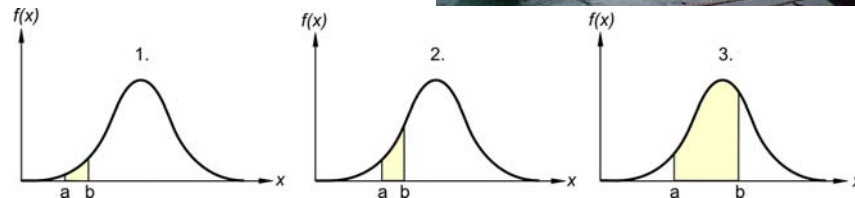


## (Deskriptive Statistik, Vortsetzung)

**Anschauliche Darstellung der Fläche**  
unter der theoretischen Verteilungskurve



Die Fläche unter der Kurve gibt den Anteil der Elemente der Grundgesamtheit die zwischen  $a$  und  $b$  fallen. (Wahrscheinlichkeitsinterpretation)

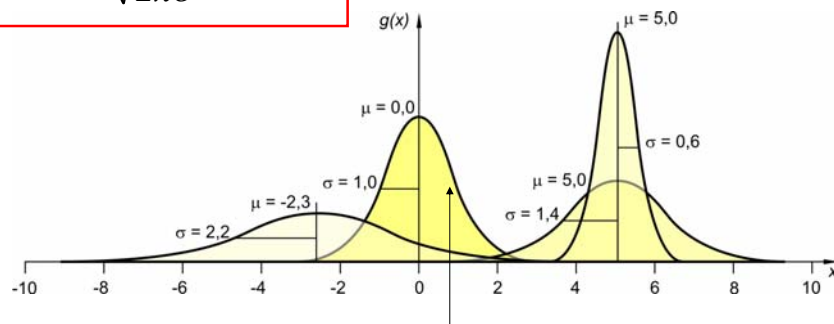
Die theoretische Verteilung kann in Abhängigkeit von der untersuchten Variablen unterschiedliche Formen annehmen, in der Mehrzahl der Fälle ist sie aber eine symmetrische **Glockenkurve** mit einem einzigen Maximum.



## Normalverteilung (Gauss-Verteilung)

$\mu$ : Erwartungswert  
(Position des Maximums)  
 $\sigma$ : die theoretische Streuung  
(charakterisiert die Breite der Funktion)

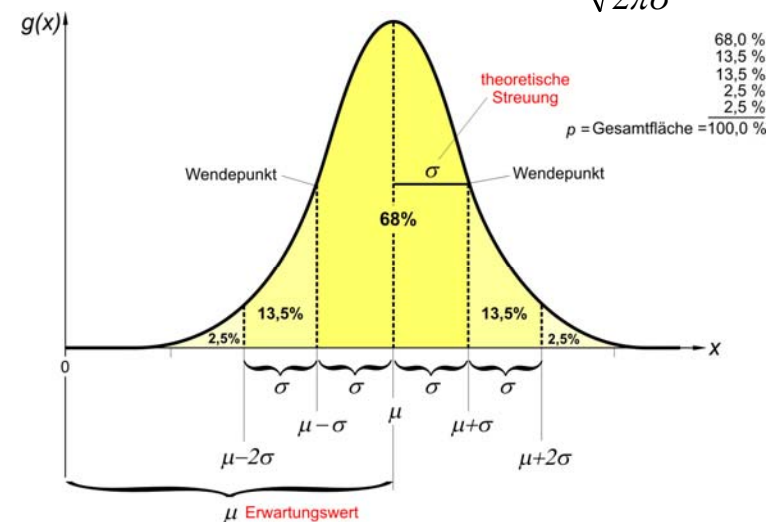
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Standardnormalverteilung ( $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ )

## Gauss-Kurve

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



## Die Schätzung der theoretischen Parameter. Die statistische Merkmale der Stichprobe

Gauss-Kurve ist mit zwei Parameter eindeutig beschrieben

Ziel: Schätzung dieser Parameter aufgrund einer Stichprobe

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \longrightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

Der **Erwartungswert** wird mit dem **Durchschnitt approximiert**, dem arithmetischen Mittelwert der Daten.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x} = \sum x_i - n\bar{x} = 0 \quad \text{Die Summe der Abweichungen der Daten von diesem Wert ist gleich Null.}$$

5

## Die Schätzung der theoretischen Streuung. Charakterisierung die Streuung der Daten

Die **theoretische Streuung**  $\sigma$  wird meist mit der **Standardabweichung** ( $s$ ) **approximiert**, die als mittlere Abweichung vom Durchschnitt definiert ist:

$$s_{n-1} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \longrightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

Standardabweichung,  
korrigierte (empirische) Streuung (der Messdaten/Stichprobe)

unkorrigierte Streuung:  
im Nenner steht  $n$  anstatt  $n-1$

$n=1$ ,  $s_n = s_1 = 0$ , keine Streuung???

aber wenn  $n \gg 1$ ,  $s_n \approx s_{n-1}$

$$s_n = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

6

## Weitere Streuungsparameter. Charakterisierung die Variation der Daten

Das Quadrat der Streuung, die mittlere quadratische Abweichung, auch als **Varianz** bezeichnet, ist:

$$s_{n-1}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

**Spannweite:**  $x_{\max} - x_{\min}$

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$$

quadratischer Durchschnitt      ↑      Quadrat des Durchschnitts

Quantile: z.B. **Dezile**

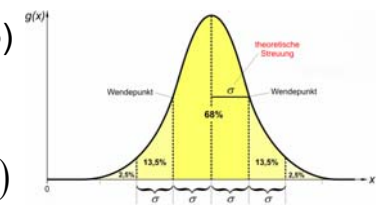
Durch Dezile (lat. „Zehntelwerte“) wird die Verteilung in 10 gleich grosse Teile zerlegt. Unterhalb des dritten Dezils liegen 30 % der Verteilung.

7

## Referenzintervall

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \longrightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \longrightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$



**Die Standardabweichung  $s$  zeigt, wie sehr die Daten im Mittel vom Durchschnitt abweichen**, d.h., — ähnlich wie bei der Gauss-Verteilung beschrieben — befinden sich ca. 68 % der Stichprobenelemente in dem Intervall  $\bar{x} \pm s$ , ca. 95 % im Intervall  $\bar{x} \pm 2s$ .

$$\bar{x} \pm s$$

$$\bar{x} \pm 2s$$

8

## Referenzintervall (Normbereich)

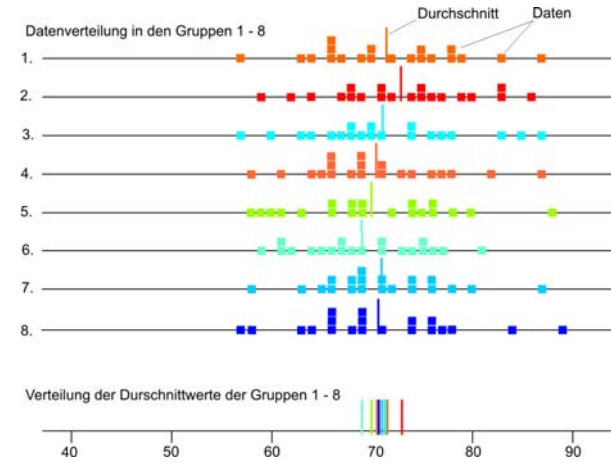
Der aus einer grossen Stichprobe berechnete Bereich, in dem sich genau 95 % der Elemente der Stichprobe befinden ( $k \approx 2$ ), wird als **Referenzintervall** oder **Normbereich** bezeichnet, was in erster Linie in der Labordiagnostik zur Anwendung kommt.

Referenzintervall

| Name                        | Einheit | 04.11.2004 | 05.10.2004 | 04.08.2004 | 05.07.2004 | Min  | Max  |
|-----------------------------|---------|------------|------------|------------|------------|------|------|
| %Hypo                       | %       |            | 0.5        |            |            | 0.5  | 5.0  |
| B. BURGDORFERI-AK (EIA) IGM |         | positiv    | positiv    | positiv    | positiv    |      |      |
| B. BURGDORFERI-AK IGG (EIA) |         | negativ    | negativ    | negativ    | negativ    | 5    | 10   |
| Ery-Vert-Breite             | %       |            | 11.6       |            |            | 11.6 | 14.5 |
| Erythrozyten                | Milliul | 4,12       | 3,95       | 4          |            | 4    | 6    |
| Haematokrit                 | V %     |            | 36.2       | 36         | 36.2       | 37.0 | 52.0 |
| Haemoglobin                 | g/dl    |            | 12.3       |            |            | 12.3 | 16.0 |
| Leukozyten                  | /ul     |            | 7          |            |            | 6.5  | 10.0 |
| MCH                         | pg      |            | 32.1       |            |            | 32.1 | 34.0 |
| MCHC                        | g/dl    |            | 34.0       |            |            | 34.0 | 37.0 |
| MCV                         | ucm     |            | 94.4       |            |            | 94.4 | 99.0 |
| P 18 (p18-Protein)          |         | negativ    | negativ    | negativ    | negativ    |      |      |

9

## Daten und ihre Durchschnittswerte



Die Daten einer Stichprobe streuen um den Durchschnittswert

„Der beste Durchschnittswert“ = der theoretische Mittelwert = der Erwartungswert =  $\mu$

Die Durchschnittswerte streuen um „den besten Durchschnittswert“.

Diese „Streuung“ drückt den **Standardfehler** (Streuung des Durchschnitts) aus:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Pr.Buch Abb. 10

10

## Konfidenzintervalle für den Erwartungswert

Der Erwartungswert befindet sich mit ca. 95%iger Sicherheit im Intervall von

$$\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}} = (\bar{x} - 2 s_{\bar{x}}; \bar{x} + 2 s_{\bar{x}})$$

95 % Konfidenzintervall für den Erwartungswert.

Der Erwartungswert befindet sich mit ca. 68%iger Sicherheit im Intervall von

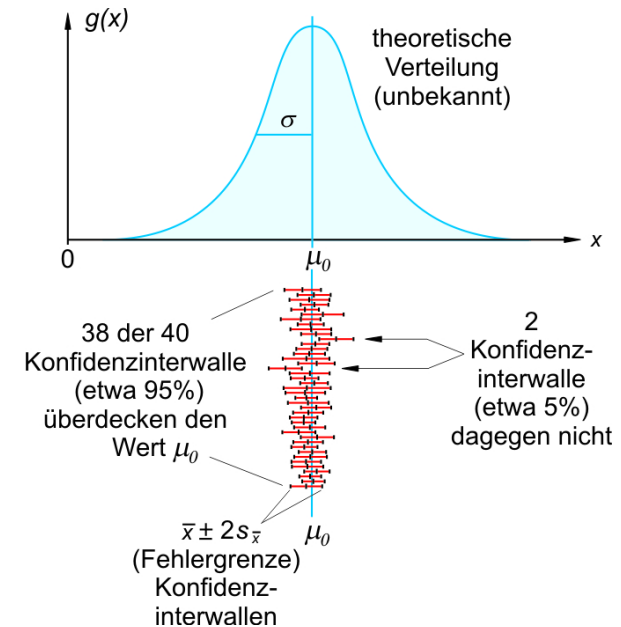
$$\bar{x} \pm s_{\bar{x}} = (\bar{x} - s_{\bar{x}}; \bar{x} + s_{\bar{x}})$$

68 % Konfidenzintervall für den Erwartungswert.

| Konfidenzniveau (ca.) | 68%                       | 95%                         | 99%                         |
|-----------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Konfidenzintervall    | $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ | $\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}}$ | $\bar{x} \pm 3 s_{\bar{x}}$ |
|                       |                           | <b>Fehlergrenze</b>         | sichere Fehlergrenze        |

11

Pr.Buch Tabelle 6



Pr.Buch Abb. 11

12

## empirische Werte

## Zusammenfassung

## theoretische Werte

Durchschnitt

$$\bar{X} \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

Erwartungswert

Standard-  
abweichung  
(Streuung der  
Messdaten)

$$S \rightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

theoretische Streuung

Standardfehler

$$S_{\bar{X}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Werte der  
Stichprobe

Werte der  
Population

13

## Biostatistik 3: Hypothesenprüfungen. t-Tests



## Schätzungen und Hypothesenprüfungen

### Schätzungen

Parameter der Stichprobe

Parameter der Population

Wie gross ist eine Grösse?

Punktschätzungen

ein Wert ist gegeben und nichts  
über die Sicherheit

$$\begin{array}{l} \bar{X} \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty) \\ S \rightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty) \end{array}$$

Intervall-  
schätzungen

95 % Konfidenzintervall für den Erwartungswert:

$$\bar{X} \pm 2s_{\bar{X}}$$

ein Intervall ist mit einem  
Konfidenzniveau gegeben

(95 %) Referenzintervall:

$$\bar{X} \pm 2s$$

### Hypothesenprüfungen

Beantwortung einer Entscheidungsfrage

ja oder nicht mit einem Signifikanzniveau


t-Test

Chi-Quadrat-Test

15

## Typische Entscheidungsfragen in der Medizin

- Ist die Therapie erfolgreich?  
(Gibt es eine Änderung in der erwarteten Richtung?)  
**Hat eine Behandlung eine Wirkung?**  
**Verkleinert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?**

- $T_1 > 37.5^\circ\text{C}$    $T_2 < T_1$ ?
- Gibt es einen Unterschied zwischen zwei Therapiemethoden?
- Gibt es eine Beziehung zwischen zwei Grössen?

16

## Gibt es eine Wirkung einer Behandlung?

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?



(a)  $T_2 \neq T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 \neq 0$ , z.B.:  $T_2 - T_1 = -1.5 \text{ C}$ ,  
 $T_2 - T_1 = -2.1 \text{ C}$ ,  
 $T_2 - T_1 = +0.4 \text{ C}$

(b)  $T_2 \approx T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 \approx 0$

17

## Die Nullhypothese

Es gibt keine Wirkung der Behandlung.

Die Wirkung der Behandlung ist Null (Nullhypothese,  $H_0$ ).

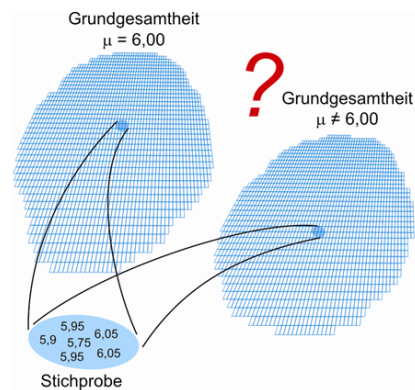
Das Fiebermittel verändert die Körpertemperatur nicht.

Wir müssen die Temperaturen in einer Gruppe (Stichprobe) messen.

Wenn die Nullhypothese richtig ist, müssen die Temperatur-differenzen um 0 streuen. Alle Abweichungen von Null sind zufällig.

18

## Die möglichen Grundgesamtheiten der Stichprobenentnahme



Wenn die Nullhypothese richtig ist, müssen die Daten der Stichprobe um den theoretischen Wert streuen. Alle Abweichungen von dem theoretischen Wert sind zufällig.

19

## Die Alternativhypothese

Es gibt eine Wirkung der Behandlung.

Die Wirkung der Behandlung ist nicht Null (Alternativhypothese,  $H_1$ ).

Das Fiebermittel verändert die Körpertemperatur.

Man unterscheidet als **Gegensatzpaar** Nullhypothese und Alternativhypothese.

Entweder  $H_0$  oder  $H_1$  ist richtig.

Nehmen wir an, dass  $H_0$  richtig ist!

Wenn Ergebnisse mit dieser Voraussetzung nicht passen: ablehnen wir  $H_0$   $H_1$  ist richtig



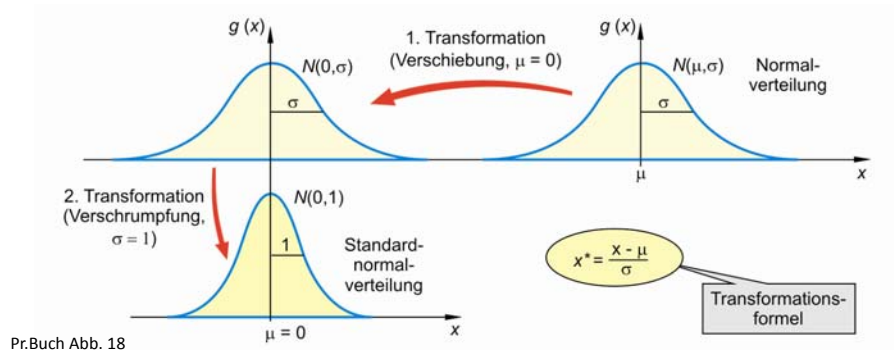
20

## Transformation einer Normalverteilung mit allgemeiner Lage und Breite in eine Standardnormalverteilung

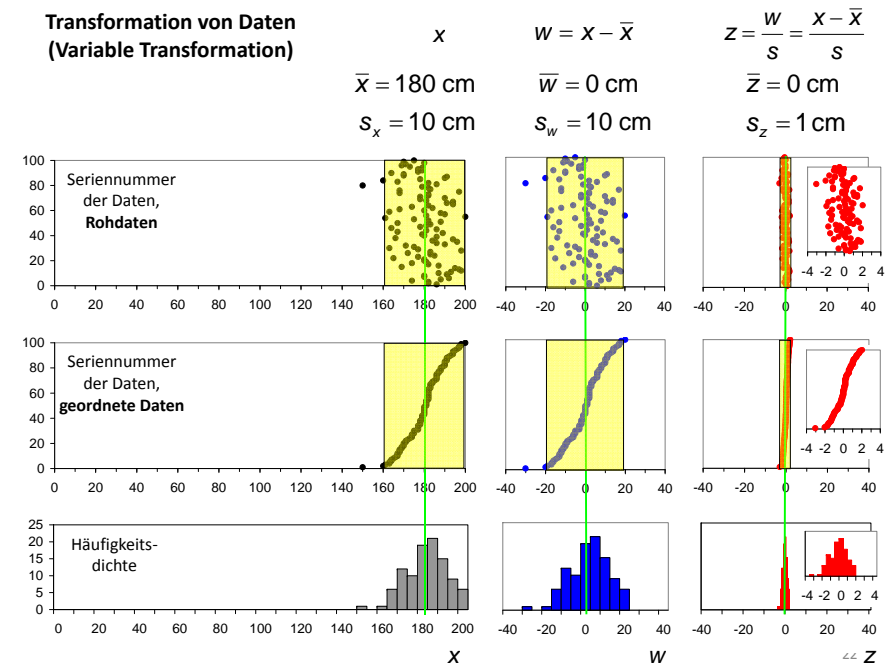
Mit welcher Verteilung sollen wir unsere Stichprobe vergleichen?

Die Standardnormalverteilung hat eine ausgezeichnete Rolle zwischen der Normalverteilungen.

Alle Normalverteilungen können in Standardnormalverteilung transformiert werden.



## Transformation von Daten (Variable Transformation)



## Einstichproben t-Test

|            |                  |                |                              |
|------------|------------------|----------------|------------------------------|
| Variable   | $x$              | $W = X - \mu$  | $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ |
| Verteilung | $N(\mu, \sigma)$ | $N(0, \sigma)$ | $N(0, 1)$                    |

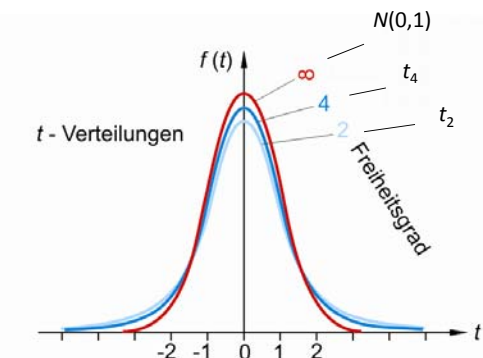
Wenn die originale Variable  $x$  zu einer **Normalverteilung** mit Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  gehört, dann gehört die transformierte Variable  $z$  zu der Standardnormalverteilung.

Wenn  $H_0$  richtig ist, kennen wir den Wert von  $\mu$ , aber  $\sigma$  nicht.

Die durchgeführte Transformation:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$$

|            |                  |                              |   |
|------------|------------------|------------------------------|---|
| Variable   | $x$              | $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ | $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$ |
| Verteilung | $N(\mu, \sigma)$ | $N(0, 1)$                    | $t_{n-1}$                               |



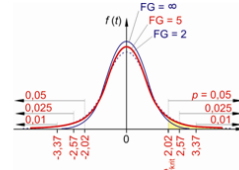


## 1. STATISTISCHE TABELLEN

### t-Verteilungsfamilie

#### t-VERTEILUNG

| Freiheitsgrad (FG) | p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)  |       |       |       |       |       |       |
|--------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                    | 0,4  | 0,25  | 0,1   | 0,05  | 0,025 | 0,01  | 0,005 |
|                    | p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test) |       |       |       |       |       |       |
|                    | 0,8  | 0,5   | 0,2   | 0,1   | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                  | 0,325  | 1,000 | 3,078 | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                  | 0,289  | 0,816 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3                  | 0,277  | 0,765 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4                  | 0,271  | 0,741 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5                  | 0,267  | 0,727 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6                  | 0,265  | 0,718 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7                  | 0,263  | 0,711 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 25                 | 0,256  | 0,684 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26                 | 0,256  | 0,684 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27                 | 0,256  | 0,684 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28                 | 0,256  | 0,683 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| 29                 | 0,256  | 0,683 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| 30                 | 0,256  | 0,683 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 |
| 40                 | 0,255  | 0,681 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| 60                 | 0,255  | 0,679 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,66  |
| 120                | 0,254  | 0,677 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 |
| ∞                  | 0,250  | 0,674 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 |



„Glockenkurven“

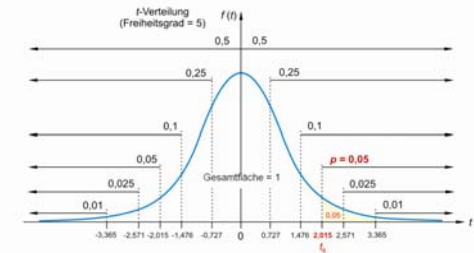
Je grösser ist der Freiheitsgrad, desto schmaler ist die Kurve.

$$t_{\infty} \equiv N(0, 1)$$

Kann der (aus der Stichprobe kalkulierte) t-Wert der t-Verteilung (mit entsprechendem Freiheitsgrad) gehören?

Alle Werte können zu der t-Verteilung gehören.  
Aber: Wenn der t-Wert gross ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit klein.

Deswegen benutzen wir nicht die gesamte t-Verteilung, sondern eine abgestutzte t-Verteilung!

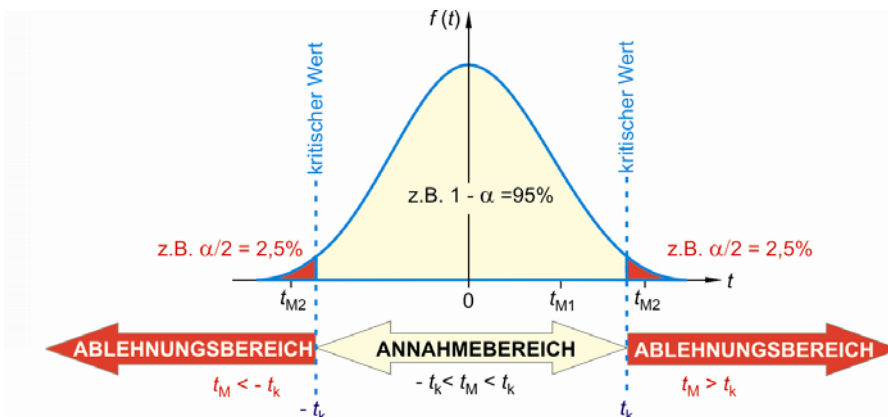


akzeptierbare Irrtumswahrscheinlichkeit in der Medizin: gleich 5 %

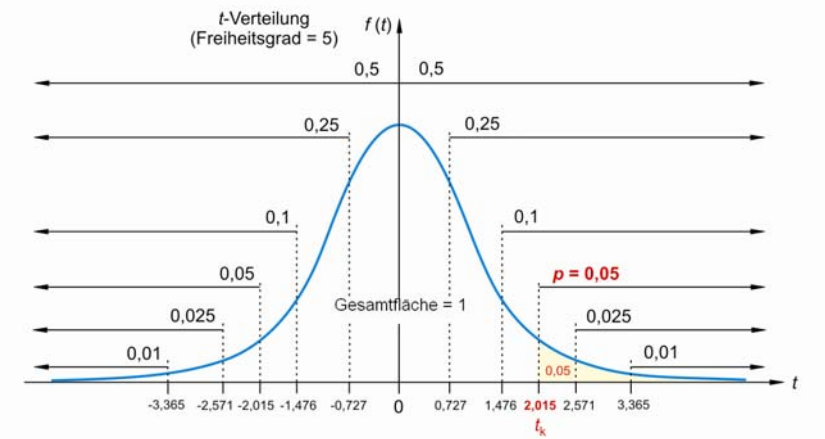
kleiner oder

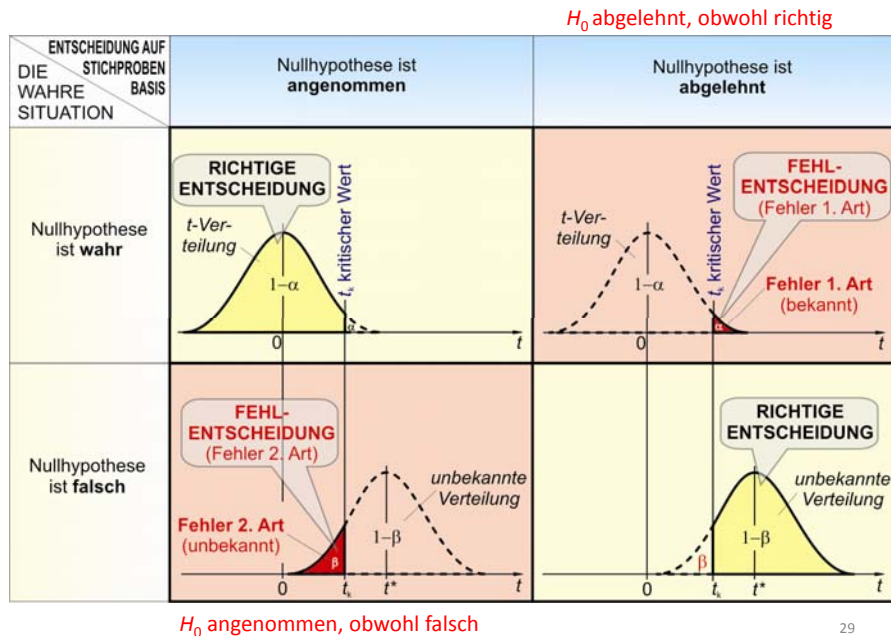
## Zweiseitiger t-Test

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?



## t-Verteilungskurve mit Freiheitsgrad 5. Die kritischen Werte und Wahrscheinlichkeiten des einseitigen t-tests





Pr.Buch Abb. 24

29

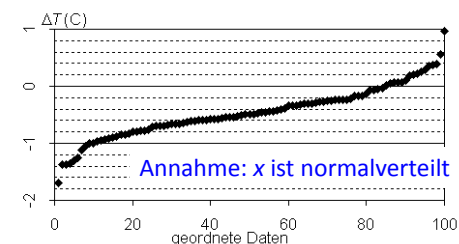
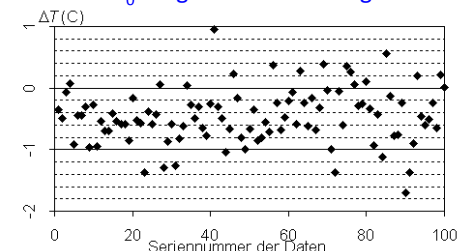
$x$  = Temperaturdifferenzen

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| -0.35 | -0.52 | 0.96  | -0.07 | -0.34 |
| -0.50 | -0.57 | -0.31 | -0.58 | -0.94 |
| -0.07 | -1.37 | -0.49 | 0.28  | -0.43 |
| 0.07  | -0.39 | -1.05 | -0.24 | -1.12 |
| -0.92 | -0.58 | -0.66 | -0.62 | 0.56  |
| -0.44 | -0.43 | 0.23  | -0.16 | -0.13 |
| -0.45 | 0.06  | -0.16 | -0.69 | -0.78 |
| -0.30 | -1.30 | -0.80 | -0.31 | -0.77 |
| -0.97 | -0.88 | -1.00 | 0.38  | -0.24 |
| -0.28 | -0.58 | -0.67 | -0.04 | -1.69 |
| -0.95 | -1.26 | -0.34 | -1.00 | -1.37 |
| -0.55 | -0.82 | -0.86 | -1.36 | -0.90 |
| -0.70 | -0.61 | -0.80 | -0.05 | 0.19  |
| -0.70 | 0.05  | -0.55 | -0.60 | -0.46 |
| -0.41 | -0.27 | -0.71 | 0.36  | -0.61 |
| -0.54 | -0.50 | 0.38  | 0.26  | -0.50 |
| -0.59 | -0.31 | -0.24 | 0.06  | -0.24 |
| -0.59 | -0.65 | -0.68 | -0.29 | -0.65 |
| -0.85 | -0.77 | -0.47 | -0.25 | 0.21  |
| -0.17 | -0.26 | -0.22 | 0.10  | 0.01  |

Beispiel: Einstichproben t-Test

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?

$H_0$ : es gibt keine Wirkung



Annahme:  $x$  ist normalverteilt

30

Kalkulation:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{X}}}, \quad \mu = 0$$

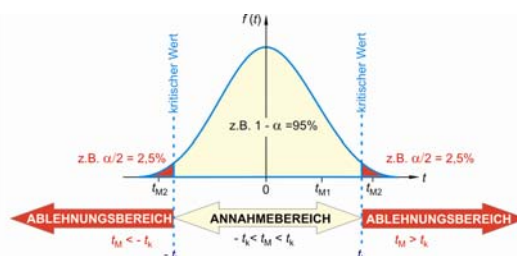
$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}}{S_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$$

zweiseitiger Test

$$|t| > t_{\text{krit}}$$

wir ablehnen die Nullhypothese mit einem Signifikanzniveau von 5%

|  |                   |         |
|--|-------------------|---------|
| Anzahl der Daten                         | n                 | 100     |
| Durchschnitt                             | avg               | -0.457  |
| Standardabweichung                       | stdev             | 0.454   |
| Standardfehler                           | sem               | 0.045   |
| t-Wert                                   | t                 | -10.056 |
| Freiheitsgrad                            | df                | 99      |
| max. zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit | $\alpha$          | 0.05    |
| kritischer t-Wert                        | $t_{\text{krit}}$ | 1.984   |



31

$$|t| > t_{\text{krit}}$$

Das Fiebermittel signifikant verändert (verkleinert) die Körpertemperatur ( $p <= 0.05$ ).

Im Klammer steht die Irrtumswahrscheinlichkeit. Es gibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese richtig ist. In diesem Fall unsere Klassifikation ist falsch (Fehler 1. Art).

Die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

| Freiheitsgrad (FG) | $p$ (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)  |       |       |       |       |       |       |
|--------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                    | 0,4  | 0,25  | 0,1   | 0,05  | 0,025 | 0,01  | 0,005 |
|                    | $p$ (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test) |       |       |       |       |       |       |
| 1                  | 0,325  | 1,000 | 3,078 | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                  | 0,288  | 0,816 | 2,447 | 3,182 | 6,965 | 17,06 | 27,78 |
| 3                  | 0,275  | 0,765 | 2,353 | 3,085 | 6,581 | 15,99 | 25,77 |
| 4                  | 0,266  | 0,717 | 2,282 | 2,999 | 6,358 | 15,09 | 24,48 |
| 5                  | 0,260  | 0,683 | 2,262 | 2,977 | 6,256 | 14,70 | 24,07 |
| 6                  | 0,256  | 0,658 | 2,245 | 2,958 | 6,163 | 14,45 | 23,68 |
| 7                  | 0,253  | 0,639 | 2,231 | 2,941 | 6,079 | 14,26 | 23,33 |
| 8                  | 0,250  | 0,623 | 2,219 | 2,927 | 6,000 | 14,09 | 23,03 |
| 9                  | 0,248  | 0,609 | 2,209 | 2,915 | 5,931 | 13,93 | 22,78 |
| 10                 | 0,246  | 0,596 | 2,201 | 2,906 | 5,874 | 13,79 | 22,56 |
| 11                 | 0,245  | 0,584 | 2,194 | 2,898 | 5,821 | 13,66 | 22,36 |
| 12                 | 0,244  | 0,573 | 2,188 | 2,891 | 5,771 | 13,54 | 22,17 |
| 13                 | 0,243  | 0,562 | 2,183 | 2,885 | 5,724 | 13,43 | 21,99 |
| 14                 | 0,242  | 0,552 | 2,178 | 2,879 | 5,679 | 13,33 | 21,82 |
| 15                 | 0,241  | 0,543 | 2,174 | 2,874 | 5,636 | 13,24 | 21,66 |
| 16                 | 0,240  | 0,534 | 2,170 | 2,869 | 5,595 | 13,15 | 21,51 |
| 17                 | 0,239  | 0,526 | 2,166 | 2,865 | 5,556 | 13,07 | 21,37 |
| 18                 | 0,238  | 0,518 | 2,162 | 2,861 | 5,518 | 12,99 | 21,24 |
| 19                 | 0,237  | 0,510 | 2,158 | 2,857 | 5,481 | 12,92 | 21,11 |
| 20                 | 0,236  | 0,503 | 2,154 | 2,853 | 5,446 | 12,85 | 21,00 |
| 21                 | 0,235  | 0,496 | 2,150 | 2,849 | 5,412 | 12,78 | 20,88 |
| 22                 | 0,234  | 0,489 | 2,146 | 2,845 | 5,379 | 12,71 | 20,77 |
| 23                 | 0,233  | 0,482 | 2,142 | 2,841 | 5,347 | 12,65 | 20,66 |
| 24                 | 0,232  | 0,476 | 2,138 | 2,837 | 5,316 | 12,59 | 20,56 |
| 25                 | 0,231  | 0,469 | 2,134 | 2,833 | 5,286 | 12,53 | 20,46 |
| 26                 | 0,230  | 0,463 | 2,130 | 2,829 | 5,257 | 12,47 | 20,36 |
| 27                 | 0,229  | 0,457 | 2,126 | 2,825 | 5,228 | 12,41 | 20,26 |
| 28                 | 0,228  | 0,451 | 2,122 | 2,821 | 5,200 | 12,35 | 20,16 |
| 29                 | 0,227  | 0,445 | 2,118 | 2,817 | 5,172 | 12,29 | 20,06 |
| 30                 | 0,226  | 0,439 | 2,114 | 2,813 | 5,145 | 12,23 | 19,96 |
| 31                 | 0,225  | 0,433 | 2,110 | 2,809 | 5,118 | 12,17 | 19,86 |
| 32                 | 0,224  | 0,427 | 2,106 | 2,805 | 5,092 | 12,11 | 19,76 |
| 33                 | 0,223  | 0,421 | 2,102 | 2,801 | 5,066 | 12,05 | 19,66 |
| 34                 | 0,222  | 0,415 | 2,098 | 2,797 | 5,041 | 12,00 | 19,56 |
| 35                 | 0,221  | 0,409 | 2,094 | 2,793 | 5,016 | 11,94 | 19,46 |
| 36                 | 0,220  | 0,403 | 2,090 | 2,789 | 4,991 | 11,88 | 19,36 |
| 37                 | 0,219  | 0,397 | 2,086 | 2,785 | 4,967 | 11,82 | 19,26 |
| 38                 | 0,218  | 0,391 | 2,082 | 2,781 | 4,943 | 11,76 | 19,16 |
| 39                 | 0,217  | 0,385 | 2,078 | 2,777 | 4,919 | 11,70 | 19,06 |
| 40                 | 0,216  | 0,379 | 2,074 | 2,773 | 4,895 | 11,64 | 18,96 |
| 41                 | 0,215  | 0,373 | 2,070 | 2,769 | 4,872 | 11,58 | 18,86 |
| 42                 | 0,214  | 0,367 | 2,066 | 2,765 | 4,848 | 11,52 | 18,76 |
| 43                 | 0,213  | 0,361 | 2,062 | 2,761 | 4,825 | 11,46 | 18,66 |
| 44                 | 0,212  | 0,355 | 2,058 | 2,757 | 4,802 | 11,40 | 18,56 |
| 45                 | 0,211  | 0,349 | 2,054 | 2,753 | 4,779 | 11,34 | 18,46 |
| 46                 | 0,210  | 0,343 | 2,050 | 2,749 | 4,756 | 11,28 | 18,36 |
| 47                 | 0,209  | 0,337 | 2,046 | 2,745 | 4,733 | 11,22 | 18,26 |
| 48                 | 0,208  | 0,331 | 2,042 | 2,741 | 4,710 | 11,16 | 18,16 |
| 49                 | 0,207  | 0,325 | 2,038 | 2,737 | 4,687 | 11,10 | 18,06 |
| 50                 | 0,206  | 0,319 | 2,034 | 2,733 | 4,664 | 11,04 | 17,96 |
| 51                 | 0,205  | 0,313 | 2,030 | 2,729 | 4,641 | 10,98 | 17,86 |
| 52                 | 0,204  | 0,307 | 2,026 | 2,725 | 4,618 | 10,92 | 17,76 |
| 53                 | 0,203  | 0,301 | 2,022 | 2,721 | 4,595 | 10,86 | 17,66 |
| 54                 | 0,202  | 0,295 | 2,018 | 2,717 | 4,572 | 10,80 | 17,56 |
| 55                 | 0,201  | 0,289 | 2,014 | 2,713 | 4,549 | 10,74 | 17,46 |
| 56                 | 0,200  | 0,283 | 2,010 | 2,709 | 4,526 | 10,68 | 17,36 |
| 57                 | 0,199  | 0,277 | 2,006 | 2,705 | 4,503 | 10,62 | 17,26 |
| 58                 | 0,198  | 0,271 | 2,002 | 2,701 | 4,480 | 10,56 | 17,16 |
| 59                 | 0,197  | 0,265 | 1,998 | 2,697 | 4,457 | 10,50 | 17,06 |
| 60                 | 0,196  | 0,259 | 1,994 | 2,693 | 4,434 | 10,44 | 16,96 |
| 61                 | 0,195  | 0,253 | 1,990 | 2,689 | 4,411 | 10,38 | 16,86 |
| 62                 | 0,194  | 0,247 | 1,986 | 2,685 | 4,388 | 10,32 | 16,76 |
| 63                 | 0,193  | 0,241 | 1,982 | 2,681 | 4,365 | 10,26 | 16,66 |
| 64                 | 0,192  | 0,235 | 1,978 | 2,677 | 4,342 | 10,20 | 16,56 |
| 65                 | 0,191  | 0,229 | 1,974 | 2,673 | 4,319 | 10,14 | 16,46 |
| 66                 | 0,190  | 0,223 | 1,970 | 2,669 | 4,296 | 10,08 | 16,36 |
| 67                 | 0,189  | 0,217 | 1,966 | 2,665 | 4,273 | 10,02 | 16,26 |
| 68                 | 0,188  | 0,211 | 1,962 | 2,661 | 4,250 | 9,96  | 16,16 |
| 69                 | 0,187  | 0,205 | 1,958 | 2,657 | 4,227 | 9,90  | 16,06 |
| 70                 | 0,186  | 0,199 | 1,954 | 2,653 | 4,204 | 9,84  | 15,96 |
| 71                 | 0,185  | 0,193 | 1,950 | 2,649 | 4,181 | 9,78  | 15,86 |
| 72                 | 0,184  | 0,187 | 1,946 | 2,645 | 4,158 | 9,72  | 15,76 |
| 73                 | 0,183  | 0,181 | 1,942 | 2,641 | 4,135 | 9,66  | 15,66 |
| 74                 | 0,182  | 0,175 | 1,938 | 2,637 | 4,112 | 9,60  | 15,56 |
| 75                 | 0,181  | 0,169 | 1,934 | 2,633 | 4,089 | 9,54  | 15,46 |
| 76                 | 0,180  | 0,163 | 1,930 | 2,629 | 4,066 | 9,48  | 15,36 |
| 77                 | 0,179  | 0,157 | 1,926 | 2,625 | 4,043 | 9,42  | 15,26 |
| 78                 | 0,178  | 0,151 | 1,922 | 2,621 | 4,020 | 9,36  | 15,16 |
| 79                 | 0,177  | 0,145 | 1,918 | 2,617 | 3,997 | 9,30  | 15,06 |
| 80                 | 0,176  | 0,139 | 1,914 | 2,613 | 3,974 | 9,24  | 14,96 |
| 81                 | 0,175  | 0,133 | 1,910 | 2,609 | 3,951 | 9,18  | 14,86 |
| 82                 | 0,174  | 0,127 | 1,906 | 2,605 | 3,928 | 9,12  | 14,76 |
| 83                 | 0,173  | 0,121 | 1,902 | 2,601 | 3,905 | 9,06  | 14,66 |
| 84                 | 0,172  | 0,115 | 1,898 | 2,597 | 3,882 | 9,00  | 14,56 |
| 85                 | 0,171  | 0,109 | 1,894 | 2,593 | 3,859 | 8,94  | 14,46 |
| 86                 | 0,170  | 0,103 | 1,890 | 2,589 | 3,836 | 8,88  | 14,36 |
| 87                 | 0,169  | 0,097 | 1,886 | 2,585 | 3,813 | 8,82  | 14,26 |
| 88                 | 0,168  | 0,091 | 1,882 | 2,581 | 3,790 | 8,76  | 14,16 |
| 89                 | 0,167  | 0,085 | 1,878 | 2,577 | 3,767 | 8,70  | 14,06 |
| 90                 | 0,166  | 0,079 | 1,874 | 2,573 | 3,744 | 8,64  | 13,96 |
| 91                 | 0,165  | 0,073 | 1,870 | 2,569 | 3,721 | 8,58  | 13,86 |
| 92                 | 0,164  | 0,067 | 1,866 | 2,565 | 3,698 | 8,52  | 13,76 |
| 93                 | 0,163  | 0,061 | 1,862 | 2,561 | 3,675 | 8,46  | 13,66 |
| 94                 | 0,162  | 0,055 | 1,858 | 2,557 | 3,652 | 8,40  | 13,56 |
| 95                 | 0,161  | 0,049 | 1,854 | 2,553 | 3,629 | 8,34  | 13,46 |
| 96                 | 0,160  | 0,043 | 1,850 | 2,549 | 3,606 | 8,28  | 13,36 |
| 97                 | 0,159  | 0,037 | 1,846 | 2,545 | 3,583 | 8,22  | 13,26 |
| 98                 | 0,158  | 0,031 | 1,842 | 2,541 | 3,560 | 8,16  | 13,16 |
| 99                 | 0,157  | 0,025 | 1,838 | 2,537 | 3,537 | 8,10  | 13,06 |
| 100                | 0,156  | 0,019 | 1,834 | 2,533 | 3,514 | 8,04  | 12,96 |

weitere Bemerkungen:

$$|t| = 10.056 > 2.66$$

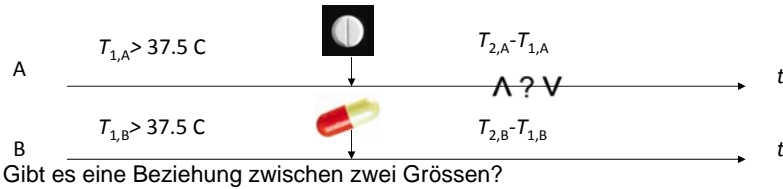
$p <= 0.01$  (zweiseitiger Test)

32



## Typische Entscheidungsfragen in der Medizin

- Ist die Therapie erfolgreich?  
(Gibt es eine Änderung in der erwarteten Richtung?)  
Hat eine Behandlung eine Wirkung?  
Verkleinert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?
- Gibt es einen Unterschied zwischen zwei Therapiemethoden?



- Gibt es eine Beziehung zwischen zwei Größen?

33

## Einstichproben t-Test

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_x} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \text{ wo}$$

$$s = \sqrt{\frac{Q}{n-1}}$$

## Zweistichproben t-Test

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s^*} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \text{ wo } s^* = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Vergleichen wir die Formeln!

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}}{s \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

Einstichproben

$$t_{n_1+n_2-1} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Zweistichproben

34

## Einstichproben t-Test

Wirkung?:  
Effekt der 5 Kniebeugen auf die Pulsfrequenz

n: Pulsfrequenz (1/30s), 1: vor, 2 nach, d: Differenz

$H_0$ : keine Wirkung

|   | n1 | n2 | dn | Zweistichproben t-Test bei abhängigen Stichproben (Paarvergleichstest) |  |
|---|----|----|----|--|--|
| m | 36 | 37 | 1  |  |  |
| m | 33 | 35 | 2  |  |  |
| m | 34 | 37 | 3  |  |  |
| m | 33 | 37 | 4  |  |  |
| m | 34 | 38 | 4  |  |  |
| m | 37 | 41 | 4  |  |  |
| m | 37 | 46 | 9  |  |  |
| w | 30 | 29 | -1 |  |  |
| w | 45 | 49 | 4  |  |  |
| w | 50 | 55 | 5  |  |  |
| w | 35 | 40 | 5  |  |  |
| w | 28 | 37 | 9  |  |  |
| w | 39 | 48 | 9  |  |  |
| w | 49 | 63 | 14 |  |  |

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,05)} = 2.160 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p \leq 0.05 \text{)}$$

(p = 0.000273)

35

## Zweistichproben t-Test

Gibt es einen Unterschied zwischen zwei (Therapie)methoden?

m: männlich, w: weiblich

|   | n1 | n2 | dn | Zweistichproben t-Test unter der Annahme gleicher Varianzen |  |
|---|----|----|----|---|--|
| m | 36 | 37 | 1  |   |  |
| m | 33 | 35 | 2  |   |  |
| m | 34 | 37 | 3  |   |  |
| m | 33 | 37 | 4  |   |  |
| m | 34 | 38 | 4  |   |  |
| m | 37 | 41 | 4  |   |  |
| m | 37 | 46 | 9  |   |  |
| w | 30 | 29 | -1 |   |  |
| w | 45 | 49 | 4  |   |  |
| w | 50 | 55 | 5  |   |  |
| w | 35 | 40 | 5  |   |  |
| w | 28 | 37 | 9  |   |  |
| w | 39 | 48 | 9  |   |  |
| w | 49 | 63 | 14 |   |  |

$$|t| = 1.261 < t_{12, \text{krit}(0,05)} = 2.179 \Rightarrow H_0 \text{ ist richtig}$$

36

|   | n1 | n2 | dn | Zweistichproben t-Test bei abhängigen Stichproben (Paarvergleichstest) |            |                         |
|---|----|----|----|--|------------|-------------------------|
| m   | 36 | 37 | 1  |  |            |                         |
| m   | 33 | 35 | 2  |  | Variable 1 | Variable 2              |
| m   | 34 | 37 | 3  | Mittelwert   | 37.142857  | 42.285714               |
| m   | 33 | 37 | 4  | Varianz  | 43.516484  | 80.681319               |
| m   | 34 | 38 | 4  | Beobachtungen  | 14         | 14                      |
| m   | 37 | 41 | 4  | Pearson Korrelation  | 0.9196855  |                         |
| m   | 37 | 46 | 9  | Hypothetische Differenz der Mittelwerte                                | 0          | $H_0$ : keine Wirkung   |
| w   | 30 | 29 | -1 | Freiheitsgrade (df)  | 13         |                         |
| w   | 45 | 49 | 4  | t-Statistik  | -4.9342498 |                         |
| w   | 50 | 55 | 5  | P(T<=t) einseitig  | 0.0001365  |                         |
| w   | 35 | 40 | 5  | Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test                               | 1.7709334  |                         |
| w   | 28 | 37 | 9  | P(T<=t) zweiseitig   | 0.000273   | $H_0$ ist falsch        |
| w   | 39 | 48 | 9  | Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test                              | 2.1603687  |                         |
| w   | 49 | 63 | 14 |  |            |                         |
| Zweistichproben t-Test unter der Annahme gleicher Varianzen |    |    |    |  |            |                         |
|   |    |    |    | Variable 1   | Variable 2 |                         |
|   |    |    |    | Mittelwert   | 3.8571429  | 6.4285714               |
|   |    |    |    | Varianz  | 6.4761905  | 22.619048               |
|   |    |    |    | Beobachtungen  | 7          | 7                       |
|   |    |    |    | Gepoolte Varianz   | 14.547619  |                         |
|   |    |    |    | Hypothetische Differenz der Mittelwerte                                | 0          | $H_0$ : keine Differenz |
|   |    |    |    | Freiheitsgrade (df)  | 12         | zwischen der            |
|   |    |    |    | t-Statistik  | -1.261283  | Wirkungen               |
|   |    |    |    | P(T<=t) einseitig  | 0.1155878  |                         |
|   |    |    |    | Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test                               | 1.7822875  |                         |
|   |    |    |    | P(T<=t) zweiseitig   | 0.2311755  | $H_0$ ist richtig       |
|   |    |    |    | Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test                              | 2.1788128  |                         |

37

| Freiheitsgrad (FG) | p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)  |       |       |       |       |       |       |
|--------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                    | 0,4  | 0,25  | 0,1   | 0,05  | 0,025 | 0,01  | 0,005 |
|                    | p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test) |       |       |       |       |       |       |
|                    | 0,8  | 0,5   | 0,2   | 0,1   | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                  | 0,325  | 1,000 | 3,078 | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                  | 0,289  | 0,816 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3                  | 0,277  | 0,765 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4                  | 0,271  | 0,741 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5                  | 0,267  | 0,727 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6                  | 0,265  | 0,718 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7                  | 0,263  | 0,711 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8                  | 0,262  | 0,706 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9                  | 0,261  | 0,703 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10                 | 0,260  | 0,700 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11                 | 0,260  | 0,697 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12                 | 0,259  | 0,695 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13                 | 0,259  | 0,694 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14                 | 0,258  | 0,692 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15                 | 0,258  | 0,691 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |

38

### Einstichproben t-Test

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,05)} = 2.160 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p < 0.05 \text{)}$$

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,01)} = 3.012 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p < 0.01 \text{)}$$

$$|t| = 4.934 \geq t_{13, \text{krit}(0.00027)} = 4.934 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p \leq 0.00027 \text{)}$$

5 Kniebeugen verursachen Veränderung der Pulsfrequenzen mit einem Signifikanzniveau von 5 % (sogar: 1 %, ..., 0.027%)

### Zweistichproben t-Test

$$|t| = 1.261 < t_{12, \text{krit}(0,05)} = 2.179 \quad H_0 \text{ ist richtig}$$

Es gibt keine signifikante Differenz zwischen der Pulsfrequenzen in der Männer- und Frauengruppen nach 5 Kniebeugen.

39