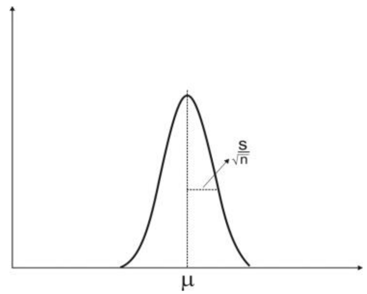
A μ és az átlag

Minta	átlag
1	170
2	168
3	166
4	173

Az átlagok szintén ingadoznak a μ körül.



Standard hiba

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Az átlagok átlagos eltérése a μ-től!

A μ ***konfidencia intervalluma***.

$$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}}) \sim 68\%$$

~68% annak a valószínűsége, hogy a μ ebben a tartományban van.

(~32% , hogy nem!)

A μ becslése

Átlag

Konfidencia intervallum

Pont becslés

Egy egyszerű érték.

Intervallum becslés

Egy tartomány és egy valószínűség, amely megadja annak az esélyét, hogy μ ebbe a tartományba esik.

Információ tartalom

$$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}}) \sim 68\%$$
$$(\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}) \sim 95\%$$
$$(\bar{x} \pm 3s_{\bar{x}}) \sim 99.5\%$$
$$(\bar{x} \pm \infty) = 100\%$$

konfidencia intervallum hossza →

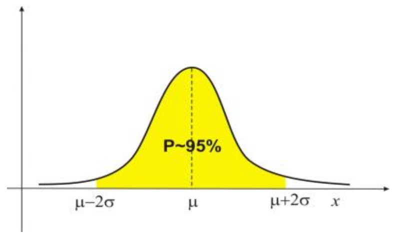
valószínűség, megbízhatóság →

információ tartalom ←

De: a konfidencia intervallum hossza függ a standard hiba nagyságától!

Normál tartomány

Normális eloszlású változó



Egyéb típusú változó

Egy olyan tartomány, amely a lehetséges értékek 95%-át tartalmazza.

De: 5% az esélye, hogy a tartományon kívülre esik!!!

Hipotézis vizsgálatok

Kérdések

(példa)

Hatásos-e a gyógyszer?

Hogyan adhatunk választ?

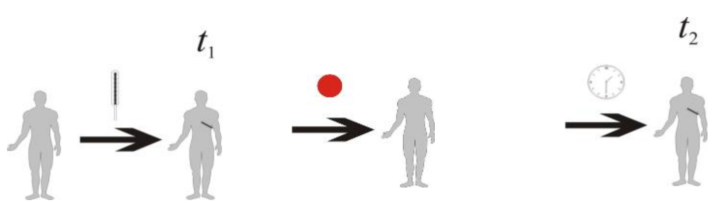
irodalomból

kísérletekből

Egy példa

Kérdés: Hatásos a lázcsillapító gyógyszer?

kísérlet



$$x = \Delta t = t_2 - t_1$$

Hipotézisek

A gyógyszer hatástalan

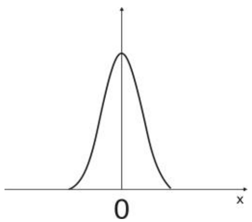
A gyógyszer hatásos

Egymást kizáró állítások, elég az egyiket megvizsgálni!

Melyikkel érdemes foglalkozni?

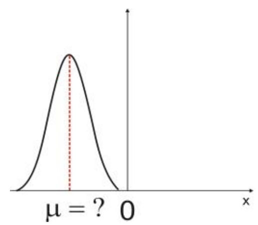
A megfigyelt változó eloszlása

A gyógyszer hatástalan



A véletlen hatások eredője 0.

A gyógyszer hatásos



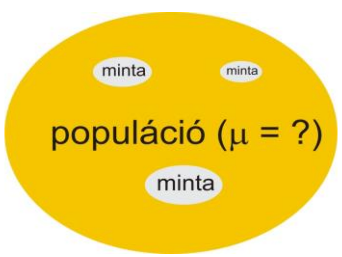
Mekkora a hatás?

Ha a populációt megismerhetnénk!!!

Eredmény		Következtetés
$\mu = 0$	→	A gyógyszer hatástalan.
$\mu < 0$	→	A gyógyszer hatásos, a hatás mértékére a μ jellemző.

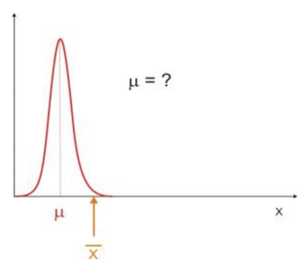
A helyzet „fokozódik”

A populáció általában nem ismert.



<u>A minta nem azonos a populációval!</u>

pl. az átlagok ingadoznak a várható érték körül!



Mi az oka az eltérésnek?

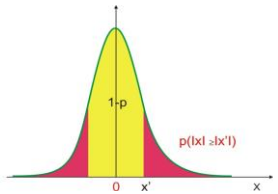
Mintavételezés ***véletlen ingadozás***. (A feltevésünk helyes!)

Az alapfeltevésünk (hipotézisünk) nem igaz (<u>tévedtünk</u>!). Az eltérés ***nem véletlen***.

Mi alapján dönthetünk?

Mekkora az esélye, hogy a minta valóban az adott populációból származik?

Ehhez *ismert* paraméterű *eloszlás* szükséges!



Nullhipotézis: (H_0)

a minta/minták eltérése a választott populáció(k)tól a mintavételből származó ***véletlen eltérés***. Gyakran egy tagadó válasz a feltett kérdésre. (példa: a gyógyszer nem hatásos.)

↕

Alternatív hipotézis: ***(H_1)***

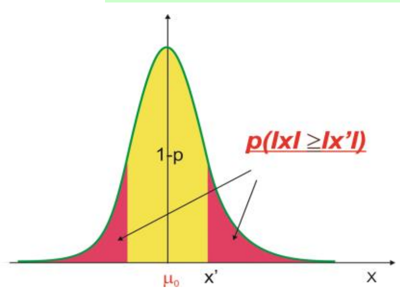
a minta/minták eltérése a választott populáció(k)tól ***nem véletlen***. (példa: a gyógyszer hatásos)

Nullhipotézis

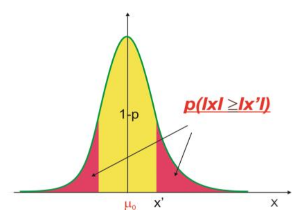
Mekkora az esélye a véletlen eltérésnek?

Ismert eloszlás esetében megadható!

(Az eloszlás alakja nem mindig ilyen, de ismert!)



Szignifikáns?



Ha ***p*** elég nagy, lehet véletlen, ha ***p*** elég kicsi a különbséget ***szignifikánsnak*** tekintjük!

p annak a valószínűsége, hogy az eltérés **véletlen**!

Szignifikancia szint

Elég nagy, elég kicsi?

Válasszunk egy értéket, amelyet határnak tekintünk! Ez a szignifikancia szint.

Jelölése: α.
Orvosi gyakorlatban értéke igen gyakran 5%.

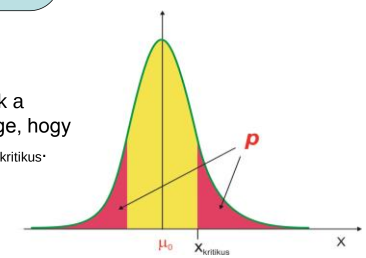
A döntés alapja

Ha a ***p*** elég kicsi, nagyobb az esélye, hogy a nullhipotézis nem igaz. Azaz inkább az alternatív hipotézis a valószínűbb.

$x_{kritikus}$: a szignifikancia szinthez tartozó érték

$x_{számolt}$: a mintá(k)ból számolt érték

p annak a valószínűsége, hogy $x_{számolt} \geq x_{kritikus}$.



A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi $(p(|x| \geq |x_{krit}|) \leq 5\%)$ – ***elvetjük*** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy $(p(|x| \geq |x_{krit}|) > 5\%)$ – ***megtartjuk*** a nullhipotézist.

A válasz sohasem igen - nem, vagy igaz - hamis!!!

A döntés „jósága”

tény: a nullhipotézis	döntés: a nullhipotézist megtartjuk	döntés: a nullhipotézist elvetjük
igaz	**Helyes döntés**	**I. Típusú hiba (α)**
hamis	**II. Típusú hiba (β)**	**Helyes döntés**

Vizsgálat egy csoportban: (egymintás t-próba)

Kérdés: A minta alapján lehet-e a populáció jellemző értéke egy megadott érték?

A példa: Hatásos-e a lázcsillapító vagy sem?

Nullhipotézis: nem! $\mu_0 = 0$. De az átlag nem 0!

minta	átlag
1.	-0,2 °C
2.	-1 °C
3.	-1,5 °C

Ha az eltérés nagyobb, biztosabbnak tűnik az alternatív hipotézis (a gyógyszer hatásos)

Mit jelent a nagy eltérés?

Mi a mértéke az eltérésnek?

Standard hiba: az átlagok átlagos eltérése a μ-től.

$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}})$ ~ 68% - konfidencia intervallum.

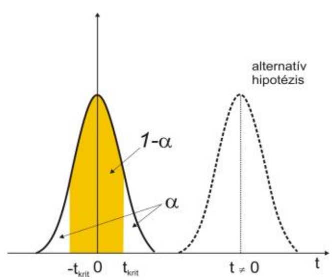
A t-érték

$$t = \frac{x - \mu_0}{s_x}$$

Viszonyítsuk az eltérést a standard hibához! (μ_0 igen gyakran = 0)

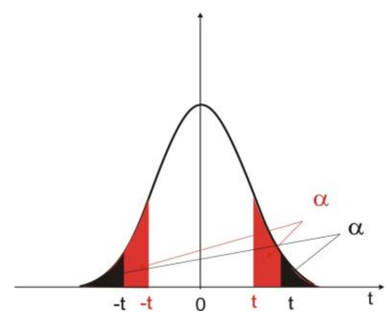
Mivel az átlagok a μ_0 körül ingadoznak, a *t*-értékek a 0 körül.

(feltéve, hogy a nullhipotézis igaz!)



Miért alkalmasabb a t-érték?

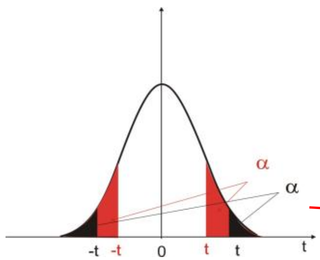
Képesek vagyunk kiszámolni ennek az eltérésnek a valószínűségét!!! (Student- vagy *t*-eloszlás)



Csak a *t*-értékek <u>véletlen ingadozását</u> írja le!

Az eloszlás alakja függ az elemszámtól.

A t-táblázat



t-táblázat

szignifikancia szint

d.f.	probability (*p*) 0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.31	12.7	31.8	63.7
2	2.92	4.3	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.6
5	2.02	2.57	3.37	4.03

szabadsági fok: (n-1)

Különböző t_{krit} értékek tartoznak a különböző valószínűség értékekhez.

A szabadsági fok

Gondoltam 3 számra! (minta)

A 3 szám átlaga: 8! (információ!)

3, 12, 8 vagy 5, 7, 11 stb.

A szabadsági fok = n

3, 12, 9 vagy 5, 7, 12 stb.

A szabadsági fok = n-1

Döntés t-táblázat alapján

t-táblázat

szignifikancia szint

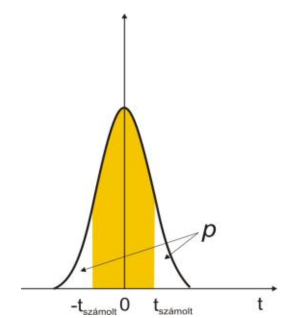
d.f.	probability (*p*) 0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.31	12.7	31.8	63.7
2	2.92	4.3	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.6
5	2.02	2.57	3.37	4.03

szabadsági fok: (n-1)

Kiválasztunk egy alkalmas szignifikancia szintet!

Döntés számítógép segítségével

Én tudok integrálni!!!



p: annak a valószínűsége, hogy véletlenül ilyen nagy a $t_{számolt}$.

A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(|t| \geq t_{krit}) \leq 5\%$) – ***elvetjük*** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(|t| \geq t_{krit}) > 5\%$) – ***megtartjuk*** a nullhipotézist.

Az egymintás t-próba feltétele

- A feladat: egy minta alapján döntés a μ értékéről.
- A változó **normális eloszlású** legyen.

Vizsgálat két csoportban

Kérdés: A két minta származhat-e azonos populációból, vagy a két populáció paraméterei azonosak?

$\mu_1 = \mu_2$?

Nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2$

(általában $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$)

kétmintás t-próba

kétmintás t-próba

$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

?

Ismert eloszlású változóra van szükség!

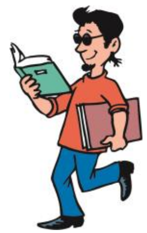
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

A próba

A t-érték az t-érték!

Akkor meg tudom csinálni! Pardon, mennyi a szabadsági fokok száma?



sz.f. = $n_1 + n_2 - 2$

$((n_1-1)+(n_2-1))$

A kétmintás t-próba feltétele

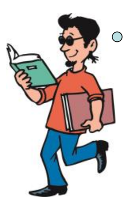
- A feladat: két egymástól **<u>független</u>** csoport összehasonlítása.
- A változó **<u>normális eloszlású</u>** legyen.
- A **<u>szórás</u>** a két csoportban **<u>azonos</u>**nak tekinthető.

Ez utóbbi új! Hogyan állapítható meg?

A szórások vizsgálata

Hogyan fogjunk hozzá?

Nullhipotézis: a két szórás azonos, az eltérés véletlen (mintavétel).



De hiszen ez olyan, mint egy hipotézis-vizsgálat!

Az F-próba

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

A nullhipotézishez tartozik egy ún. F-eloszlás.

De melyik variancia legyen a számlálóban?

A számlálóban mindig a nagyobb variancia van! (F ≥ 1)

Döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(F \geq F_{krit}) \leq 5\%$) – ***elvetjük*** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(F \geq F_{krit}) > 5\%$) – ***megtartjuk*** a nullhipotézist.

2 vagy több változó

Korreláció és regresszió

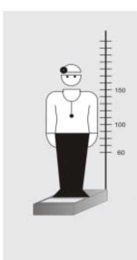
Kapcsolat két változó között.

Függvényszerű leírás.

Korreláció

Példa:
Van-e kapcsolat a testsúly és a testmagasság között?

kísérlet:



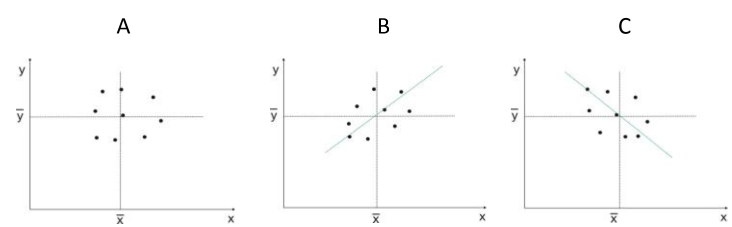
adatok:

n	magasság (cm)	súly (kg)
1	150	61
2	170	70
3	166	75
4	174	70
5	180	72
6	155	50
7	172	65
8	161	59
9	177	81

Ábrázolás

például: **x** a magasság és **y** a súly.

lehetséges esetek:



nincs semmilyen tendencia | Pozitív tendencia | Negatív tendencia

Pearson-féle korrelációs együttható

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}}$$

$$Q_{xy} = \sum_i \left[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right]$$

$$Q_x = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$Q_y = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

Az r lehetséges értékei: $-1 \le r \le 1$

A populációban:

r = 0 nincs korreláció,

r ≠ 0 van! (mértéke arányos az r abszolút értékével.)

Determinációs együttható

r^2

Megadja, hogy milyen erős a kapcsolat.
Az y változásainak mekkora része értelmezhető az x változásaival.

Korrelációs *t*-teszt

A számolt ***r*** csak becslése az ***r*** populációbeli értékének. A számolt érték az elmélet r körül ingadozik.
(pl. $r_{számolt}$ = 0,1 ?)

H_0: r = 0! → $t = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$ → sz.f.: n - 2

Döntés: a t-érték alapján. Lásd előző példákat!

Feltétele: Legalább az egyik változó normális eloszlású.

Khi-négyzet teszt (gyakorisági adatok elemzése)

.

példa: fejfájás

tabletta

hatásos: elmúlt.

nem hatásos: nem múlt el.

Kísérlet

1. csoport: gyógyszer

nem múlt el (*a*)

elmúlt (*b*)

2. csoport: ***placebo***

nem múlt el (c)

elmúlt (d)

(a,b,c,d gyakorisági adatok)

Kontingencia tábla

	Nem múlt el	elmúlt	Összes
1. csoport	a	b	a+b
2. csoport	c	d	c+d
összes	a+c	b+d	n

2 x 2 tábla.

Nullhipotézis

Ha a hatás független a gyógyszertől,

azt várjuk, hogy:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a \times d = b \times c$$

Nullhipotézis: a hatás független a gyógyszertől, csupán placebo hatás.

khi-négyzet teszt (függetlenség).

χ^2-eloszlás

Képlet 2 x2 táblákhoz:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Nullhipotézis: χ^2 = 0, a különbség csupán mintavételi hiba.

χ^2-eloszlás: megadja a χ^2-érték véletlen eltéréseit.

Döntés

Hasonló a *t*-eloszlás esetében megbeszéltekhez. A különbség: a χ^2-eloszlást használjuk.

A várható érték = 0, ha a nullhipotézis igaz.

ha $\chi^2_{számolt} \geq \chi^2_{krit}$ - elvetjük ellenkező esetben megtartjuk a nullhipotézist.

vagy $p(\chi^2 \geq \chi^2_{számolt}) \leq 5\%$ - elvetjük ellenkező esetben megtartjuk a nullhipotézist.

szabadsági fokok száma: ebben a speciális esetben = 1.

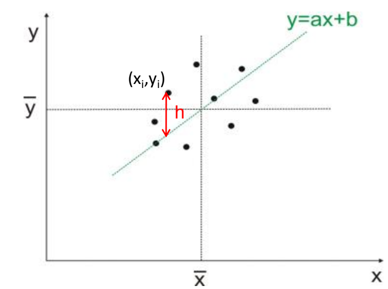
általában:

sz.f.=(s-1)(o-1), ahol s – a sorok száma
o – az oszlopok száma

Lineáris regresszió

Ha a változók normális eloszlásúak, a kapcsolat közöttük lineáris jellegű.

$$y_i = ax_i + b + h_i$$

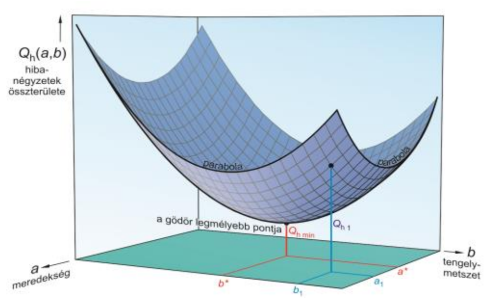


y: függő változó
x: független változó
h_i: hibatag = y_i – (ax_i+b).
(A különbség a megfigyelt és a feltételezett érték között)

A legkisebb négyzetek módszere

$$Q_h = \sum_i h_i^2 = \sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$$

x_i és ***y_i*** mért értékek.
a és ***b*** az ismeretlen!



Melyik a legjobban illeszkedő egyenes?

Q_h minimális! ⟶

$$a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad b^* = \bar{y} - a^*\bar{x}$$

Kapcsolat az inzulin érzékenység és a BMI között.

r^2: determinációs koefficiens.

független	regressziós együttható	st. hiba	t	p	döntés
BMI	-0,077	0,018	-4,25	0,0011	szignifikáns
r^2	0,6				