# Hypothesenprüfungen

Dr László Smeller

1

## Vergleich der Schätzungen und Hypothesenprüfungen

**Schätzungen:**

Frage: Wie groß (ist eine physikalische Größe) $\mu=?$

z.B.: Körperhöhe, Blutdruck, Blutzuckerkonzentration...

Antwort: Punktschätzung: Ein Wert

Intervallschätzung: Ein Intervall + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrscheinlichkeit)

**Hypothesenprüfungen:**

Frage: Eine Entscheidungsfrage (ist es wahr oder nicht?)

zB: hat ein Medikament eine Wirkung oder nicht?

Mathematisch: ist $\mu=\mu_0$?

Antwort: Ja oder Nein + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrsch.)

Signifikanzniveau (Irrtumswahrsch.)

## Typische Aufgaben der Hypothesenprüfung

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
   1a. Verursacht es eine Änderung (zB. Blutdruckänderung, d.h.: ist der Blutdruck kleiner nach der Eingabe?)
   1b. Gibt es einen Unterschied zwischen den unbehandelten und behandelten Gruppen?

2. Gibt es eine Korrelation
   2. a. zwischen zwei Parametern (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)
   2. b. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei Eigenschaften (Alkoholismus, Leberschrumpfung)

## Typische Fragen - gebrauchte Merkmale

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
   Änderung von einer **numerischen (kontinuierlichen) Größe**
   (zB. Blutdruck, Körpertemperatur, Blutzuckerkonzentration, …)
   1a. Änderung nach einem Einfluss an einer Stichprobe
   1b. Unterschied zwischen zwei Stichproben

2. Gibt es eine Korrelation
   2a. zwischen **zwei numerischen Größen**
   (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)
   2b. zwischen zwei (oder mehreren) **kategorischen Merkmalen**
   (zB: Alkoholiker – Antialkoholiker, Leberschrumpfung – keine Leberschr.
   Raucher – Nichtraucher, Lungenkrebs – kein Lungenkrebs)

## Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Die Wirkung
Die Korrelation
} können viele unterschiedliche Stärke aufnehmen

⇩

unprognostizierbar

⇩

mathematisch unbehandelbar

☹

Keine Wirkung
Keine Korrelation
} nur zufällige Effekte treten auf

⇩

mathematisch gut beschreibbar!

☺

## Die Nullhypothese und die Alternativhypothese

### Nullhypothese ($H_0$):

Es gibt **keine Wirkung** $\mu=\mu_0$

Alle **Abweichungen** von dem theoretischen Wert sind rein **zufällig**.

### Alternativhypothese ($H_1$)

Es gibt eine Wirkung $\mu\neq\mu_0$

Die Abweichungen sind nicht zufällig, sondern systematisch!

Eine von $H_0$ und $H_1$ wird unbedingt auftreten! $p(H_0 \text{ oder } H_1)=1$

## Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Sei es vorausgesetzt, dass wir keine Wirkung/Korrelation haben!
(D.h. $H_0$ ist richtig.)

Wenn unsere Ergebnisse dieser Voraussetzung nicht entsprechen, dann haben wir wahrscheinlich eine Wirkung/Korrelation.

Keine Wirkung:
zB: Fiebermittel: Wenn es keine Wirkung gibt, ist die Temperaturänderung nach der Eingabe = 0.

## 1. Beispiel: Fibermittel

Seien die Temperaturen vor und nach der Eingabe gemessen.
Die Messergebnisse (in °C):

Temperatur-änderung

| $T_{vor}$ | $T_{nach}$ | $x=T_{nach}-T_{vor}$ |
|---|---|---|
| 39,7 | 39,2 | -0,5 |
| 38,8 | 38,4 | -0,4 |
| 37,9 | 38,7 | 0,8 |
| 39,2 | 38,7 | -0,5 |
| Durchschnitt $\bar{x}$ | | -0,15 |


Nullhypothese: das Fiebermittel is unwirksam.
Die Temperaturänderungen ($x_i$) sind zufällig.
Der Erwartungswert der Temperaturänderungen ist Null.

## 1. Beispiel: Fibermittel

Die Nullhypothese entspricht $\mu = \mu_0 = 0$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, $\bar{x}$ befindet sich nicht weit von $\mu_0$.

Ist $\bar{x} = -0{,}15$ klein genug, um die Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist $\bar{x} = -0{,}15$ groß genug, um die Nullhypothese abzulehnen?

Aber wo ist die Grenze? Wie groß muss der Durchschnitt sein, um die Nullhypothese abzulehnen?

Bemerkung: Auch wenn die Nullhypothese gültig ist, kann $\bar{x}$ zufällig sehr groß sein. Aber mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit!

## 1. Beispiel: Fibermittel

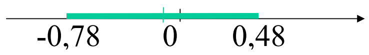
Schätzung des Erwartungswertes:

$\mu$ befindet sich mit 95% Wahrscheinlichkeit im Konfidenzbereich von $\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}}$

In diesem Beispiel: $s = 0{,}635$ °C $\quad s_{\bar{x}} = 0{,}317$ °C

Konfidenzintervall für den Erwartungswert:

grob: $\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}} = -0{,}15 \pm 0{,}63$




$\Rightarrow$ $\mu$ kann 0 sein! Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die $H_0$ gültig ist.

Das war die naive Annäherung…

## 2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.

Wird die Pulszahl geändert nach der Kniebeugungen?

$H_0$: keine Änderung $\quad \mu=0$

| $p_{vor}$ | $p_{nach}$ | $x=\Delta p$ |
|---|---|---|
| 65 | 79 | 14 |
| 68 | 77 | 9 |
| 72 | 91 | 19 |
| 63 | 70 | 7 |
| 74 | 88 | 14 |
| 69 | 84 | 15 |
| | Durchsch. | 13 |
| | Stabw. | 4,34 |
| | Stfehler | 1,77 |
| | | |

95% Konfidenzintervall für $\mu$:

$13{,}0 \pm 2 \cdot 1{,}77 \ ^1/_{\min}$

$13{,}0 \pm 3{,}5 \ ^1/_{\min}$


0 liegt nicht in diesem Bereich, d.h. wahrscheinlich: $\mu \neq 0$

Die Nullhypothese kann abgelehnt werden. $\boxed{95\%\ !}$

Das war die naive Annäherung…

## *Der t-Wert*

Die zufällige Abweichung des Durchschnittwertes von $\mu$ ist von $s_{\bar{x}}$ charakterisiert. Die zufällige Abweichungen können einige $s_{\bar{x}}$ sein. (Genauer: $\sigma / \sqrt{n}$ )

Definieren wir eine neue Größe:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}}$$

( $\bar{x}$ in $s_{\bar{x}}$ Einheiten gemessen)

oder mathematisch:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$t$ für unseren „Fibermittel“:

$t = -0{,}15/0{,}317 = -0{,}47$

für Kniebeugungen $t' = 7{,}34$

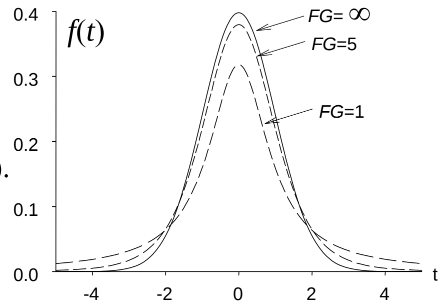
## *Der t-Wert*

$t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, alle $x_i$ Werte folgen einer Verteilung mit $\mu = 0$.

Wenn diese Verteilung eine Normalverteilung ist, kann die Verteilung von $t$ berechnet werden: $t$-Verteilung

Wenn die Nullhypothese gültig ist, der aus unserer Stichprobe ausgerechnete $t$-Wert folgt einer $t$-Verteilung (Student-Vert.).



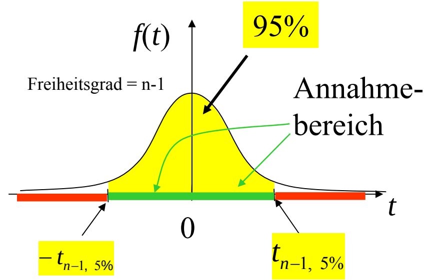

Bedingung: $x$ muss normalverteilt sein.

## Die Anwendung der $t$-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Richtigkeit der Nullhypothese

$-t_{n-1,\ 5\%} < t < +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 95%.




***Bei richtiger Nullhypothese*** ist der aus der Stichprobe ausgerechnete $t$-Wert mit 95% Wahrscheinlichkeit in dem Annahmebereich. Wir können diesen kleinen $t$-Wert mit zufälligen Abweichungen erklären. ⇒ Wir müssen keine Wirkung voraussetzen.

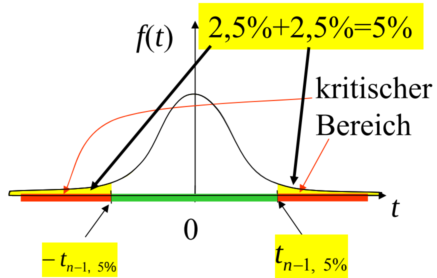
***Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.***

## Die Anwendung der $t$-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Richtigkeit der Nullhypothese

$t < -t_{n-1,\ 5\%}$ oder $t > +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 5%.




D.h.: Es ist sehr unwahrscheinlich (<5%), dass wir ***bei richtiger Nullhypothese*** einen so großen $t$-Wert bekommen. ⇒ Wir haben wahrscheinlich eine Wirkung, ***die Nullhypothese kann abgelehnt werden, die Alternativhypothese ist wahrscheinlich richtig.***

Das 5% nennt man als ***Signifikanzniveau*** oder ***Irrtumswahrscheinlichkeit.***

## Ablauf der Hypothesenprüfung bei einem $t$-Test

1. Fragestellung (mit der Definition der Population!)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus ($p$)
4. Messung (Stichprobe mit $n$ Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des $t$-Wertes
6. Vergleich von unserem $t$ und dem Grenzwert ($t_{n-1,p}$)

   $|t| < t_{n-1,p}$ die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

   **Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.**

   $|t| > t_{n-1,p}$ die Nullhypothese kann mit einem $p$ Signifikanzniveau abgelehnt werden

   **Die Alternativhypothese ist wahrscheinlich richtig.**

! Bedingung: $x$ ist normalverteilt! !!!

## Beispiel des Fiebermittels

$\bar{\boldsymbol{x}} = -0{,}15 \quad \boldsymbol{s_x} = 0{,}317 \qquad \boldsymbol{n} = 4$

$$\boldsymbol{t} = \frac{-0{,}15}{0{,}317} = -0.47$$

$$-3{,}18 = -\boldsymbol{t}_{3,\ 5\%} < \boldsymbol{t} < +\boldsymbol{t}_{3,\ 5\%} = 3{,}18$$

$\Rightarrow$ ***t*** liegt in dem Annahmebereich, die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Das Medikament ist unwirksam**

(mit p=5% Irrtumswahrscheinlichkeit)

| FG \p | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
|---|---|---|---|
| 2 | 4.30266 | 6.96455 | 9.92499 |
| 3 | 3.18245 | 4.54071 | 5.84085 |
| 4 | 2.77645 | 3.74694 | 4.60408 |
| 5 | 2.57058 | 3.36493 | 4.03212 |
| 6 | 2.44691 | 3.14267 | 3.70743 |
| 7 | 2.36462 | 2.99795 | 3.49948 |
| 8 | 2.30601 | 2.89647 | 3.35538 |
| 9 | 2.26216 | 2.82143 | 3.24984 |
| 10 | 2.22814 | 2.76377 | 3.16926 |
| 11 | 2.20099 | 2.71808 | 3.10582 |
| 12 | 2.17881 | 2.68099 | 3.05454 |
| 13 | 2.16037 | 2.65030 | 3.01228 |
| 14 | 2.14479 | 2.62449 | 2.97685 |
| 15 | 2.13145 | 2.60248 | 2.94673 |
| 20 | 2.08596 | 2.52798 | 2.84534 |
| 50 | 2.00856 | 2.40327 | 2.67779 |
| 70 | 1.99444 | 2.38080 | 2.64790 |
| 100 | 1.98397 | 2.36421 | 2.62589 |
| unendlich | 1.95996 | 2.32635 | 2.57583 |

## Beispiel der Kniebeugungen

$\bar{\boldsymbol{x}} = 13 \quad \boldsymbol{s_x} = 1{,}77 \qquad \boldsymbol{n} = 6$

$$\boldsymbol{t} = \frac{13}{1{,}77} = 7.34$$

$$\boldsymbol{t} > +\boldsymbol{t}_{5,\ 5\%} = 2{,}57$$

$\Rightarrow$ ***t*** liegt in dem kritischen Bereich, die Nullhypothese kann abgelehnt werden, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Die „Behandlung“ ist wirksam**

**(**mit p=5% Irrtumswahrscheinlichkeit)

Auch bei 2 % und bei 1% Irrtumswahrscheinlichkeit!

| FG \p | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
|---|---|---|---|
| 2 | 4.30266 | 6.96455 | 9.92499 |
| 3 | 3.18245 | 4.54071 | 5.84085 |
| 4 | 2.77645 | 3.74694 | 4.60408 |
| 5 | 2.57058 | 3.36493 | 4.03212 |
| 6 | 2.44691 | 3.14267 | 3.70743 |
| 7 | 2.36462 | 2.99795 | 3.49948 |
| 8 | 2.30601 | 2.89647 | 3.35538 |
| 9 | 2.26216 | 2.82143 | 3.24984 |
| 10 | 2.22814 | 2.76377 | 3.16926 |
| 11 | 2.20099 | 2.71808 | 3.10582 |
| 12 | 2.17881 | 2.68099 | 3.05454 |
| 13 | 2.16037 | 2.65030 | 3.01228 |
| 14 | 2.14479 | 2.62449 | 2.97685 |
| 15 | 2.13145 | 2.60248 | 2.94673 |
| 20 | 2.08596 | 2.52798 | 2.84534 |
| 50 | 2.00856 | 2.40327 | 2.67779 |
| 70 | 1.99444 | 2.38080 | 2.64790 |
| 100 | 1.98397 | 2.36421 | 2.62589 |
| unendlich | 1.95996 | 2.32635 | 2.57583 |

## Entscheidung mit dem p-Wert

Computern berechnen den *p*-Wert. z.B. Funtion **ttest** in Excel.

1. Fragestellung (mit Definition der Population!)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus ($p_0$)
4. Messung (Stichprobe mit *n* Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des *p*-Wertes
6. Vergleich von unserem *p* und dem festgelegten Signifikanzniveau ($p_0$)

$p > p_0$ die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

**Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.**

$p < p_0$ die Nullhypothese kann mit einem $p_0$ Signifikanzniveau abgelehnt werden

**Die Alternativhypothese ist wahrscheinlich richtig.**