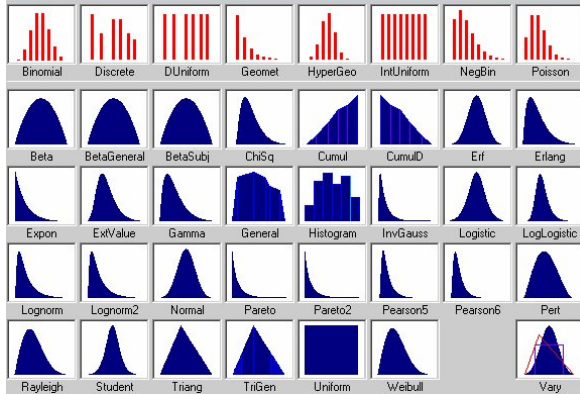
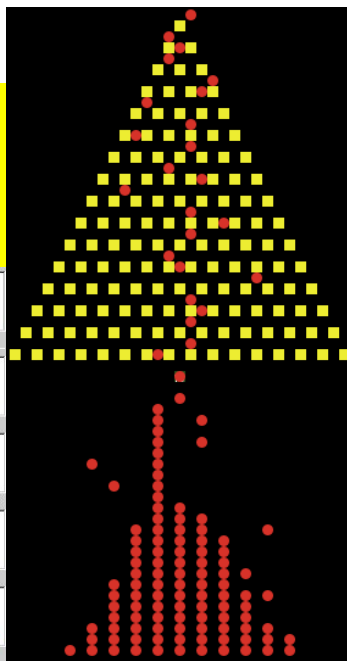


## Wichtige Verteilungen der Biostatistik



KAD 2014.10.02



## Bernoulli-Experiment

das Zufallsexperiment hat zwei mögliche Ausfälle:

$E$  (Erfolg),  $\bar{E}$  (Misserfolg)

das Experiment wird  $n$  mal wiederholt ( $n$  Stufen)

die Wahrscheinlichkeit in einem Einzelversuch

für  $E$  ist:  $p(E) = p$ , für  $p(\bar{E}) = 1-p = q$

- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des betrachteten Ereignisses  $E$  ist in jedem Einzelversuch **gleich**.
- In jedem Einzelversuch ist das Ergebnis **unabhängig** von den Ergebnissen aller anderen Versuche.

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem  $n$ -mal wiederholten Experiment ( $n$ -stufiges Bernoulli Experiment) genau  $k$ -mal Erfolg haben.

<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/GaltonBox>

2

## Würfelversuch als Bernoulli-Experiment

$E$  (Erfolg) entspricht der Augenzahl 6 (AZ6),  $p(E) = \frac{1}{6} = 0.166$



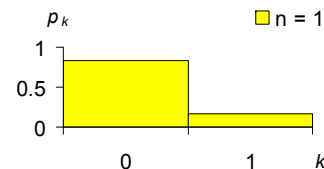
$\bar{E}$  (Misserfolg) entspricht den Augenzahlen nicht 6,  $p(\bar{E}) = \frac{5}{6} = 0.833$



für  $n = 1$

AZ6 0-mal:  $p_0 = 1 - 0.166 = p(\bar{E})$

AZ6 1-mal:  $p_1 = 0.166 = p(E)$   
( $\sum p_k = 0.833 + 0.166 = 1$ )

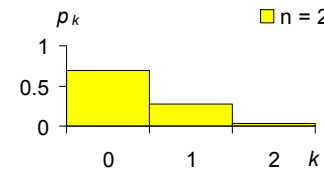


für  $n = 2$

AZ6 0-mal:  $p_0 = 0.833 \cdot 0.833$

AZ6 1-mal:  $p_1 = 0.833 \cdot 0.166 + 0.166 \cdot 0.833$

AZ6 2-mal:  $p_2 = 0.166 \cdot 0.166$   
( $\sum p_k = 1$ )



3

für  $n = 3$

AZ6 0-mal:  $p_0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

$\bar{E} \bar{E} \bar{E}$

AZ6 1-mal:  $p_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

$E \bar{E} \bar{E}$   $\bar{E} E \bar{E}$   $\bar{E} \bar{E} E$

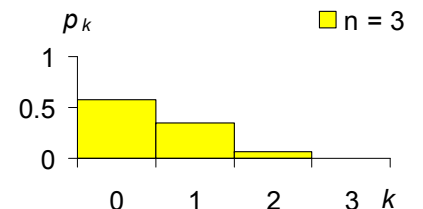
AZ6 2-mal:  $p_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$

$\bar{E} E E$   $E \bar{E} E$   $E E \bar{E}$

AZ6 3-mal:  $p_3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$

$E E E$

( $\sum p_k = 1$ )



$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n$  Experimente,  $k$  Erfolge,  $\binom{n}{k}$ : Anzahl der möglichen Reihenfolgen

4

für  $n = 7$

$$p_k = \binom{7}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{7-k}$$

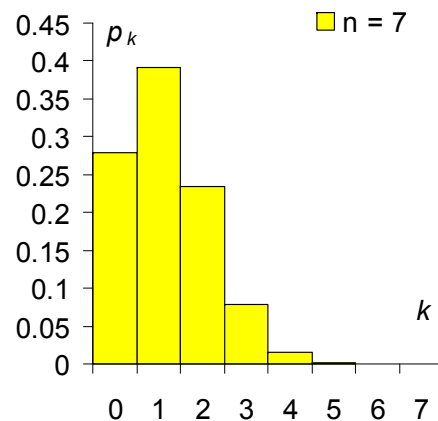
$$p_0 = \binom{7}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.279$$

$$p_1 = \binom{7}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.391$$

$$p_2 = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.234$$

$$p_3 = \binom{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.078$$

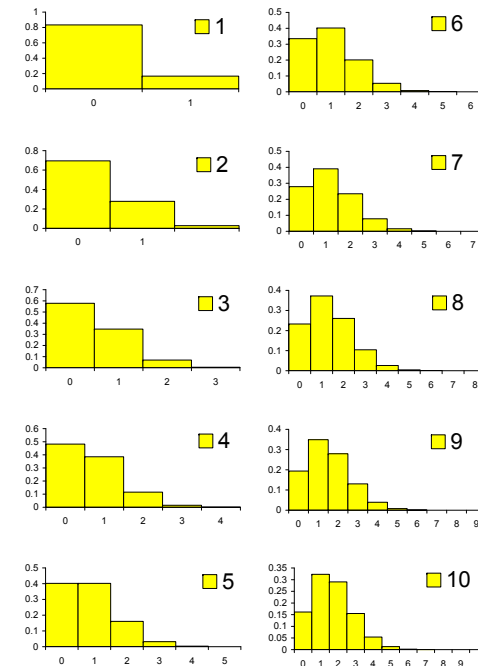
...



5

$$p(E) = \frac{1}{6}$$

Binomialverteilung



6

## Bernoulli-Experiment → Binomialverteilung

$p_k$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem  $n$ -stufigen Bernoulli-Experiment genau  $k$ -mal Erfolg haben

die Wahrscheinlichkeit dass die ersten  $k$  Versuche Erfolg haben und die anderen misserfolgich sind:

$$p(\underbrace{E, \dots, E}_k, \underbrace{\bar{E}, \dots, \bar{E}}_{n-k}) = \underbrace{p(E) \cdot \dots \cdot p(E)}_k \cdot \underbrace{p(\bar{E}) \cdot \dots \cdot p(\bar{E})}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Jede andere Reihenfolge der  $k$  Ergebnisse und  $n-k$  Gegenergebnisse haben die selbe  $p^k(1-p)^{n-k}$  Wahrscheinlichkeit.

Wieviele mögliche Reihenfolgen gibt es?

7

### Kombinatorik:

Sollen  $k$  Objekte in beliebiger Reihenfolge aus  $n$  Objekten ausgewählt werden, ergeben sich:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, wobei  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .

(Kombination aus  $n$  Elementen zur Klasse  $k$  ohne Wiederholung)

$$\text{zB: } n = 3, k = 2 \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

E E E

E E E

E E E

Fakultät von $n$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
0!	1
1!	1
2!	2
3!	6
4!	24
5!	120
6!	720
7!	5,040
8!	40,320
9!	362,880
10!	3,628,800
11!	39,916,800
12!	479,001,600
13!	6,227,020,800
14!	87,178,291,200

8

## Münzenversuch als Bernoulli-Experiment

zwei Münzenversuche:  $E$  (Erfolg) entspricht Zahl



$$p=1/2, 1-p=1/2, n=2$$

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

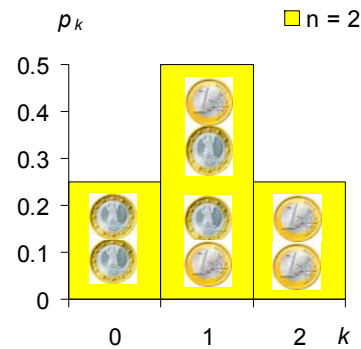
für  $p=1/2$  vereinfacht sich:  $p_k = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$p_0 = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$p_1 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

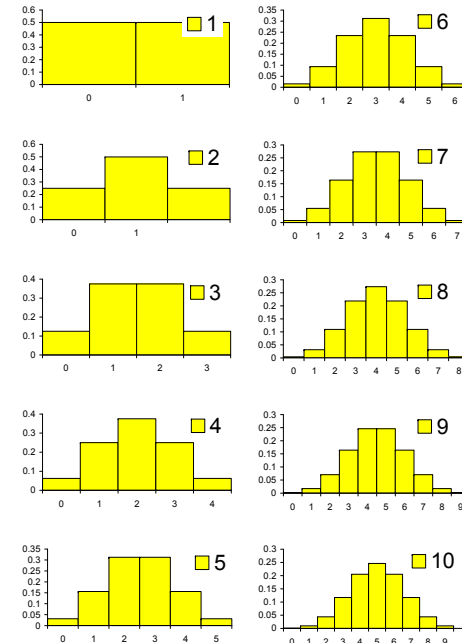
$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$



9

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

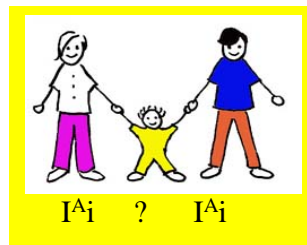
Binomialverteilung



10

## Blutgruppenversuch als Bernoulli-Experiment

Genotyp	$I^A I^A$	$I^A i$	$i I^A$	$ii$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Fenotyp	A			0
Wahrscheinlichkeit	$\frac{3}{4}$			$\frac{1}{4}$



Nennen wir als „Erfolg“ ( $E$ ), wenn das Kind eine Blutgruppe 0 hat und „Misserfolg“ ( $\bar{E}$ ), wenn seine Blutgruppe nicht 0 ist.

$$p(E) = 1/4 = 0.25 \quad p(\bar{E}) = 3/4 = 0.75 \quad p(E) + p(\bar{E}) = 1$$

Die Familie hat  $n$  Kinder. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $k$  Kinder eine Blutgruppe 0 haben?

11

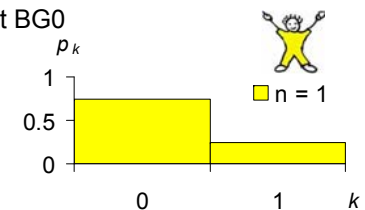
$n$ : Anzahl der Kinder,  $k$ : Anzahl der Kinder mit BG0

für  $n = 1$

(BG0 0-mal:)  $p_0 = 0.75 = p(\bar{E})$

(BG0 1-mal:)  $p_1 = 0.25 = p(E)$

$$(\Sigma p_k = 0.75 + 0.25 = 1)$$



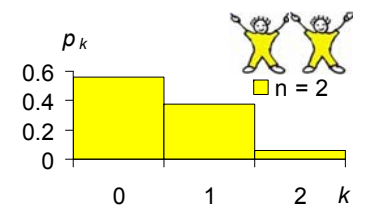
für  $n = 2$

(BG0 0-mal:)  $p_0 = 0.75 \cdot 0.75 = 0.5625$

(BG0 1-mal:)  $p_1 = 0.75 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.75 = 0.375$

(BG0 2-mal:)  $p_2 = 0.25 \cdot 0.25 = 0.0625$

$$(\Sigma p_k = 0.5625 + 0.375 + 0.0625 = 1)$$



allgemein: Sei:  $p(E) = p$   $p(\bar{E}) = 1 - p = q$

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

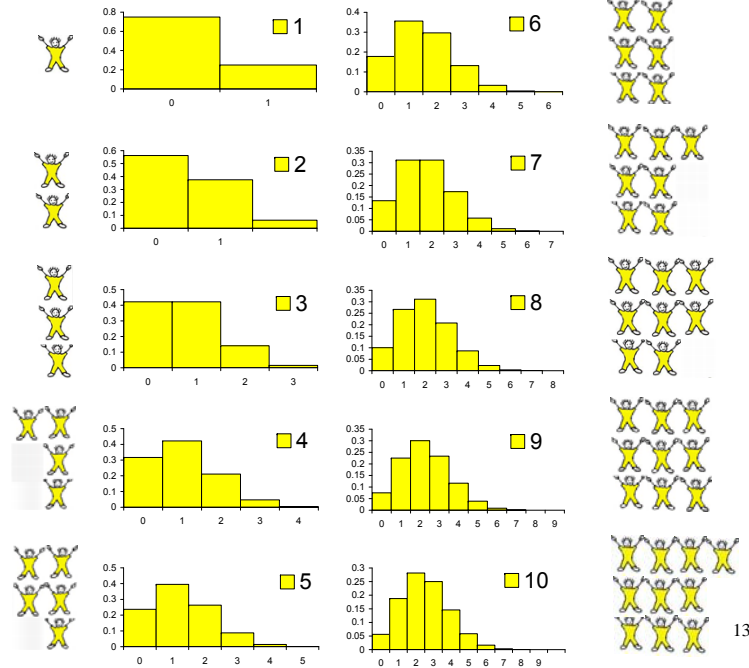
$n$  Experimente,  $k$  Erfolge

$\binom{n}{k}$ : Anzahl der möglichen Reihenfolgen

12

$$p(E) = \frac{1}{4}$$

## Binomialverteilung



## Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung

zB: 60% der Patienten haben Grippe.  
Heute kommen 4 Patienten.  
 $p=0,6 \quad n=4$

$$p_k = \binom{4}{k} (0.6)^k (0.4)^{4-k}$$

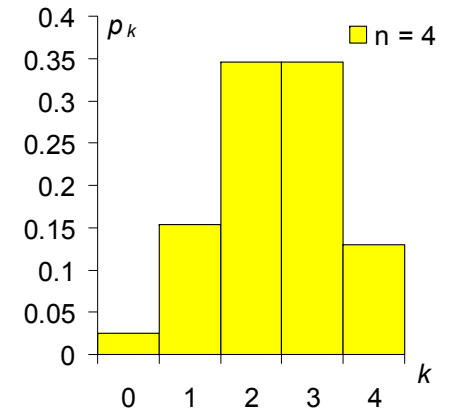
$$p_0 = \binom{4}{0} (0.6)^0 (0.4)^4 = 0.0256$$

$$p_1 = \binom{4}{1} (0.6)^1 (0.4)^3 = 0.1536$$

$$p_2 = \binom{4}{2} (0.6)^2 (0.4)^2 = 0.3456$$

$$p_3 = \binom{4}{3} (0.6)^3 (0.4)^1 = 0.3456$$

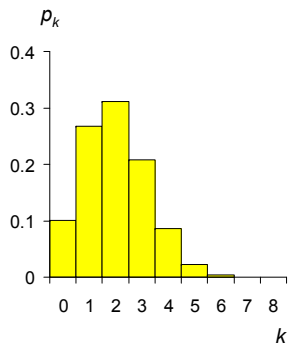
$$p_4 = \binom{4}{4} (0.6)^4 (0.4)^0 = 0.1296$$



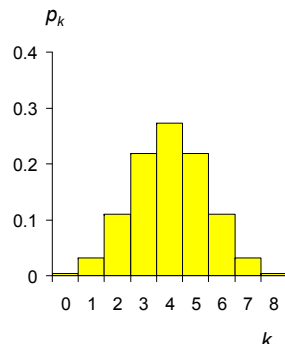
14

## Binomialverteilung

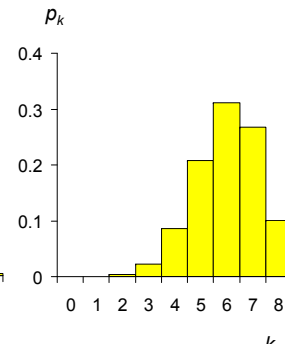
$p = 0.25 < 0.5$   
rechtsschief



$p = 0.5$   
symmetrisch



$p = 0.75 > 0.5$   
linksschief



Die Funktion wird generell für wachsendes  $n$  immer „symmetrischer“.

15

## Erwartungswert und Streuung der Binomialverteilung

Erwartungswert:  $\mu = np$

Tritt ein bestimmtes Ergebnis mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ein, so haben wir bei  $n$ -maliger Wiederholung etwa  $np$  solche Ereignisse zu „erwarten“.

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert}(x_i) &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \\ \text{Erwartungswert}(X) &= \sum_i E(x_i) = np \end{aligned}$$

(identische Einzelprozesse)

theoretische Streuung:  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

$$\text{Varianz}(x_i) = E(x_i^2) - (E(x_i))^2 = 1^2 p + 0^2 (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\text{Varianz}(X) = \sum_i \text{Varianz}(x_i) = np(1-p)$$

zB: 12 Würfelexperimente:  
Wie oft tritt „6“ auf?

$$n = 12, \quad p = 1/6, \quad \mu = 2$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{60}}{6} \approx 1.29$$

16

## Poisson: Verteilung der seltenen Ereignisse

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \end{array} \right\} np=\lambda} p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Es ist eine gute Näherung für große  $n$  und kleine  $p$  Werte

Schätzung der seltener Ereignisse

Beispiel:

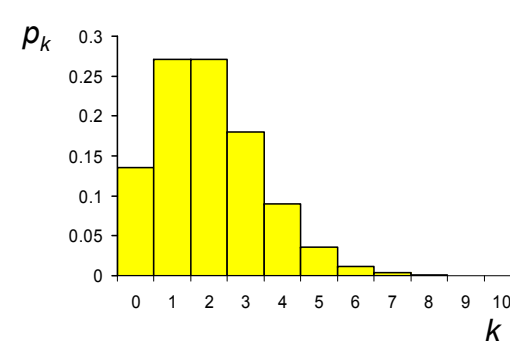
Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Krankheit bekommt, ist  $p=0.001$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Stadt mit  $n = 2000$  Einwohner  $k = 0,1,2 \dots$  Kranken gibt?

17

## Poisson Verteilung: Beispiel

Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Krankheit bekommt, ist  $p=0.001$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Stadt mit  $n = 2000$  Einwohner  $k = 0,1,2 \dots$  Kranken gibt?

$$\lambda=np=2 \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^k}{k!} e^{-2} \quad p_0 = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0,135$$



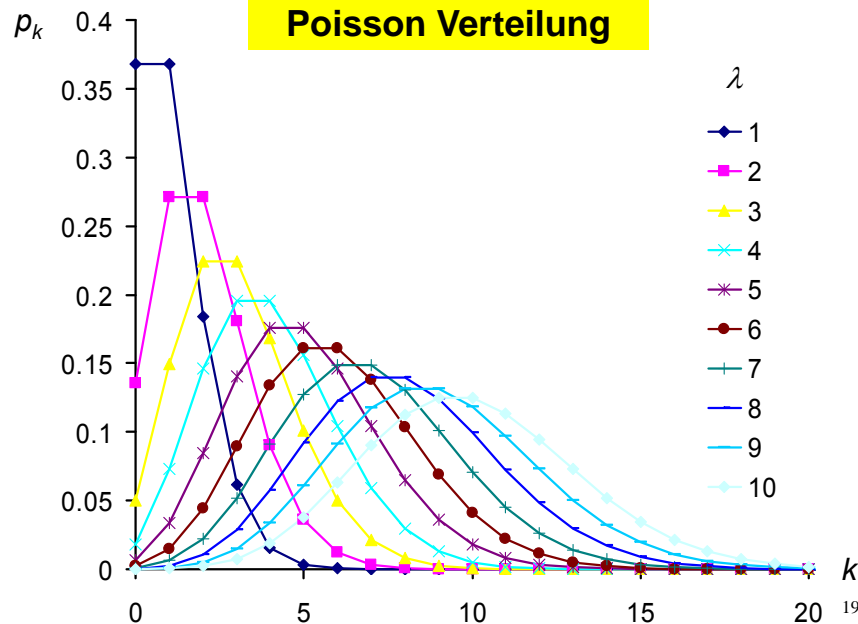
$$p_1 = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0,271$$

$$p_2 = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0,271$$

$$p_3 = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} e^{-2} = 0,181$$

...

18



## Erwartungswert und Streuung der Poisson-Verteilung

Erwartungswert:  $\mu=\lambda$

Varianz:  $\text{Varianz}(x)=\lambda$

Theoretische Streuung:  $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Eine Verteilung, wo der Erwartungswert und die Streuung voneinander nicht unabhängig sind!

20

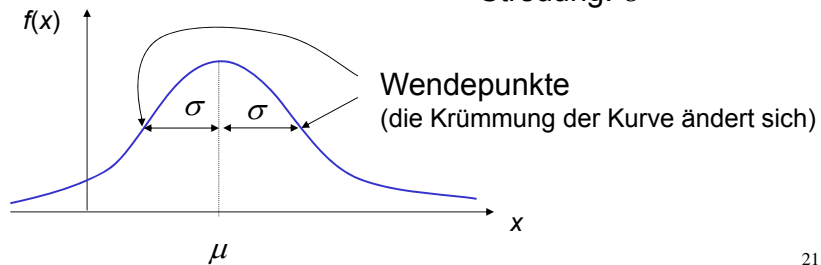


## Die ausgezeichnete kontinuierliche Verteilung: Normalverteilung

Verteilungsdichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

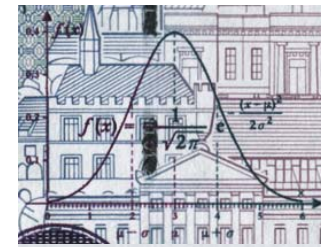
Parameter der Normalverteilung: Erwartungswert:  $\mu$   
Streuung:  $\sigma$



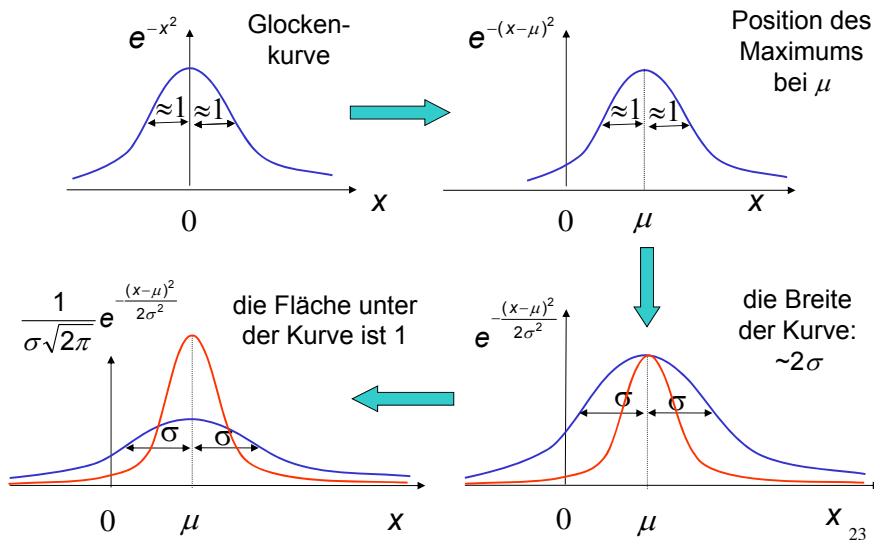
21

## Normalverteilung (Gauss-Verteilung)

für die dargestellte Funktion:  $\mu = 3, \sigma = 1$

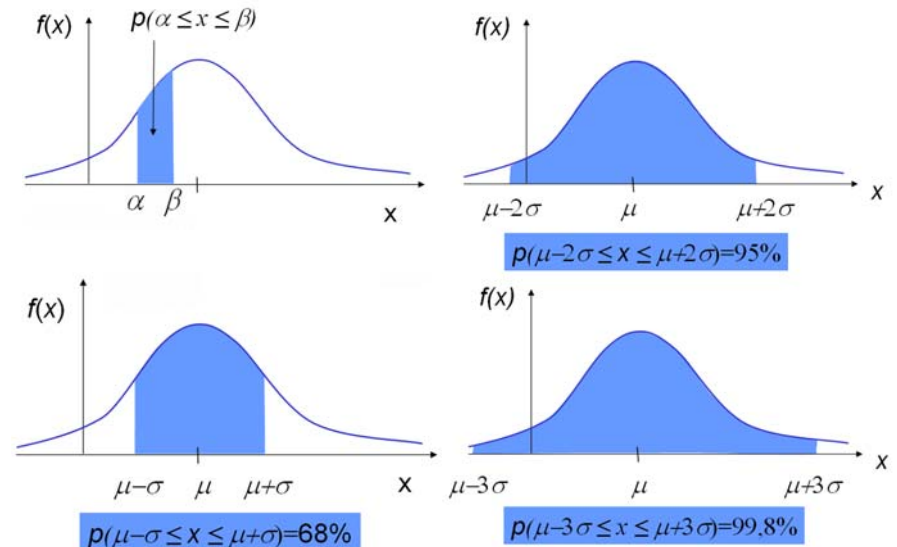


## Position des Maximums und die Breite der Kurve



23

## Normalverteilung



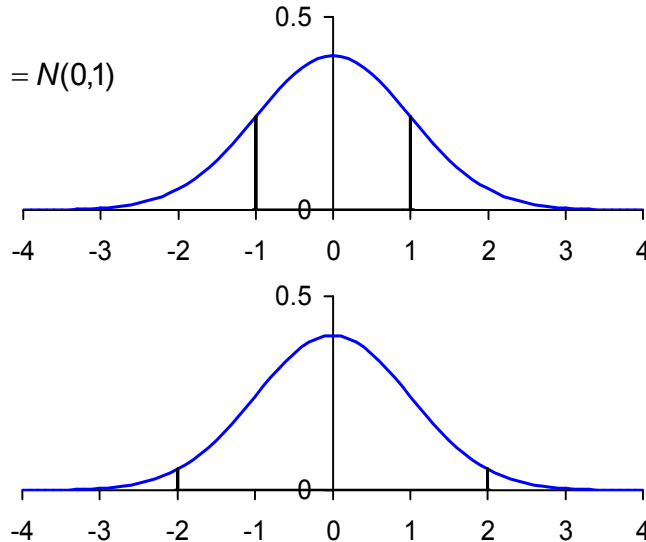
24

## Standard - Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = N(0,1)$$

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$



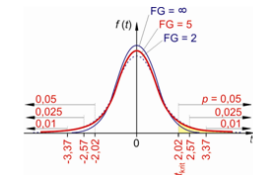
## 1. STATISTISCHE TABELLEN

### t-VERTEILUNG

Freiheits- grad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,255	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,66
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,250	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Pr.Buch Anhang S.27.2

## t-Verteilungsfamilie



„Glockenkurven“

Je größer ist der Freiheitsgrad, desto schmaler ist die Kurve.

$$t_{\infty} \equiv N(0,1)$$

## Verteilung der Summe von Zufallsvariablen

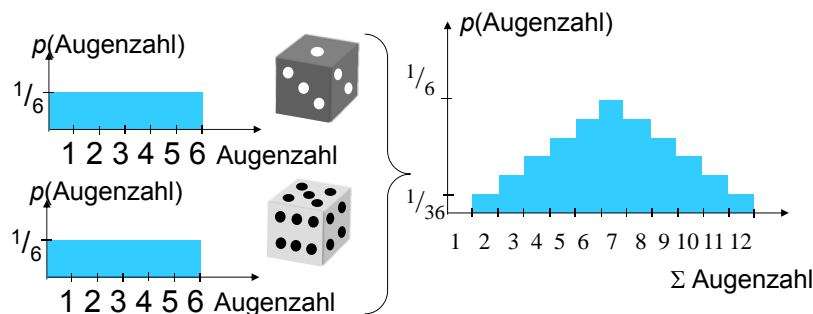
### Beispiel

Wir werfen mit ein/zwei Würfeln.

Welche Verteilung hat die Summe der Augenzahlen?

mit einem Würfel – Gleichverteilung

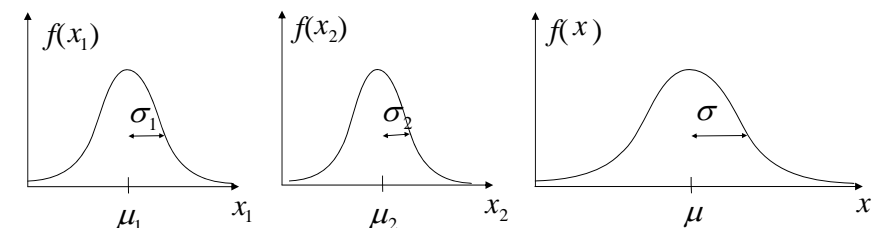
mit zwei Würfeln? – keine Gleichverteilung!



27

## Verteilung der Summe von Zufallsvariablen

$x_1$  und  $x_2$  sind **unabhängige** Zufallsvariablen. Beide folgen dergleichen Verteilung mit Erwartungswerten  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  und Streuungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$ . Welcher Verteilung folgt die Summe:  $x = x_1 + x_2$ ?



$x$  hat eine Verteilung mit Erwartungswert  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  und Varianz  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

die additive Größe ist die Varianz, nicht die Streuung!

28

## Stabile und nicht stabile Verteilungen

Der Verteilungstyp ist **stabil**, wenn die Summe von zwei unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen auch denselben Verteilungstyp besitzt.

**stabile** Verteilungen:  
Normal-, Binomial-, Poisson-

**nicht stabile** Verteilungen:  
Gleich-

Beispiel:

$x_1$  und  $x_2$  sind unabhängige Zufallsgrößen.

Beide folgen einer Normalverteilung mit Erwartungswerten  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  und Streuungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$ .

Welcher Verteilung folgt der Durchschnitt  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ?

$x$  hat eine Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$

und Varianz  $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}$   $\left( \sigma = \frac{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}{2} \right)$

29

## Zentraler Grenzwertsatz

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unabhängige Zufallsgrößen, die alle derselben Verteilung haben. Die **Verteilung der Summe**  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  nähert sich einer **Normalverteilung**, wenn  $n \rightarrow \infty$ .

Die Summe der Verteilungsfunktionen konvergiert gegen eine Normalverteilung auch wenn die einzelnen Zufallsgrößen keine Normalverteilung haben.

### Biologische Bedeutung:

Wenn ein Parameter (zB. Körpergröße, Blutzuckerkonzentration) durch viele ( $n \rightarrow \infty$ ) anderen Faktoren (Zufallsgrößen) beeinflusst wird, folgt dieser Parameter einer Normalverteilung.

30

## Wichtige Verteilungen der analytischen Statistik

### Khi-Quadrat ( $\chi^2$ ) Verteilung

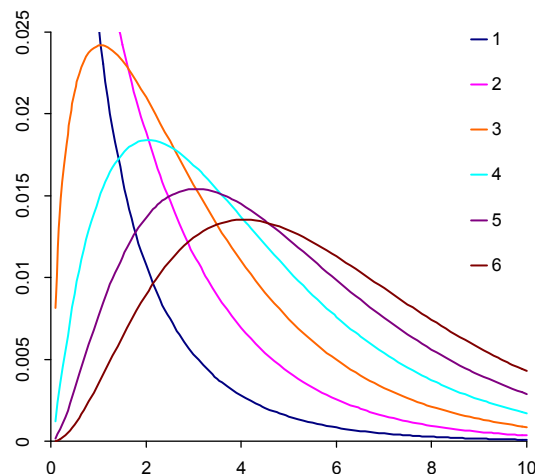
Wenn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen sind, dann hat die Zufallsgröße

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

eine sogenannte  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



der Modalwert der Verteilungen mit Freiheitsgrad  $n > 2$ :  $(n-2)$

31

## Wichtige Verteilungen der analytischen Statistik

### t-Verteilung (Student-Verteilung)

$x, x_1, x_2, \dots, x_n$  sind unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Dann die Größe

$$t_n = \frac{x}{\sqrt{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{n}}}$$

folgt einer  $t$ -Verteilung mit Freiheitsgrad  $n$ .

Die  $t$ -Verteilung ist symmetrisch,  $\mu_n = 0$  ( $n \geq 2$ ),  
die Streuung ist:  $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$  ( $n \geq 3$ )

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

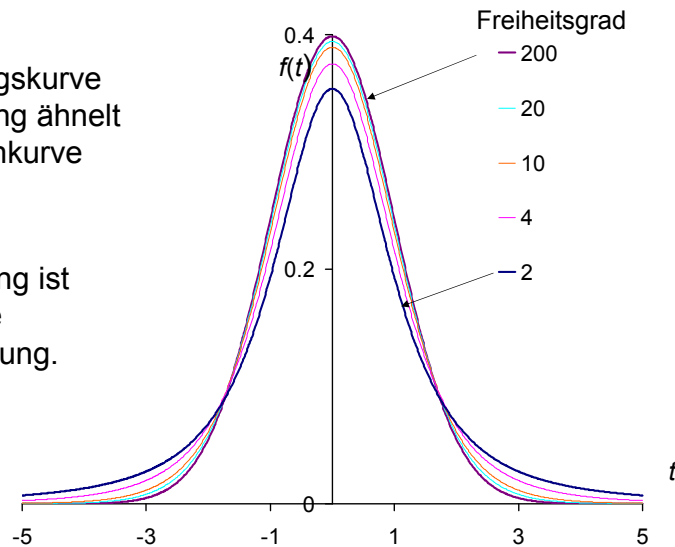
32



## Die Kurven der t-Verteilungen

Die Verteilungskurve der t-Verteilung ähnelt einer Glockenkurve (wenn  $n \rightarrow \infty$ ).

Die t-Verteilung ist breiter als die Normalverteilung.



## Überblickstabelle

	Lagemaße	Variabilitätsmaße
diskrete Verteilung	$\mu = \sum_i x_i p(x_i)$	$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$
empirische Werte	$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$ $\bar{x} = \sum_i x_i h(x_i)$	$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$ $s^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_i x_i}{n} \right)^2$
kont. Verteilung	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$

34

## Überblickstabelle

### Diskrete Verteilungen

	diskrete Gleich-	Binomial-	Poisson-
$p_k$	$\frac{1}{n}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$\mu$	$\frac{n+1}{2}$	$np$	$\lambda$
$\sigma^2$	$\frac{n^2-1}{12}$	$np(1-p)$	$\lambda$

35

## Überblickstabelle

### Kontinuierliche Verteilungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \sqrt{\frac{x}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) / n}}$$

	kontinuierl. Gleich-	Normal-	Standard-normal-	Khi-Quadrat-	t-
$f(x)$	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)! 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad f(t) = \frac{K}{\left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{\frac{f+1}{2}}}$
$\mu$	$\frac{a+b}{2}$	$\mu$	0	$n$	0 $n \geq 2$
$\sigma^2$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\sigma^2$	1	$2n$	$\frac{n}{n-2} \quad n \geq 3$

36