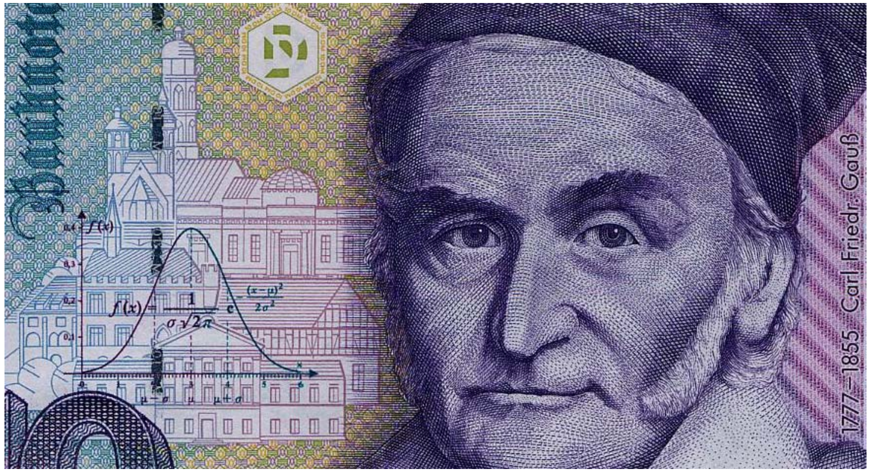
Verteilungen und Schätzungen



KAD 2013.10.02

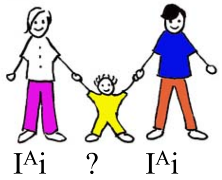
Zufallsexperiment

- Vorgang nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt
- (im Prinzip) beliebig oft wiederholbar
- sein Ergebnis ist zufallsabhängig
- bei mehrmaligen Durchführung des Experiments beeinflussen die Ergebnisse einander nicht

Beispiele:

Würfelspiel

Roulett



Blutgruppenversuch

Fahrtversuch$_2$

Elementarereignisse

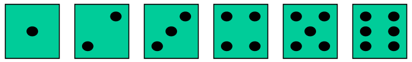
die einzelnen, nicht mehr zerlegbaren und sich gegenseitig ausschliessenden Ausgänge oder Ergebnisse eines Zufallsexperimentes

Ereignismenge, Ereignisraum (Ω)

Reihe aller möglichen Elementarereignisse. Z.B:

beim Würfelspiel:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



beim Münzenexperiment: $\Omega = \{\text{Zahl, Kopf}\}$

beim „Blutgruppenversuch“: $\Omega = \{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}$

beim „Fahrtversuch“:

{kein Unfall, Unfall}

Definition der Wahrscheinlichkeit

Bernoulli (1654-1705), Laplace (1749-1827)
(klassische Wahrscheinlichkeit)

Bei einem Zufallsexperiment, was endlich viele Ausgänge hat, die (zB. wegen Symmetriegründen) **gleichwahrscheinlich** sind, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (E) ist:

$$p(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller gleichmöglichen Elementarereignisse}}$$

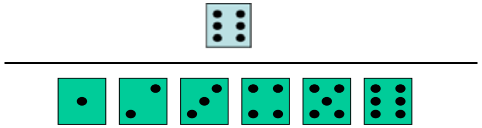
p=probability, Probabilität

Beispiele

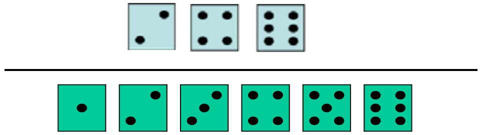
$$p(E)=\frac{g}{m}$$

Würfelexperiment:

$$p(6)=\frac{1}{6}$$



$$p(gerade\ Zahl)=\frac{3}{6}$$



Münzenexperiment:

$$p(Kopf)=\frac{1}{2}$$

Beispiele

$$p(E)=\frac{g}{m}$$

Blutgruppenversuch

$\mathrm{I^Ai}$? $\mathrm{I^Ai}$

$\Omega=\{\mathrm{I^AI^A},\ \mathrm{I^Ai},\ \mathrm{iI^A},\ \mathrm{ii}\}$

$$p(\mathrm{I^AI^A})=\frac{1}{4} \qquad \frac{\{\mathrm{I^AI^A}\}}{\{\mathrm{I^AI^A},\ \mathrm{I^Ai},\ \mathrm{iI^A},\ \mathrm{ii}\}}$$

$$p(\text{Blutgruppe}=A)=\frac{3}{4} \qquad \frac{\{\mathrm{I^AI^A},\ \mathrm{I^Ai},\ \mathrm{iI^A}\}}{\{\mathrm{I^AI^A},\ \mathrm{I^Ai},\ \mathrm{iI^A},\ \mathrm{ii}\}}$$

$$p(\text{Blutgruppe}=0)=\frac{1}{4} \qquad \frac{\{\mathrm{ii}\}}{\{\mathrm{I^AI^A},\ \mathrm{I^Ai},\ \mathrm{iI^A},\ \mathrm{ii}\}}$$

Beispiel

„Fahrtversuch” ? keine Symmetrie !

$$p(E)=\frac{g}{m}\neq\frac{1}{2}$$

Statistische Wahrscheinlichkeit

Zufallsexperiment → Ereignis *A* / Ereignis *B*

Tritt bei *n*-maliger Durchführung eines Zufallsexperimentes ein bestimmtes Ereignis ***A*** *k*-mal auf, so bezeichnet man die in langen Versuchsreihen zu beobachtende relative Häufigkeit als **Wahrscheinlichkeit, *p(A)*** :

$$p(A)=\frac{k}{n}$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- p(sicheres Ereignis) = 1
- p(unmögliches Ereignis) = 0

zB: p(Augenzahl des Würfels <10) = 1
p(Augenzahl des Würfels =10) = 0

im unseren Blutgruppenversuch:
p(Blutgruppe = B) = 0

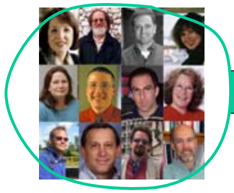
Verteilungen

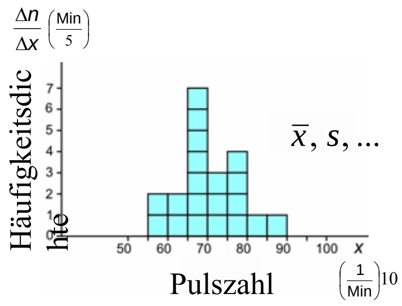
Population

Wahrscheinlichkeitsverteilung

?, ?, ...

Stichprobe





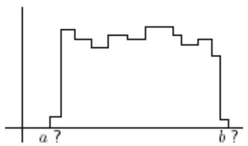
$\bar{x}$, s, ...

Verteilungen

Wie kann man die theoretische Verteilung bestimmen?

Vermutung

(nach dem Histogram)



Gleichverteilung?

Modellannahme

Laplace-Prinzip:
wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind

Laplace-Experiment:
es meint ein Zufalls-Experiment bei dem davon ausgegangen wird, dass jeder Versuchsausgang **gleichwahrscheinlich** ist

→ Gleichverteilung

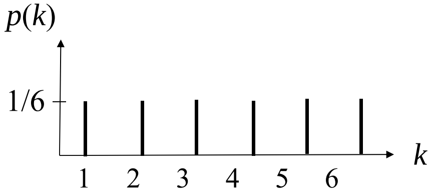
Klassifizierung der Verteilungen

diskrete Verteilungen	**kontinuierliche Verteilungen**
diskrete Gleichverteilung	kontinuierliche Gleichverteilung
Binomialverteilung	Normalverteilung
Poisson Verteilung	Chi-Quadrat Verteilung
...	t-Verteilung
	...
diskrete Zufallsgröße	kontinuierliche Zufallsgröße
zB: Anzahl der Kranken, Augenzahl des Würfels	zB: Blutdruck, Körperhöhe,...

Diskrete Gleichverteilung

Beispiel:

Wertebereich	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$p(k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6$$

weitere Beispiele:

Münzenversuch

Würfelexperiment mit einem Ikosaeder

Lageparameter der Verteilung

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2 \ldots$ dann heisst

$$\boxed{\mu = \sum_i x_i p(x_i)}$$

Erwartungswert von X.

Der Erwartungswert gibt denjenigen Wert an, den man als Mittelwert (durchschnittlichen Wert) über viele Versuchswiederholungen "erwarten" kann.

Dabei ist es durchaus möglich, dass der Erwartungswert bei keinem einzigen Versuch realisiert wird oder sogar überhaupt nicht vorkommen kann.

Nützliche Formel des arithmetischen Mittelwertes

(ungewogenes) arithmetisches Mittel

Berechnung aus Einzelbeobachtungen

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

gewogenes arithmetisches Mittel

Berechnung aus gruppierten Daten (Merkmalausprägungen)

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} h_i x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i h_i$$

n_i: absolute Häufigkeit, h_i: relative Häufigkeit

Erwartungswert und Durchschnittswert

$$\mu = \sum_i x_i p(x_i) \qquad \bar{x} = \sum_i x_i h_i$$

Beispiel: 100 Würfelexperimente. 2,5,4,3,6,6,1,5,4,2,3...

Insgesamt:

x_i	n_i	h_i
1	15	15/100
2	20	20/100
3	14	14/100
4	16	16/100
5	18	18/100
6	17	17/100

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 18 \cdot 5 + 17 \cdot 6}{100} =$$

$$= \frac{15}{100} \cdot 1 + \frac{20}{100} \cdot 2 + \frac{14}{100} \cdot 3 + \frac{16}{100} \cdot 4 + \frac{18}{100} \cdot 5 + \frac{17}{100} \cdot 6 = 3.53 =$$

$$= h(1) \cdot 1 + h(2) \cdot 2 + h(3) \cdot 3 + h(4) \cdot 4 + h(5) \cdot 5 + h(6) \cdot 6 \rightarrow$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} P(1) \cdot 1 + P(2) \cdot 2 + P(3) \cdot 3 + P(4) \cdot 4 + P(5) \cdot 5 + P(6) \cdot 6 = \mu$$

x_i: Augenzahl

n_i: absolute Häufigkeit

h_i: relative Häufigkeit

$$\bar{x} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu$$

Streuung der Verteilung

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2, \ldots$ und mit dem Erwartungswert μ. Dann nennt man die Zahl

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$$

als Varianz von X, ihre Wurzel als (theoretische) Streuung (σ).

$$s \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma$$

empirische Streuung → theoretische Streuung

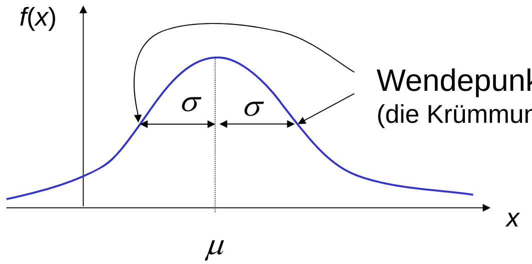
(Standardabweichung)

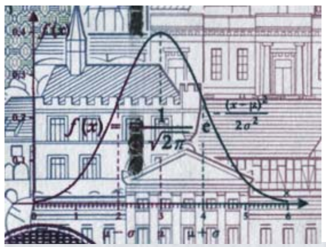
Die ausgezeichnete kontinuierliche Verteilung: Normalverteilung

Verteilungsdichtefunktion: $$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Parameter der Normalverteilung: Erwartungswert: μ

Streuung: σ

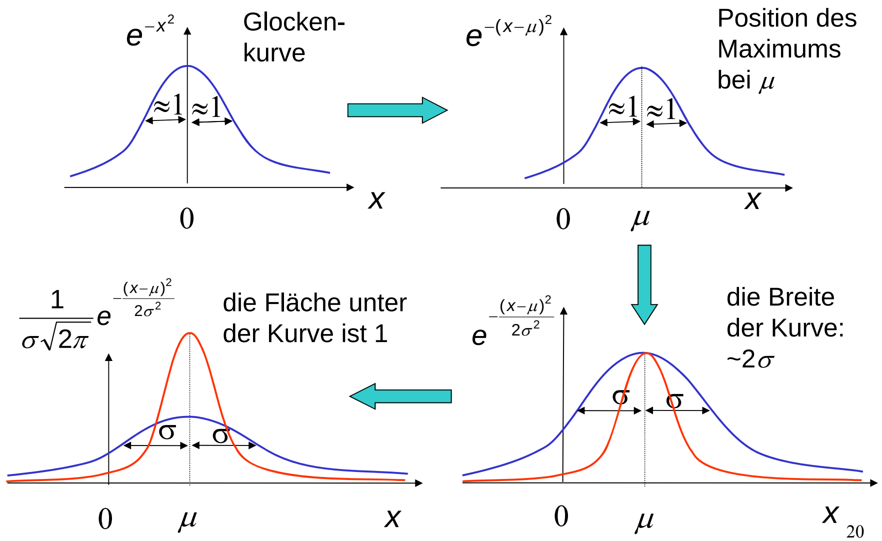




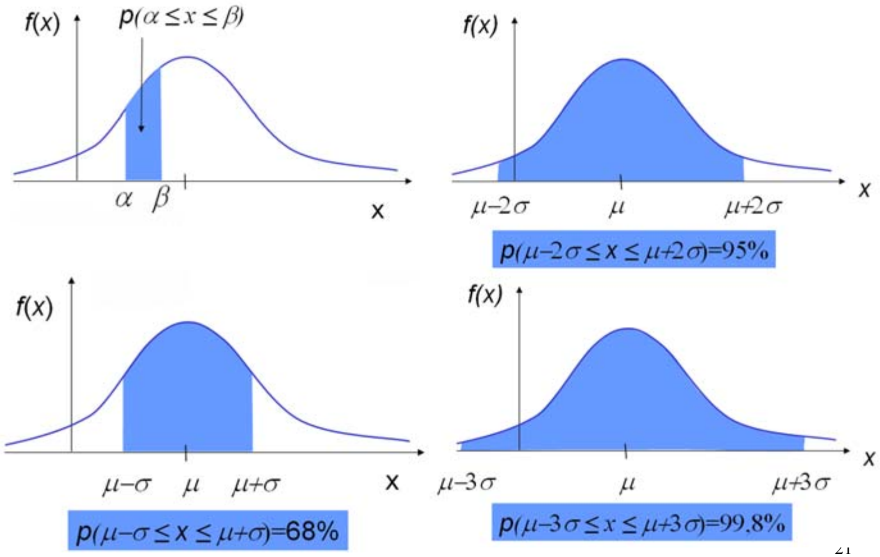
Normalverteilung (Gauss-Verteilung)

für die dargestellte Funktion: $\mu = 3$, $\sigma = 1$

Position des Maximums und die Breite der Kurve



Normalverteilung

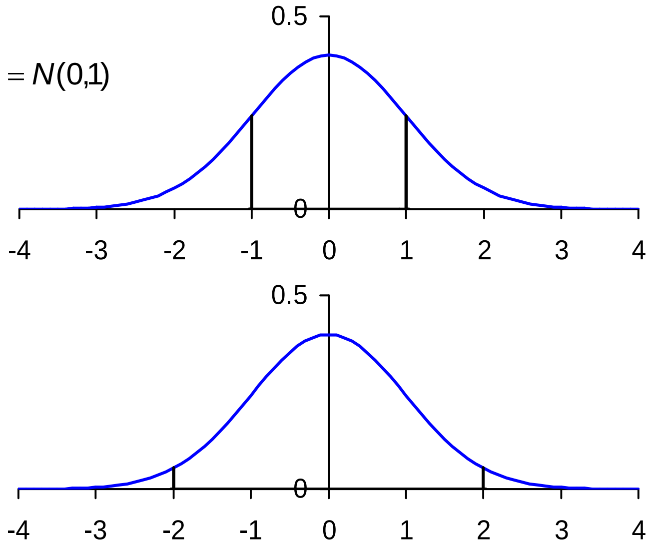


Standard - Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = N(0{,}1)$$

$\mu = 0$

$\sigma = 1$



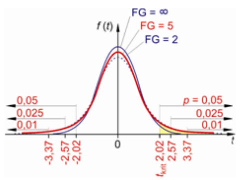
1. STATISTISCHE TABELLEN

t-VERTEILUNG

Freiheitsgrad (FG)	*p* (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	**0,5**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,255	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,66
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,250	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Pr.Buch Anhang S.27.2

t-Verteilungsfamilie



„Glockenkurven"

Je größer ist der Freiheitsgrad, desto schmaler ist die Kurve.

$t_\infty \equiv N(0, 1)$

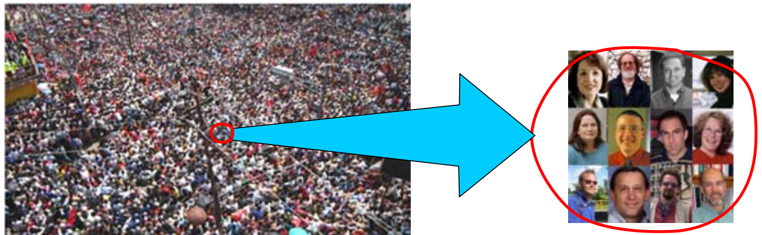
Zentraler Grenzwertsatz

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Zufallsgrößen, die alle derselben Verteilung haben. Die **Verteilung der Summe** $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ nähert sich einer **Normalverteilung,** wenn $n \to \infty$.

Die Summe der Verteilungsfunktionen konvergiert gegen eine Normalverteilung auch wenn die einzelnen Zufallsgrößen keine Normalverteilung haben.

Biologische Bedeutung:
Wenn ein Parameter (zB. Körpergröße, Blutzuckerkonzentration) durch viele ($n \to \infty$) anderen Faktoren (Zufallsgrößen) beeinflusst wird, folgt dieser Parameter einer Normalverteilung.

Analytische Statistik



Population

N = „unendlich”

Stichprobe

n = endlich

Theoretische Verteilung
Erwartungswert
Theoretische Streuung

?

Häufigkeitsverteilung
Durchschnitt
Standardabweichung

Aufgabe der Schätztheorie

Aus einer Stichprobe Schätzwerte für

- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert
- Streuung
- oder andere Parametern

einer Verteilung zu ermitteln.

Typen der Schätzungen:

- ***Punktschätzung***
- ***Intervallschätzung***

Punktschätzungen

Der Parameter wird mit einem Wert geschätzt.

Relative Häufigkeit
ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

Durchschnitt
ist ein Schätzwert für den Erwartungswert

Standardabweichung
ist ein Schätzwert für die Streuung

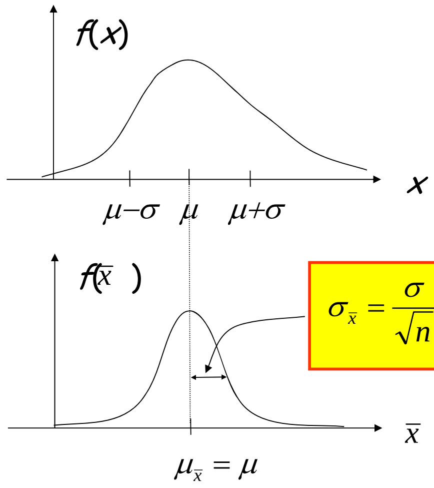
Punktschätzungen sagen
nichts über die Genauigkeit bzw. Sicherheit
der Schätzung!

Intervallschätzungen

Intervallschätzung oder Konfidenzschätzung gibt zu einer vorgewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit γ, (Konfidenzniveau) ein Intervall (c_1,c_2) an, in dem der unbekannte Parameter (zB. μ oder σ) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens γ liegt.

Zb.: Erwartungswert der Pulszahl ist bei 95% Konfidenzniveau: $74 \pm 6\ ^1/_{\mathrm{Min}}$

Konfidenzintervall für den Erwartungswert



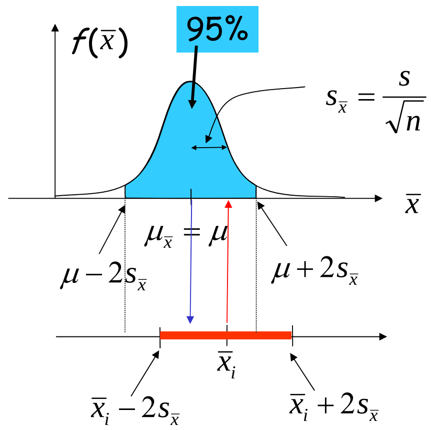
zB:Körperhöhe

Standardfehler

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx s_{\bar{x}}$$

zB: durchschnittliche Körperhöhe in einem Studentengruppe von *n* Studenten

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

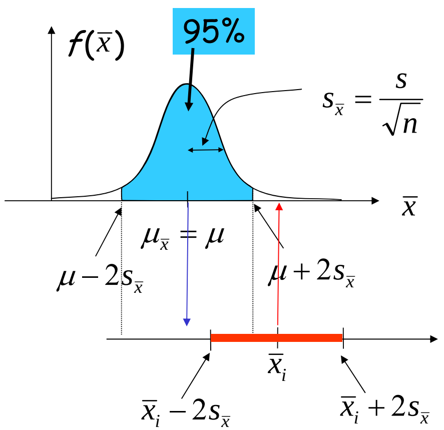


$\bar{x}_i$ liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall
$\mu - 2s_{\bar{x}} \quad \mu + 2s_{\bar{x}}$

wenn $\mu - 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \le \mu + 2s_{\bar{x}}$ dann $\boxed{\bar{x}_i - 2s_{\bar{x}}} \le \mu \le \boxed{\bar{x}_i + 2s_{\bar{x}}}$

95% Wahrsch. 95% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert



$\bar{x}_i$ liegt mit 5% Wahrscheinlichkeit im Intervall
$\mu - 2s_{\bar{x}} \quad \mu + 2s_{\bar{x}}$
nicht!

$\bar{x}_i \le \mu - 2s_{\bar{x}}$ oder $\mu + 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \Rightarrow \mu \le \bar{x}_i - 2s_{\bar{x}}$ oder $\bar{x}_i + 2s_{\bar{x}} \le \mu$

5% Wahrsch. 5% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

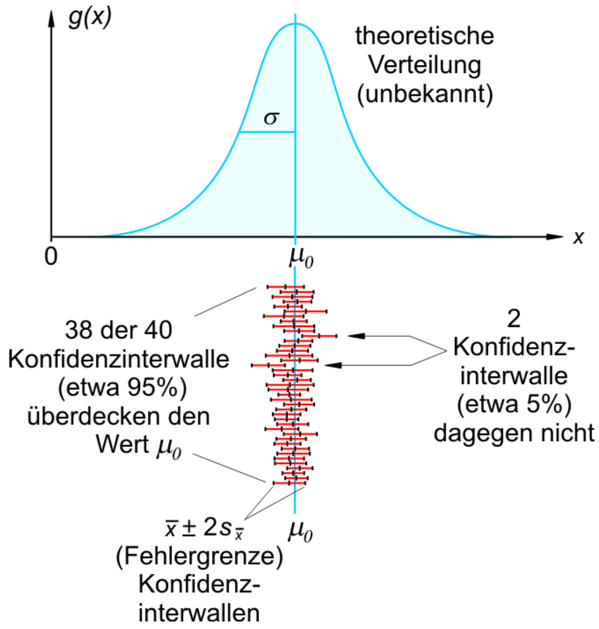
In dem Intervall $\bar{x} - 2s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 2s_{\bar{x}}$ (Konfidenzintervall) liegt der Erwartungswert (μ) mit 95% Wahrscheinlichkeit

Eine ähnliche Ableitung gibt: μ liegt
-mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - s_{\bar{x}},\ \bar{x} + s_{\bar{x}}$

- mit 99,7% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - 3s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 3s_{\bar{x}}$

Je größer ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit desto breiter ist das Konfidenzintervall!

Bemerkung: wenn $n \to \infty$ dann $s_{\bar{x}} \to 0$



Pr.Buch Abb. 11

Zusammenfassung der Schätzungen

Punktsätzungen:

Stich-probe	Grund-gesamtheit
$\bar{x}$ →	μ
s →	σ
n →	∞

Intervallschätzung für den Erwartunswert:

$\boxed{\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}} \quad 95\%}$