $n=2$ $\qquad$ $p(0)=0{,}75\cdot 0{,}75=0.5625$

$p(1)=0{,}75\cdot 0{,}25+0{,}25\cdot 0{,}75=0.375$

$p(2)=0{,}25\cdot 0{,}25=0.0625$

$(0{,}5625+0{,}375+0{,}0625=1)$

Für $n=3$ $\qquad$ [Hausaufgabe!!!]

Allgemein: $\qquad$ Sei: $p(E)=p$ $\quad$ $p(\bar{E})=q$

$$p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

k Erfolge in ***n*** Experimente

Wie viele Reihenfolgen gibt es?

Binomialverteilung: Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment wird ***n*-mal wiederholt**. (n Stufen)

Das Experiment hat zwei mögliche Ausfälle: ***E*** (Erfolg)

$\bar{E}$ (Mißerfolg)

Die Wahrscheinlichkeit für E ist: $P(E)=p$, für $P(\bar{E})=q$, $\quad p+q=1$.

- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des betrachteten Ereignisses ***E*** ist in jedem Einzelversuch **gleich**.
- In jedem Einzelversuch ist das Ergebnis **unabhängig** von den Ergebnissen aller anderen Versuche.

zB: 7-maliges Werfen eines Würfels: {2, 3, 2, 6, 1, 4, 4}

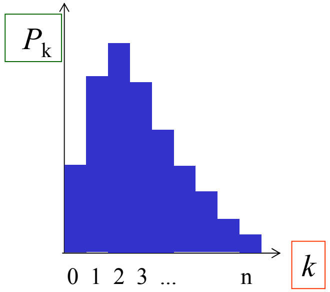
E entspricht Augenzahl 6. $\qquad$ $p=1/6$ $\quad$ $n=7$

zB: 60% der Patienten haben Grippe. Heute kommen 4 Patienten.

$p=0{,}6$ $\quad$ $n=4$

Binomialverteilung: Definition

Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeit daß wir bei einem n-mal wiederholten Experiment *(n-stufige Bernoulli Experient)* genau k-mal Erfolg haben, als Funktion von k.



$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Binomialverteilung und das Bernoulli-Experiment

Kombinatorik:

Sollen k Objekte in beliebiger Reihenfolge aus n Objekten ausgewählt werden, ergeben sich:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, wobei $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

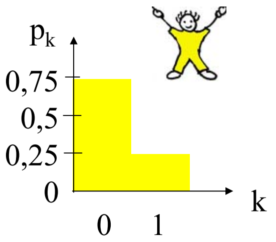
(Kombination aus n Elementen zur Klasse k ohne Widerholung)

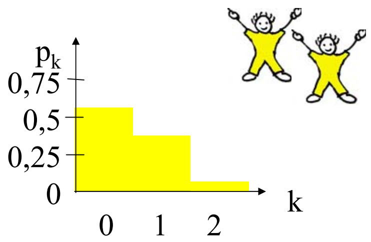
zB: n=3 k=2

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\ \cdot\ 1} = 3$$

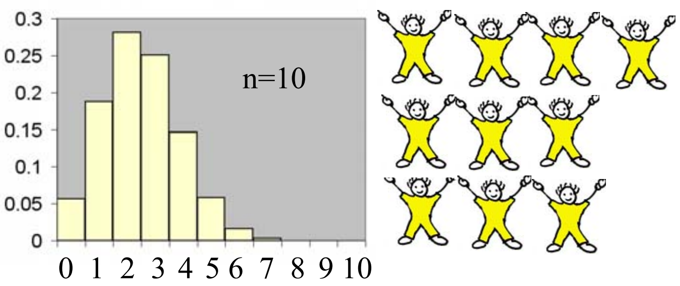
E Ē Ē   Ē E Ē   Ē Ē E

Binomialverteilung der Blutgruppenexperiment

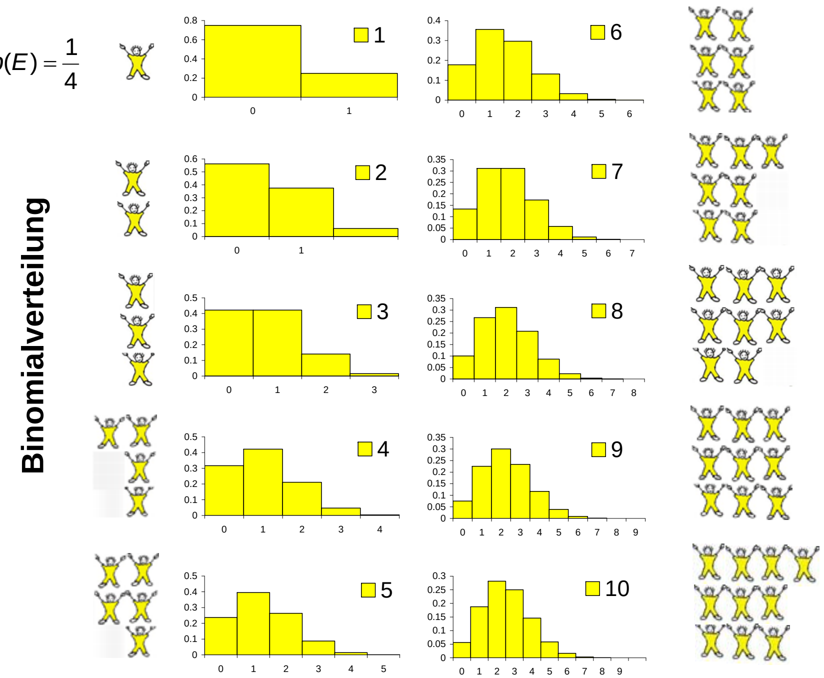




p=1/4
q=3/4

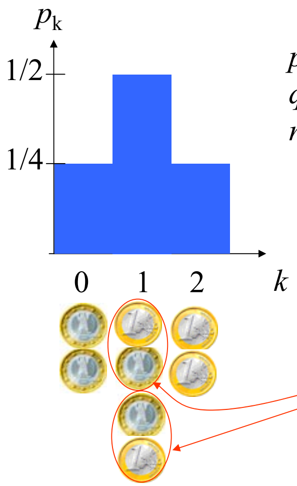


$$p(E) = \frac{1}{4}$$



Binomialverteilung: Beispiel des Münzenexperimentes

Zwei Münzenexperimente: E (Erfolg) entspricht Zahl



p=1/2
q=1/2
n=2

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Für p=1/2 vereinfacht sich: $p_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$p_0 = 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$p_1 = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

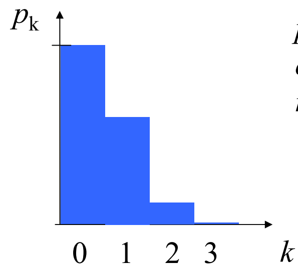
$$p_2 = 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$p_0+p_1+p_2=1$$

Binomialverteilung: Beispiel des Würfelexperimentes

Drei Würfelexperimente
E (Erfolg) entspricht Augenzahl 6.

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$



p=1/6
q=5/6
n=3

E Ē Ē   Ē E Ē   Ē Ē E

Ē E E   E Ē E   E E Ē

$$p_0 = 1\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = \tfrac{125}{216}$$

$$p_1 = 3\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = \tfrac{75}{216} = \tfrac{25}{72}$$

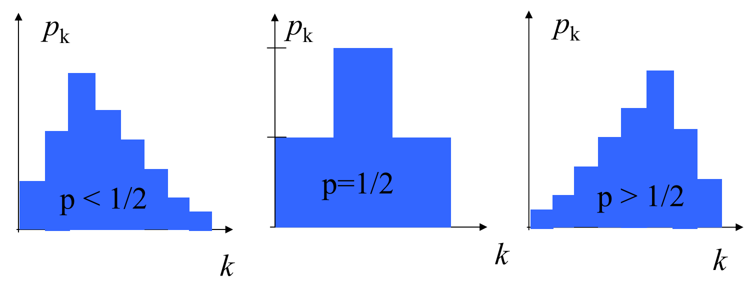
$$p_2 = 3\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{5}{6}\right)^1 = \tfrac{15}{216} = \tfrac{5}{72}$$

$$p_3 = 1\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\left(\tfrac{5}{6}\right)^0 = \tfrac{1}{216}$$

$$p_0+p_1+p_2+p_3=1$$

Binomialverteilung

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$



rechtsschief   symmetrisch   linksschief

Poisson Verteilung: Definition

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \xrightarrow[\left.\begin{array}{l} n\to\infty \\ p\to 0\end{array}\right\}\ np=\lambda]{} p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Es ist eine gute Näherung für großes n und kleines p
Schätzung der seltener Ereignisse

zB: Die Wahrscheinlichkeit dass den Postmann ein Hund in beißt, sei p=0,12/Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er während 25 Jahren k=0,1,2…-mal gebissen wird?

Die Wahrscheinlichkeit dass ein zerfallsfähiger ^{131}I Atom in einer Sekunde zerfällt beträgt 10^{-6}. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das in eine Sekunde k = 0,1,2,… aus der 10^7 Atome zerfallen?

Poisson Verteilung: Beispiel

Die Wahrscheinlichkeit dass den Postmann ein Hund in einem Jahr beißt, sei p=0,12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er während 25 Jahren k=0,1,2…25-mal gebissen wird?

$$\lambda = np = 0{,}12 \cdot 25 = 3$$

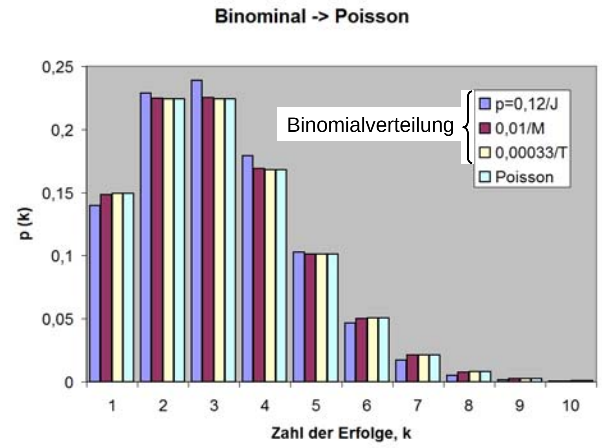
Die Wahrscheinlichkeit dass den Postmann ein Hund in einem Monat beißt, sei p=0,01. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er während 25 Jahren (25x12=300 Monaten) k=0,1,2…300-mal gebissen wird?

$$\lambda = np = 0{,}01 \cdot 250 = 3$$

Die Wahrscheinlichkeit dass den Postmann ein Hund in einem Tag beißt, sei p=0,00033. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er während 25 Jahren (25x365=9125 Tage) k=0,1,2…9125-mal gebissen wird?

Poisson Verteilung: Beispiel

Die Wahrscheinlichkeit dass den Postmann ein Hund beißt, ist p=0,12/Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er während 25 Jahren k=0,1,2…-mal gebissen wird?



$$\lambda = np = 3$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

$$p_0 = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} = 0.0498$$

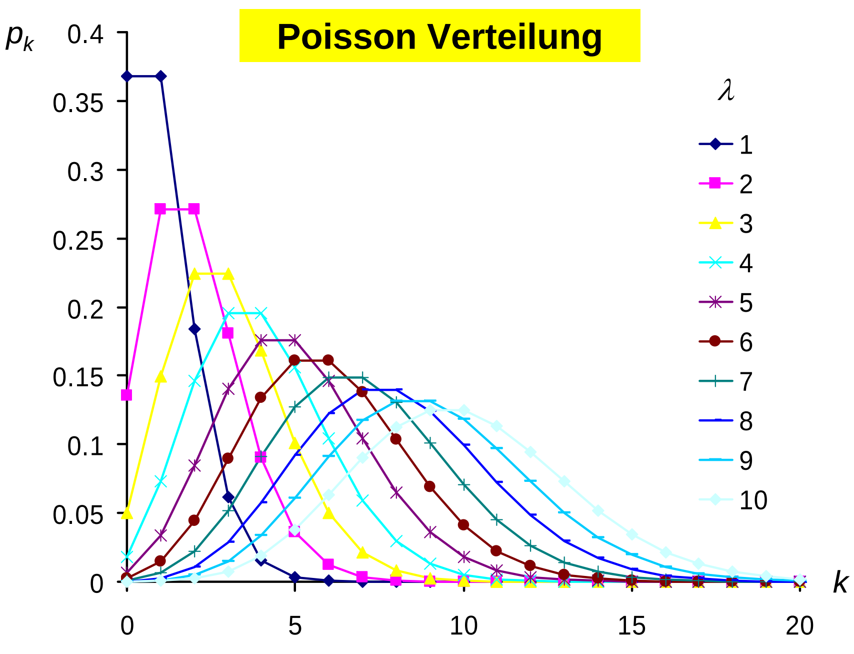
$$p_1 = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 3e^{-3} = 0.1494$$

$$p_2 = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = \frac{9}{2} e^{-3} = 0.2240$$

$$p_3 = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = \frac{9}{2} e^{-3} = 0{,}2240$$

$$p_4 = \frac{3^4}{4!} e^{-3} = \frac{27}{8} e^{-3} = 0.1680$$

…



Erwartungswert und Streuung der Binomialverteilung

Erwartungswert: $\mu = np$

Tritt ein bestimmtes Ergebnis mit Wahrscheinlichkeit p ein, so haben wir bei n-maliger Widerholung etwa np solcher Ereignisse zu „erwarten".

Theoretische Streuung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

zB: Drei Würfelexperimente: n=3 p=1/6 μ=1/2

$$\sigma = \frac{\sqrt{15}}{6} \approx 0.645$$

Erwartungswert und Streuung der Poisson-Verteilung

Erwartungswert: $\mu=\lambda$

Varianz: $Var(X)=\lambda$

Theoretische Streuung: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Eine Verteilung, wo der Erwartungswert und die Streuung nicht unabhängig sind!

Geometrische Verteilung

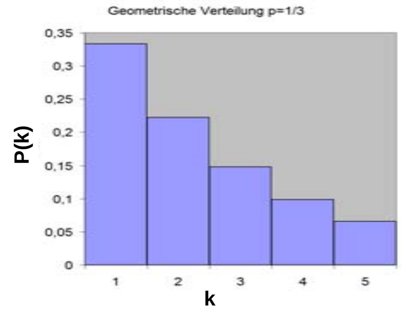
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein Erfolg in einer Serie von Bernoulli-Experimenten bei den ***k***-ten Widerholung zum ersten Mal ein.

Beispiel 1.: Ein Ehepaar wollte einen Knabe haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wir der erste Knabe der *k*-te kind sein?

Beispiel 2.: Bei einer *in-vitro* Fertilisation sei die Wahrscheinlichkeit des Erfolges (d.h. Schwangerschaft) p=1/3 .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit brauchen wir 1, 2 … Versuche bis ein Schwangerschaft eintritt?

$$P(k) = q^{k-1}p$$

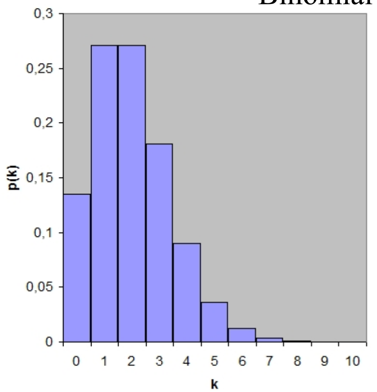
Geometrische Folge

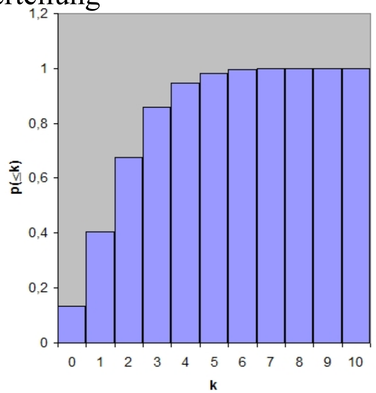


Kummulative Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung   Kummulative Wahrscheinlichkeitsverteilung

Binomialverteilung





In einem Dorf leben 2000 Einwohnern. Eine Krankheit kommt mit einer Wahrsceinlichkeit von 0,001 vor. (Unabhangigkeit!)
k = Anzahl der Einwohnern mit dieser Krankheit.