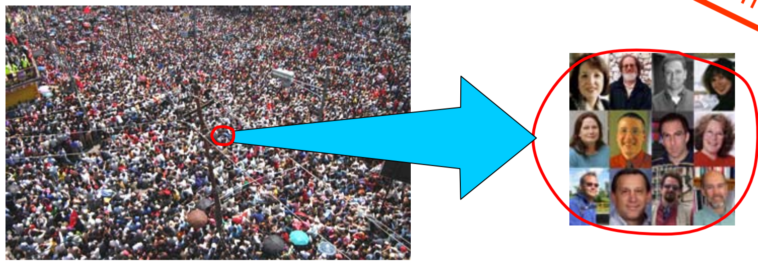
Statistische Schätzungen
(…Fortsetzung)

Analytische Statistik

Zur Erinnerung



Population

N = „unendlich"

Stichprobe

n = endlich

Theoretische Verteilung
Erwartungswert
Theoretische Streuung

?

Häufigkeitsverteilung
Durchschnitt
Standardabweichung

Aufgabe der Schätztheorie

Zur Erinnerung

Aus einer Stichprobe Schätzwerte für

- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert
- Streuung
- oder andere Parametern

einer Verteilung zu ermitteln.

Typen der Schätzungen:

- ***Punktschätzung***
- ***Intervallschätzung***

Punktschätzungen

Zur Erinnerung

Der Parameter wird mit einem Wert geschätzt.

Relative Häufigkeit
ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

Durchschnitt
ist ein Schätzwert für den Erwartungswert

Standardabweichung
ist ein Schätzwert für die Streuung

Punktschätzungen sagen
nichts über die Genauigkeit bzw. Sicherheit
der Schätzung!

Intervallschätzungen

Zur Erinnerung

Intervallschätzung oder Konfidenzschätzung gibt zu einer vorgewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit γ, (Konfidenzniveau) ein Intervall (c_1,c_2) an, in dem der unbekannte Parameter (zB. μ oder σ) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens γ liegt.

Zb.: Erwartungswert der Pulszahl ist bei
95% Konfidenzniveau: 74±6 $^1/_{Min}$

Verteilung von Durchschnitt der Zufallsgrössen

x_1 und x_2 sind unabhängige Zufallsgrößen. Beide folgen eine Normalverteilung mit derselben Erwartungswerte μ und Streuungen σ.

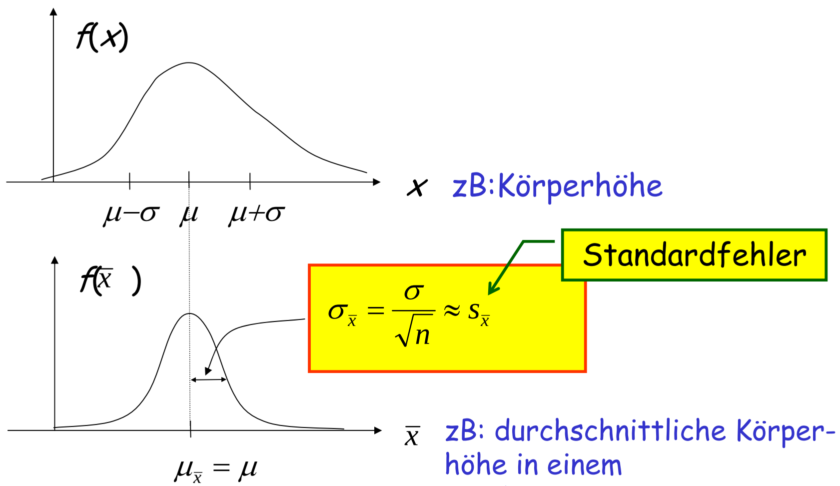
Welche Verteilung folgt der Durchschnitt $x = (x_1 + x_2)/2$?

Normalverteilung, mit den folgenden Parametern:

Messwerte	Summe	Durchschnitt	Allgemein für n Messwerte
x_1 , x_2	x_1+x_2	$x = (x_1 + x_2)/2$	$x = (x_1 + \ldots + x_n)/n$
μ	μ +μ=2μ	μ	μ
σ^2	$\sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$		
σ	$\sqrt{2}\sigma$	$\sigma/\sqrt{2}$	$\sigma / \sqrt{n}$

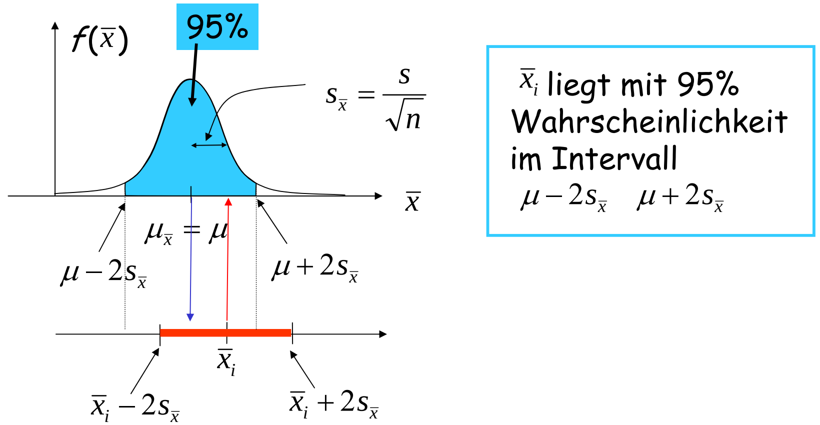
Zur Erinnerung

Konfidenzintervall für den Erwartungswert



zB: durchschnittliche Körperhöhe in einem Studentengruppe von *n* Studenten

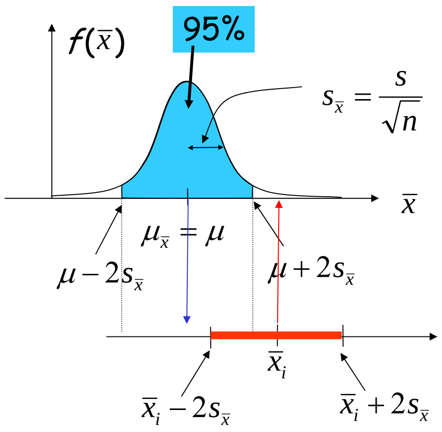
Konfidenzintervall für den Erwartungswert



wenn $\mu - 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \le \mu + 2s_{\bar{x}}$ dann $\boxed{\bar{x}_i - 2s_{\bar{x}}} \le \mu \le \boxed{\bar{x}_i + 2s_{\bar{x}}}$

95% Wahrsch. 95% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert



$\bar{x}_i$ liegt mit 5% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - 2s_{\bar{x}}$ $\mu + 2s_{\bar{x}}$ nicht!

$\bar{x}_i \le \mu - 2s_{\bar{x}}$ oder $\mu + 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \Rightarrow \mu \le \bar{x}_i - 2s_{\bar{x}}$ oder $\bar{x}_i + 2s_{\bar{x}} \le \mu$

5% Wahrsch. 5% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

In dem Intervall $\bar{x} - 2s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 2s_{\bar{x}}$ (Konfidenzintervall) liegt der Erwartungswert (μ) mit 95% Wahrscheinlichkeit

Eine ähnliche Ableitung gibt: μ liegt
-mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - s_{\bar{x}},\ \bar{x} + s_{\bar{x}}$

- mit 99,7% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - 3s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 3s_{\bar{x}}$

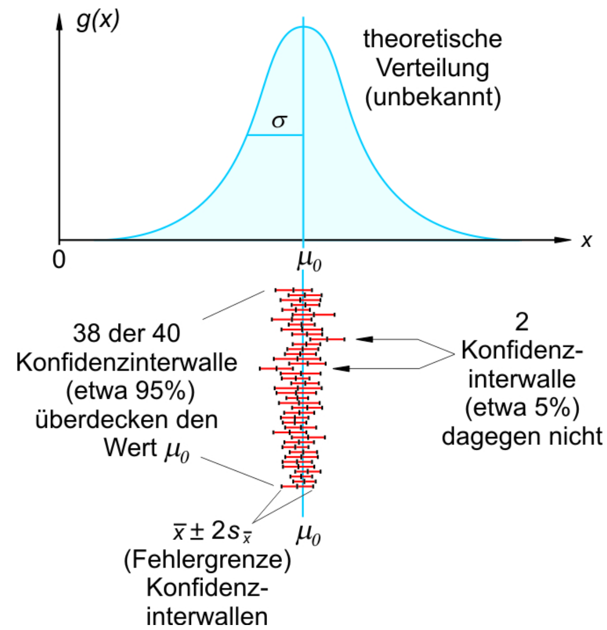
Je größer ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit desto breiter ist das Konfidenzintervall!

Bemerkung: wenn $n \to \infty$ dann $s_{\bar{x}} \to 0$

Aufgaben zum Konfidenzintervall des Erwartungswertes

Eine Maschine herstellt Tabletten. Nominale Wirkstoffgehalt der Tabletten beträgt 20mg. Wirkstoffsgehalt der 10 Tabletten wurde gemessen. Der Durchschnitt beträgt 18,9 mg. Die Standardabweichung der Wirkstoffsgehalt beträgt 1,6 mg. Geben Sie die mit 95% Sicherheitswahrscheinlichket gehörende Konfidenzintervall an!
Ist diese Maschine gut eingestellt?

Mit einer sehr langen Mess-Serie haben wir die Erwartungswert und die theoretische Streuung der Blutzuckerkonzentration bestimmt.
Jetzt wird die Blutzuckerkonzentration in 40 Studentengruppen bestimmt. Wir bestimmen die 95% Konfidenzintervallen für alle Gruppen. Wieviele Konfidenzintervallen enthalten den Erwartungswert?



Pr.Buch Abb. 11

Zusammenfassung der Schätzungen

Punktsätzungen:

Stich-probe	Grund-gesamtheit
$\bar{x}$ ⟶	μ
s ⟶	σ
n ⟶	∞

Intervallschätzung
für den Erwartunswert:

$\boxed{\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}} \quad 95\%}$

Hypothesenprüfungen

Vergleich der Schätzungen und Hypothesenprüfungen

Schätzungen:

Frage: Wie groß (ist eine physikalische Größe) $\mu=?$

z.B.: Körperhöhe, Blutdruck, Blutzuckerkonzentration...

Antwort: Punktschätzung: Ein Wert

Intervallschätzung: Ein Intervall + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrscheinlichkeit)

Hypothesenprüfungen:

Frage: Eine Entscheidungsfrage (ist es wahr oder nicht?)

zB: hat ein Medikament eine Wirkung oder nicht?

Mathematisch: ist $\mu=\mu_0$?

Antwort: Ja oder Nein + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrsch.)

Signifikanzniveau (Irrtumswahrsch.)

Typische Aufgaben der Hypothesenprüfung

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
   - 1a. Verursacht es eine Änderung (zB. Blutdruckänderung, d.h.: ist der Blutdruck kleiner nach der Eingabe?)
   - 1b. Gibt es einen Unterschied zwischen den unbehandelten und behandelten Gruppen?
2. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei Parametern (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)
3. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei Eigenschaften (die kategorisierbare sind, zB: Raucher – Nichtraucher, Lungenkrebs - kein Lungenkrebs)

Typische Fragen - typische Größen

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
   Änderung von einer **numerischen (kontinuierlichen) Größe**
   (zB. Blutdruck, Körpertemperatur, Blutzuckerkonzentration, …)
   1a. Änderung nach einem Einfluss an einer Stichprobe
   1b. Unterschied zwischen zwei Stichproben

2. Gibt es eine Korrelation zwischen **zwei numerischen Größen**
   (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)

3. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei (oder mehreren) **kategorischen Merkmalen** (zB: Raucher – Nichtraucher, Lungenkrebs-kein Lungenkrebs)

Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Die Wirkung
Die Korrelation
} können unterschiedlich sein

⇩

unprognostizierbar

⇩

mathematisch unbehandelbar

☹

Keine Wirkung
Keine Korrelation
} nur zufällige Effekte treten auf

⇩

mathematisch gut beschreibbar!

☺

Die Nullhypothese und die Alternativhypothese

Nullhypothese (H_0):

Es gibt **keine Wirkung** $\mu=\mu_0$

Alle **Abweichungen** von dem theoretischen Wert sind rein **zufällig**.

Alternativhypothese (H_1)

Es gibt eine Wirkung $\mu\neq\mu_0$

Die Abweichungen sind nicht zufällig, sondern systematisch!

Eine von H_0 und H_1 wird unbedingt auftreten! $p(H_0 \text{ oder } H_1)=1$

Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Sei es vorausgesetzt, dass wir keine Wirkung haben! (H_0)

Wenn unsere Ergebnisse dieser Voraussetzung nicht entsprechen, dann haben wir wahrscheinlich eine Wirkung/Korrelation.

Keine Wirkung:
zB: Fiebermittel: Wenn es keine Wirkung gibt, ist die Temperaturänderung nach der Eingabe = 0.

1. Beispiel: Fibermittel

Seien die Temperaturen vor und nach der Eingabe gemessen.
Die Messergebnisse (in °C):

T_{vor}	T_{nach}	$x = T_{nach} - T_{vor}$
39,7	39,2	-0,5
38,8	38,4	-0,4
37,9	38,7	0,8
39,2	38,7	-0,5
Durchschnitt $\bar{x}$		-0,15

Temperatur-änderung

Nullhypothese: das Fiebermittel is unwirksam.
Die Temperaturänderungen (x_i) sind zufällig.
Der Erwartungswert der Temperaturänderungen ist Null.

1. Beispiel: Fibermittel

Die Nullhypothese entspricht $\mu = 0$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, befindet sich $\bar{x}$ nicht weit von μ.

Ist $\bar{x} = -0{,}15$ klein genug, um die Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist $\bar{x} = -0{,}15$ groß genug, um die Nullhypothese abzulehnen?

Aber wo ist die Grenze? Wie groß muss der Durchschnitt sein, um die Nullhypothese abzulehnen?

Bemerkung: Auch wenn die Nullhypothese gültig ist, kann zufällig $\bar{x}$ sehr groß sein. Aber mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit!

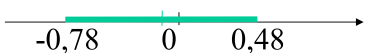
1. Beispiel: Fibermittel

Schätzung des Erwartungswertes:

μ befindet sich mit 95% Wahrscheinlichkeit im Konfidenzbereich von $\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}$

In diesem Beispiel: $s = 0{,}635$ °C $\quad s_{\bar{x}} = 0{,}317$ °C

Konfidenzintervall für den Erwartungswert:
grob: $\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}} = -0{,}15 \pm 0{,}63$



⇒ μ kann 0 sein! Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.
Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die H_0 gültig ist.

Das war die naive Annäherung…

2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.
Wird die Pulszahl geändert nach der Kniebeugungen?
H_0: keine Änderung $\mu=0$

p_{vor}	p_{nach}	$x=\Delta p$
65	79	14
68	77	9
72	91	19
63	70	7
74	88	14
69	84	15
	Durchsch.	13
	Stabw.	4,34
	Stfehler	1,77

95% Konfidenzintervall für μ:

$13{,}0 \pm 2 \cdot 1{,}77\ ^1/_{min}$

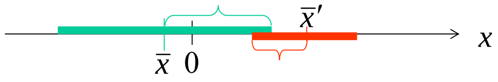
$13{,}0 \pm 3{,}5\ ^1/_{min}$

0 liegt nicht in diesem Bereich, d.h. wahrscheinlich: $\mu \neq 0$
Die Nullhypothese kann abgelehnt werden. $\boxed{95\%\ !}$

Das war die naive Annäherung…

Der t-Wert

Die Abweichung, die nicht mehr als zufällig betrachtet werden kann, muss größer sein als einige Mal $s_{\bar{x}}$.



Definieren wir eine neue Größe:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} \qquad (\,\bar{x} \text{ in } s_{\bar{x}} \text{ Einheiten gemessen})$$

oder mathematisch:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

t für unseren „Fibermittel“:

$t = -0{,}15/0{,}317 = -0{,}47$

für Kniebeugungen $t' = 7{,}34$

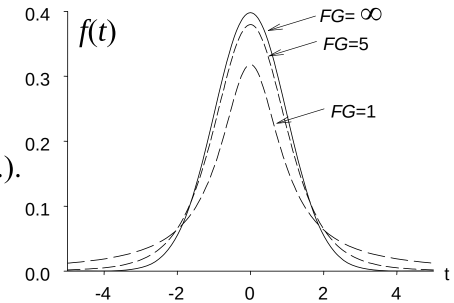
Der t-Wert

$t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, alle x_i Werte folgen einer Verteilung mit $\mu = 0$.

Wenn diese Verteilung eine Normalverteilung ist, kann die Verteilung von t berechnet werden: t-Verteilung

Wenn die Nullhypothese gültig ist, der aus unserer Stichprobe ausgerechnete t-Wert folgt einer t-Verteilung (Student-Vert.).



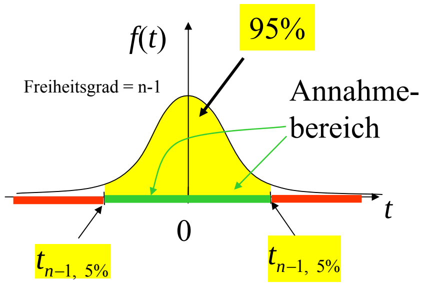
Bedingung: x muss normalverteilt sein.

Die Anwendung der t-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Richtigkeit der Nullhypothese

$-t_{n-1,\ 5\%} < t < +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 95%.



Bei richtiger Nullhypothese ist der aus der Stichprobe ausgerechnete t-Wert mit 95% Wahrscheinlichkeit in dem Annahmebereich. Wir können diesen kleinen t-Wert mit zufälligen Abweichungen erklären. $\Rightarrow$ Wir müssen keine Wirkung voraussetzen.

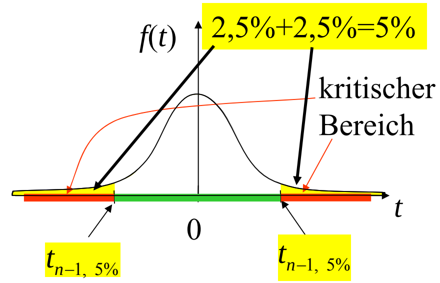
Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

Die Anwendung der t-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Richtigkeit der Nullhypothese

$t < -t_{n-1,\ 5\%}$ oder $t > +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 5%.



D.h.: Es ist sehr unwahrscheinlich (<5%), dass wir ***bei richtiger Nullhypothese*** einen so großen t-Wert bekommen. $\Rightarrow$ Wir haben wahrscheinlich eine Wirkung, ***die Nullhypothese kann abgelehnt werden, die Alternativhypothese ist wahrscheinlich richtig.***

Das 5% nennt man als ***Signifikanzniveau*** oder ***Irrtumswahrscheinlichkeit.***