

## Hypothesenprüfungen II.

Fehlern von erste u. zweite Art,  
Zwei Stichproben  $t$ -Test, F-Test,  
Bedingungen der Anwendung der  $t$ -Teste  
Varianzanalyse

László Smeller

### Widerholung: Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Zu entscheidende Frage

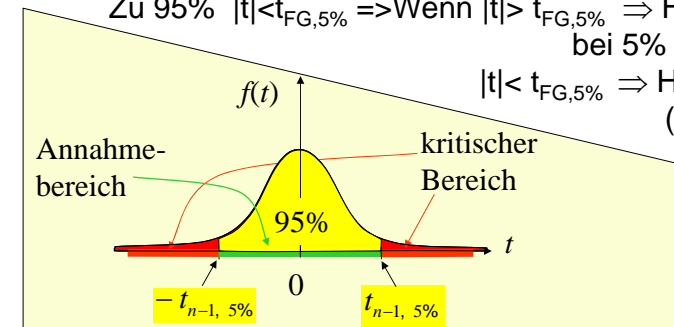
Indirekter Beweis

Nullhypothese ( $H_0$ ): nur zufällige Änderungen  
mathematisch behandelbar

Ein geeigneter Parameter (z.B.  $t$ )

Bei Gültigkeit der  $H_0$   $t$  folgt einer gut bestimmten Verteilung  
(z.B.:  $t$ -Verteilung)

Zu 95%  $|t| < t_{FG,5\%} \Rightarrow$  Wenn  $|t| > t_{FG,5\%} \Rightarrow H_0$  wird abgelehnt  
bei 5% Irrtumswahrsch.  
 $|t| < t_{FG,5\%} \Rightarrow H_0$  wird beibehalten  
(bei 5% Irrtumsw.).



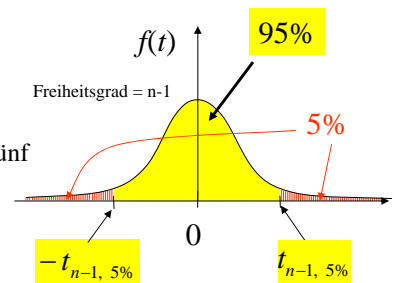
2

### Die Bedeutung des Signifikanzniveaus

Bei einem unwirksamen Medikament  
beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür,  
dass  $|t| > t_{n-1,p}$  ist, 5%.  
( $\Rightarrow$  Bei der Untersuchung von hundert  
unwirksamen Pillen werden zufällig fünf  
als wirksam gefunden!)



**Fehler erster Art**



### Fehler von 1. und 2. Art

#### Fehler erster Art:

Die Nullhypothese wird zufällig abgelehnt werden, obwohl sie richtig ist!

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art = Signifikanzniveau

*zB: Unwirksame Pille als wirksam gefunden*

Auch als  $\alpha$ -Fehler genannt.

#### Fehler zweiter Art:

Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl sie nicht richtig ist.

Wahrscheinlichkeit = ?

*zB: Die Wirkung einer Pille ist so klein, dass man es aus der Messung nicht beweisen kann.  $\Rightarrow$  Man braucht noch mehrere Messungen.*

*$\Rightarrow$  So kleine Wirkung ist oft uninteressant*

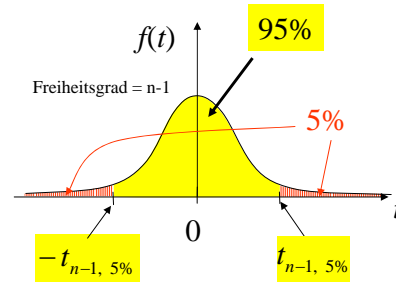
Auch als  $\beta$ -Fehler genannt.

## Einseitige/zweiseitige Teste

Ist es interessant wenn das Medikament die Körpertemperatur erhöht?

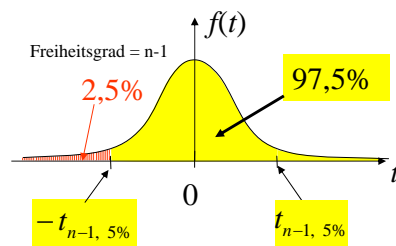
Zweiseitiger Test:

Nullhyp: das Medikament ändert die Körpertemperatur nicht.



Einseitiger Test

Nullhyp: das Medikament erniedrigt die Körpertemperatur nicht.



## Verallgemeinerung: $\mu_0 \neq 0$

Beispiel:

Eine Maschine stellt Pillen mit einem nominalen Wirkstoffgehalt von 20mg her.

Man mißt 10 Tabletten und die Wirkstoffgehalte sind (in mg):

20,1 19,8 19,5 17,9 18,8 19,9 18,6 20,3 19,2 19,3

Durchschnitt 19,34 mg, Standardabweichung 0,74 mg, Standardfehler 0,24 mg

Nullhypothese:  $\mu_0 = 20$  mg

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

$t = -2,80$

## Übersicht der Teste

Stichproben \ Verteilung	Normalverteilte Daten	Die Verteilung der Daten ist unbekannt
Eine Stichprobe	Einstichproben t-Test ✓	Vorzeichenstest Wilcoxon Test
Zwei Stichproben	Zweistichproben t-test	Mann-Whittney U-Test
Mehrere Stichproben	ANOVA (Varianzanalyse)	Kruskal-Wallis Test

7

## Zweistichproben t-Test

Vergleich von zwei Stichproben (zwei Populationen)

Warum?

- zwei wesentlich unterschiedliche Populationen (z.B.: Männer und Frauen)
- Vermeidung des Placeboeffektes mit Anwendung einer Kontrollgruppe. (Doppelblindstudie) (Placebo: Pille ohne Wirkstoff)
  - Randomisation ist wichtig! (wenn möglich)
  - ethische Hinsicht: kein Patient darf unbehandelt bleiben: Vergleich von alte und neue Medikamente oder Behandlungen.

8

## Zweistichproben t-Test: Frage, Nullhypothese

Frage: Ist der zu vergleichende Parameter unterschiedlich in der zwei Populationen?

Mathematisch: Sind die Erwartungswerte in der zwei Populationen unterschiedlich?  
(Stammen die zwei Stichproben aus einem Population?)



$$\mu_1 \neq \mu_2$$

Nullhypothese: Es gibt kein Unterschied, die Erwartungswerte sind gleich:  $\mu_1 = \mu_2$

9

## Zweistichproben t-Test : Beispiel

Ist die Körperhöhe der Jungen höher als die Körperhöhe der Mädchen?

Zwei Populationen: Jungen u. Mädchen

Nullhypothese:

Jungen u. Mädchen sind gleich hoch.

Der Erwartungswert der Körperhöhe der Jungen ist gleich der Erwartungswert der Körperhöhe der Mädchen

$$\mu_{\text{Mädchen}} = \mu_{\text{Jungen}}$$

10

## Zweistichproben t-Test

Auch wenn  $\mu_{\text{Mädchen}} = \mu_{\text{Jungen}}$  die Durchschnittswerte können unterschiedlich sein:

$$\bar{x}_{\text{Mädchen}} \neq \bar{x}_{\text{Jungen}}$$

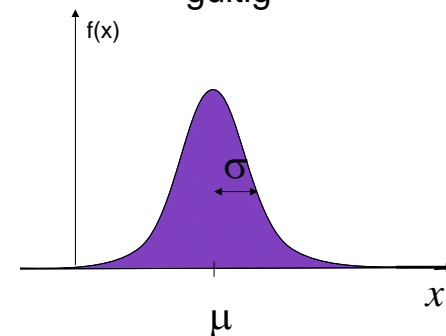
Ist dieser Unterschied zufällig (statistisch), oder ist es die Konsequenz des Unterschiedes zwischen der zwei Populationen (Mädchen u. Jungen)?

11

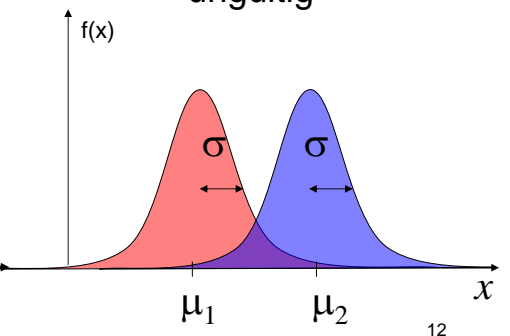
Nehmen wir an:

- Die beide Verteilungen sind Normalverteilungen,
- und die Varianzen (Streuungen) sind gleich (Bedingungen des Zweistichproben t-Testes)

Nullhypothese ist gültig



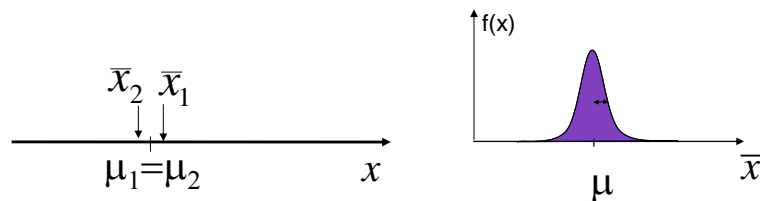
Nullhypothese ist ungültig



12

Aus der zwei Populationen nimmt man zwei Stichproben, man kann die zwei Durchschnittswerte vergleichen.

Angenommen dass die Nullhypothese gültig ist:



Ist  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  zufällig oder groß genug um die Nullhypothese abzulehnen?

13

Die Berechnung des Parameters  $t$

Wir brauchen einen Parameter ähnlich zu  $t$  beim Einstichprobentest

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{Q_{x1} + Q_{x2}}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$Q_{x1} = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$$

$$Q_{x2} = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

Ähnlichkeit zum Einstichprobentest:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}}{s_x} \sqrt{n} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{Q_x}{n-1}}} \sqrt{n}$$

14

Der Parameter  $t$

Bei Gültigkeit der Nullhypothese  $t$  folgt eine  $t$ -Verteilung mit Freiheitsgrad von  $n_1 + n_2 - 2$ .

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{Q_{x1} + Q_{x2}}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

Entscheidung:  
wie bei Einstichproben  $t$ -Test

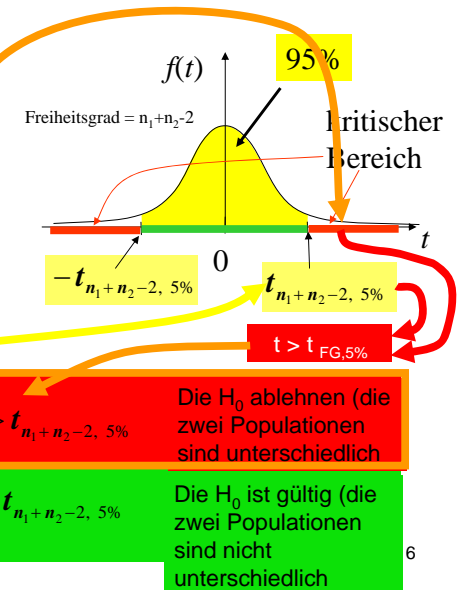
15

Die Entscheidung

5 %  
t-Tabelle

FG \ p	0.05	0.02	0.01
2	4.30266	6.96455	9.92499
3	3.18245	4.54071	5.84085
4	2.77645	3.74694	4.60408
5	2.57058	3.36493	4.03212
6	2.44691	3.14267	3.70743
7	2.36462	2.99795	3.49948
8	2.30601	2.89647	3.35538
9	2.26216	2.82143	3.24984
10	2.22814	2.76377	3.16926
11	2.20099	2.71808	3.10582
12	2.17881	2.68099	3.05454
13	2.16037	2.65030	3.01228
14	2.14479	2.62635	2.97685
15	2.13145	2.60248	2.94673
20	2.08596	2.52798	2.84534
50	2.00856	2.40327	2.67779
70	1.99444	2.38080	2.64790
100	1.98397	2.36421	2.62589
unendlich	1.95996	2.32635	2.57583

zB:  $n_1=7, n_2=9$   $t=2,35$   
FG:  $n_1+n_2-2=14$   $t_{FG,5\%}=2,14479$



6

## Gepaarte –ungepaarte Teste

### Einstichprobentest

Name	T <sub>vor</sub>	T <sub>nach</sub>
Anna	39,7	39,2
Benjamin	38,8	38,4
Christina	37,9	38,7
Daniel	39,2	38,7

### Gepaarte Daten

### Zweistichprobentest

Name	Höhe [cm]	Name	Höhe [cm]
Benjamin	189	Anna	175
Christian	175	Eva	155
Daniel	180	Frederike	167
Gabriel	165	Judith	180
Henrik	187		

### Ungepaarte Daten

Diese Daten können nicht in Paare geordnet werden

17

## Vergleich der Effektivität der gepaarten-ungepaarten Teste

Ungepaarte Test  
Zweistichproben t-Test

Kein signifikanter  
Unterschied



Gepaarte Test:  
Einstichproben t-Test

Signifikanter  
Unterschied



18

## F-test

Frage:

Sind die Varianzen in zwei Stichproben Gleich?

Nullhypothese: Die Varianzen sind gleich

Parameter:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$s_1 > s_2$

Bei der Gültigkeit der Nullhypothese  $F$  folgt eine F-Verteilung mit  $n_1-1$  und  $n_2-1$  Freiheitsgrade

Bemerkung: Tabelle zum einseitigen Test!

Wir brauchen einen zweiseitigen Test!

19

## F-test

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Aus der Tabelle

$$F < F_{n_1-1, n_2-1; 5\%}$$

Nullhypothese ist gültig zu 5% Irrtumswahrsch.  
d.h. die Varianzen sind gleich

Gut für Zweistichproben t-Test

$$F > F_{n_1-1, n_2-1; 5\%}$$

Nullhypothese ist ungültig zu 5% Irrtumsw.  
d.h. die Varianzen sind nicht gleich

20

## Wenn die Streuungen sind ungleich

Die Daten können transformiert werden so dass der Zweistichprobentest durchgeführt werden kann.  
Auch als Welch-Test bekannt.

(Excel kann diese Transformation ausrechnen).

TTEST(Daten1;Daten2;Seiten;3)



21

## Hypothesenprüfungen mit Excel

Excel Funktion für t-Teste:  
(Ein- u. Zweistichproben t-Teste)

**ttest**(Reihe1; Reihe2; Seiten; Typ)

Typ: 1 - gepaart (Eine Stichprobe)  
2 - Zwei Stichproben, gleiche Varianz  
3 - Zwei Stichproben, ungleiche Varianz

**Ftest**(Reihe1; Reihe2)

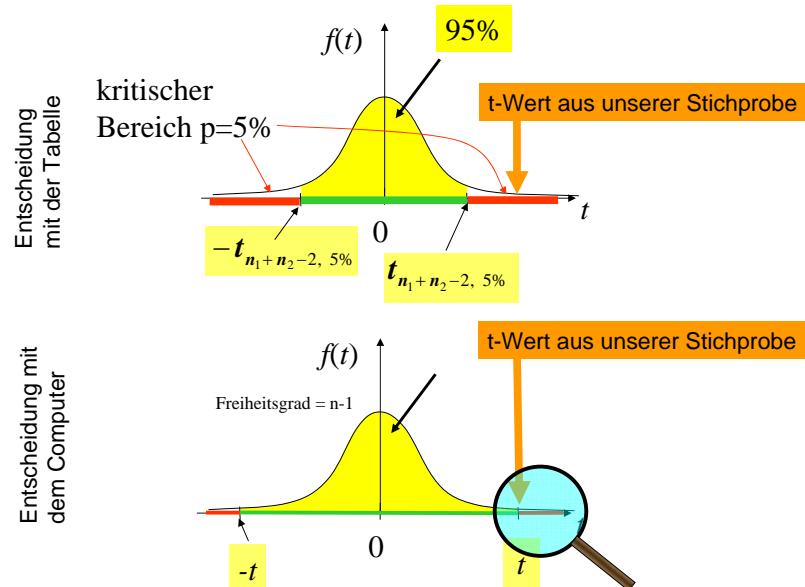
Diese Funktionen geben **p** an

Entscheidung:  $p < 5\%$   $H_0$  wird mit 5% Sing.N abgelehnt  
 $p > 5\%$   $H_0$  wird nicht abgelehnt (5% S.N.)

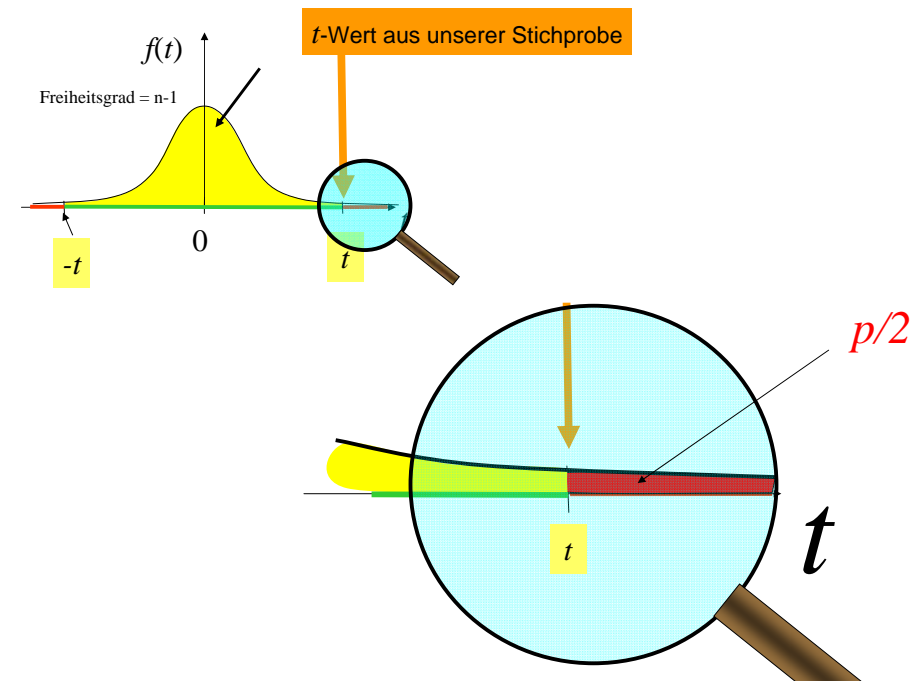
Bemerkung: die Ftest() Funktion im Excel gibt p des zweiseitigen Tests

22

## Die Bedeutung des p-Wertes der Excel Funktion



23



## Zusammenfassung: Zweistichproben $t$ -Test

Vergleich von zwei Populationen durch zwei Stichproben

Bedingung: Normalverteilung mit derselben Varianz

Prüfung der Varianzen:  $F$ -Test

Die Varianzen sind: gleich      ungleich

Transformation (oder Typ 3 im Excel)

Berechnung des  $t$ -Wertes oder des  $p$ -Wertes

Ist  $t > t_{n-2, 5\%}$  oder  $p < 5\%$  ?

ja

$H_0$  mit 5% oder  $p$   
Irrtumswahrsch.  
ablehnen

nein

$H_0$  kann nicht  
abgelehnt werden  
(mit 5% bzw.  $p$   
Irrtumswahrsch.)