Kontingenztabellen. Chi-Quadrat-Test

1. **Unabhängigkeitstest**
2. **Anpassungstest**
3. **Homogenitätstest**

Beispiel 1

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	28	75	103
Mann	48	49	97
	76	124	200

?

KAD 2013.11.20

1. Unabhängigkeitstest

Korrelationsanalyse zwischen kategorischen Merkmalen

Häufigkeitstabelle (Kontingenztabelle): eine tabellarische Darstellung der gemeinsamen Häufigkeitsverteilung zweier Variablen X (z.B. Geschlecht) und Y (Brillenträgerschaft)

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

Frage: unterscheidet sich die Häufigkeit eines feststellbaren Merkmals (Symptoms) in zwei Populationen?

Aufstellung der Nullhypothese

H_0: Geschlecht und Brillenträgerschaft sind voneinander **unabhängig** (es gibt keinen Unterschied)

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b'}{d'}$$

Wie gross wäre die **erwartete Häufigkeit** (expected frequency) in der Zelle *a'*, wenn die Nullhypothese gültig ist?

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a'=?	b'=?	103
Mann	c'=?	d'=?	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

Anzahl der Frauen:
$a + b = 103$
Anzahl der Personen mit Brille:
$a + c = 76$

Proportion der Frauen in der Stichprobe:
P(Frau) = $(a + b)/n$= 103/200
Proportion der Personen mit Brille:
P(mit Brille) = $(a + c)/n$= 76/200

Erwartete Häufigkeiten. Annahme: H_0 ist gültig ⇨
Geschlecht und Brillenträgerschaft sind unabhängige Ereignisse

erwartete Häufigkeit in der Zelle links oben: $a' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(a+b)\cdot(a+c)}{n}$

erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts oben: $b' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(a+b)\cdot(b+d)}{n}$

erwartete Häufigkeit in der Zelle links unten: $c' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(c+d)\cdot(a+c)}{n}$

erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts unten: $d' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(c+d)\cdot(b+d)}{n}$

	mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103
M	c=48	d=49	97
	76	124	200

empirische (observierte, observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	103*76/200	103*124/200	103
M	97*76/200	97*124/200	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

Die erwartete Häufigkeiten aus der empirischen Häufigkeiten

	mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103
M	c=48	d=49	97
	76	124	200

empirische (observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	a'=39.14	b'=63.86	103
M	c'=36.86	d'=60.14	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

$$(\text{erwartete Häufigkeit}) = \frac{(\text{Spaltensumme}) \cdot (\text{Zeilensumme})}{(\text{Anzahl der Daten in der Stichprobe})}$$

Wenn die Nullhypothese ist gültig:
Die Werte in der entsprechenden Zellen der Kontingenztabellen mit empirischen und erwarteten Häufigkeiten sind ungefähr gleich.
Die folgende Prüfgrösse (gewichtete quadratische Summe) zeigt **Chi-quadrat Verteilung**:

Prüfgrösse

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

wobei
O_i die empirische (observed)
E_i die erwartete (expected) Häufigkeit
in der i-ten Zelle sind.
Freiheitsgrad: (Anzahl der Zeilen –1)*(Anzahl der Spalten –1)
für eindimensionalen Tabellen: *n*-1

z.B. 2*2 (vierfelder-) Tabelle: 1

Wiederholung

Wichtige Verteilungen der analytischen Statsitik

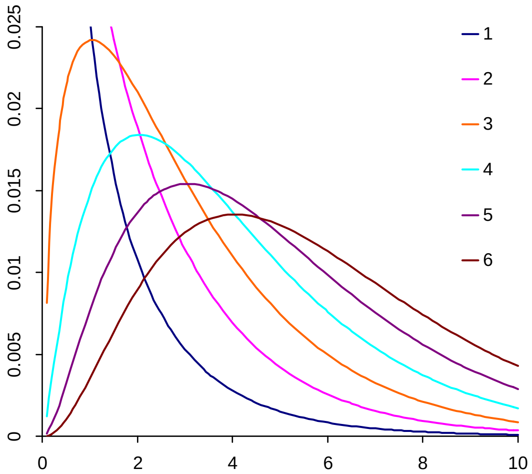
Chi-Quadrat (χ^2) Verteilung

Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrössen sind, dann hat die Zufallsgrösse

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

eine sogenannte χ^2 –Verteilung mit *n* Freiheitsgraden

$$\mu = n$$
$$\sigma^2 = 2n$$



Modus = 0, wenn FG =1 bzw. 2

Modus = (FG-2), wenn FG >2

Bedingungen der Durchführung

n (Stichprobenumfang) soll genügend gross sein

In der Kontingenztabelle der *erwarteten* Häufigkeiten sollen alle Zellenwerte grösser als 1 sein.

In der Kontingenztabelle der erwarteten Häufigkeiten soll die Anzahl der Zellen, in den der Wert zwischen 1 und 5 ist, weniger als 20 % der Stichprobenumfang sein.

(z.B. Vierfeldertabelle: alle Elemente sollen grösser als 5 sein)

Spezielfall für Vierfeldertabelle (Praktikumsbuch 2.b.30)

Vierveldertest

	das untersuchte Merkmal		insgesamt
	ist vorhanden	ist nicht vorhanden	
Kollektiv A	a	b	$a+b$
Kollektiv B	c	d	$c+d$
insgesamt	$a+c$	$b+d$	n

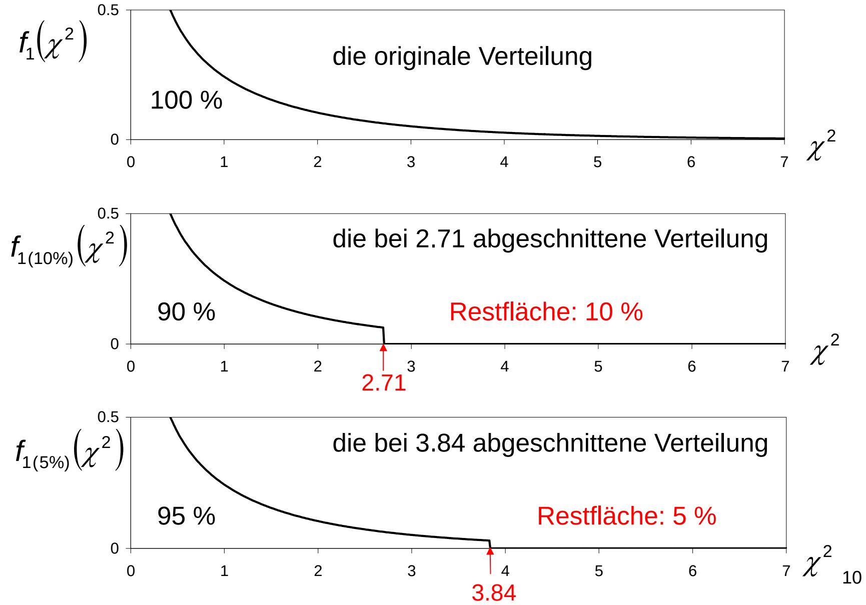
$$\chi^2_{\mathrm{M}} = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Die Bedingung der Durchführung:

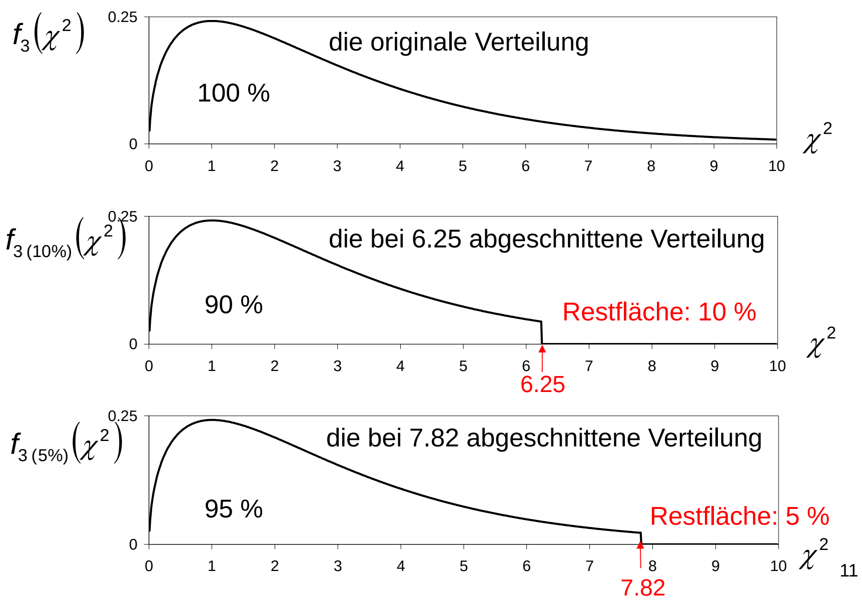
das Produkt der zwei kleinsten Teilsummen soll grösser sein als 5n

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

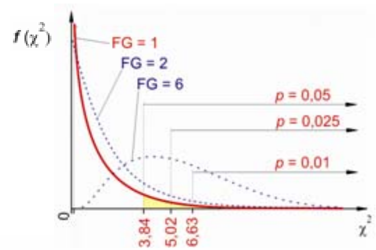
Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 1



Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 3



χ^2 (CHI-QUADRAT)-VERTEILUNG



Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
	0,99	**0,975**	**0,95**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,001**
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	26,13

Beispiel 1 Die Bedingung des Tests:
das Produkt der zwei kleinsten
Teilsummen soll grösser sein als 5*n*

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

76*97 = 7372 > 5*200 =1000

Man darf den Chi-Quadrat-Test anwenden

$$\chi^2_M = \frac{200\cdot(28\cdot 49 - 48\cdot 75)^2}{76\cdot 124\cdot 103\cdot 97} = 10.54$$

10.54 > χ^2_{krit} =3,84 H_0 ist falsch

Es gibt einen Zusammenhang zw. dem Geschlecht und der Brillenträgerschaft (Männer tragen Brille öfter)

	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
Freiheits-grad (FG)	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83

$$\chi^2_M = \frac{200\cdot(28\cdot 49 - 48\cdot 75)^2}{76\cdot 124\cdot 103\cdot 97} = 10.54$$

10.54 > χ^2_{krit} =3.84 H_0 ist falsch

10.54 > χ^2_{krit} =6.63 H_0 ist falsch

mit einem Signifikanzniveau: <0.01

	A	B	C	D
1	Empirische Werte			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	=SUMME(B3:C3)
4	Mann	48	49	=SUMME(B4:C4)
5		=SUMME(B3:B4)	=SUMME(C3:C4)	=SUMME(B5:C5)
6				
7	Ewartete Werte			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	=$D3*B$5/$D$5	=$D3*C$5/$D$5	=SUMME(B9:C9)
10	Mann	=$D4*B$5/$D$5	=$D4*C$5/$D$5	=SUMME(B10:C10)
11		=SUMME(B9:B10)	=SUMME(C9:C10)	=SUMME(B11:C11)
12				
13			Signifikanzniveau:	=CHITEST(B3:C4,B9:C10)
14			Chi²-Wert:	=CHIINV(D13,1)

	A	B	C	D
1	Empirische Werte			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	103
4	Mann	48	49	97
5		76	124	200
6				
7	Ewartete Werte			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	39.140	63.860	103
10	Mann	36.860	60.140	97
11		76	124	200
12				
13			Signifikanzniveau:	0.0012
14			Chi²-Wert:	10.5442606

Kalkulation mit Excel

Beispiel 2

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	1	3	4
Mann	5	3	8
	6	6	12

?

4*6 = 24 < 5*12 =60

Dürfen wir in diesem Fall den Chi-Quadrat-Test nicht anwenden.

Erhöhung des Umfanges der Stichprobe

	mit	ohne	Total
F	1	3	4
M	5	3	8
	6	6	12

12 → 200

	mit	ohne	Total
F	28	75	103
M	48	49	97
	76	124	200

Frauen: $\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{1}{3} = 0.33$ $\qquad$ $\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{28}{75} = 0.37$

Männer: $\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{5}{3} = 1.67$ $\qquad$ $\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{48}{49} = 0.98$

es gibt eine Vermutung, aber der Nachweis geht nicht

n vergrössert sich (12 → 200): der Nachweis geht

Beispiel 3 H_0: die Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nichtrauchern ist identisch, d.h. $\chi^2 = 0$.

H_1: die beiden Häufigkeiten unterscheiden sich, also ist $\chi^2 \neq 0$.

In der Tabelle sind die Häufigkeiten der zwei Kollektive aus der Stichprobe einer Lungenfürsorge dargestellt.

	Lungen krebs	kein Lungen krebs	
Raucher	14	13	27
Nichtraucher	9	25	34
	23	38	61

Da 23·27 = 621 > 5·61 = 305, kann der Test durchgeführt werden.

$$\chi^2_{\mathrm{M}} = \frac{61 \cdot (14 \cdot 25 - 9 \cdot 13)^2}{23 \cdot 38 \cdot 34 \cdot 27} = 4.13$$

Es ist zu sehen, dass $\chi^2_{\mathrm{M}} \neq 0$ ist, aber ist der Unterschied auch signifikant (oder nur zufällig)?

Sei das Signifikanzniveau: 5%.
Der Freiheitsgrad (2x2 Tabelle) ist: 1.

$4.13 > \chi^2_{\text{krit}} = 3{,}84$ ⇨ H_0 ist falsch

Danach ist der Unterschied in der Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nicht-rauchern signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%).

Pr.Buch 2.b.29 (Bemerkung 15)

Beispiel 4 (Pr. Buch, R.103.) Über eine erfolgreiche operative Korrektion einer bestimmten Augenkrankheit (ischaemische optische Neuropathie vom nicht-arterialen Typ) wurde im Jahre 1989 eine Veröffentlichung ausgegeben. Da in dieser Krankheit früher keinerlei wirksame Behandlungsmethode bekannt war, wurde dieser Eingriff verbreitet angewendet. Kürzlich erschienen jedoch Berichte auch von erfolglosen Eingriffen, daher hat man 244 solche Kranken in 25 klinischen Zentren statistisch erfasst, von denen bei 119 Personen die Operation durchgeführt wurde, bei 125 Kranken jedoch nicht. Die Beobachtungen in tabellarischer Form:

empirische Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	39	53	92
nicht verbessert	52	56	108
verschlechtert	28	16	44
insgesamt	119	125	244

erwartete Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	45	47	92
nicht verbessert	53	55	108
verschlechtert	21	23	44
insgesamt	119	125	244

Es ist mit statistischen Methoden zu prüfen, ob die Anzahl der Besserungen ohne Operation tatsächlich höher war? H_0: keine Differenz

khi² = $(39–44.87)^2/44.87+(53–47.13)^2/47.13 +(52–52.67)^2/52.67+(56–55.33)^2/55.33 +(28–21.46)^2/21.46+(16–22.54)^2/22.54 = 5.407$

Weil $5.407 < 5.991 = \chi^2_{\text{krit, FG=2}}$, ablehnen wir die H_0 nicht.

2. Anpassungstest

die beobachtete Messwerte passen zu einer Verteilung an?

Prüfung der Verteilungen (goodness of fit)

(reiner) Anpassungstest
(Vergleich der beobachteten Häufigkeiten mit Häufigkeiten einer bekannten Verteilung)

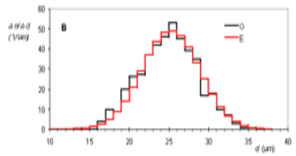
- auf Gleichverteilung
- auf weitere Verteilungen mit bekannten Parameter

Würfelversuch

1	2	3	4	5	6
21	14	14	19	16	16

Anpassungstest mit Parameterschätzung
(Parameter der Verteilung sind aus der beobachteten Häufigkeiten geschätzt)

- Normalitätstest
- auf weitere Verteilungen



Anpassungstest auf Gleichverteilung

Die Kontingenztabelle mit beobachteten Häufigkeiten (*O*) wird mit der erwarteten Häufigkeiten ergäntzt (*E*).
H_0:, Der Würfel ist regelmässig, die 6 mögliche Ereignisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit: 100/6 = 16.7

	1	2	3	4	5	6	Summe
O	21	14	14	19	16	16	100
E	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	100

chi^2= (21–16.7)^2/16.7 +(14–16.7)^2/16.7 + (14–16.7)^2/16.7+ +(19–16.7)^2/16.7 + (16–16.7)^2/16.7 +(16–16.7)^2/16.7 = =2.36 < 11.07= $\chi^2_{\text{krit, FG.=5}}$,

H_0 wird angenommen. Der Würfel ist regelmässig.

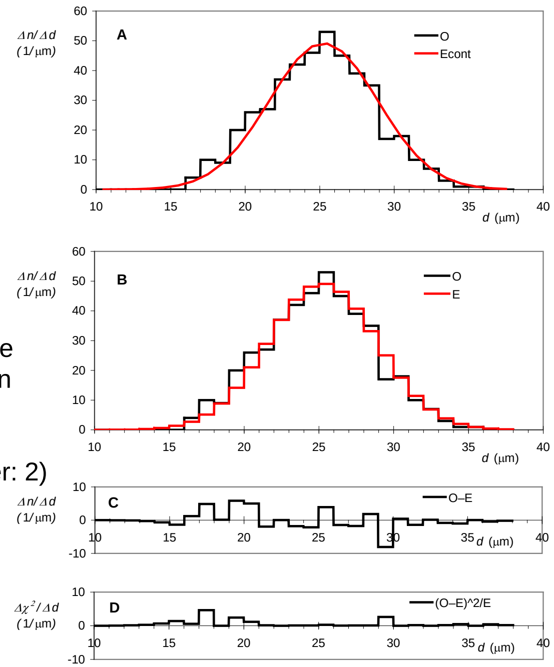
Prüfung der Verteilungen, Normalverteilung

H_0: der längere Durchmesser der Froscherythrozyten ist normalverteilt

Man schätzt die theoretische Werte der Verteilung mit den Stichprobenparametern.
FG = *n*-*m*-1, *m*: Anzahl der geschätzten Parameter (hier: 2)

...

$p = 0.9 > 0.05$ ⇨ H_0: ist richtig



3. Homogenitätstest

Prüfung der Homogenität
(test for homogeneity)

H_0: die Biophysik Kolloquiumsnote*-Verteilung in der weiblichen Gruppe hat die gleiche Verteilung wie in der männlichen (die Verteilungen sind homogene Verteilungen)

Kolloquiums-note , Biophysik	Frau	Mann	
5	22	12	34
4	26	31	57
3	27	38	65
2	23	25	48
1	14	13	24
	112	119	231

empirische (observed) Kreuztabelle

Kolloquiums-note , Biophysik	Frau	Mann	
5	16.5	17.5	34
4	27.6	29.4	57
3	31.5	33.5	65
2	23.3	24.7	48
1	13.1	13.9	24
	112	119	231

erwartete (expected) Kreuztabelle

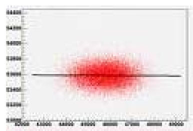
$p = 0.27 > 0.05$ ⇨ H_0: ist richtig

*Daten: 2009 Herbst Semester

Arten von Abhängigkeitsbeziehungen

Unabhängigkeit

IQ



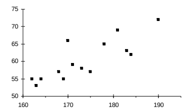
Körpergrösse

Abhängigkeit

stochastische Beziehung — deterministische Beziehung

Korrelations-analyse — vermischt — Assoziations-analyse

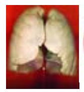
m



Körpergrösse

Geschmack

Färbung



n

Konzentration

numerisch — ordinal — nominal — numerisch