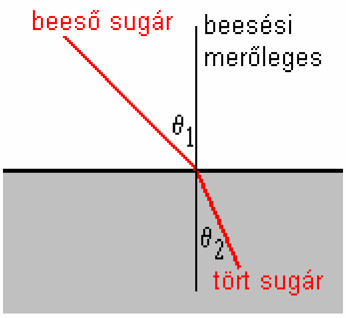
A Snell-törvény (további ismert nevei: Descartes-törvény, Snellius-Descartes-törvény, szinuszok törvénye, fénytörés törvénye) egy olyan képlet, amely kapcsolatot termet a közeghatáron megtörő fénysugár beesési és törési szöge, és a fénysugár adott közegbeli sebessége között.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

A vizsgált jelenség: a fénysugár közeghatárhoz érve megtörik, és adott törőközeg esetén adott beesési szöghöz (θ_1) mindig meghatározott törési szög (θ_2) tartozik:



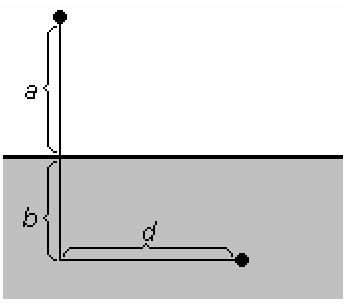
Precíz mérésekkel azt is megállapították, hogy adott törőközeg esetén a beesési szög és a törési szög szinuszainak hányadosa állandó, a hányadost elnevezték a második közeg elsőre vonatkoztatott törésmutatójának:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = konst. = n_{2;1}$$

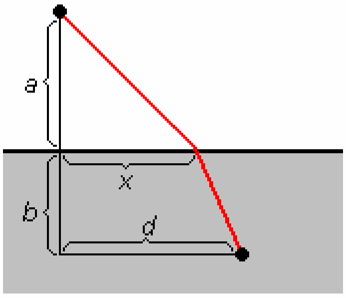
Majd azt is megállapították, hogy ez az arány azonos a fény törőközegekben mért sebességeinek arányával:

$$n_{2;1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ez az összefüggés (Snell-törvény) levezethető a Fermat-elvből, mely szerint a fény két pont között azt az utat választja, melynek megtételéhez a legrövidebb időre van szüksége. Legyen esetünkben a két pont a következő:



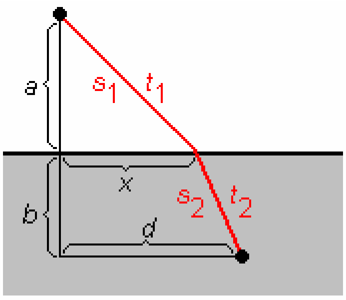
A kérdés az, hogy milyen úton halad a fény az egyik ponttól a másikig. Mivel adott közegben a fény egyenesen halad, irányváltoztatás csak a közeghatáron történhet, vagyis a kérdés tulajdonképpen a közeghatár elérésének helye. Jelölje a belépés helyének a kiindulási pont közeghatárra eső merőleges vetületétől mért távolságát x:



A lehetséges útvonalak közül a fény azt választja, amelyik megtételéhez a legrövidebb idő szükséges. Azt idő pedig a megtett út és a sebesség hányadosa:

$$t = \frac{s}{v}$$

Ezért a közegenként megtett időket a közegenként megtett út és a fény közegbeli sebességének hányadosa segítségével kell kiszámolni:



Az utak meghatározása a Pitagorasz-tétel segítségével:

$$s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$s_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Az egyes utak megtételéhez szükséges idők:

$$t_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

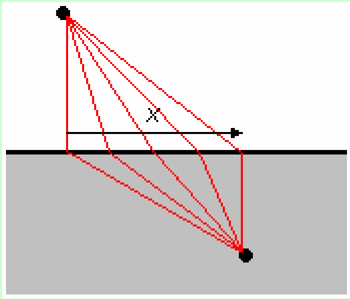
$$t_2 = \frac{s_2}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

A teljes út megtételéhez szükséges idő a részidők összege:

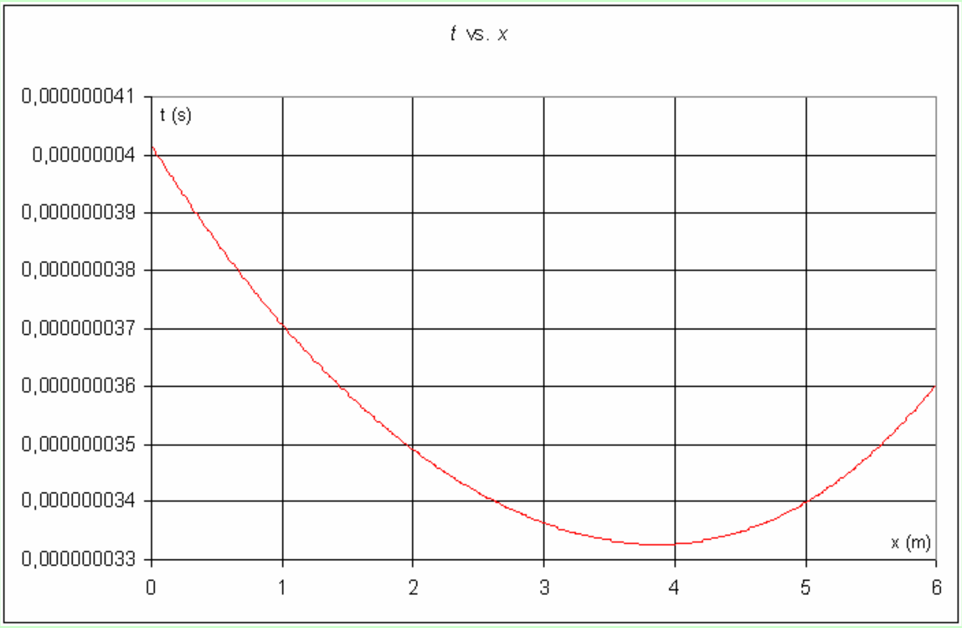
$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

Mivel a, b, d, c_1 és c_2 paraméterek (fix értékek) és csak x a változó, a megtett idő egyedül x-től függ.

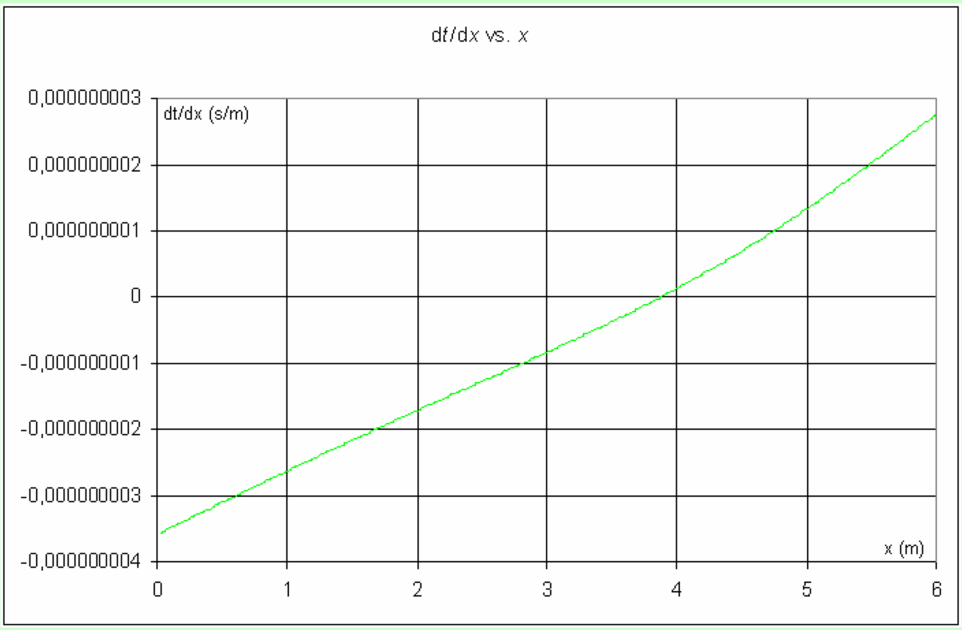
Hogy szemléletesebb legyen a magyarázat, adjunk a paramétereknek konkrét értékeket. Legyen a = 4m; b = 3m; d = 6m; c_1 = 300 000 000m/s és c_2 = 250 000 000 m/s. Növeljük a belépés helyének a kiindulási pont közeghatárra eső vetületétől mért távolságát (x) 0-tól d-ig, azaz 6-ig:



és ábrázoljuk a teljes út megtételéhez szükséges (fenti képlettel számolt) időt (t) x függvényében:



A függvényről látható, hogy létezik egy x érték, ahol az idő minimális („a legrövidebb"), a fény tehát itt fog belépni. A minimumhely megkeresésének legprecízebb módja az, ha a függvényt lederiváljuk (kiszámoljuk a függvény pontjaihoz húzható érintők meredekségét), és megkeressük, hogy a derivált hol nulla (az érintő hol vízszintes). Ábrázoljuk a derivált értékeket (dx/dt) a belépés helyének a kiindulási pont közeghatárra eső vetületétől mért távolsága (x) függvényében:



A függvény 3,873m-nél éri el a 0-t, tehát a fény itt lépi át a közeghatárt.

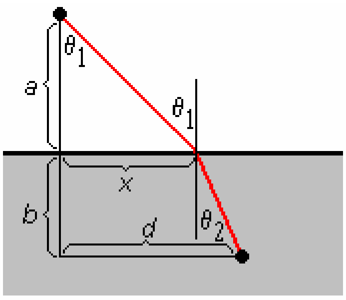
Most keressük meg hasonlóan az egyenlet általános (paraméteres) alakjának a minimumát, vagyis deriváljuk le a

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

egyenletet:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d - x)}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Vegyük figyelembe, hogy



ezért a szögfüggvények definíciójának figyelembevételével (szinusz = szöggel szemközti befogó/átfogó):

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Ezt behelyettesítve az előbbi egyenletbe:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

Ha az idő minimális, a derivált nulla, vagyis a fénysugár által megtett útra igaz, hogy:

$$0 = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

$$\sin\theta_1 \cdot c_2 = \sin\theta_2 \cdot c_1$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ezzel bizonyítottuk a Snell-törvényt.