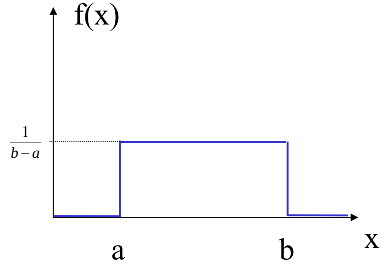
Kontinuierliche Verteilungen

Kontinuierliche Gleichverteilung

Verteilungskurve (Verteilungsdichtefunktion):

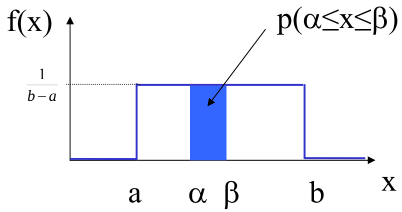
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



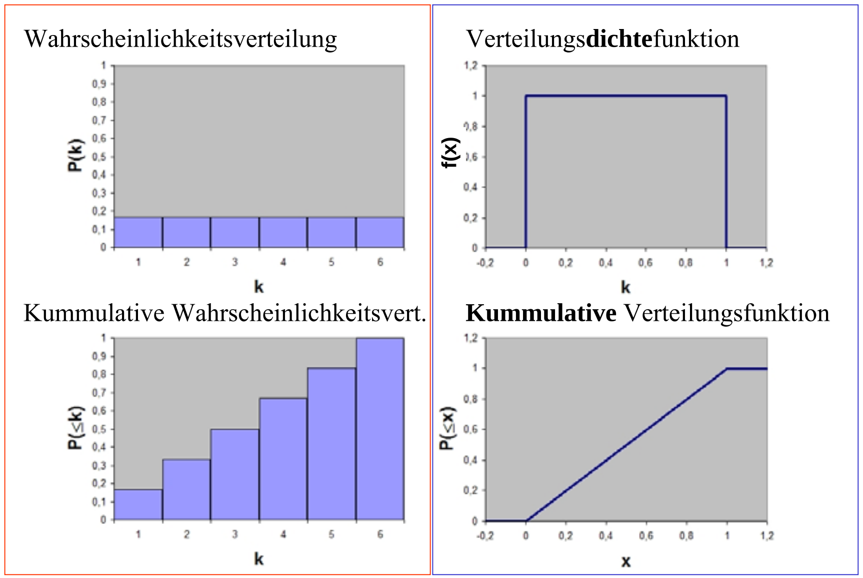
f(x) statt P(x) !

Wahrscheinlichkeit entspricht die Fläche!

Die Gesamtfläche unter der Kurve = 1



Vergleich der diskreten und kontinuierlichen Verteilungen mit dem Beispiel der Gleichverteilung



Erwartungswert und Varianz der kontinuierlichen Verteilungen

Ähnliche Definitionen als bei diskrete Verteilungen, aber statt Summierung muss man integrieren:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx$$

Erwartungswert und Streuung der kont. Gleichverteilung

Erwartungswert: $$\mu = \frac{a+b}{2}$$

Streuung: $$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Erwartungswert der Gleichverteilung:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Kontinuierliche Verteilungen: Normalverteilung (Gauss-Verteilung)

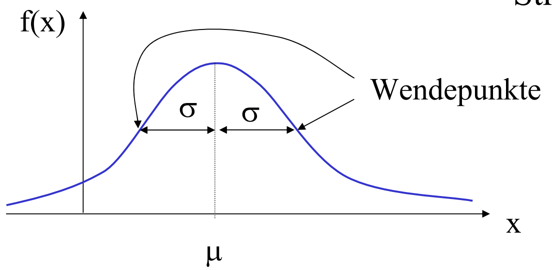
Kontinuierliche Verteilungen: Normalverteilung

Verteilungsfunktion:

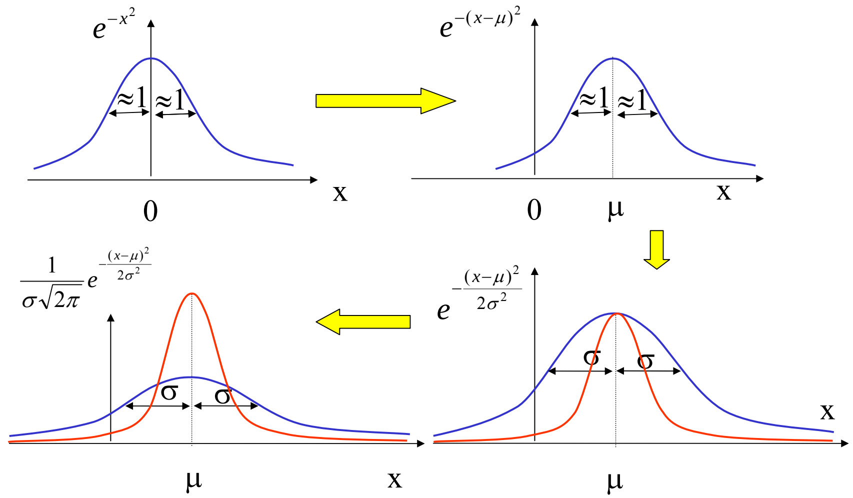
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Parameter der Normalverteilung: Erwartungswert: μ

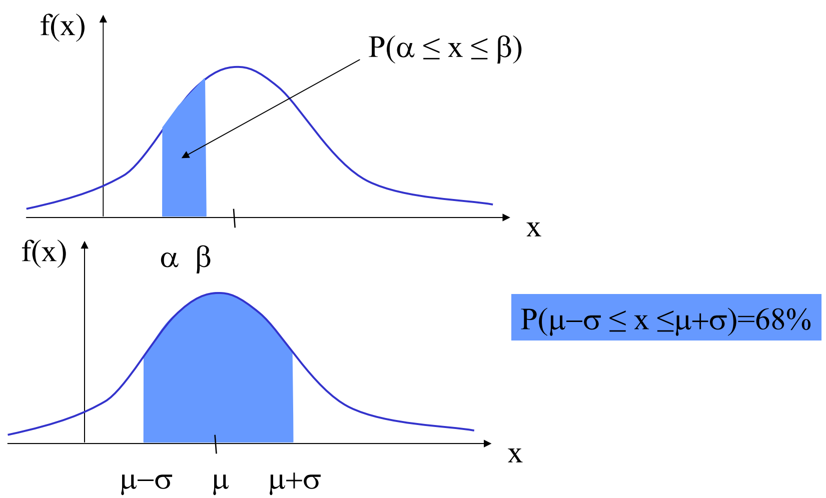
Streuung: σ



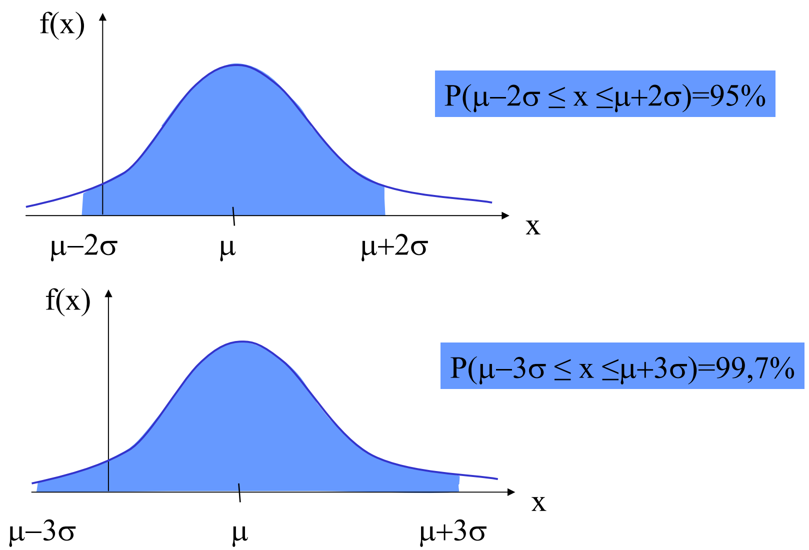
Normalverteilung



Normalverteilung

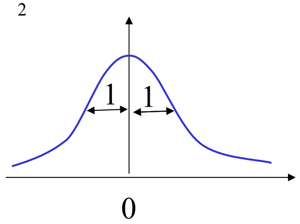


Normalverteilung



Standard - Normalverteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



μ=0

σ=1

Transformation der Normalverteilungen zur Normalverteilung

Überblickstabelle

Diskrete Verteilungen

	diskrete Gleich-	Binomial-	Poisson-	Geometrische
p_k	$\frac{1}{n}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(k) = q^{k-1} p$
μ	$\frac{n+1}{2}$	np	λ	$\frac{1}{p}$
σ^2	$\frac{n^2-1}{12}$	$np(1-p)$	λ	$\frac{1-p}{p^2}$

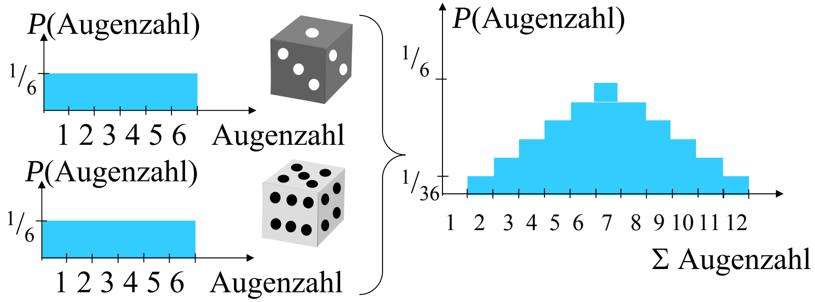
Überblickstabelle

Kontinuierliche Verteilungen

	kontinuir. Gleich-	Normal-	Standard-normal-
$f(x)$	$\frac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$
μ	$\frac{a+b}{2}$	μ	0
σ^2	$\frac{(b-a)^2}{12}$	σ^2	1

Verteilung von Summe der Zufallsgrößen: Beispiel

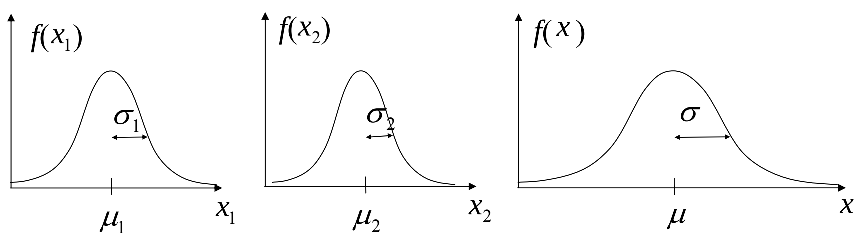
Wir werfen mit zwei Würfeln.
Die Augenzahl von einem Würfel hat eine Gleichverteilung.
Welche Verteilung hat die Summe der Augezahlen?
Keine Gleichverteilung!



Hausaufgabe: Berechnen Sie die (theoretische) Streuung der obigen Verteilungen!
(Siehe die Vorlesung der letzte Woche für die Definition!)

Verteilung von Summe der Zufallsgrössen

x_1 und x_2 sind **unabhängige** Zufallsgrößen. Beide folgen eine Verteilung mit Erwartungswerte μ_1 bzw. μ_2 und Streuungen σ_1 bzw. σ_2.
Welche Verteilung folgt die Summe: $x = x_1 + x_2$?



x hat eine Verteilung mit Erwartungswert $\mu=\mu_1+\mu_2$
und Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

Die Varianzen sind Additive, nicht die Streuungen!!!

Verteilung von Summe der Zufallsgrössen

Der Verteilungstyp ist ***stabil*** wenn die Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen wieder eine Verteilung desselben Typs gibt.

Die Normalverteilung, die Bionomialverteilung, und die Poisson-Verteilung sind stabile Verteilungen.

Die Gleichverteilungen sind nicht stabil!

Verteilung der linearen Funktion einer Zufallsvariable

x ist eine Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von μ und theoretischen Streuung von σ.

Sei $y=2\cdot x$

Welche Erwartungswert und theor. Streuung hat y?

$\mu_y=2\cdot\mu$ $\quad\sigma_y=2\cdot\sigma$

(Allgemein: wenn $y=a\cdot x$, $\mu_y=a\cdot\mu$, $\sigma_y=a\cdot\sigma$)

Sei $z= x+3$

Welche Erwartungswert und theor. Streuung hat z?

$\mu_z=\mu+3$ $\quad\sigma_z=\sigma$

(Allgemein: wenn $z=x+a$, $\mu_z=\mu+\alpha$, $\sigma_z=\sigma$)

Sei: $t=a\cdot x+b$ dann $\mu_t=a\cdot\mu+b$ $\quad\sigma_t=a\cdot\sigma$

Beispiel

Hans spielt ein Brettspiel, wo er mit einem Würfel wirft. Nach dem Wurf bekommt er Spielgeld: 50-mal die Augenzahl.

Wie viel Geld kann er durchschnittlich erwarten nach einem Wurf? (Wie viel ist der Erwartungswert des Geldes, was er nach einem Wurf bekommt?)

Wie viel ist der Erwartungswert des Gewinnes, wenn Hans muss 200 Spielgeld für jede Würfe bezahlen?

Verteilung des Durchschnittes

x_1 und x_2 sind unabhängige Zufallsgrößen.
Beide folgen eine Normalverteilung mit Erwartungswerte μ_1 bzw. μ_2 und Streuungen σ_1 bzw. σ_2.

Welche Verteilung folgt der Durchschnitt $\overline{x} = (x_1 + x_2)/2$?

$\overline{x}$ hat eine Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu=(\mu_1+\mu_2)/2$ und Varianz $\sigma^2 = (\sigma_1^2+\sigma_2^2)/4$

$(\sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\ /2)$

Verteilung von Durchschnitt der Zufallsgrößen

x_1 und x_2 sind unabhängige Zufallsgrößen. Beide folgen eine Normalverteilung mit derselben Erwartungswerte μ und Streuungen σ.

Welche Verteilung folgt der Durchschnitt $x = (x_1 + x_2)/2$?

Normalverteilung, mit den folgenden Parametern:

Messwerte	Summe	Durchschnitt	Allgemein für n Messwerte
x_1 , x_2	x_1+x_2	$x = (x_1 + x_2)/2$	$x = (x_1 + \ldots+x_n)/n$
μ	$\mu+\mu=2\mu$	μ	μ
σ^2	$\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$		
σ	$\sqrt{2}\ \sigma$	$\sigma/\sqrt{2}$	$\sigma/\sqrt{n}$

Zentraler Grenzwertsatz

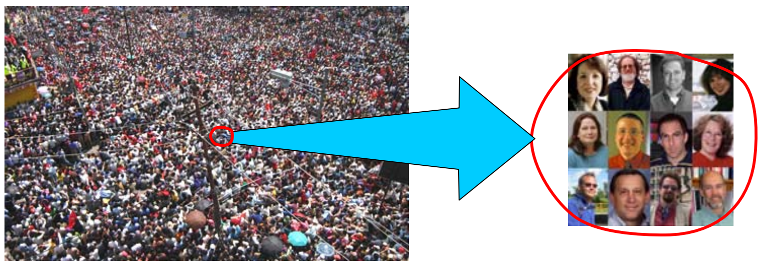
Die $x_1, x_{2,\ldots} x_n$ unabhängige Zufallsgrößen alle derselben Verteilung haben. Die Verteilung der Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ eine Normalverteilung annähert wenn $n \to \infty$.

In Worten: Die Verteilungsfunktionen der Summe konvergieren gegen eine Normalverteilung auch wenn die einzelne Zufallsgrößen keine Normalverteilung haben.

Biologische Bedeutung: Wenn ein Parameter (zB Körperhöhe, Blutzuckerkonzentration, …) durch vielen ($n \to \infty$) anderen Faktoren (Zufallsgrößen) beeinflusst wird, dieser Parameter folgt eine Normalverteilung.

Statistische Schätzungen,

Analytische Statistik



Population

N = „unendlich"

Stichprobe

n = endlich

Theoretische Verteilung	Häufigkeitsverteilung
Erwartungswert	Durchschnitt
Theoretische Streuung	Standardabweichung

Aufgabe der Schätztheorie

Aus einer Stichprobe Schätzwerte für

- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert
- Streuung
- oder andere Parametern

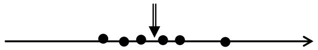
einer Verteilung zu ermitteln.

Typen der Schätzungen:

- ***Punktschätzung***
- ***Intervallschätzung***

Punktschätzungen

Wir wollen jetzt die Parameter einer Verteilung (μ,σ) aus den konkreten Werten $x_1,\ldots x_n$ einer Stichprobe „möglichst gut“ bestimmen, d.h. einen „Näherungswert“ errechnen.



Kriterien:

Erwartungstreue (unverzerrt)	Erwartungswert der Schätzwerte = zu schätzender Parameter
Konsistenz	n ↑ bessere Schätzung
Effizienz (wirksam)	kleine Streuung
Exhaustivität (erschöpfend)	berücksichtigt alle Informationen

Punktschätzungen

Der Parameter wird mit einem Wert geschätzt.

Relative Häufigkeit
ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

Durchschnitt
ist ein Schätzwert für den Erwartungswert

Standardabweichung
ist ein Schätzwert für die Streuung

Punktschätzungen sagen
nichts über die Genauigkeit bzw. Sicherheit
der Schätzung!

Intervallschätzungen

Intervallschätzung oder Konfidenzschätzung gibt zu einer vorgewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit γ, (Konfidenzniveau) ein Intervall (c_1,c_2) an, in dem der unbekannte Parameter (zB. μ oder σ) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens γ liegt.

Zb.: Erwartungswert der Pulszahl ist bei
95% Konfidenzniveau: 74±6 $^1/_{Min}$

Intervallschätzungen

Wie große γ soll gewählt werden?
Wie große sind die Schaden bei einer falschen Schätzung?

Sozialwissenschaft γ=0,9

Medizin γ=0,95

Technik γ=0,99

Einfluss der Streuung und des Stichprobenumfanges

α=1-γ Irrtumswahrscheinlichkeit

Verteilung von Durchschnitt der Zufallsgrössen

x_1 und x_2 sind unabhängige Zufallsgrößen. Beide folgen eine Normalverteilung mit derselben Erwartungswerte μ und Streuungen σ.
Welche Verteilung folgt der Durchschnitt $x = (x_1 + x_2)/2$?
Normalverteilung, mit den folgenden Parametern:

Messwerte	Summe	Durchschnitt	Allgemein für n Messwerte
x_1 , x_2	x_1+x_2	$x = (x_1 + x_2)/2$	$x = (x_1 + \ldots + x_n)/n$
μ	$\mu + \mu = 2\mu$	μ	μ
σ^2	$\sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$		
σ	$\sqrt{2}\sigma$	$\sigma/\sqrt{2}$	$\sigma/\sqrt{n}$

Zur Erinnerung

Konfidenzintervall für den Erwartungswert