Biostatisztika és informatika alapjai

2. előadás: Függvénytani alapok

2014. szeptember 15.

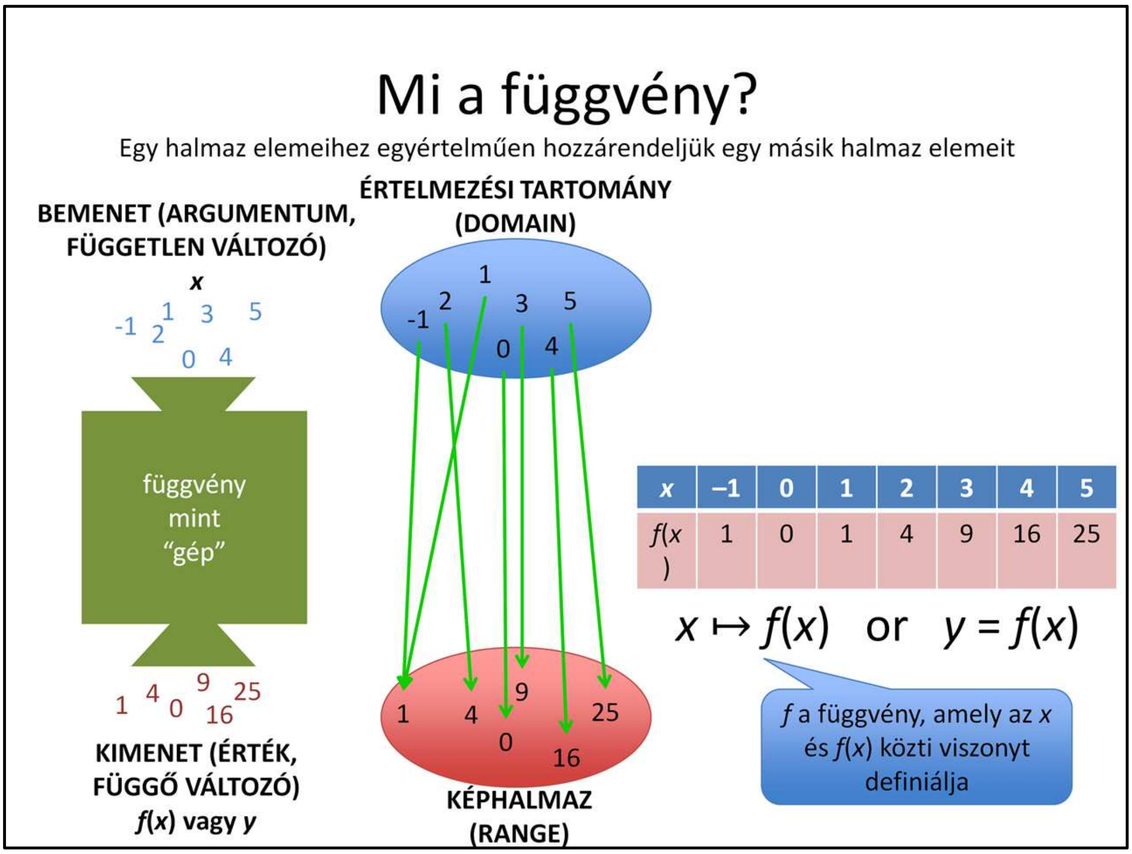
Agócs Gergely

Ebben az előadásban a függvénytan elemeit tekintjük át. Erre mind a statisztika, mind a fizika miatt szükségünk lesz

Statisztikán később függvényekkel írjuk le a valószínűségi változó eloszlását, amikre majd az összehasonlítást szolgáló statisztikai hipotézisvizsgálatokat alapozzuk. A kurzus vége felé pedig megtanuljuk, mi a mérési pontokra való függvényillesztésnek a statisztikai alapja. A statisztikai függvények elsősorban a változók véletlenszerű, stochasztikus viselkedését vizsgálják (pl. ugyanazt a mérést megismételve eltérések lépnek fel a kimenetelben, amit a múlt órán tanult gyakorisági függvényekkel tudunk majd jellemezni.)

A biofizika tantárgynak pedig az alapja a fizikai mennyiségek mint változók közötti kapcsolat megállapítása, matematikai leírása. Itt elsősorban olyan kapcsolatokat írunk le, amikor az egyik mennyiség egyértelműen meghatározza a másik mennyiség értékét (pl. egy tartályban lévő gáz térfogata és hőmérséklete). Az ilyen kapcsolatokat determinisztikusnak nevezzük.

A valóságban nincsenek tisztán determinisztikus jelenségek, és a tisztán stochasztikus is ritka, inkább a keverékük a jellemző.



A függvény definíciója röviden egyértelmű hozzárendelés. A függvény egy matematikai absztrakció, így célszerűbb példákat felhozni, hogy azon keresztül tudjunk általánosításokat levonni. Függvény például, ha egy betegcsoport tagjainak megadom a nevét: ekkor az adott személyhez hozzárendelek egyetlen nevet. Ugyanezt megtehetem az életkorával, testmagasságával, testtömegével. Persze ezeket az adatokat egymáshoz is rendelhetem: pl. a beteg nevéhez a beteg vércsoportját, illetve a beteg nevéhez a beteg testmegességát, vagy a beteg testmagasságához a beteg testtömegét stb. A matematikában használt függvények közül korábbi tanulmányainkból azokat ismerjük, amelyek számokhoz számokat rendelnek.

A fenti dián látható példában pl. a {-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} számokhoz rendeljük hozzá a négyzetüket. A függvény bemeneti értékeit (input), azaz amelyekhez hozzárendelünk valamit, szokás nevezni a függvény argumentumának, helyének, vagy független változójának. Ezen argumentumok összességét nevezzük értelmezési tartománynak (domain), D-vel jelölik.

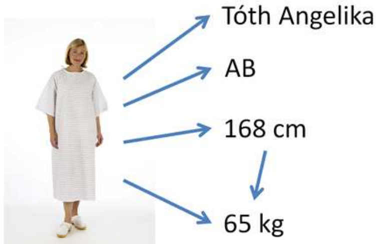
Minden értelmezési tartomány beli számhoz hozzárendeljük theát a négyzetét, vagyis teljesül a függvénykapcsolattal szembeni elvárás: minden független változóhoz rendelünk egy függő változót, de pontosan egyet. Az például előfordulhat, hogy két bemenethez is ugyanazt a kimenetet rendeljük (a példánkban -1 és 1 négyzete is egy) de az nem, hogy egy bemenethez két kimenet tartozzon (egy számnak csak egy négyzete van), illetve az sem, hogy valamelyiknek ne legyen négyzete. A kimeneti értékeket nevezik függvényértéknek vagy függő változónak is, együttesen a képhalmazt (iamge vagy range, jele: R) alkotják.

A függvénykapcsolatot megadhatjuk táblázatosan, de ha numerikus változóhoz rendelünk numerikus változót, akkor a matematikai egyenlettel való megadást kedveljük. Ilyenkor $x \mapsto f(x)$ formával jelöljük, ahol f a latin functio ‘függvény’ jele. Egyváltozós függvényekben a függő változó jele hagyományosa y vagy f(x), a függetlené x.

Függvénytípusok

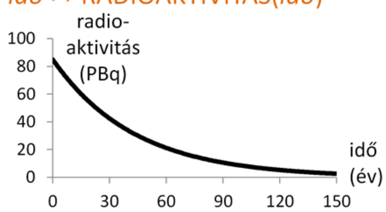
beteg ↦ NÉV(*beteg*)
beteg ↦ AB0 VÉRCSOPORT(*beteg*)
beteg ↦ TESTMAGASSÁG(*beteg*)
beteg ↦ TESTTÖMEG(*beteg*)

TESTMAGASSÁG(*beteg*) ↦ TESTTÖMEG(*beteg*)

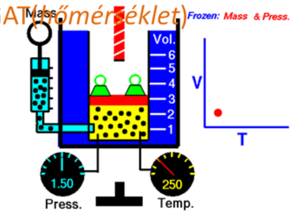


magasság ↦ GYAKORISÁG(*magasság*) pl. 164 cm ↦ 4 fő

idő ↦ RADIOAKTIVITÁS(*idő*)



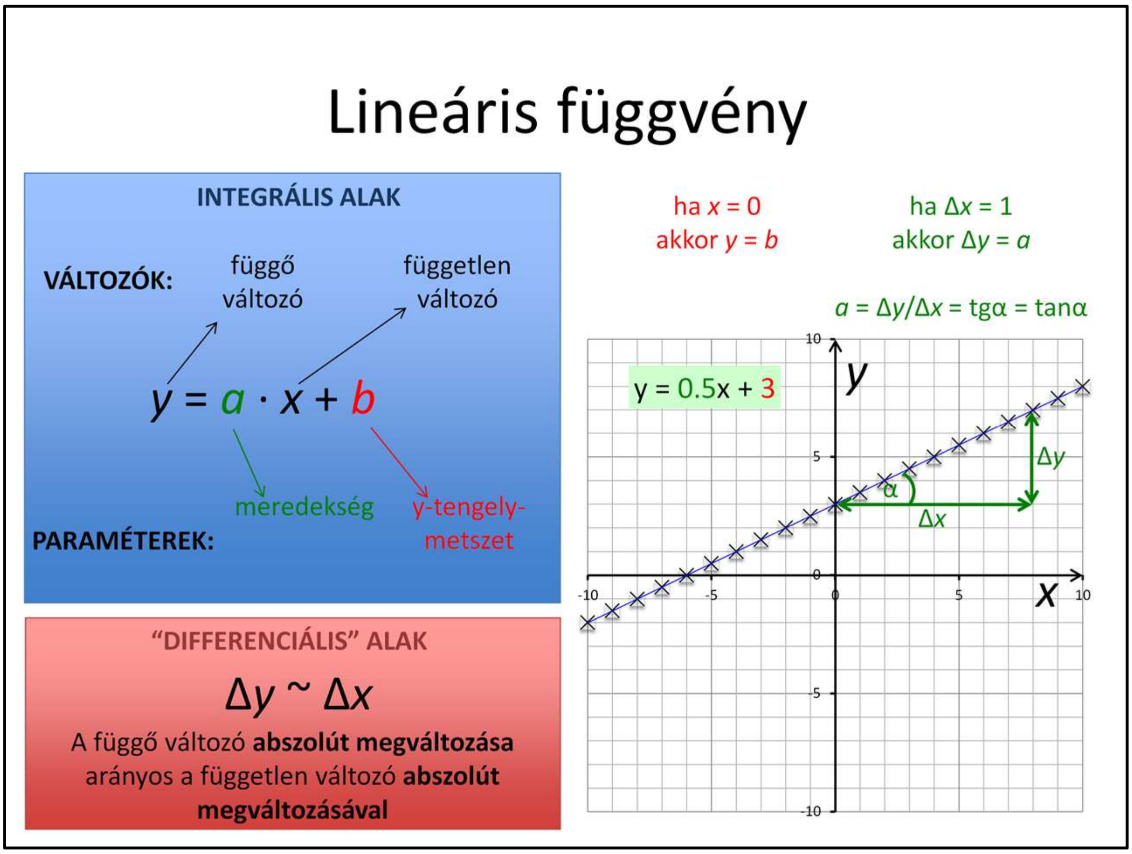
hőmérséklet ↦
TÉRFOGAT(*hőmérséklet*)



Mielőtt rátérnénk a konkrét függvénytípusokra, utaljunk vissza az első előadáson megtanult változótípusokra. Elég most az “első megközelítés”-nek nevezett felosztást alapul venni. Azokban az esetekben, ahol mind a független, mind a függő változó numerikus, a kapcsolat jó eséllyel megadható valamilyen matematikai egyenlettel, és a független változó–függő változó értékpárok ábrázolhatók grafikonon, Descartes-féle koordinátarendszerben. Ha valamelyik változó nem számszerű, akkor csak a gyakoriságokkal (hány embernek A-s a vércsoportja), illetve logikai kapcsolatokkal (**ha** valaki akromegáliás, **akkor** agyalapi mirigy működési zavara van) tudunk foglalkozni.

Egy másik megfontolandó, hogy a változók egy része között teljesen egyértelmű függvénykapcsolat van: az ideális gázmodell alapján a hőmérséklet a térfogattal arányos (izobár körülményeket feltéve), azaz bármely hőmérséklethez egyértelműen meg tudjuk adni a térfogatot: ezt a fajta viszonyt determinisztikusnak, meghatározottnak nevezzük. Ha ellenben egy kockát feldobok, akkor ennek a kísérletnek a kimenetelében nagy szerepet játszik a véletlen, az ilyen változót véletlenszerűnek, stochasztikusnak nevezzük. A valóságban vizsgált változók közötti kapcsolatok esetén a determinisztikus és a stochasztikus hatások is jelen vannak.

Először tekintsük át a változók közötti determinisztikus kapcsolatot leíró legfontosabb függvényeket.



Elsőnek tekintsük a lineáris függvényt. Általános egyenlete y=ax+b (esetenként a paraméterek jelölése eltérhet). Az egyenletben y a függő és x a független változó, a és b paraméterek.

Ha az y érték az ismert, szükség lehet az x-re kifejezett (x-re explicit) alakra: x = (y – b) / a

Mielőtt továbbmennénk, tisztázzunk pár fogalmat. Ha egy függvényt egyenlettel írunk fel, abban mindig szerepelnek paraméterek és változók. A változókról előbb már szóltunk. A paraméterek egy adott jelenséget leíró függvényben nem változnak, míg a változók a D, illetve R elemeit veszik fel. A paraméterek értékei csak akkor változ(hat)nak, ha más változók közötti függvénykapcsolatot tárgyalunk. A paramétereket szokás állandónak (konstans) is nevezni, azonban ez az elnevezés kerülendő, mivel a paraméterek értéke nem *úgy* állandó, mint a matematikai vagy fizikai ("univerzális") állandóké (π, e, k, R stb.), hanem csak az adott esetben. Tartsuk meg ezért az állandó (vagy konstans) elnevezést ezeknek. Persze a gyakorlatban sokszor előfordul az elnevezések keveredése. Használatos még az együttható (= koefficiens) elnevezés is, ezt olyan paraméterekre, számokra használják, amelyekkel egy változót (vagy változót tartalmazó kifejezést) megszorzunk, így a szorzó (=faktor, tényező) is használható rá.

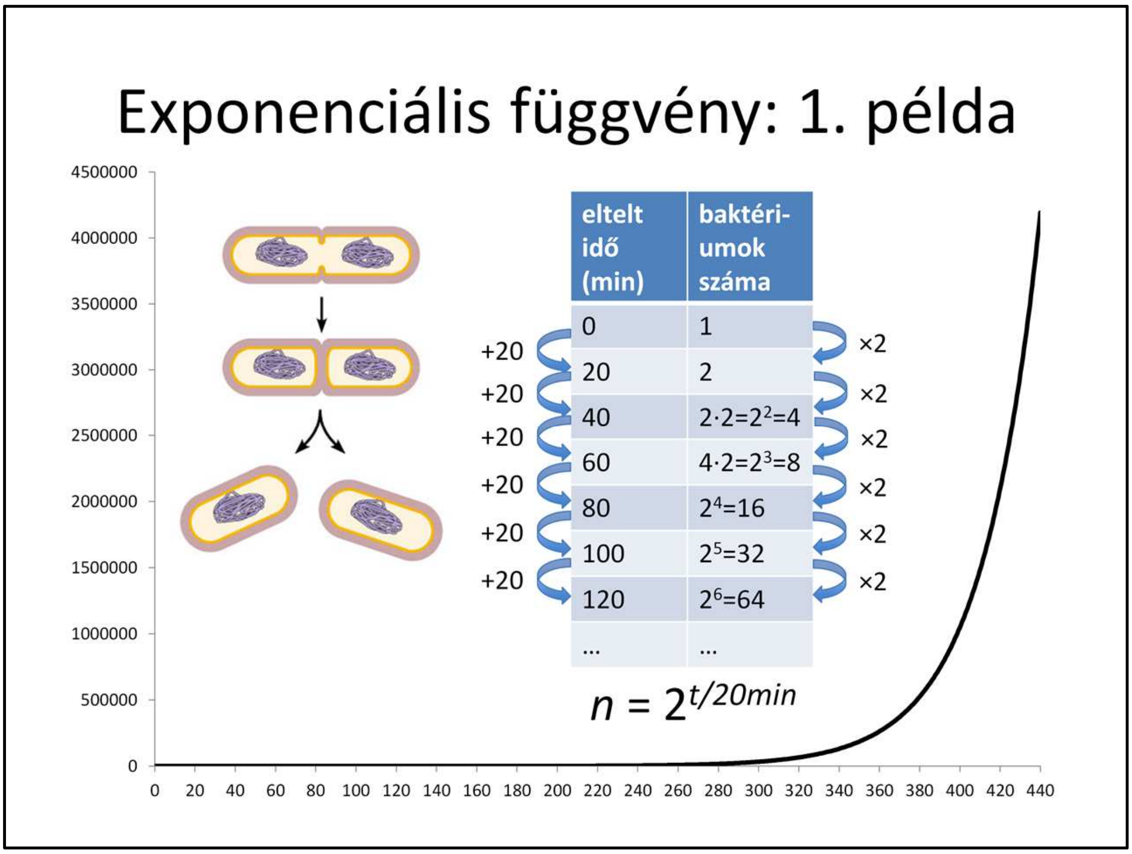
Térjünk vissza a lineáris függvényre. A függvény grafikonjának segítségével, illetve megfelelő értékek behelyettesítésével megállapíthatjuk a paraméterek szemléletes jelentését. Ha x értékét 0-nak vesszük akkor y=a0+b=b. Vagyis a függvény grafikonja b-nél metszi az y-tengelyt. Azon össszefüggéseknél, amikor b=0, a függvény egyenese az origón megy át, ilyenkor egyenes arányosságról beszélünk.

Ha az x érték 1-gyel nő, akkor kiszámolható, hogy y értéke a-val nő. Ha x 2-vel nő, akkor y 2a-val, ha x 3-mal nő, akkor y 3a-val s.í.t. Ezeket a növekményeket szakaszokkal jelölve derékszögű háromszöget kapunk: a vízszintes befogó x növekménye (változása, Δ*x*), a függőleges befogó y növekménye (változása, Δy), az átfogót pedig az egyenes grafikonja adja. Az előbbi példákból látható, hogy a-t akkor kapjuk meg, ha Δy-t osztjuk Δx-szel; ez egyben az egyenes irányszögének tangense (iránytangense) is. a-t nevezzük meredekségnek.

A lineáris függvény nem csak az egyes x-ekhez rendelendő y-ok kiszámolásának módját leíró egyenlettel adhatók meg (integrális alak), hanem az y megváltozásához tartozó x megváltozással is (differenciális alak). Az előbbiekben leírtak alapján világos, hogyy megváltozása x megváltozásával arányos (az arányossági tényező pedig a).

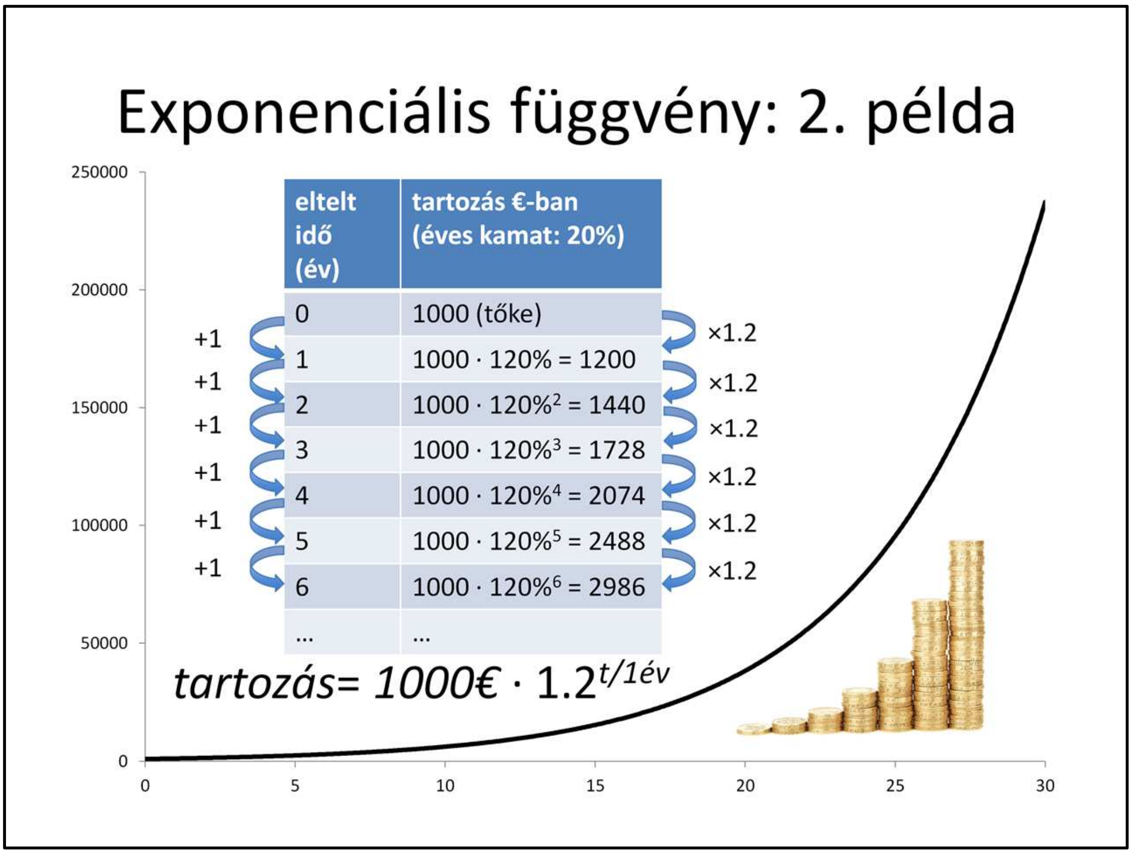
Feladat: Keressünk a biofizika képlettárban olyan függvényeket, ahol a függő és független változó lineáris viszonyban vannak! Rajzoljuk meg a függvény grafikonját és jelöljük a paramétereket!

Lineáris függvényekkel a következő gyakorlatok során találkozunk:
4. Refraktometria [törésmutató – koncentráció]
7. Polarimetria [elforgatási szög – koncentráció, illetve csőhossz]
11. Gammaenergia [fotocsúcsfeszültség – fotonenergia]
21. Rezonancia [erő – megnyúlás]
26. Szenzor [akcióspotenciál-frekvencia – receptorpotenciál]

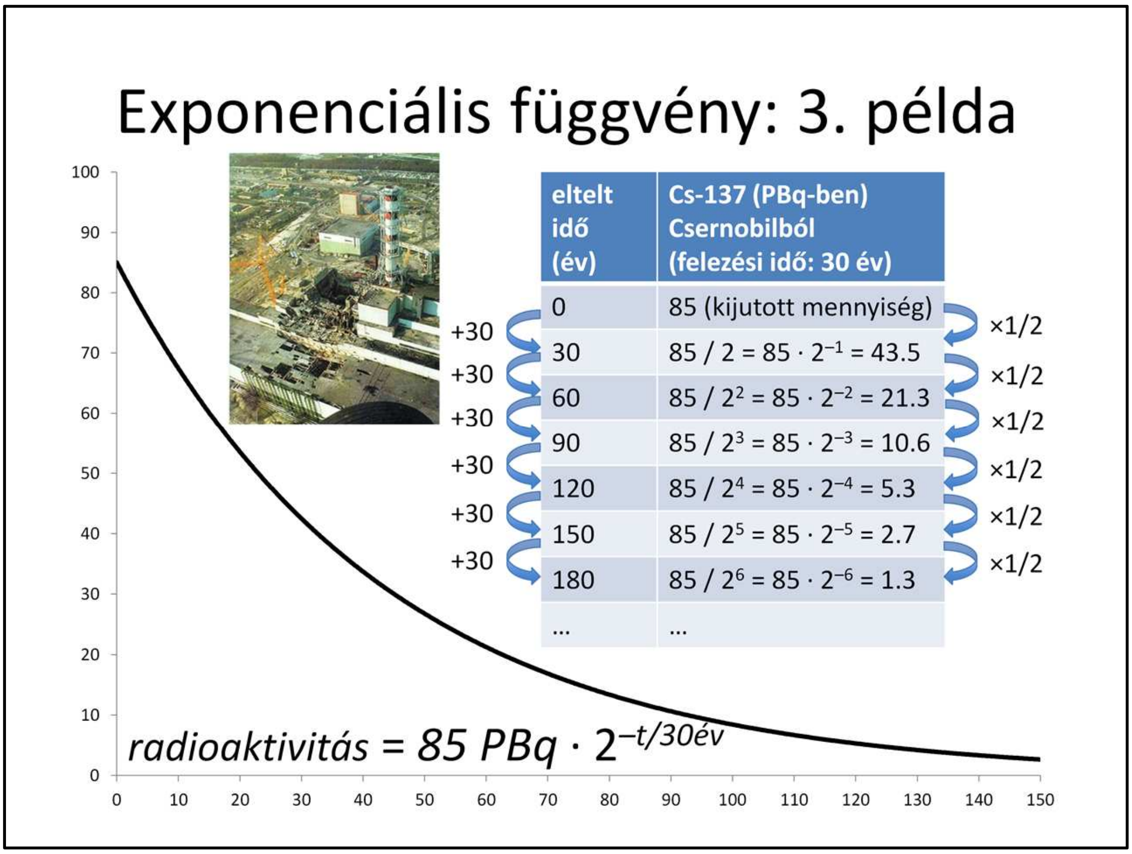


Az exponenciális függvény nagyon sok természeti jelenségnél jelen van, és a definíciója sem különösképpen bonyolult, mégis sokszor nem elég mély a megértése. Talán néhány példa átbeszélése segít ebben.

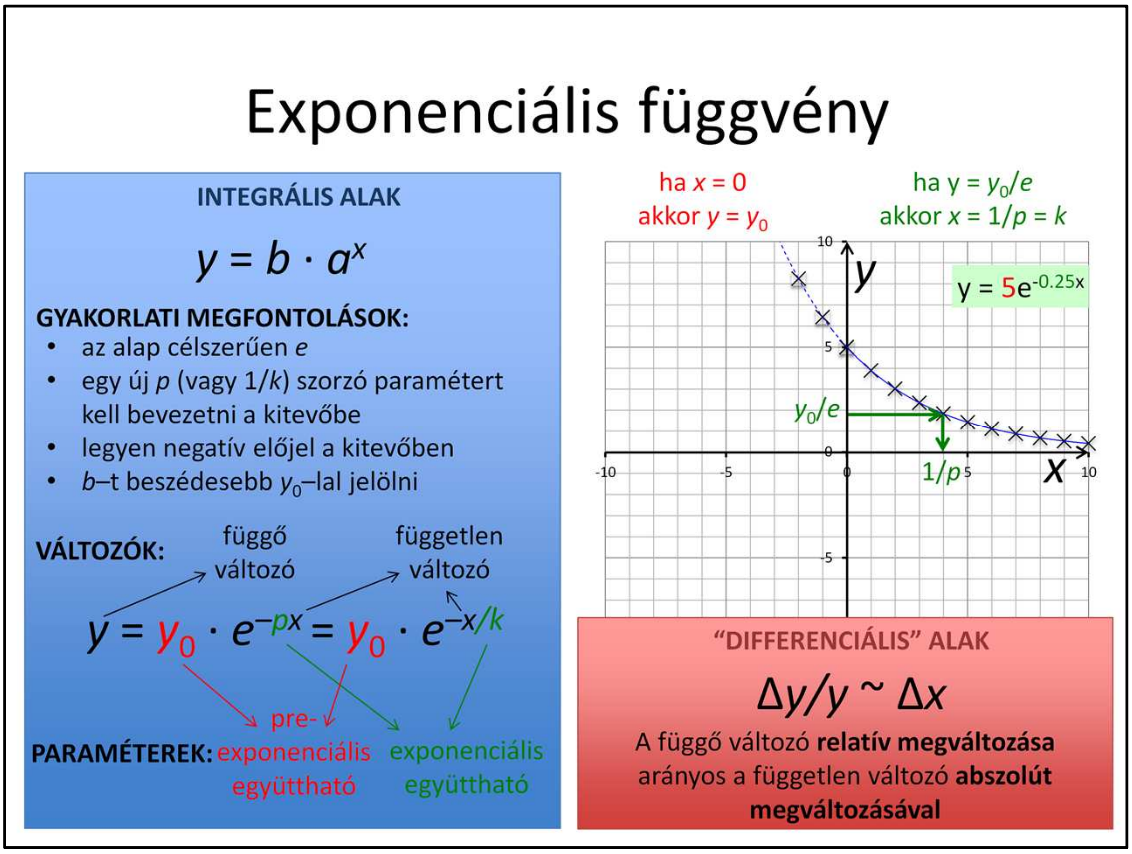
Az *Escherichia coli* baktérium két osztódása között kb. 20 perc telik el, vagyis kb. 20 perc a megkettőződési idő. Ha az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az osztódó sejtek mindvégig szinkronban maradnak, akkor a táblázatban sorolt sejtszám lesz megfigyelhető. Megfigyelhetjük, hogy az idő minden 20 perces **abszolút változása** a sejtszám kétszeres **relatív megváltozását** eredményezi. Ez nagyon gyors szaporodást fog eredményezni. (Természetesen a valóságban ez nem tart a végtelenségig, mert a tápanyagok elfogytával stagnálásba csap át a növekedés, majd a salakanyagok felszaprodása a kolónia elhalásához vezet.)



A következő példa a banki tartozás növekedését mutatja 20%-os éves kamattal és éves kamatperiódussal számolva (illetve feltéve, hogy az egészet egyszerre kell majd visszafizetnünk). Látható, hogy az évenkénti húszszázalékos növekedés 1,2 = 120% szorzónak felel meg. A következő évben a már kamattal növelt összeg növekedik tovább. A növekedést tehát az ismétlődő 1,2-vel szorzással írható le. Ahány kamatperiódus (esetünkben év) eltelik, annyiszor vesszük 1,2-t szorzótényezőül, vagyis t év után 1,2^t-vel kell megszoroznunk a tőkét. A visszafizetendő összeg rohamosan növekszik, pl. négy év alatt duplájára nő.



A biológiai és közgazdasági példa után nézzünk egy fizikai esetet. 1986. április 26-án baleset történt a csernobili atomerőműben, aminek következtében – egyebek mellett – 85 PBq-nyi 137-es céziumizotóp is kiszabadult. (A Bq (becquerel [bekrel]) a radioaktvitás mértékegysége, 1 Bq egy bomlást jelent másodpercenként, a PBq (petabecquerel [petabekrel]) 10^15 Bq-rel egyenlő.) Az izotópok radioaktivitásának időbeni változását a felezési idővel lehet jellemezni: a cézium-137 izotóp fele 30 év alatt bomlik el, újabb harminc év múlva már csak a negyede van meg, újabb harminc év után már csak a nyolcada s.í.t. Látható, hogy felezési időnként 0,5-tel szorozva megkapjuk a még megmaradt izotóp aktivitását (“mennyiségét”). Az ismételt szorzást természetesen most is hatványozásként érdemes felírni, a periódusok száma kerül a kitevőbe. Látható, hogy a függvény a lineárishoz képest lassabban csökken: még 100 év után is 8,4 petabecquerel az aktivitás. Az aktivitás bár **minden határon túl** megközelíti a nullát, azt – elvileg – sohasem fogja elérni: a függvény görbéje aszimptotikusan közelít az x-tengelyhez.



Az előbbi példák közös tulajdonsága, hogy a független változó (a példákban az idő) egy hatvány kitevőjében (idegen szóval exponens) szerepel. Az ilyen függvényeket közösen exponenciális függvénynek nevezzük. Az exponenciális függvény általános alakjának paraméterei az alap (a fenti képletben a) és a pre-exponenciális faktor (a képletben b). E két paraméter változtatásával az összes exponenciális függés leírható.

Ez az általános forma azonban nem nagyon használatos a fizikában különféle okokból. Egyrészt a fizikában bizonyos alap-számokat előnyben részesítenek, ezek közül legfontosabb a természetes egység, az e szám (irracionális szám, értéke 2,718…), mivel ez matematikailag praktikus (az e^x függvény deriváltja önmaga). Mi ugyan ezekből a matematikai előnyökből nem sokat látunk, de az exponenciális függvények képleteit szinte mindig ilyen formában írják fel. (További, ritkábban előforduló hatványalapok még a 2 és a 10.)

Másfelől azzal, hogy az alapszám értékét e-n rögzítettük, az egyik paraméterünk ezzel kiesett, emiatt már nem tudnánk az összes féle exponenciális függvényt leírni. E “veszteség” pótlására be kell vezetnünk egy új paramétert a kitevőbe (exponenciális együttható vagy kitevőparaméter), amely lehet szorzó (jelölésünkben p) vagy osztó (jelölésünkben k), azt a gyakorlat dönti el, hogy melyiket használjuk.

Harmadrészt vegyük figyelembe, hogy a fizikában előforduló exponenciális változások szinte mindig csökkenők (radioaktivitás, fényelnyelődés, a nyomás csökkenése a tengerszint feletti magassággal stb). Emiatt a kitevőparaméter szinte mindig negatív lenne, így célszerű a negatív előjelet kiemelni.

Végül a b preexponenciális együtthatót y_0-lal szokás jelölni, mivel ez tükrözi ezen paraméter jelentését.

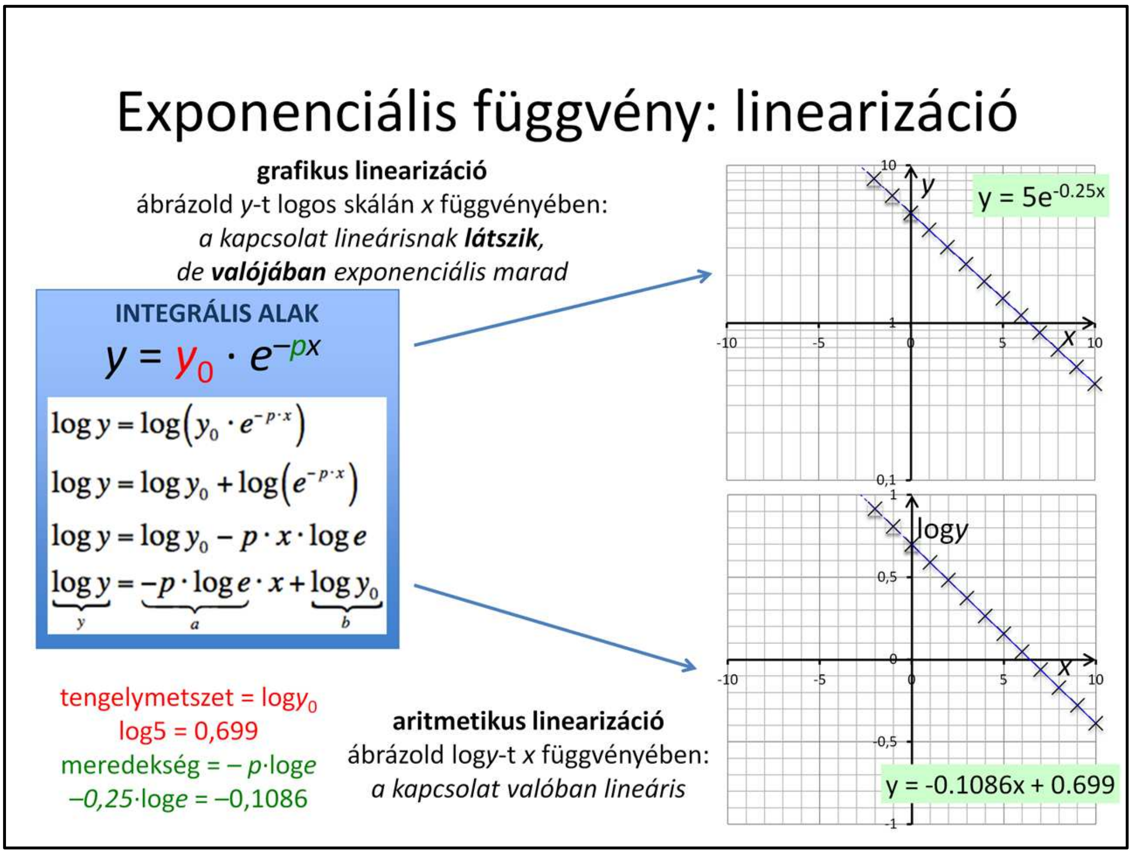
Miután tisztáztuk az exponenciális függvény fizikában használatos általános alakját, vizsgáljuk meg itt is a paraméterek szemléletes jelentését. Az y_0 (azaz b) paramétert ez esetben is könnyű értelmezni: ha x = 0, akkor y = y_0*e^(-p*0) = y_0*e^0 = y_0*1 = y_0. A keményebb dió a p (azaz 1/k) paraméter. Azt érezzük, hogy ez valahogy a "csökkenés sebességével" van kapcsolatban, azonban egy folyton változó meredekségű exponenciális függvénynél nem nagyon értelmezhető egyöntetűen a csökkenés tendenciája. Emiatt keresnünk kell egy olyan triviális (= nyilvánvaló, magáért beszélő, különleges) esetet, ami rávilágít p jelentésére. A lineáris függvény esetében már láttuk, hogy a triviális megoldásra vezető esetek azok voltak, amikor x nulla volt, vagy x eggyel nőtt. Az y0 értelmezésekor szintén az x=0 esetet használtuk fel. Általában elmondhatjuk, hogy a tipikus x értékek, amelyek valamilyen triviális esetet produkálnak: x=0; x=1; x=–1; x=+∞; x=–∞. Esetünkben azonban mást kell keresni. A stratégia legyen az, hogy a változó "oltsa ki" p-t. Mivel x szorzó, erre lehetőpséget ad, ha x helyére 1/p-t helyettesítünk. Ekkor behelyettesítve: y =y_0*e^(-p/p)=y_0*e^(-1)=y_0*(1/e)=y_0/e. Vagyis a függvényérték ott éri el a kezdőérték (y_0) e-ed részét, ahol az x érték eléri 1/p-t (azaz k-t).

Egy másik közelítésben elmondhatjuk, hogy az exponenciális függvény esetén a függő változó relatív (százalékos) megváltozása a függő változó abszolút megváltozásával arányos.

Feladat: keressük ki a biofizika képlettárból az exponenciális függvényeket! Vázoljuk fel az egyes függvények grafikonját, amelyeken szemléltetjük a paramétereket is!

Exponenciális függvény szerint változó mennyiségekkel a következő biofizika gyakorlatokon találkozunk:

6. Fényabszorpció [intenzitás – koncentráció, rétegvastagság]
10. Gammaabszorpció [pulzusszám – rétegvastagság]
12. Izotópdiagnosztika [aktivitás – idő] (az izotóptárolósi görbén)
14. CT [röntgenintenzitás – rétegvastagság]
21. Rezonancia [a csillapított szabadrezgés burkológörbéje – idő]
22. Impulzusgenerátor [a kondenzátor feszültsége kisütéskor – idő]
29. Diffúzió [a gélben maradó KCl-mennyiség – idő]



Miután megértettük az exponeciális függvény viselkedését, vegyünk még tekintetbe egy gyakorlati problémát. A mérések során általában az a célunk, hogy a mérési pontokat megillesszük egy függvénnyel. Ha az ábrázolást és a görbe illesztését "kézileg" végezzük, akkor csak egyenest tudunk illeszteni (nincs görbe vonalzónk), illetve csak lineáris tendenciákat tudunk ránézésre megállapítani (a szemünk nem érzékeny a görbe "jellegére": csak annyit látunk, hogy görbe, de azt általában nem tudjuk pontosan belőni, hogy egy görbe vonal egy exponenciális függvény, egy négyzetes függvény, egy szinuszgörbe vagy éppen egy ellipszis darabja: egyszerűen csak görbének látjuk, holott az említett függvények matematikailag alapvetően eltérnek).

A kézileg való illesztést nehézségét, illetve szemünk görbék iránti érzéketlenségét úgy tudjuk áthidalni, ha a függvényt valahogy "kiegyenesítjük", lineáris függvénnyé alakítjuk (linearizáció). Ehhez vegyük a függvényegyenlet mindkét oldalának logaritmusát. Átalakítások után látható, hogy ha az eredeti függő változó (y) helyett annak logaritmusát (log$y$) ábrázoljuk a független változó (x) függvényében, akkor egy egyenest kapunk, amelynek tengelymetszete $\log y_0$, meredeksége pedig $-p$*log$e$. (jobb alsó ábra)

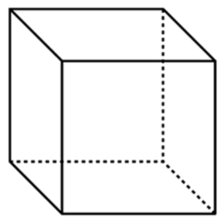
Gyorsabb módszer, ha az eredeti értékeket ábrázoljuk logaritmusos beosztású tengelyen. De milyen az a logaritmusos tengely? Először értsük meg a lineáris tengelyt mélyebben. Vegyünk egy szakaszt, amely az x tengely mentén 0 és 2 között van: ennek hossza 2 egység (=2-0). Ugyanilyen hosszú szakaszt kapunk pl. 5 és 3 vagy 8 és 6 között, mivel a **különbség** minde esetben 0. Vagyis egy lineáris beosztású tengelyen adott távolság adott különbségnek felel meg. Nem ez a helyzet a logaritmusos (log-) skálán: itt az 1 és a 2 között akkora a távolság, mint 2 és 4, 3 és 6 vagy 4 és 8 között: itt a szakaszhossz adott **aránynak** felel meg. Természetesen a "fizikai" távolság mindig különbséget jelent, a logos skálán csupán a speciális, logaritmusos beosztás miatt változik ez arányra. Ennek oktá könnyen beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy log(a/b)

= loga – logb; azaz az arány logaritmusa egy különbség.

Visszatérve a linearizációra: ha az y változó helyett az y tengelyt alakítjuk logaritmusossá, akkor szintén egy egyenes függvénygrafikont kapunk. Fontos azonban, hogy itt csupán “grafikus” átalakítás történt: a tengelyeken szereplő változók közötti kapcsolat továbbra is exponenciális (pl. ilyen függvényt kell használnunk Excelben történő illesztéskor).

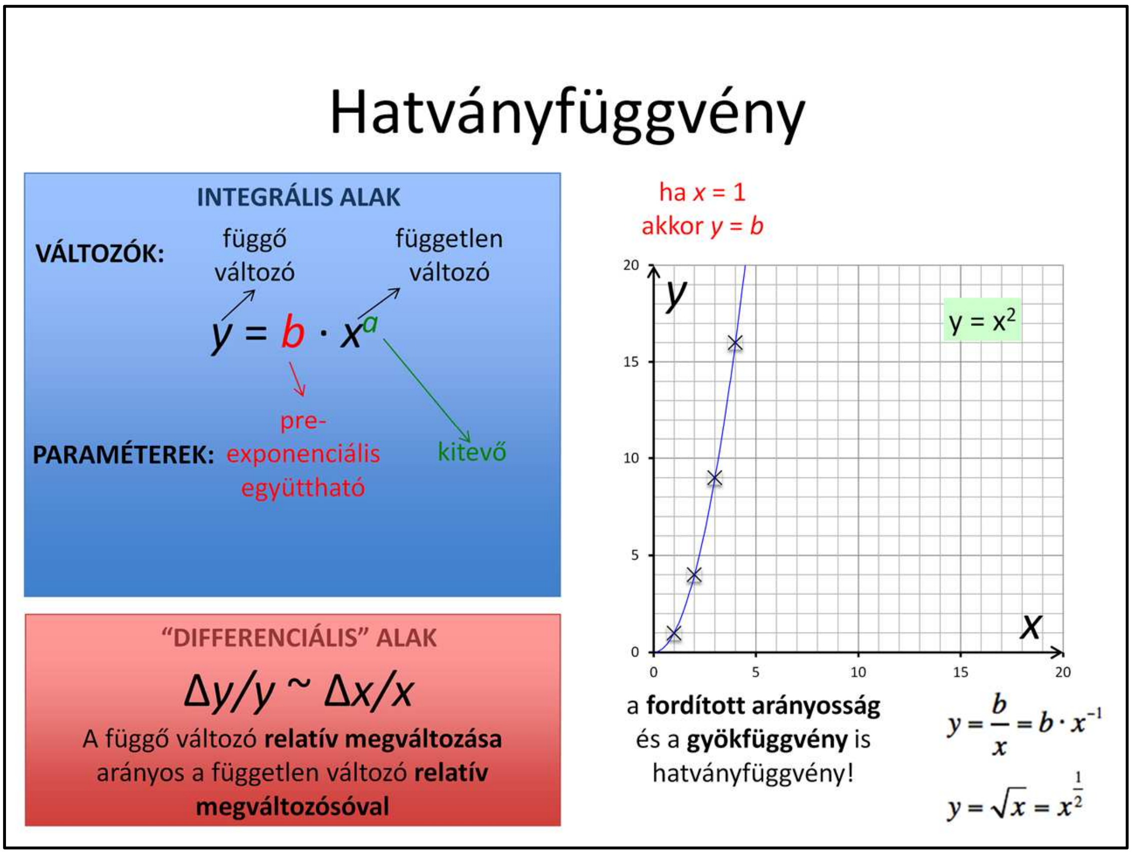
Hatványfüggvény: példa

tömeg ~ térfogat ~ [test]hossz^3
felület ~ [test]hossz^2



A következő függvény, amit ismertetünk, a hatványfüggvény. Erre egyenlőre csak egy geometriai példát adok: a kocka (és általában a testek) felszíne a hossz négyzetével, míg térfogata a hossz köbével arányos. Vagyis ha egy testet lineárisan a kétszeresére felnagyítok, akkor a lineáris méretei megduplázódnak ($\times 2^1$), felülete megnégyszereződik ($\times 2^2$), térfogata (és az ezzel arányos tömege) pedig megnyolcszorozódik ($\times 2^3$).

Mivel az élőlények számtalan élettani jellemzője vagy valamilyen hosszal, vagy felülettel, vagy térfogattal, de leginkább ezek valamilyen kombinációjával állnak kapcsolatban, számíthatunk arra, hogy előfordulnak majd hatványfüggvény szerinti kapcsolatok közöttük.



A hatványfüggvényben tehát szintén hatványkifejezés része a független változó, de ezúttal (szemben az exponenciális függvénnyel) a kitevő helyett az alapban található. Általános alakjában két paraméter szerepel: a kitevő (itt a) és a hatványkifejezés előtti pre-exponenciális együttható (itt b). Vegyük észre, hogy b értékét akkor veszi fel a függvény, ha x=1, mivel ekkor $y=b*x^a=b*1^a=b*1=b$. Vegyük figyelembe, hogy a gyökfüggvények is hatványfüggvények (az n-edik gyök átírható 1/n-edik hatvánnyá), illetve hogy a fordított arányosság is hatványfüggvény (egy számmal való osztás megfelel a szám reciprokával, azaz -1-edik hatványával történő szorzásnak).

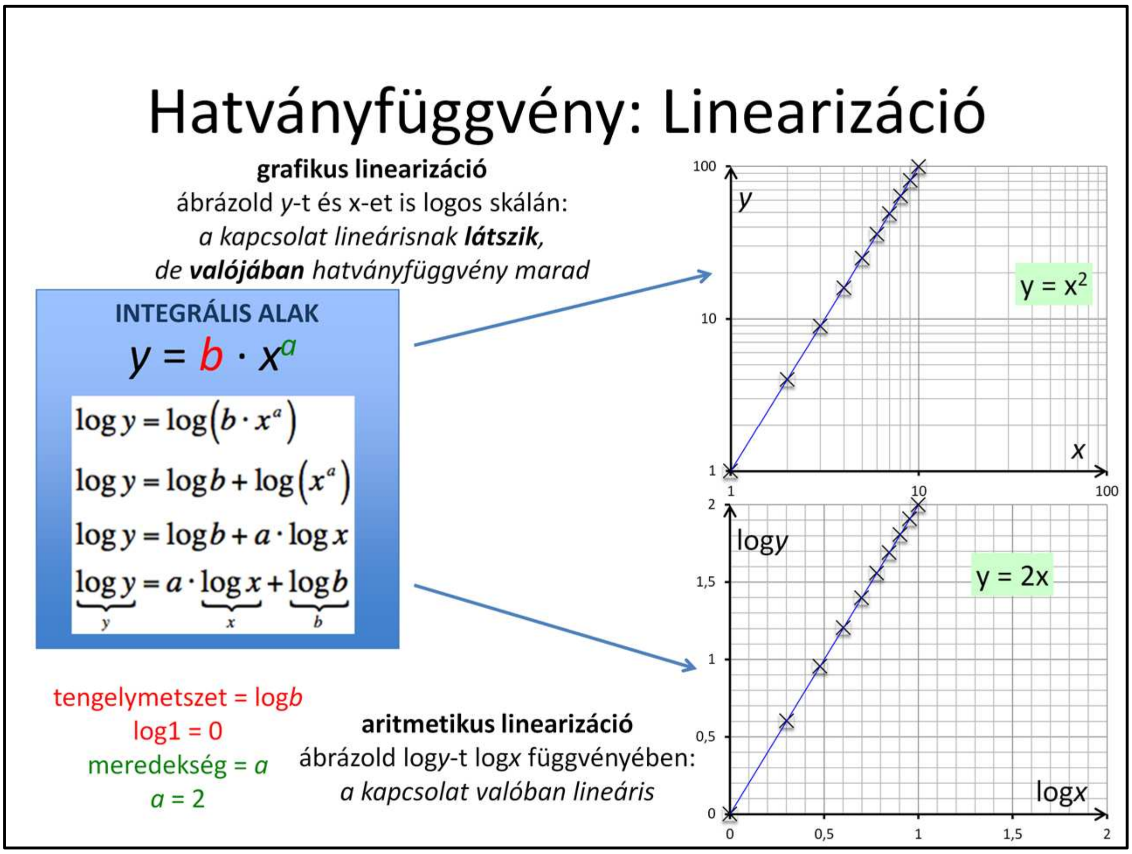
Ha a függvény változását akarjuk megragadni, akkor elmondható, hogy a függő változó relatív megváltozása arányos a független változó relatív megváltozásával.

Feladat: Keressük ki a biofizika képlettárból azokat a képleteket, amelyek a változók között hatványfüggvényt írnak le!

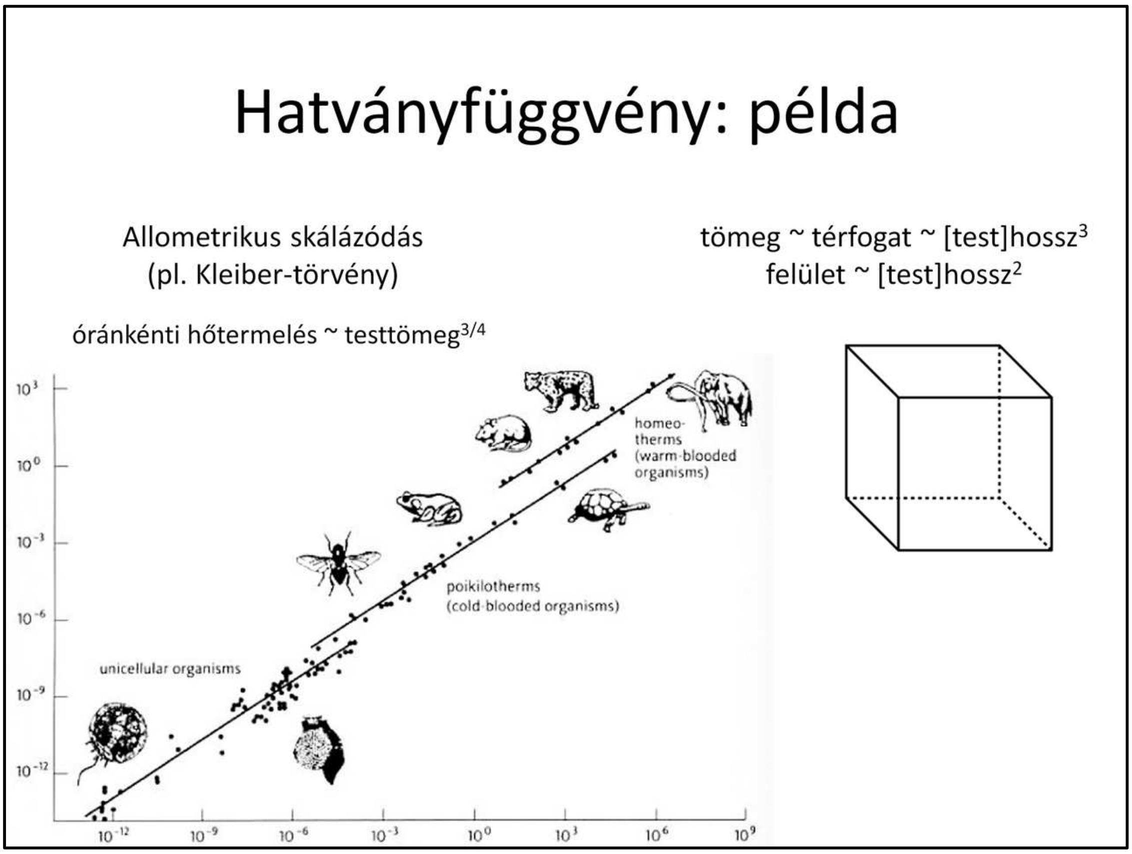
A következő biofizikai gyakorlatokon találkozunk hatványfüggvényekkel:

13. Röntgen [a fékezési spektrum határhullámhossza – gyorsítófeszültség]
13. Röntgen [a fotoeffektushoz tartozó résztömeggyengítési együttható – az abszorbens rendszáma]
15. Dozimetria [dózis vagy dózisteljesítmény – az izotóptól mért távolság]
18. Erősítő [az átviteli sáv alsó és felső határán a teljesítményerősítés – frekvencia]
19. Szinuszoszcillátor [sajátfrekvencia – kapacitás, illetve induktivitás az LC-körben]
21. Rezonancia [a rezgés sajátfrekvenciája – a rugóra helyezett tömeg]
24. Bőrimpedancia [kapacitív reaktancia – frekvencia]
25. Audiometria [szon-skála – hangintenzitás]

26. Szenzor: [receptorpotenciál – megvilágítás]
26. Szenzor [akcióspotenciál-frekvencia – megvilágítás]
26. Szenzor [Stevens-törvény szerint: érzeterősség – ingerintenzitás]



A hatványfüggvényeknél is felmerül a grafikonjuk "görbeségéből" fakadó gyakorlati probléma. Ezen itt is logaritmusos átalakítással segíthetünk. A levezetés után látható, hogy log*y* függése log*x*-től lineáris oly módon, hogy a tengelymetszet log*b*, a meredekség pedig *a* lesz. Ha nem a változókat akarjuk linearizálni, akkor mindkét tengelyt kell logaritmusos skálabeosztásúra cserélnünk.



Térjünk most vissza a hatványfüggvények biológiai-orvosi vonatkozására. Azt tapasztaljuk, hogy egy sor élettani jellemző hatványfüggést mutat aaz élőlények testtömegével. Például a metabolikus ráta ("nyugalmi állapotban jellemző óránkénti hőtermelés") a testtömeg 0,75-ik hatványával arányos (ez a Kleiber-törvény). Szintén hatványfüggést mutat a testtömeggel pl. a szív- és légzésfrekvencia, az aorta átmérője stb. Orvosi szempontból a legfontosabb, hogy a gyógyszerek metabolizmusát leíró paraméterek is sokszor hatványfüggvény szerint változnak a testtömeggel. Így ha megmérik pl. egéren, patkányon, tengerimalacon, nyúlon, macskán, kutyán, kecskén és lovon egy adott szer szóban forgó metabolikus paraméterét (illetve ezen állatok testtömegét is), akkor az ezen fajokhoz tartozó adatpárok megilleszthetők egy hatványfüggvénnyel, és az alapján megbecsülhető az emberre jellemző érték anélkül, hogy emberkísérleteket kellene végezni.

Differenciál és integrál: példa

Δ Δ

x	$y = x^2$	$y' = \Delta y/\Delta x$	$y'' = \Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$
0	0		
1	1	1	
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2

Σ Σ

A következőkben egy rövid betekintést szeretnék nyújtani a differenciál és integrálszámításba.

Fontos, hogy NEM KELL TUDNI ILYEN SZÁMÍTÁSOKAT VÉGEZNI, azonban szükséges a differenciál és az integrál szemléletes jelentésének megértése a nekünk elegendő, erősen leegyszerűsített módon.

A fenti "gondolatébresztő" példában a négyzetszámokat írtam egymás alá (x négyzete y). Figyeljük meg, hogy az egymást követő számok közötti különbség (y') nem véletlenszerű, hanem szabályosan, mindig kettővel nő. Vagyis ezek a különbségek (a különbség idegen szóval differencia) lineárisan, lépésenként mindig +2-vel változnak.

Most figyeljük meg a különbségek közötti különbséget ('y). Ez az érték már mindig ugyanannyi, 2, vagyis konstans.

Ha fordított irányban járunk el, akkor sorozatos összeadásokkal elő tudjuk állítani a konstans sorozatból (2; 2; 2; 2 …) a lneárisan növekvő sorozatot (1; 3; 5; 7; 9 …) majd ezek összegzésével a négyzetszámok sorozatát (1; 4; 9; 16; 25 …)

A függvények megváltozását, vagyis az x megváltozásához tartozó y változást vizsgálja a differenciál- és integrálszámítás.

Differenciál és integrál: példa

idő (s)	út (m)	sebesség (m/s)	gyorsulás (m/s^2)
0	0	0	10
1	5	10	10
2	20	20	10
3	45	30	10
4	80	40	10
5	125	50	10
6	180	60	10
7	245	70	10
8	320	80	10
9	405	90	10
10	500	100	10

Nézzünk egy gyakorlati példát:

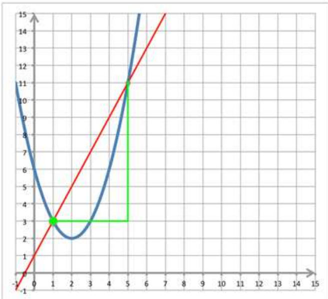
Az út időegységre jutó megváltozása a sebesség, annak megváltozása pedig a gyorsulás. Ha egy testet magasról elejtük, akkor zuhanás közben kb. 10 m/s^2-tel gyorsul, ami a sebességet másodpercenként 10 m/s-mal növeli, az út pedig egy négyzetfüggvényt követ. Azonban itt már az út és a sebesség viszonyában nem működik a kivonós (differencia) és összeadós (szumma) módszer, mivel a sebsesség és az út **nem lépésekben**, hanem **folyamatosan** változik. Ha véges x lépésközökkel vizsgáljuk a változást, akkor torzítást viszünk a számításba, mivel az adott lépésre vonatkozó átlagos változást kapjuk meg. A torzítás annál kisebb, minél kisebb a lépésköz, minél közelebb van a változás nullához.

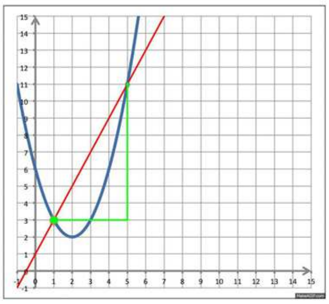
Derivált: érintőmeredekség

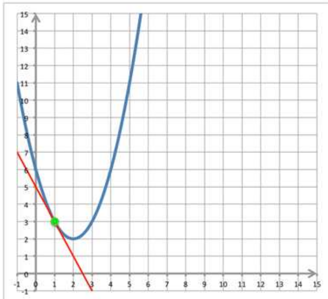
differenciahányados:
$\Delta y/\Delta x$
szelőmeredekség

$$\Delta \to \mathrm{d}$$

differenciálhányados:
$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$
érintőmeredekség





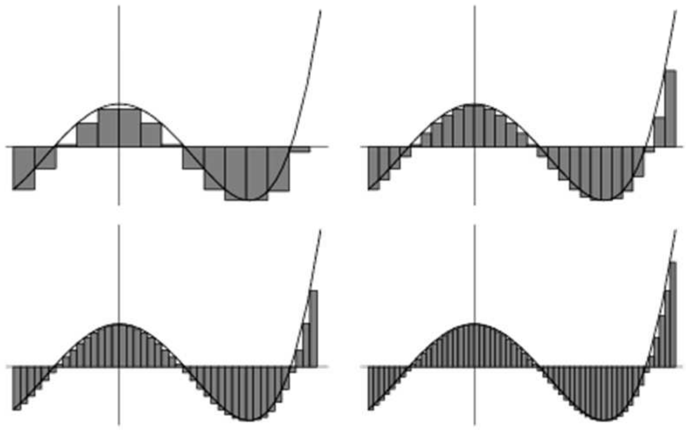


Ennek érzékeltetésére nézzük meg a következő ábrákat (a középső gif animáció elérhető ezen a linken: http://makeagif.com/9KJyhD). A baloldalon látható esetben x-el +4 egységet lépünk, amihez y +8 egységnyi megváltozása tartozik. A delta y/delta x hányados (különbséghányados vagy differenciahányados), amivel a változás "sebességét", nagyságát jellemezzük, geometriailag a két ponton áthaladó szelőnek (szekáns) felel meg. Hogy csökkentsük a nagy lépésből adódó hibát, csökkentsük az x tengelyen tett lépést: a középső animáción (lásd a fenti weblinken) látható módon változik a delta y/delta x hányados, ezzel együtt a szelőmeredekség is. A szelő két metszéspontját egyre közelítem, míg végül egyesülnek: ekkor a delta y és delta x is nagyon-nagyon közel lesznek nullához (ezt kifejezendő már nem is deltát, hanem d-t írunk), egyúttal szelő érintővé (tangens) alakul át. Ilyen végtelenül kicsiny lépés esetén már minimális a lépéshosszból adódó torzítás, a dy/dx arány tehát a függvény "helyi", **pontbeli meredekségét** adja meg, ennek az aránynak a neve a differenciálhányados vagy derivált.

Ennek gyakorlati előfordulása az átlagsebesség (differenciahányados) és a pillanatnyi sebesség (differenciálhányados).

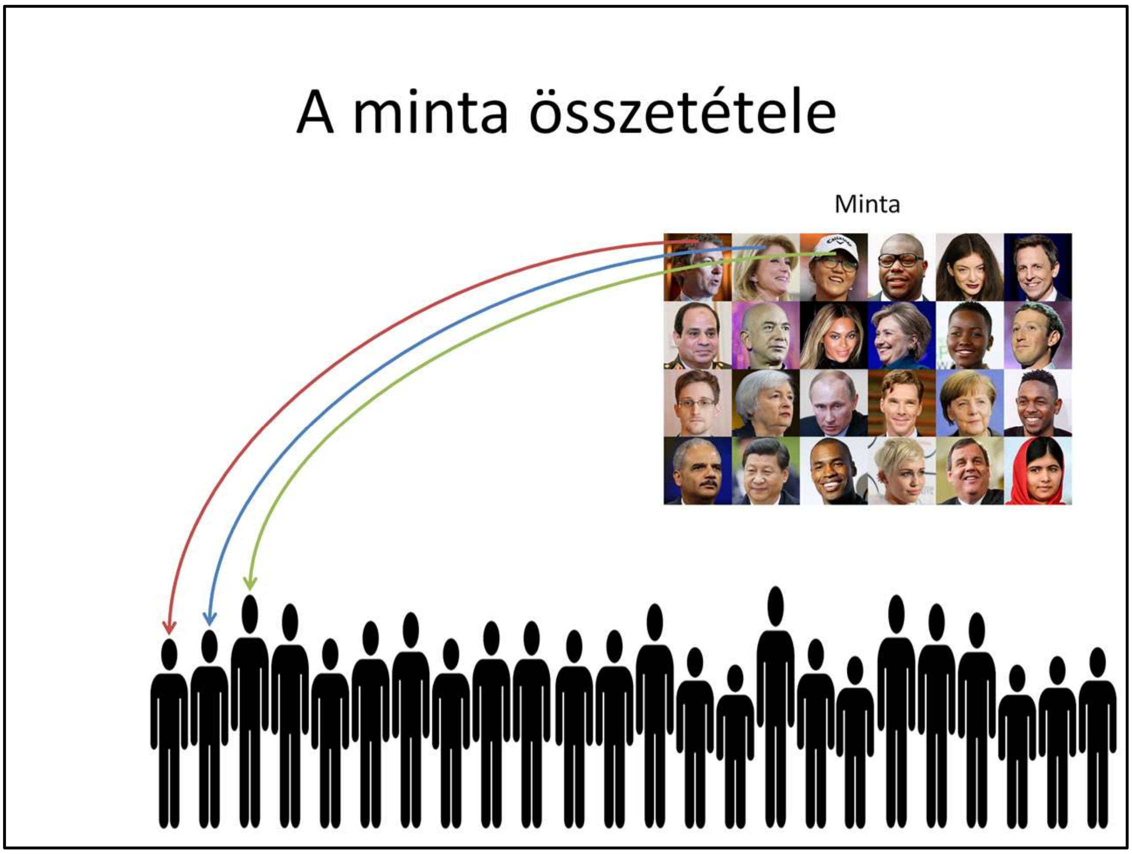
Integrál: görbe alatti terület

$$\Sigma \rightarrow \int$$

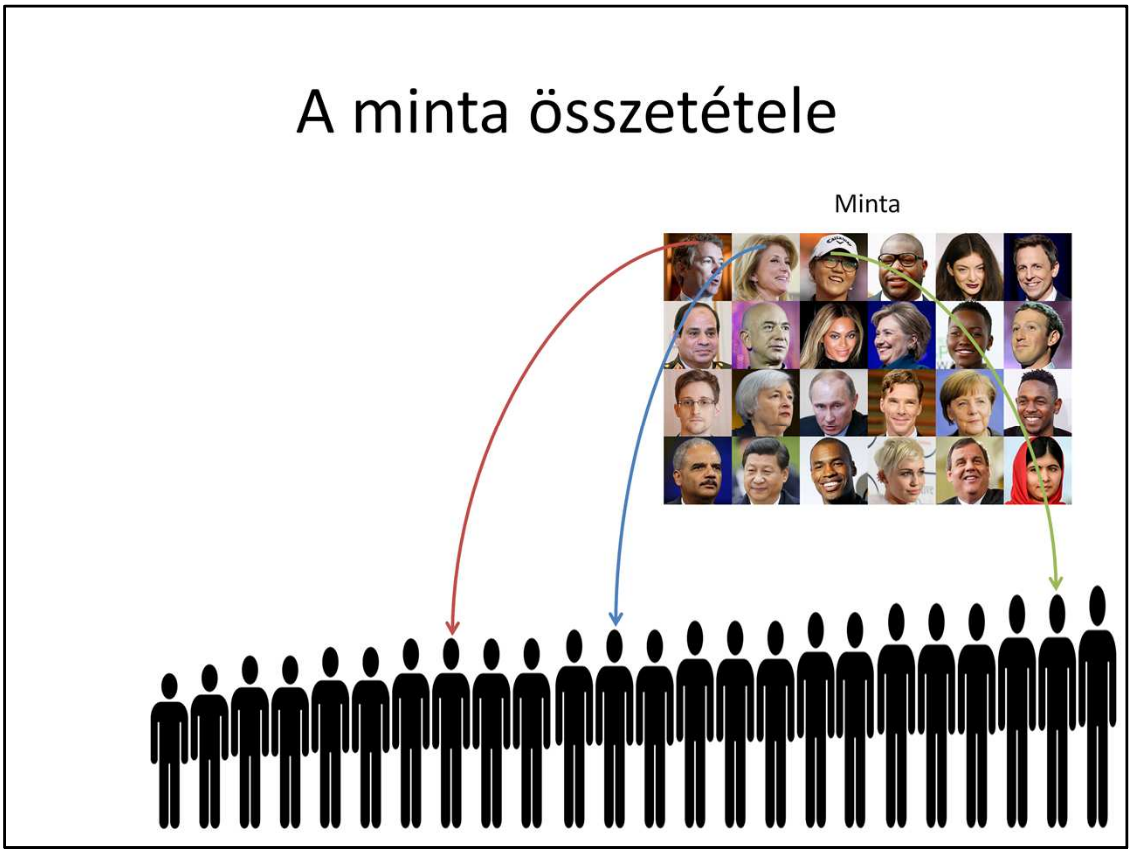


Az integrált (ehhez az előadáson készítettem ábrát) pedig a sorozatos összeadásokból, lényegében a differenciál megfordításaként lehet értelmezni: egy függvény integrálját megkapjuk, ha (mínusz végtelentől) az adott x értékig összegezzük a lépéshosszal (Δx) súlyozott (azaz megszorzott) függvényértékeket ($f(x)$). A lépéshossz és a függvényérték szorzata ($\Delta x * f(x)$) mértanilag téglalpokat jelent: lényegében lépéshossznyi téglalapokkal közelítjük a görbe alatti területet. Persze a lépéshosszból itt is torzítás adódik: minél kisebb a lépéshossz, annál kisebb ez a közelítésből adódó torzítás. A nullához nagyon közeli lépéshosszt (azaz a deriválásnál már bevezetett dx-et) használunk, a torzítás minimális lesz, ilyenkor már nem összegzésről, hanem integrálról beszélünk. Az integrál mértani jelentése a **görbe alatti terület**.

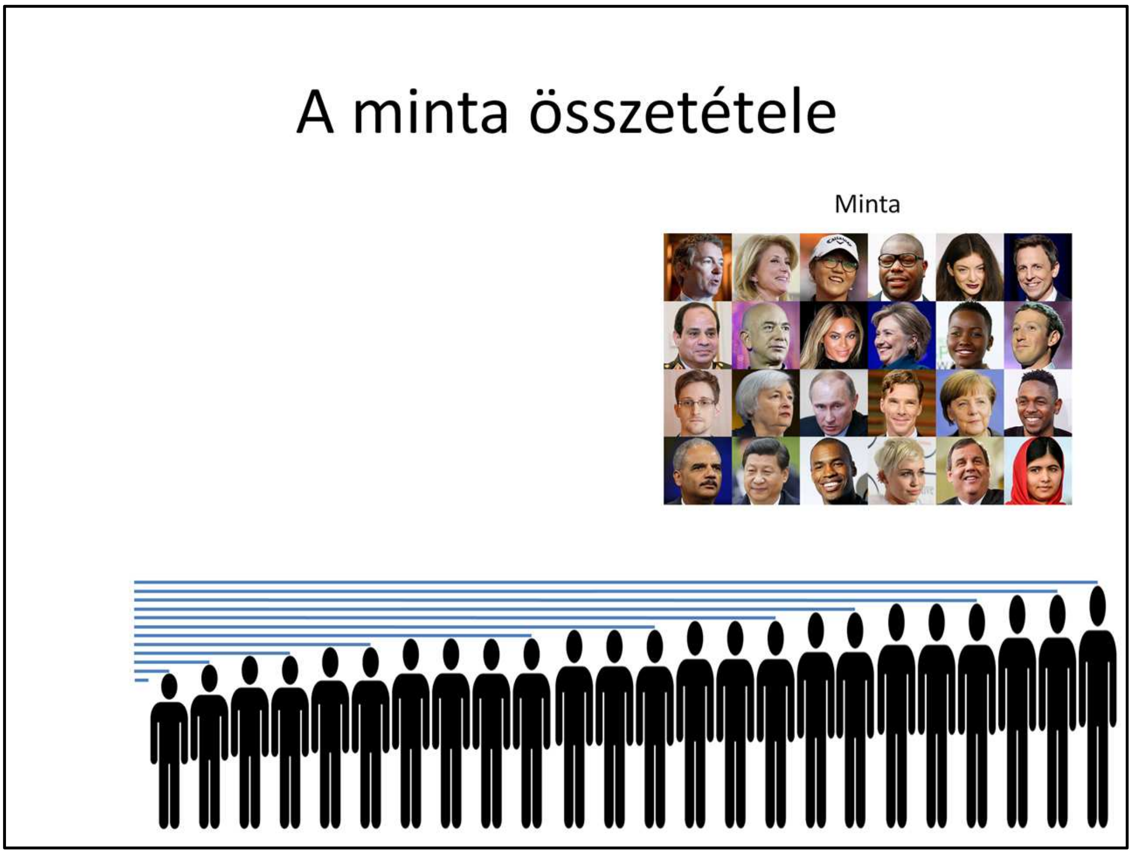
Miután megtárgyaltuk a legfontosabb determinisztikus kapcsolatokat leíró függvénytípusokat, térjünk vissza a statisztika számára érdekesebb stochasztikus változókra. Míg a determinisztikus jelenségeknél egy adott kísérletsorozat bemeneti értékéhez (x) egyértelműen rendelünk egy kimenetelt (y) (például 30 év (x) után az izotóp mennyiség az eredeti fele (y)), addig a stochasztikus jelenségeknél a kísérlet többféle kimenetellel is végződhet (véletlen miatt, pl. ha a tojás hosszát többször megmérem, más-más értékeket kaphatok a mérési bizonytalanság miatt). Ez akár azt is jelenthetné, hogy nem teljesül a függvénnyel szembeni alapvető követelmény (ti. egyértelmű hozzárendelés), de a helyzet menthető: azt kell módosítanunk, hogy mi lesz a független és a függő változó: ez esetben egy kísérlet adott kimeneteléhez (x) rendeljük annak előfordulási gyakoriságát. Ebből kapjuk az elvégzett kísérletek kimeneteleinek (= minta) gyakorisági eloszlását, amit a múlt előadáson már bemutattunk. Most a függvénytani ismeretek átismétlése és kibővítése után vizsgáljuk meg ezeket még egyszer alaposabban.



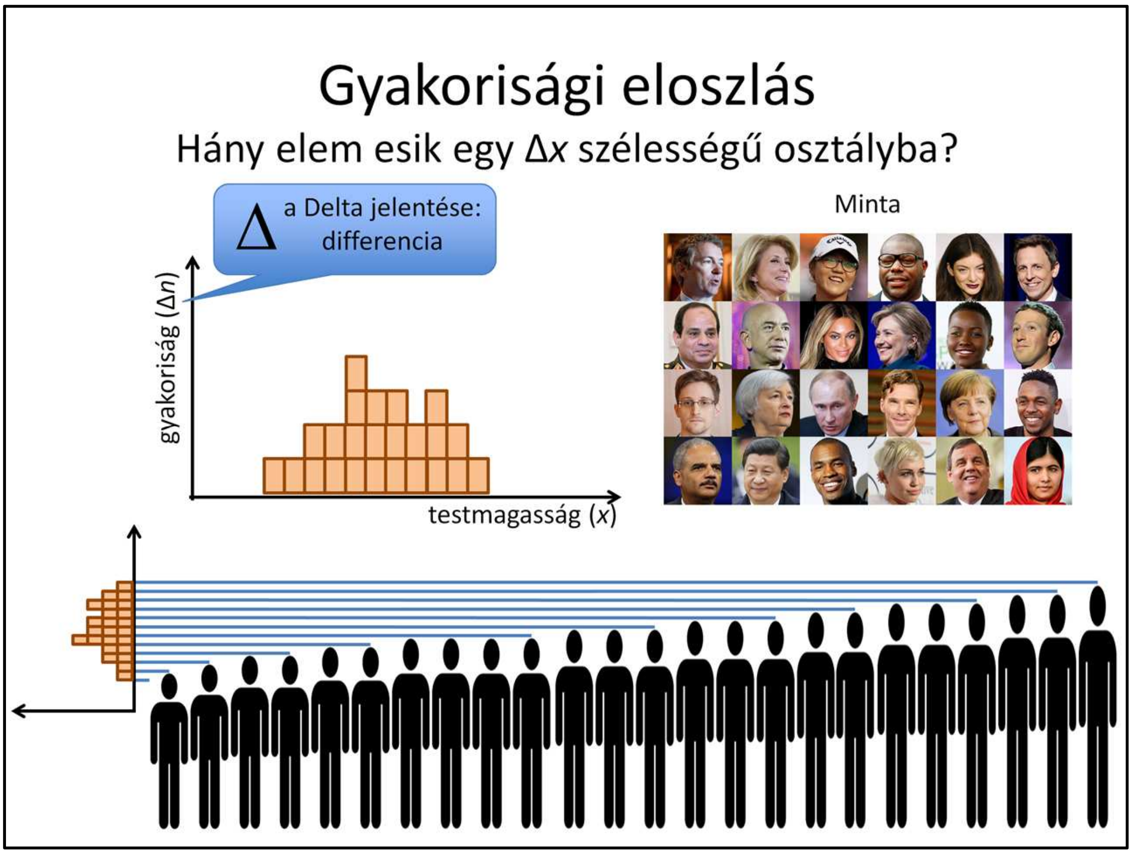
Első lépésben vegyünk egy konkrét mérési feladatot: egy 24 elemű csoport testmagasságát szeretném jellemezni.



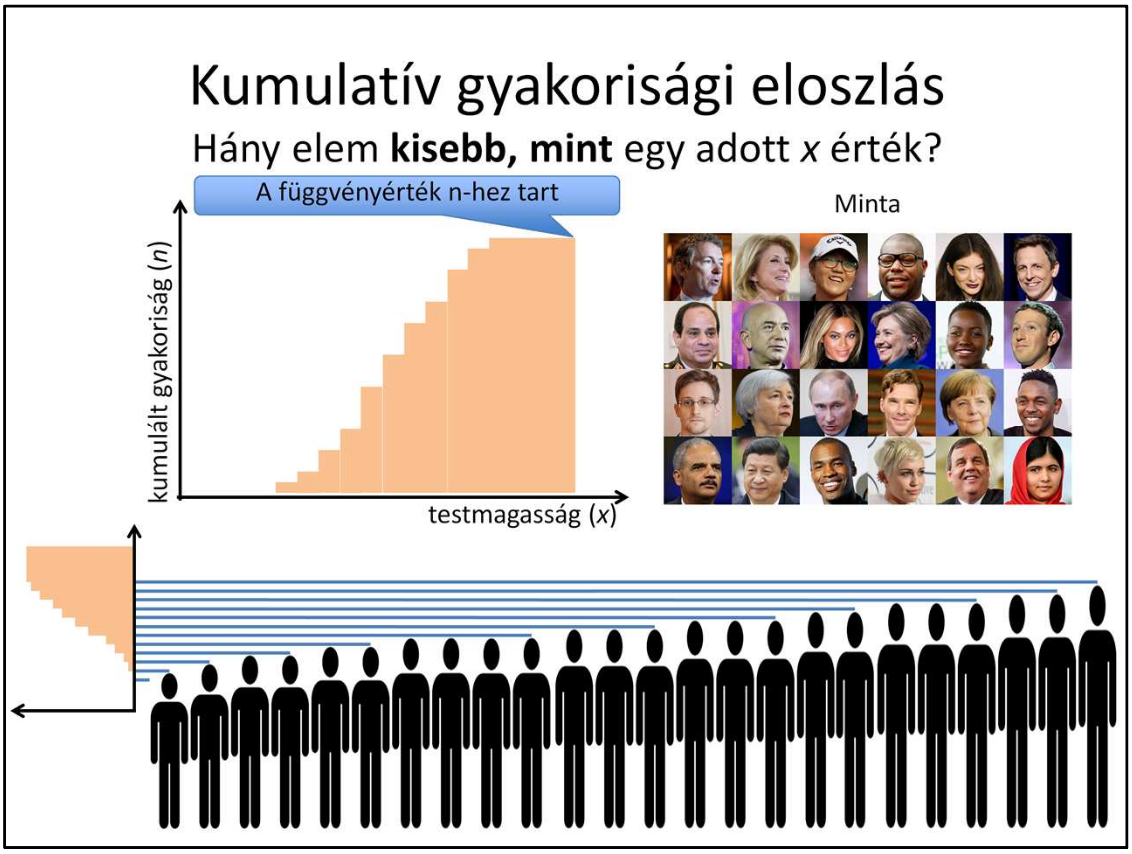
Szemléltetés szempontjából célszerű az mért értékeket nagyság szerint sorrendbe helyezni.



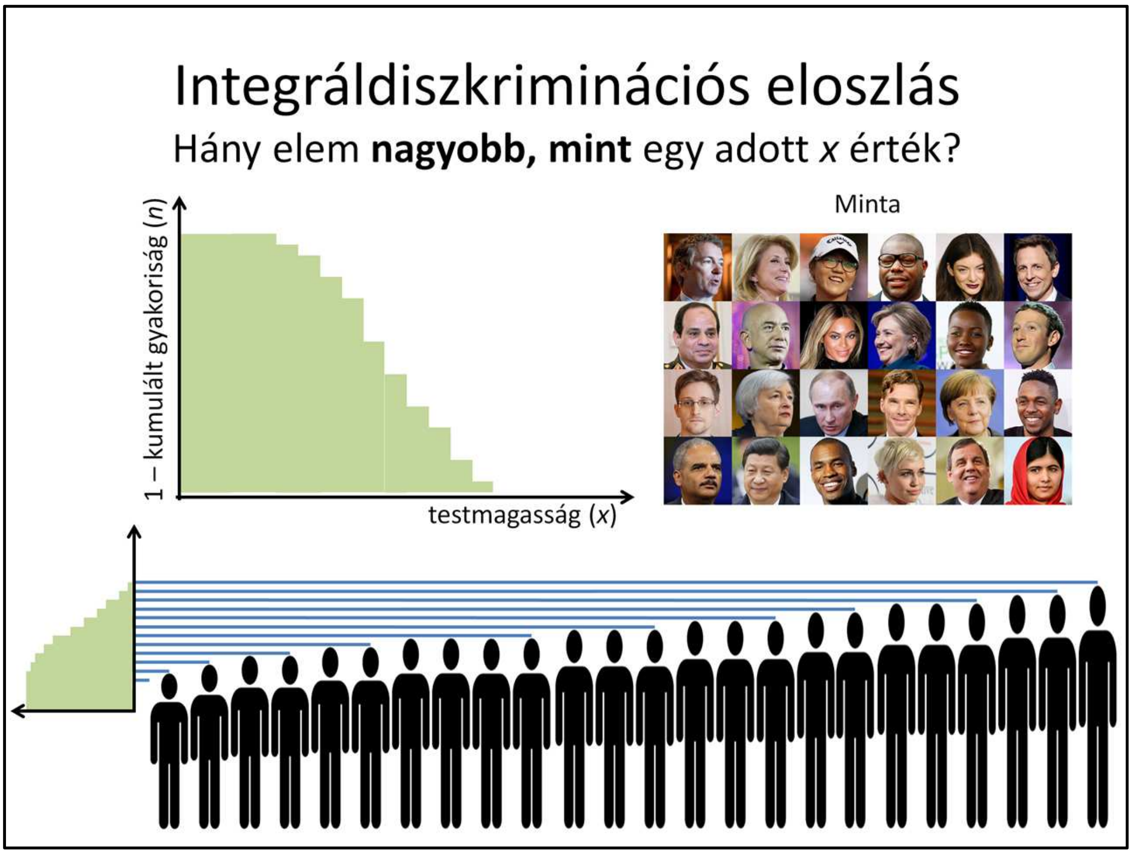
Ezután alakítsunk ki intervallumokat, amelyeken belül egy osztályba soroljuk az értékeket.



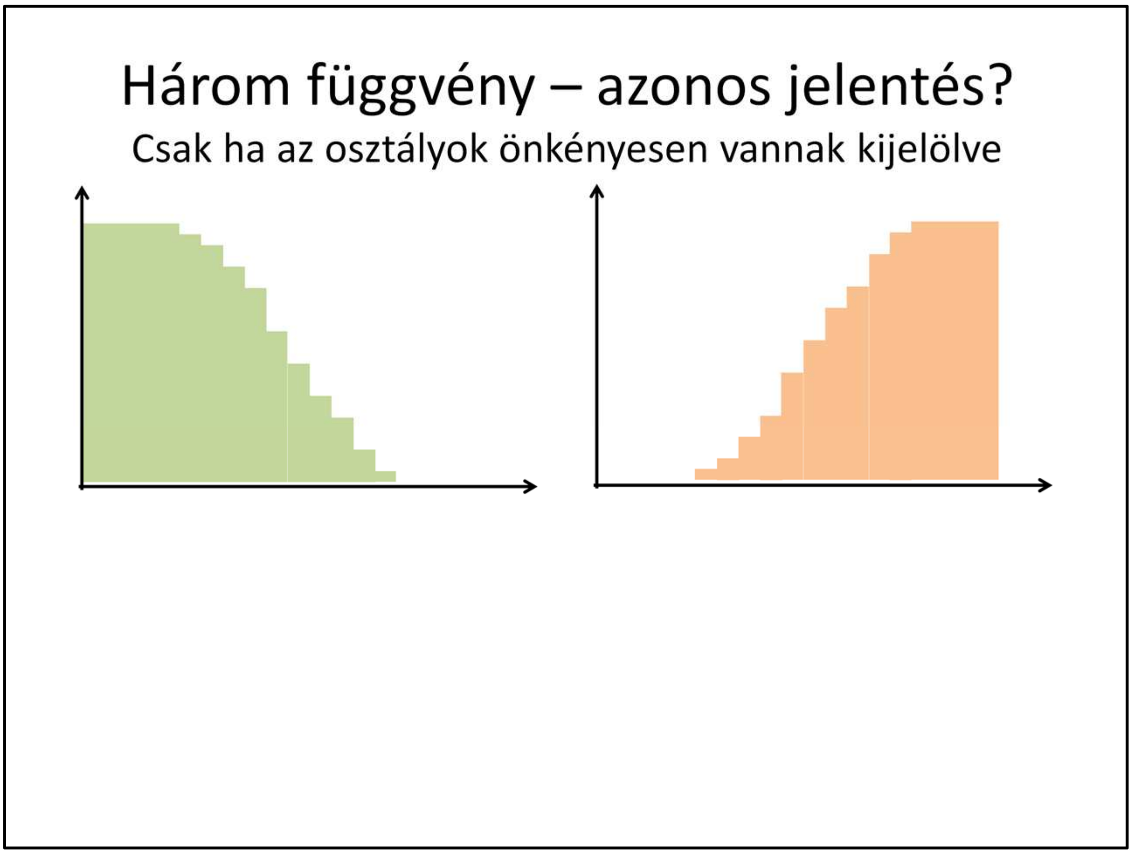
Ezután a már ismert módon készítsük el a gyakorisági eloszlást: számoljuk össze, hogy egy osztályba hány elem tartozik, majd ezt a számot kis téglalapokkal tüntessük fel a függvényen. Látható, hogy az összes téglalap száma megegyezik az elemszámmal.



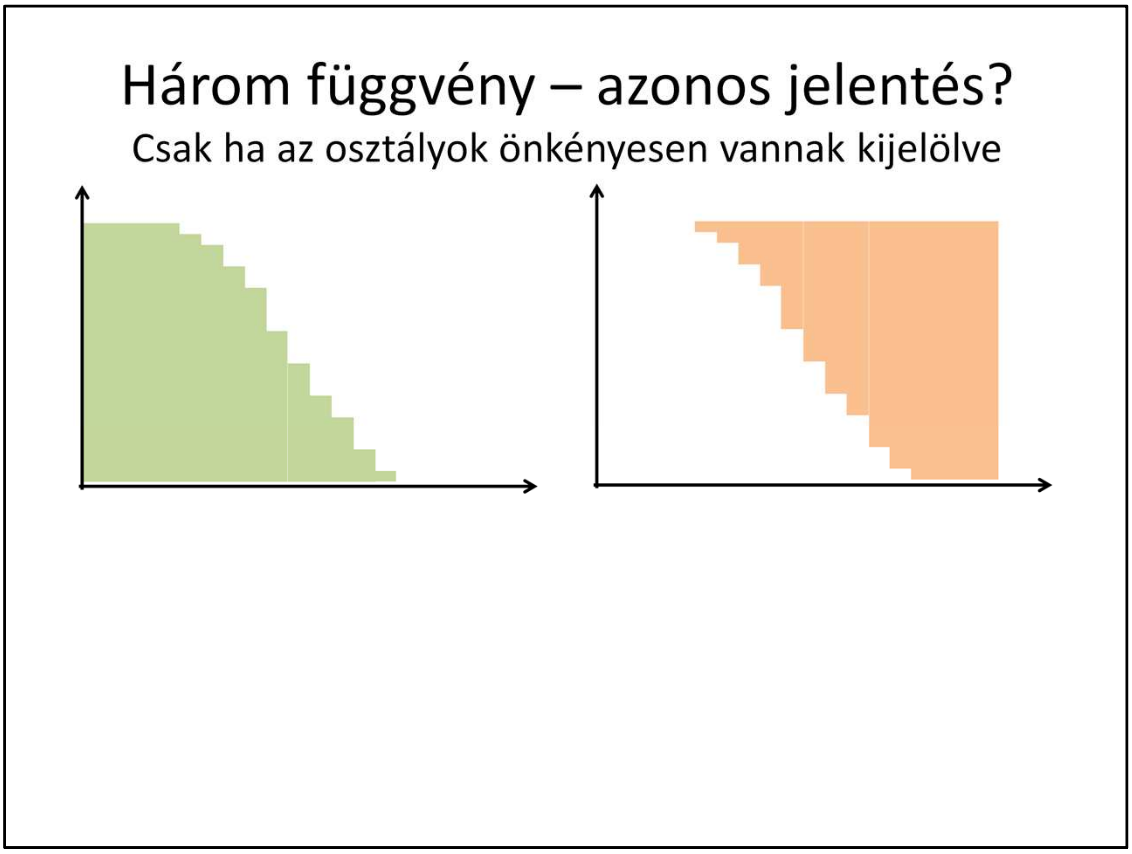
Ezután nézzünk egy másikfajta összeszámlálási módszert:most azt nézzük meg, hogy egy adott x értéknél (ezt az egyes vonalak jelentik) hány érték kisebb. Látható, hogy a legalsó vonal alatt senki sincs. A következő alatt egyvalaki, az azt követő alatt már ketten, az azt követő alatt már összesen négyen vannak s.í.t. Végül lesz egy magasság, amely alatt már az összes érték (mind a 24) megtalálható, vagyis ez a függvény x növelésével az elemszámhoz tart. Mivel x növelésével mindig újabb és újabb elemeket vonunk be, ezért ezt kumulatív (halmozódó) gyakorisági eloszlásnak nevezzük.



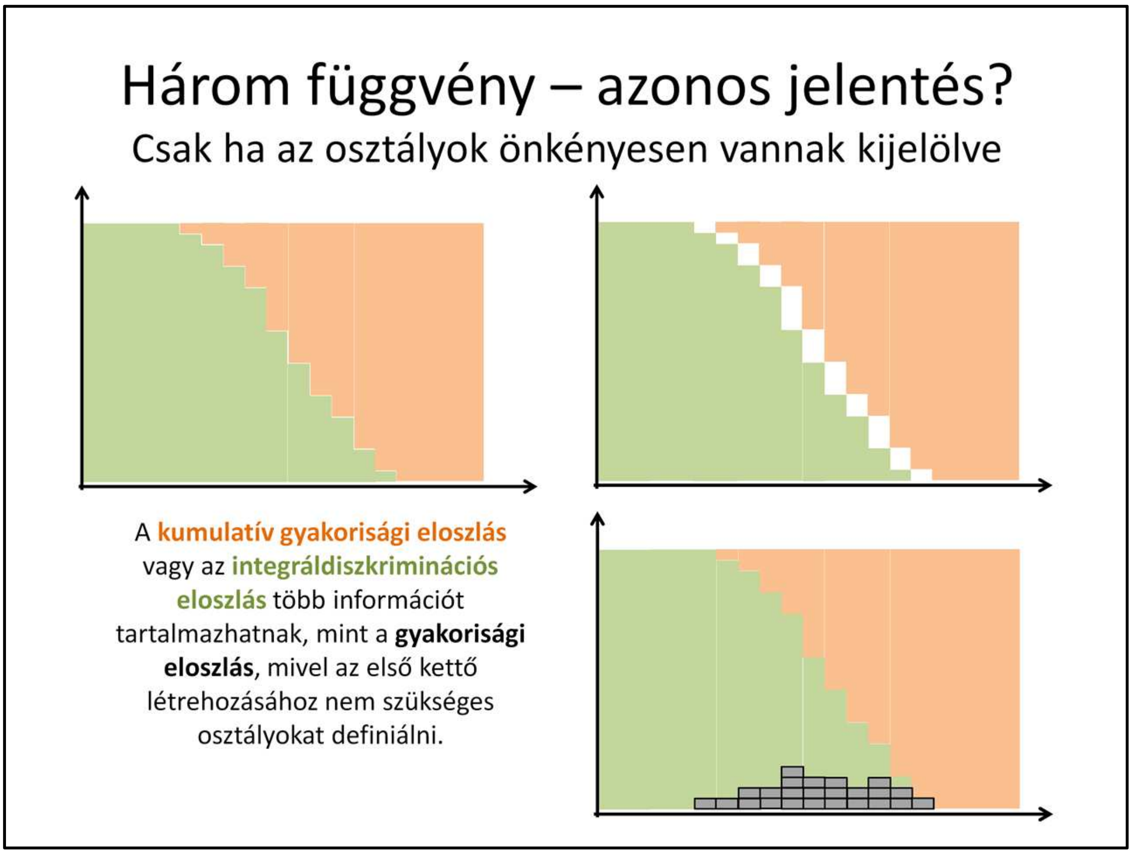
Az előbbi eljárás fordítottját is elvégezhetjük: Most azt számoljuk össze, hogy egy adott x értéknél (vonalnál) hány nagyobb (magasabb) elemünk van! A legalsó vonalnál mindenki magasabb, vagyis itt a függvény értéke az elemszám. A következő vonal esetén már egy elem “kiesik”, majd újabb egy, azaz összesen már kettő, majd újabb kettő, azaz összesen már négy s.í.t. Végül már egyetlen elem sem fogja meghaladni az x-et, vagyis ezen függvény értéke x növelésével 0-hoz tart. Ezt a fajta eloszlást integráldiszkriminációs eloszlásnak nevezzük.



Végül foglaljuk össze a gyakorisági eloszlások típusait, különös tekintettel a köztük lévő kapcsolatra.



Már a gyakoriságieloszlás-típusok magyarázatakor is feltűnhetett, hogy a típusok között szoros kapcsolat van: például egy adott x “szinthez” tartozó kumulatív (narancssárga) és integráldiszkriminációs (zöld) gyakoriság összege kiadja az elemszámot, hiszen az előbbi az adott x-nél kisebb, az utóbbi az ugyanennél az x-nél nagyobb értékeket veszi számba. Ezt szemléltethetjük, ha pl. a kumulatív eloszlást az x-tengelyre tükrözzük: a két függvény képe “egymásba tolható”.



A kapcsolat a gyakorisági eloszlással is szemléletes: ha a kumulatív vagy integráldiszkriminációs függvények megváltozását tekintjük, megkapjuk az adott osztályba tartozó gyakoriságokat. Vagyis látható, hogy pl. a kumulatív eloszlás lépésenkéni megváltozása, (azaz a deriváltja) megadja a gyakorisági eloszlást. Ez fordítva is igaz, a gyakorisági eloszlás gyakoriságainak halmozódó összegzésével (integrálásával) – a művelet végrehajtásának irányától függően – előállítható a kumulatív, illetve az integráldiszkriminációs eloszlás.

Tehát a kumulatív eloszlásból (illetve az integráliszkriminációs spektrumból) különbségképzéssel ("differenciálás") állítható elő a gyakorisági eloszlás, míg a gyakorisági eloszlásból összegzéssel ("integrálás") állítható elő a kumulatív gyakorisági eloszlás (illetve az integráldiszkriminációs spektrum).

Ellenőrző kérdések I.

- Mi a függvény definíciója?
- Mit értünk változók alatt és milyen típusaik vannak?
- Hogyan adható meg egy függvény?
- Mit jelentenek a következő kifejezések: konstans, állandó, koefficiens, együttható, paraméter, faktor
- Mit értünk determinisztikus és stochasztikus jelenség alatt? A volóságban melyik típus jellemző?
- Mi a lineáris egyenlet általános egyenlete? Mik a paramétereinek szemléletes jelentése? Milyen triviális példákkal lehet ezeket a jelentéseket szemléltetni?
- Hogyan lehet a lineáris függvény változóinak megváltozása közti viszonyt kifejezni?
- Mondj példákat lineáris kapcsolatban álló változókra!
- Mit nevezünk egyenes arányosságnak?
- Mikor nevezünk egy lineáris függvényt egyenes arányosságnak?
- Ami geometriailag egy lineáris skálán mért távolság, az minek felel meg számtanilag?
- Hogyan határozható meg az egyenes egyenlete, ha csupán két pontjának koordinátáit ismerjük?
- Mondj példát exponenciális viszonyban lévő mennyiségekre!
- Mi az exponenciális változás lényege (definíciója)?
- Mi az exponenciális függvény első közelítésben használt általános képlete?
- Milyen átalakításokat végzünk ezen az általános képleten a gyakorlati (fizikai) felhasználáshoz?
- Mik a gyakorlati célokra átalakított általános exponenciális egyenlet paraméterei, és mi ezek jelentése?
- Milyen triviális példákkal lehet megvilágítani a gyakorlati célokra használt exponenciális függvény paramétereinek jelentését?
- Hogyan változik a függvény, ha y_0-t, illetve ha p-t növelem?

A kérdések megválaszolhatók az előadáson elhangzottak, a gyakorlatvezetővel folytatott konzultációk, illetve saját utánaolvasás segítségével. Az ellenőrző kérdések egyben példák arra, hogy milyen tesztkérdések (feleletválasztós formában) fordulhatnak elő.

Ellenőrző kérdések II.

- Miért van szükség az exponeciális függvény linearizálására?
- Hogyan lehet matematikailag linearizálni az exponenciális függvény gyakorlatban használt egyenletét? Milyen kapcsolat van az eredeti paraméterek és a linearizált egyenlet paraméterei között?
- Hogyan lehet grafikusan linearizálni az exponenciális függvényeket?
- Hogyan írható le az exponenciális függvény változóinak megváltozása közötti kapcsolat?
- Mit jelent az, hogy exponens?
- Mondj geometriai, fizikai és biológiai példákat a hatványfüggvényre!
- Mi a hatványfüggvény lényege (definíciója)?
- Milyen függvény a négyzetgyökfüggvény?
- Milyen függvény a fordított arányosság?
- Hogyan lehet a hatványfüggvényt aritmetikailag linearizálni? Milyen kapcsolat van a linearizált függvény paraméterei és az eredeti hatványfüggvény paraméterei között?
- Hogyan lehet a hatványfüggvényt grafikusan linearizálni?
- A következő adatpárokat mértem, amikor egy test szabadesését vizsgáltam:

idő (s)	megtett út (m)
0	0
1	4,905
2	19,62
3	44,145
4	78,48

  Miért nem lehet Excelben ezekre az adatokra hatványfüggvényt illeszteni?
- Számszerű adatpárokat szeretnék ábrázolni koordinátarendszerben. Mi a helyes eljárás? Ha összekötöm a pontokat, vagy ha nem? Miért?

Ellenőrző kérdések III.

- Tekintsük a növekvő exponenciális és a növekvő hatványfüggvényeket. Melyik nő gyorsabban? Hogyan lehet ezt szemléletesen bizonyítani (bármilyen alap, illetve kitevő esetén!)?
- Hová tart az $y=2e^{-px}$ függvény, ha p = 1,3 és x-et minden határon túl növelem ($x \rightarrow +\infty$)?
- Egy linearizált hatványfüggvény meredeksége 2. Milyen hatványfüggvényről van szó? Milyen görbe a grafikonja az eredeti függvénynek?
- Egy linearizált hatványfüggvény meredeksége 0,5. Milyen hatványfüggvényről van szó?
- Egy linearizált hatványfüggvény meredeksége –1. Milyen hatványfüggvényről van szó? Milyen görbe a grafikonja az eredeti függvénynek?
- Milyen szabályszerűség szerint követik egymást a négyzetszámok?
- Mit értünk differenciahányados és differenciálshányados, illtve derivált alatt? Mi ezek grafikus jelentése?
- Mit értünk integrál alatt? Mi ennek grafikus jelentése?
- Milyen viszon van az út–idő, sebesség–idő és a gyorsulás–idő függvények között?
- Milyen kapcsolat van a lineáris és a négyzetfüggvény között?
- Hogyan definiálható a gyakorisági eloszlás, a kumulatív gyakorisági eloszlás, illetve az integráldiszkriminációs spektrum?
- Hová tart az integráldiszkriminációs eloszlás és a kumulatív eloszlás értéke, ha $x \rightarrow +\infty$?
- Hová tart az integráldiszkriminációs eloszlás és a kumulatív eloszlás értéke, ha $x \rightarrow -\infty$?
- Milyen kapcsolat van a kumulatív gyakorisági eloszlás és a gyakorisági eloszlás között?
- Melyik diaramtípus a legcélszerűbb Excelben, ha számszerű adatpárokat szeretnénk ábrázolni? Miért?

Ellenőrző kérdések IV.

- Mi a lineáris függvény általános egyenletének alakja, ha x-et akarjuk kifejezni (mert az y az ismert)?
- Mi az exponenciális függvény gyakorlati célokra átalakított általános egyenletének alakja, ha x-et akarjuk kifejezni (mert az y az ismert)?
- Mi a hatványfüggvény általános egyenletének alakja, ha x-et akarjuk kifejezni (mert az y az ismert)?