Biostatisztika és informatika alapjai

4. előadás:

A valószínűségszámítás elemei

2015. október 1.

Veres Dániel

Ebben az előadásban szó lesz valószínűségekről, illetve eloszlásokról.
Az előadás első felében néhány kísérletet mutatok elméletben, illetve gyakorlatban egy kis ízelítőül a valószínűségről, populáció-minta viszonyáról. Ezeken keresztül megpróbálom megmutatni a minta nagyságának szerepét, hogy eljuthassunk a populáció és minta fogalmához és a valószínűség egy definíciójához. Ez a definíció a nagy számok relatív gyakoriságokra vonatkozó törvényén alapszik.
Ezt követően az események valószínűségének alapfogalmaival ismerkedhetünk meg (jelölésrendszer; és/vagy kapcsolat események között; egymást kölcsönösen kizáró események és független események fogalma, használta; Kolmogorov axiómák; feltételes valószínűség és használata).
Ezt követően (röviden visszaidézve középiskolai vélhető ismereteiteket is) konkrét példákon keresztül megmutatom, hogy hogyan számíthatók valószínűségek az orvosi gyakorlatban is a valószínűségszámítás alapelemeivel, illetve elméleti eloszlások segítségével.
Definiáljuk a várható értéket és az elméleti varianciát is.
Majd rátérünk az egyes speciális eloszlásokra: az egyenletes, binomiális, Poisson, normál, lognormál és exponenciális eloszlásokra.
Az utolsó néhány dián pedig megmutatom, hogy hogyan működik a „mindennapi gondolkodásunk”, illetve hogyan kellene működnie, ha a valószínűség-számítás megtanult elemeire is gondolunk...

Közlemény

Gólyabál miatt az október 15-re tervezett előadás október 8-án a heti szokásos statisztika előadás után lesz megtartva

Egy kísérlet...

Az adott betegséget kimutató gyorsteszt:
kék: egészséges
zöld: beteg
Szeretnénk kideríteni a gyorsteszt segítségével, hogy egy kérdéses területen van-e járvány. A következőket tudjuk:
- A betegséggel nem sújtott („egészséges") területeken:
1-2 zöld / 10 megvizsgált egyénre.
- A betegséggel sújtott („beteg") területeken:
7-9 zöld / 10 megvizsgált egyénre

Felütötte-e a fejét a járvány az adott területen?

A vizsgálatok számának növelésével nő a „bizonyosság".
Hány mérést kell végeznünk?
Valamekkora bizonytalanság mindig lesz ... – De ez mekkora?

Ebben a kísérletben egy járványügyi „eljárást" modellezünk.
Az adott betegség kimutatására rendelkezünk egy gyorsteszttel, amelynek az eredménye:
fehér: ha a vizsgált páciens egészséges
zöld: ha az illető beteg
Szeretnénk kideríteni a gyorsteszt segítségével, hogy egy kérdéses területen van-e járvány. A következőket tudjuk:
- A betegséggel nem sújtott („egészséges") területeken:
1-2 zöld eredményt kapunk 10 megvizsgált egyénre.
- A betegséggel sújtott („beteg") területeken:
7-9 zöld eredményt kapunk 10 megvizsgált egyénre
Felütötte-e a fejét a járvány az adott területen?
Sajnálatos módon limitált forrás és idő áll rendelkezésünkre döntésünk meghozatalában, de döntenünk kell.
Az elvégzett kísérletből azt a tanulságot vonhattuk le, hogy az *elvégzett gyorstesztek (megvizsgált emberek) számának növelésével nő jó döntésünk „biztonsága"*.
Hány mérést kell(ene) elvégeznünk?
Valamekkora *bizonytalansága* mindig lesz a döntésünknek, ha nem mérünk meg *mindenkit*.
Valamekkora *bizonytalansága* mindig lesz a döntésünknek, ha nem mérünk meg *mindenkit*. Mekkora és vajon milyen mennyiség ez a bizonytalanság?

Ahhoz, hogy megválaszolhassuk a fenti kérdéseket először tisztázzuk az *alapsokaság* és a *minta* fogalmát.

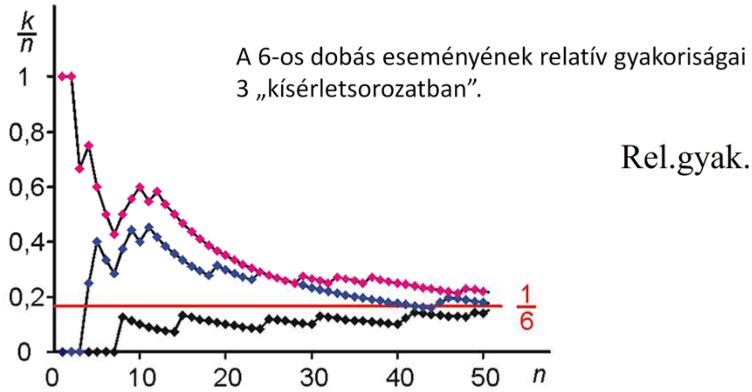
Mint említettük, a statisztika végtelen tömegjelenségek leírója. Ez azt jelenti, hogy a jelenségek vizsgálata során *sok*, akár *végtelensok* mérést is végezhetünk. Ezen elméletileg lehetséges összes mérés kimeneteleinek, eredményeinek összefoglaló halmazát nevezzük *alapsokaságnak* (*populációnak*). Elméletben a statisztikai változó teljes megismeréséhez ezt a végtelensok mérést el kellene végeznünk, de erre nyilvánvalóan nincs lehetőségünk.
Ezért az alapsokaságnak csak egy részhalmazát vizsgáljuk, amit *mintának* nevezünk. A minta tehát az alapsokaság részhalmaza, amelynek alapja a *véletlen* kiválasztás.

A létrehozott mintán méréseket végzünk, a keletkező mérési eredmények (kimenetelek) halmazát szintén mintának nevezzük. (Magyarán: kevésbé precíz fogalmazással pl. az évfolyam mint alapsokaság egyik csoportjának tagjait tekinthetjük az évfolyamból vett mintának; precízebben fogalmazva az évfolyam hallgatóinak vércsoportadatai jelenthetnek alapsokaságot, míg az egyik csoport tagjainak vércsoportadatai egy lehetséges mintát.)

A mintát jellemezhetjük grafikusan és számszerűen, *ahogyan azt megtanultuk az előző előadáson*. A minta így megállapított tulajdonságait extrapolálhatjuk, azaz kiterjeszthetjük az alapsokaságra. Az előbbi példánál maradva: amilyen arányban a mintában előfordulnak az egyes vércsoportok, kb. olyasmit várunk el az egész alapsokaságtól is. Mivel a minta összeállítása véletlenszerűen történik, nem biztos, hogy tökéletesen reprezentálja az alapsokaságot, a különböző értékek alapsokaságon belüli előfordulási arányát. Így a minta alapján levont következtetésekhez *mindig társul valamekkora bizonytalanság*.

Milyen mennyiség ez a bizonytalanság? Hogyan definiálhatjuk?

Egy másik szemszögből...



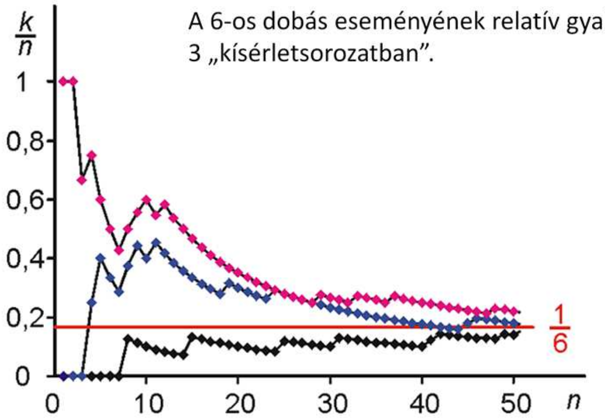
$$\text{Rel.gyak.} = \frac{N_{\text{"kedvező"}}}{N_{\text{összes}}}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a **relatív gyakoriságok** ilyen sorozatai – bár ingadozásokat mindig mutatnak – a „kísérletsorozat” hosszának növekedtével egyre inkább **stabilizálódnak valamilyen érték körül.** Továbbá ez az érték az aktuális „kísérletsorozattól” függetlenül lényegében ugyanakkora.

Ebben a kísérletben egy dobókockát dobunk 50-szer és közben rögzítjük a 6-os dobások relatív gyakoriságát. Ezt a kísérletet 3-szor végezzük el. Ezeknek az eredményei láthatók a dián.

Azt tapasztalhatjuk, hogy a *relatív gyakoriság* („kedvező”/összes dobások száma) – bár folyamatosan ingadozva –, de *egy adott értékhez tart*, továbbá ez a stabilizálódó érték az aktuális *„kísérletsorozattól” függetlenül* lényegében ugyanakkora.

Valószínűség, mint mennyiség?



$$P = \text{Rel.gyak.} = \frac{N_{\text{"kedvező"}}}{N_{\text{összes}}}$$

$$N_{\text{összes}} \to \infty$$

A **nagy számok** *(relatív gyakoriságokra vonatkozó)* ***tapasztalati törvénye:*** a relatív gyakoriság értéke egy végtelen sorozatban egy adott értékhez tart.
Az adott **eseményhez** hozzárendelhetjük ezt az **értéket**: 6 dobáshoz az 1/6-ot.
Ezt az értéket nevezzük az **esemény valószínűségének**.

Ez a törvény *tapasztalati* törvény, tehát logikai úton nem bizonyítható.

Ezt a megfigyelést nevezzük a *nagy számok (relatív gyakoriságokra vonatkozó) tapasztalati törvényének: :* a relatív gyakoriság értéke egy végtelen sorozatban egy adott értékhez tart.
Rendeljük hozzá a „kedvező” eseményünkhöz a „stabilizálódó” értéket, mint mennyiséget: jelen esetben a 6-os dobáshoz az 1/6-ot.
Ezt az értéket nevezzük az *esemény valószínűségének*. (Egy adott helyzetben mért változó kimenetelének valószínűsége.)
Tehát azt is mondhatjuk, hogy egy esemény *relatív gyakorisága megegyezik az esemény valószínűségével, ha az ismétlések száma* (kísérletsorozat hossza) *végtelen*.
Ez a törvény *tapasztalati törvény*, tehát logikai úton nem bizonyítható.

Események valószínűségei I.

Jelölések:

Esemény: **A**

(a páciensnek láza van)

Az *A* esemény bekövetkezésének valószínűsége**: P(A)**

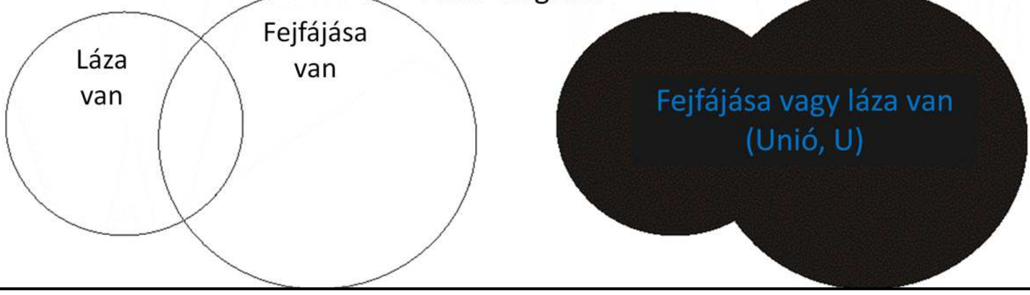
(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza van)

Annak a valószínűsége, hogy *A* **vagy** *B* esemény bekövetkezik:

P(AvagyB), **P(A+B)**, **P(AUB)**

(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza vagy fejfájása van)

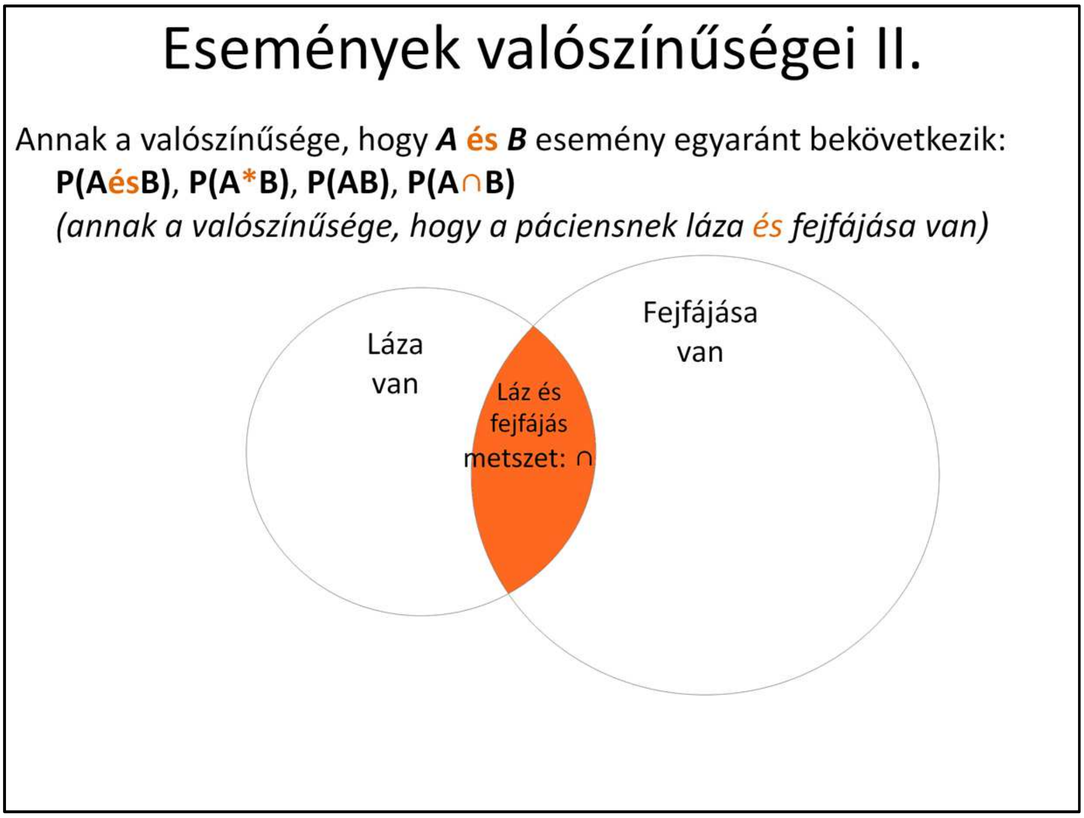
Venn-diagram



A következőkben az események valószínűségeinek alapfogalmait tárgyaljuk.
Először ismerkedjünk meg a jelölésrendszerrel. (*a következőkben zárójelben, dőlt betűkkel találjátok a példákat*)
Az egyes eseményeket nagy betűvel jelöljük – például *A = a betegnek láza van*.
Az *A* esemény bekövetkezésének valószínűségét pedig *P(A)*-val jelöljük. Például *P(A) = annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza van*.

Annak a valószínűségét, hogy az *A vagy* a *B* esemény bekövetkezik (*a páciensnek láza vagy fejfájása van*) több féle módon jelölhetjük: *P(AvagyB), P(A+B)*, *P(AUB)*.

Annak a valószínűségét, hogy az *A vagy* a *B* esemény bekövetkezik (*a páciensnek láza vagy fejfájása van*) több féle módon jelölhetjük: *P(AvagyB), P(A+B)*, *P(AUB)*.
Ez utóbbi jelölés a halmazoknál szokásos jelölésnek felel meg: az *U a halmazok unióját* jelenti, azaz legalább az egyik halmazhoz való tartozást. Ennek a Venn-diagramon való ábrázolása látható az ábrán.



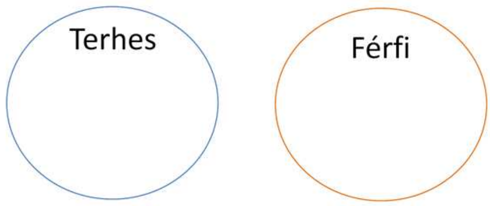
Annak a valószínűségét, hogy *A és B* esemény egyaránt bekövetkezik a következő módokon jelölhetjük: P(AésB), P(A*B), P(AB), P(A∩B). (*Annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza és fejfájása is van.)*

Annak a valószínűségét, hogy *A és B* esemény egyaránt bekövetkezik a következő módokon jelölhetjük: P(AésB), P(A*B), P(AB), P(A∩B). (*Annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza és fejfájása is van.)*
A ∩ jel a halmazok metszetét jelenti. A Venn-diagramon ez a két halmaz közös része.

Események valószínűségei III.

Egymást (kölcsönösen) kizáró események: *A és B* események együttesen nem következhetnek be.

(a páciens terhes és férfi) *(A∩B)=0*



Független események: *A* esemény bekövetkeztének nincs hatása *B* bekövetkezésére.

(az első páciensünk férfi, a második nő)

Ezen a dián kétféle esemény-kapcsolatra hívnám fel a figyelmet.
Az *egymást kölcsönösen kizáró események* azok, amelyek együttesen nem következhetnek be *(a páciens férfi és terhes)*. Halmazokkal ábrázolva őket látszik, hogy ez azt jelenti, hogy a két halmaz nem metszi egymást (metszetük üres halmaz, azaz (A∩B)=0).

Független eseményekre igaz, hogy az egyik esemény bekövetkezésének nincs hatása a másik esemény bekövetkeztére *(az első páciens férfi, a második pedig nő)*.

Események valószínűségei IV.

Feltételes valószínűség

A esemény bekövetkezésének valószínűsége **B** esemény bekövetkezését tudva, hogy **B** esemény bekövetkezett: **P(A|B).** *(annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van (ami egy vírusfertőzés) tudva azt, hogy vírusos eredetű a fertőzése)*

Mielőtt tovább haladnánk, definiáljuk a *feltételes valószínűséget*.
A „feltételesség” a feltételes gyakorisághoz hasonlóan itt is arra vonatkozik, hogy csak egy alcsoporton belül – azaz ha már egy esemény bekövetkezett – számítjuk a valószínűséget. Másként megfogalmazva *A* eseménynek *B*-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége az *A* esemény valószínűsége, ha *B* bekövetkezett. Jelölése: P(A|B). Például *annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van tudva azt, hogy vírusos eredetű a fertőzése*.

Események valószínűségei V.

Események valószínűségének alaptörvényei ***(Kolmogorov-axiómák)***:
1. **0 ≤ P(A) ≤ 1**

2. **P(*biztos*) = 1** *(a páciens előbb vagy utóbb meghal)*
P(*lehetetlen*) = 0 *(a páciens teljesen egészséges*)*

*3. Egymást kölcsönösen kizáró eseményekre: (*P(AésB)=0)
P(AvagyB)=P(A)+P(B)
*(annak a valószínűsége, hogy páciensünk terhes **vagy** férfi)*

Ezekből levezethető:
+4. *Független eseményekre*: **P(AésB)=P(A)*P(B)**
*(annak a valószínűsége, hogy az első páciensünk férfi **és** a második nő)*

Az események valószínűségeinek leírását a Kolmogorov axiómák segítségével tehetjük meg. Az alábbiakban ezeket az axiómákat írom le (kissé egyszerűsített formában).
1. Egy esemény valószínűsége 0 és 1 közötti érték.
2. a) A biztos esemény valószínűsége 1 (*a páciens előbb-utóbb meghal* – mint tudjuk az élet egy szexuális úton fertőző halálos betegség ☺).
2. b) A lehetetlen esemény valószínűsége 0 (*a páciens teljesen egészséges* – mint tudjuk nincs egészséges ember, csak rosszul kivizsgált beteg ☺).
3. Annak a valószínűsége, hogy *A vagy B* esemény bekövetkezik, ha *A* és *B* események *egymást kölcsönösen kizáróak* egyenlő az egyik esemény valószínűségének és a másik esemény valószínűségének az összegével *(annak a valószínűsége, hogy következő páciensünk egy férfi lesz vagy egy terhes = annak a valószínűsége, hogy férfi lesz a következő páciensünk + annak a valószínűsége, hogy egy terhes lesz a következő páciensünk).*
Ezekből az axiómákból számos egyéb összefüggés levezethető, amelyek közül most egyet emelnék ki.
+4. Annak a valószínűsége, hogy *A és B* esemény is bekövetkezik, ha *A* és *B* események egymástól független események egyenlő az *A* esemény valószínűségének és a *B* esemény valószínűségének szorzatával *(annak a valószínűsége, hogy az első páciensünk férfi és a rákövetkező nő lesz = annak a valószínűsége, hogy férfi lesz a következő páciensünk*annak a valószínűsége, hogy a rákövetkező páciensünk nő lesz)*.

Megjegyzendő, hogy ezek a megállapítások (2-4) „fordítva" is igazak. Például ha P(AésB)=P(A)*P(B), akkor *A* és *B* események egymástól függetlenek.

Események valószínűségei VI.

Feltételes valószínűség: **P(A|B)*P(B)=P(A)**

annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van tudva azt, hogy vírusos eredetű a fertőzése 14% = P(A|B)

annak a valószínűsége, hogy a praxisunkban levő betegnek vírusos fertőzése van 8% = P(B)

*annak a valószínűsége, hogy páciensünknek influenza fertőzése van: P(A) = 0,14*0,08 = 0,0112 = 1,12%*

A következőkben a feltételes valószínűséggel kapcsolatos számítást mutatok be. A fent látható összefüggés a Bayes tétel egyszerűsített formája. A számítást a következő példán mutatnám be.
Annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van tudva azt, hogy vírusos eredetű a fertőzése 14% = P(A|B) – ez az A esemény B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége.
Annak a valószínűsége, hogy a praxisunkban levő betegnek vírusos fertőzése van 8% = P(B) – ez a feltétel valószínűsége.
*Annak a valószínűsége, hogy páciensünknek influenza fertőzése van: P(A) = 0,14*0,08 = 0,0112 = 1,12%* - ez annak a valószínűsége, hogy praxisunkban influenza fertőzése van valakinek.

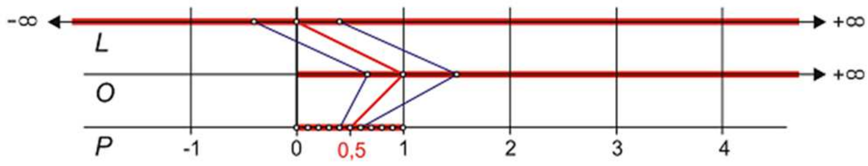
Esély

Esély (O - odds): „hányszor akkora a valószínűsége annak, hogy az esemény bekövetkezik, mint annak, hogy nem következik be”

$$O = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

Logit (L): esély természetes alapú logaritmusa

Logit – Esély – Valószínűség



Egy további „valószínűség szerű” fogalomra hívnám fel a figyelmet, ez az esély. Ez az esemény bekövetkezésének valószínűségének és nem bekövetkezésének valószínűségének hányadosa, amely megmutatja, hogy hányszor akkora a valószínűsége annak, hogy az esemény bekövetkezik, mint annak, hogy nem következik be.

A logit nem más, mint az esély természetes alapú logaritmusa.

A logit-esély-valószínűség értékeinek kapcsolatát mutatja az ábra. Látható, hogy a valószínűség értéke 0 és 1 között, az esélyé 0 és végtelen között, amíg a logit értékei mínusz végtelen és plusz végtelen között vannak. Leolvashatjuk, hogy ha a valószínűség kisebb, mint 0,5, akkor az esély 1-nél kisebb, a logit pedig negatív. Természetesen további összefüggések is láthatóak...

Valószínűségszámítás......

Permutációk
Variációk
Kombinációk

A statisztika alapját a kombinatorika, azaz a permutációk, variációk és kombinációk adják.
A tantárgy során azonban nem mélyedünk el ezekben jobban.

Na mire is lehet jó….

Influenzaszezont megelőzően a rendelőnkben az adott napra 4 oltóanyag áll rendelkezésre. Az előző években átlagosan 2989 páciensből 402 személyt kellett beoltanunk. Az előző év alapján mekkora a valószínűsége, hogy a rendelkezésre álló 4 oltóanyag elegendő lesz és el is fogy, ha 25 embert várunk aznapra?

$$P = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{(n-k)} = \binom{25}{4} \cdot \left(\frac{402}{2989}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{402}{2989}\right)^{(25-4)} \approx 0{,}2$$

Mire is lehetnek ezek jók nekünk? A következőkben olyan példát mutatok, ahol az ismétlés nélküli kombináció könnyen tetten érhető.
Influenzaszezont megelőzően a rendelőnkben az adott napra 4 oltóanyag áll rendelkezésre. Az előző években átlagosan 2989 páciensből 402 személyt kellett beoltanunk. Az előző év alapján mekkora a valószínűsége, hogy a rendelkezésre álló 4 oltóanyag elegendő lesz és el is fogy, ha 25 embert várunk aznapra?

A kérdés megválaszolásához a Bernoulli eloszlást (lásd később) használjuk fel (vegyük észre, hogy a feladat során a 25 emberből választunk ki 4-et jelenti az ismétlés nélküli kombinációt).
Számos ehhez hasonló kérdést vetettem fel a dián. A kérdés az, hogy ezek megválaszolásához mit tegyünk, milyen „egyenletet” válasszunk, mikor melyiket?

Na mire is lehet jó….

Mekkora a valószínűsége annak, hogy páciensünk 3.45 mmol/l-es K szintje még „egészséges”?

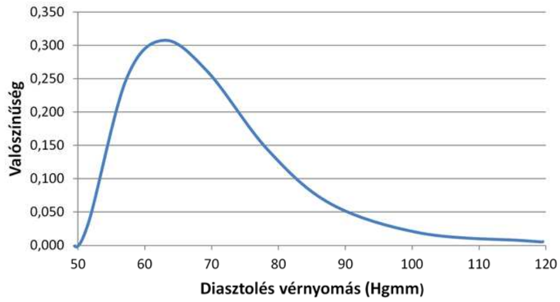
Hány szülés várható az esti ügyeletben, ha az éves statisztika 1000 szülést mutat éjfél és 8:00 között?

Az évfolyamból várhatóan hányan lesznek alkalmasak egy csípőprotézis elvégzésére (tömegük alapján)?

...... Hogyan számoljunk? Ismerjük a „képletet”? milyen „egyenletet”, táblázatot, excel függvényt... válasszunk, mikor melyiket?

Számos, az előzőhöz hasonló hasonló kérdést vetettem fel a dián. A kérdés az, hogy ezek megválaszolásához mit tegyünk, milyen „egyenletet”, táblázatot, excel függvényt... válasszunk, mikor melyiket?

Elméleti eloszlások

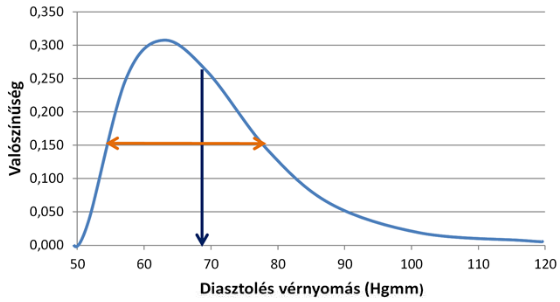


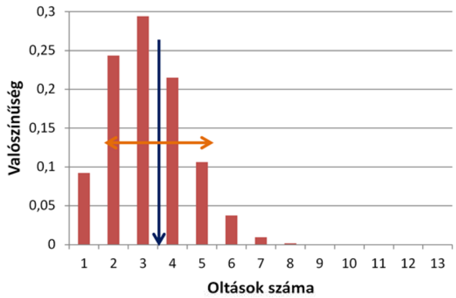
Ismerem az adott mennyiség valószínűségét. $N = \infty$

Ismerem, mert ki tudom számítani: *nevezetes eloszlások.*
(Vagy becsülni tudom)
Milyen paramétereket, melyik eloszlást használjam?

A fent említett kérdések megválaszolásában segítenek minket az *elméleti eloszlások*. Ezek megmutatják egy adott érték előfordulásának valószínűségét. Ritka esetben igen-igen nagy számú (végtelen) mérés alapján ismert egy adott változó valószínűségi eloszlása – ld. például percentilis táblázatok, görbék.
Az esetek nagyobb részében azonban néhány jellemző érték és úgynevezett *nevezetes eloszlások* alapján tudjuk meghatározni bármely értékhez tartozó, így az adott kérdéses értékünk (pl. oltóanyagszám) valószínűségét is. Ebben az esetben a kérdés csak annyi, hogy *melyek ezek a néhány jellemző értékek* – hogyan tudom ezeket megadni, illetve becsülni –, illetve melyik kérdésemre *melyik eloszlást* kell használnom.

Nevezetes eloszlások





- ***Várható érték (E, M, μ)***

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i \cdot x_i \qquad E(\xi) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i$$

- Elméleti szórásnégyzet (Var, D^2, σ^2)

$$Var(\xi) = E\left[\left(\xi - E(\xi)\right)^2\right]$$

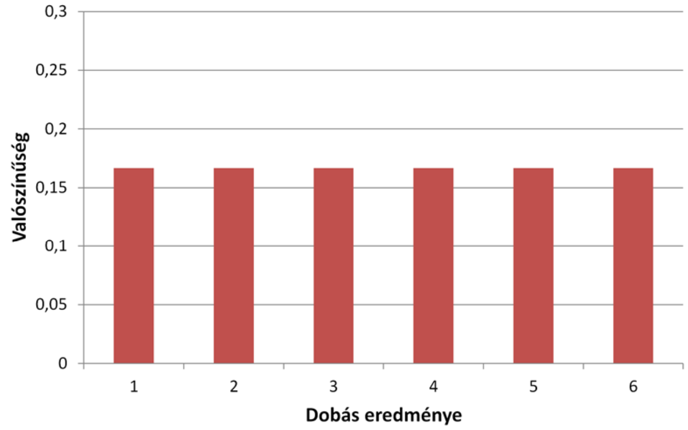
Vizsgáljuk meg először, hogy az elméleti eloszlásoknak melyek ezek a jellemzői, paraméterei.
Két alapvető jellemzőt használunk - a leíró statisztikában tanultakhoz hasonlóan: egy *közép értéket* és egy *szóródási paramétert.*
Kétféle eloszlást mutatok be az ábrán: egy folytonos (Hány Hgmm a diasztolés vérnyomása az embereknek) és egy diszkrét változó (hány oltás szükséges az előző év alapján) eloszlását.

A középérték jellemzésére a *várható értéket* (E, M vagy μ jelöléssel), a szóródás jellemzésére az *elméleti szórást* (Var, D^2 vagy σ^2 jelöléssel) használjuk. A várható érték az eloszlás „közepét" mutatja (ahogyan a minta esetén a módusz, a medián és az átlag – tehát ezek használatosak a becslésére). Az elméleti variancia az elméleti eloszlás „szélességét" mutatja (ahogyan a minta varianciája, illetve kvantilistávolságai). Ez a két jellemző egyértelműen leírja az általunk használt speciális eloszlásokat – azaz ezek ismeretében bármely értékhez tartozó valószínűség meghatározható.

Vizsgáljuk meg először a diszkrét esetben kapott várható érték definíciót. Vegyük észre, hogy p – a nagy számok törvényét használva – közelíthető a relatív gyakorisággal, amely pedig az abszolút gyakoriság osztva az elemszámmal. Tehát E felírható $E=(\Sigma(abs.gyak._i * x_i))/n$, azaz az egyforma elemeket annyiszor adom össze, ahány van belőle (ez az $abs.gyak._i * x_i$), és ezt minden elemnél megteszem – tehát összességében minden elemet összeadok, majd az így kapott értéket osztom az elemszámmal. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint az átlag definíciója végtelen elemszám esetében. Folytonos változó esetében ugyanezt az összegzést végzem el, csak végtelenül kicsi

osztályszélességgel (ez az integrálás).
A következőkben megvizsgáljuk, hogy melyik speciális eloszlásnál hogyan adható meg a várható érték, illetve melyik eloszlás milyen kérdés megválaszolására alkalmas.
(Megjegyzés: a számunkra érdekes eloszlások várható értékei és szórásai szerepelnek a képlettárban.)

Egyenletes eloszlás



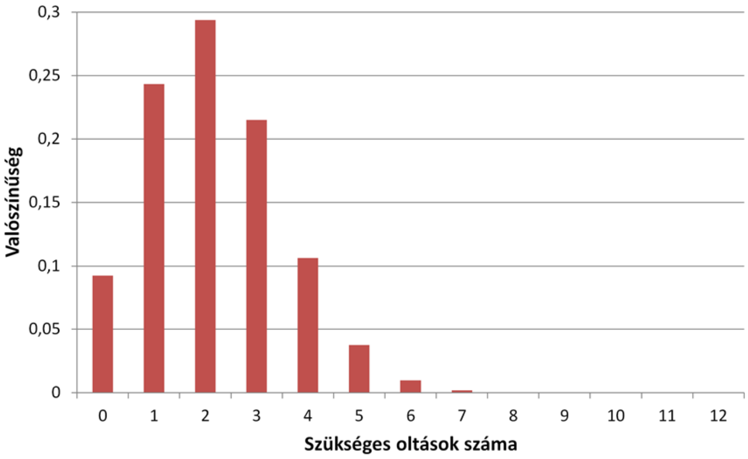
$$E(\xi)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$Var(\xi)=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

Ideális kocka eredményeinek eloszlása
Ideális munkaterhelés eloszlása a nap folyamán
Hőmérséklet eloszlása egy üres terem különböző pontjain

Először tekintsük meg az *egyenletes eloszlást*.
Egyenletes eloszlást mutat például az ideális kocka dobáseredményei, vagy az ideális napi munkaterhelés (minden másodpercben ugyanannyire kell dolgoznunk), illetve a hőmérséklet eloszlása egy üres terem különböző pontjain.
Az eloszlás alapján például megadhatom annak a valószínűségét, hogy 4-est dobok.
A várható érték és a variancia képletében az *a* és a *b* a legkisebb, illetve legnagyobb érték. Ezek alapján tehát a 6 oldalú dobókockával való dobás várható értéke: 0,5*(1+6)=3,5.

Binomiális (Bernoulli) eloszlás



$$E(\xi) = n \cdot p$$

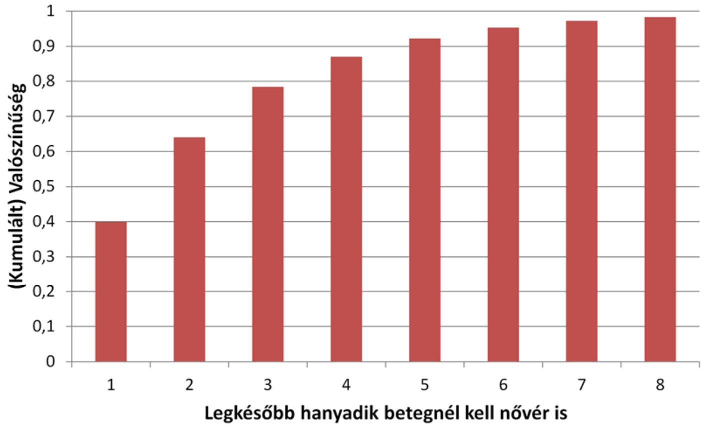
$$Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$P = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$$

Szükséges oltóanyagszám eloszlása
Általánosan: egy n-szer megismételt jelenség x-szer következik be
Ha p „kicsi” Poisson eloszláshoz „közelít”
Ha n „nagy” és p 0,5-höz tart, akkor normál eloszláshoz „közelít”

Először tekintsük meg az *egyenletes eloszlást*.
Egyenletes eloszlást mutat például az ideális kocka dobáseredményei, vagy az ideális napi munkaterhelés (minden másodpercben ugyanannyire kell dolgoznunk), illetve a hőmérséklet eloszlása egy üres terem különböző pontjain.
Látható, hogy a várható érték, illetve a szórás (és így az adott értékhez tartozó egyenlet) meghatározásához szükséges tudnunk (vagy becsülnünk) a bekövetkezés valószínűségét – példánkban az oltóanyag szükségességének relatív gyakoriságát.
Megjegyzendő, hogyha az esemény bekövetkezésének valószínűsége (az ismétlésszámhoz képest) kicsi, akkor a binomiális eloszlás a Poisson eloszláshoz közelít. Ha az ismétlések száma nagy és p értéke 0,5-höz tart, akkor pedig a normál eloszláshoz válik hasonlóvá.

Geometriai eloszlás



$$E(\xi) = \frac{1}{p}$$

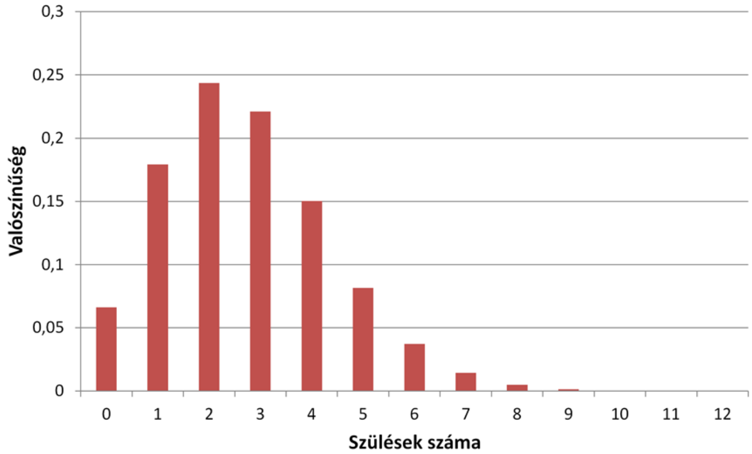
$$Var(\xi) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

$$P = p \cdot (1-p)^{(n-1)}$$

Független Bernoulli kísérletek egymásutánja
Legkésőbb hanyadik beteghez kell a nővér is

A *geometriai eloszlás* egy speciális Bernoulli eloszlás. Ezt az eloszlást kapjuk, ha egymástól független Bernoulli próbákat hajtunk végre egymás után (megtörténik az esemény, vagy nem történik meg).
Egy orvosi példa erre az eloszlásra: Mekkora a valószínűsége, hogy szükségünk van a nővér segítségére az első betegnél? Vagy csak a másodiknál kell hívnunk segítséget... Az ábrán azt tüntettem fel az első oszlopban, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy már az első betegnél kell segítség, a második oszlopban, hogy vagy az első vagy a második (vagy mindkettő) esetben kell segítség... tehát itt egy kumulált valószínűséget tüntettem fel, amit úgy fogalmazhatunk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy legkésőbb hanyadik betegnél kell nővér segítsége is.
Ilyen eloszlást látunk a Szentpétervári paradoxonban is.

Poisson eloszlás



$$E(\xi) = \lambda$$

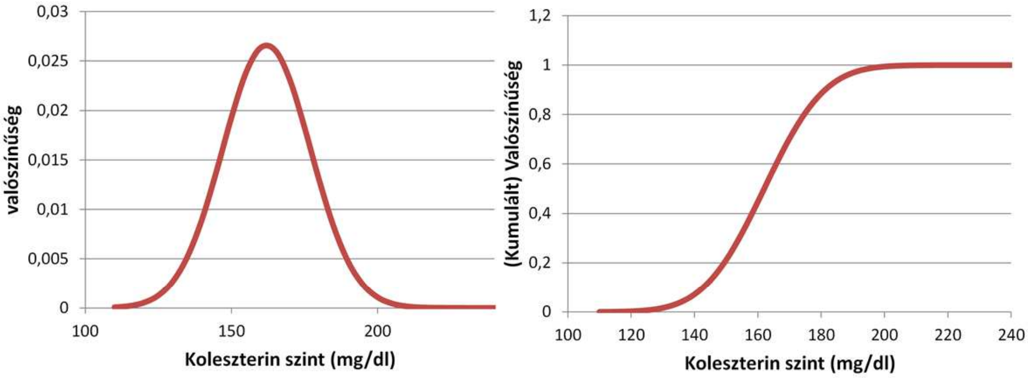
$$Var(\xi) = \lambda$$

$$P = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

Szülések száma az ügyeletben
Új diagnosztizált karcinómák száma
Hálóban lévő halak száma
Radioaktív preparátumban adott idő alatt elbomló atomok száma
Normál eloszláshoz „közelíthető”

A *Poisson eloszlásnak* van egy különlegessége: *várható értéke és szórása megegyezik*, valamint *egyetlen paraméterrel megadható*.
Például ennek az eloszlásnak a segítségével megadhatjuk, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 szülés történik az éjszakai ügyeletben. További példák az új diagnosztizált karcinómák számának, illetve a hálóban lévő halak számának eloszlása.
Általánosságban Poisson eloszlást követ a változónk, ha a kérdés egy adott elemszám egy adott intervallum alatt, illetve adott térfogatban, területen..., *ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége kicsi*. (Példánkban a szülés valószínűsége kicsi – az emberek kis részével történik meg egy adott időben.)
A várható érték – a λ – az ismétlések számának és az adott esemény bekövetkeztének valószínűségének szorzatából adódik (n*p).
Megjegyzendő, hogy megfelelő körülmények esetében ez az eloszlás is normál eloszlással közelíthető.

Normál (Gauss) eloszlás I.



Koleszterinszint, vércukorszint....
Testmagasság, BMI
Diasztolés vérnyomás felnőtteknél
......

$$E(\xi) = \mu$$

$$Var(\xi) = \sigma^2$$

$$P = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

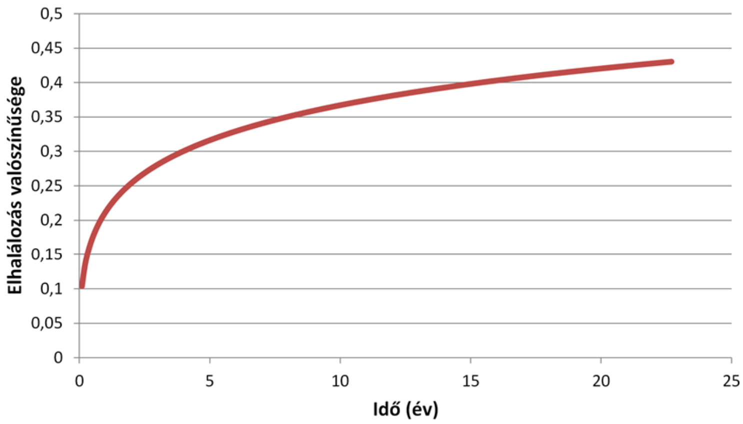
A *normál (Gauss) eloszlásnak* a fentebb már említetteken kívül további különlegessége van: *ez az orvosi gyakorlatban a leggyakoribb eloszlás*.
Az ábrán az eloszlás sűrűségfüggvényét és kumulatív eloszlásgörbéjét egyaránt feltüntettem, ugyanis ez nagyon fontos eloszlás számunkra. Mint látható, az előzőekkel ellentétben a normál eloszlás egy szimmetrikus eloszlás.
Látható, hogy valóban sok a változó, amely normál eloszlást követ: a koleszterinszint, a vércukorszint, a legtöbb enzimszint, a testmagasság, a BMI, a disztolés vérnyomás.... De vajon miért van ez?

Normál eloszlás II.

Centrális határeloszlás tétele: ha sok független valószínűségi változót összegzünk, akkor elég általános feltételek teljesülése esetén az összeg normális eloszlású valószínűségi változó lesz.

A normál eloszlás gyakoriságának okára a *centrális határeloszlás tétele* utal. Ez kimondja, hogy ha sok független valószínűségi változót összegzünk, akkor elég általános feltételek teljesülése esetén az összeg normális eloszlású valószínűségi változó lesz.
Az emberi test különböző jellemzői (mérhető értékei, változói) általában nagy sok más változó együtteséből alakulnak ki. Például az emberi testmagasság függ az apai és anyai génektől, a táplálkozástól, az életviteltől...

Lognormál (Galton) eloszlás



$$E(\xi) = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

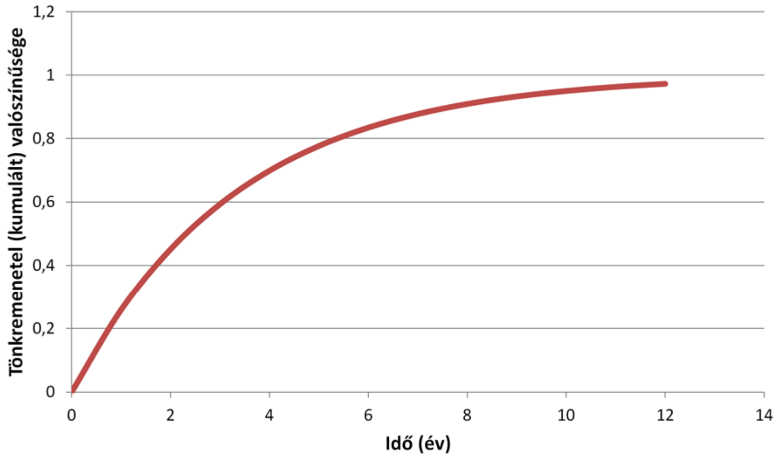
$$Var(\xi) = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu+\sigma^2}$$

$$P = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Testtömeg, testmagasság gyermekkorban
Túlélési idő

A l*ognormál* eloszlásnak is nagy jelentősége van az orvosi gyakorlatban. Ilyen eloszlást követ például a testtömeg, testmagasság gyermekkorban, illetve a túlélési idő rosszindulatú daganatoknál.
Általánosságban azt mondhatjuk, hogy akkor lesz az eloszlásunk lognormál, ha a változónk értékei kicsik, de nem lehetnek 0-nál kisebbek.
(Az eloszlást azért nevezzük lognormálnak, mert a változó értékeinek logaritmizálásával normális eloszláshoz jutunk.)

Exponenciális eloszlás



$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Altatóberendezés működési ideje (az első hibáig).
Radioaktív bomlás során az egyes atomok élettartama.

Az *exponenciális eloszlás* igen gyakori a biofizikában és néhol van szerepe az orvosi gyakorlatban is. Ehhez két példát említenék: altatóberendezés működési ideje (az első hibáig eltelt idő), illetve radioaktív bomlás során az egyes atomok élettartama.

Az emberi gondolkodás...

Tomi csendes, visszahúzódó, szerény, szorgalmas fiú, aki másoknak szívesen segít. Melyiket tartod valószínűbbnek:

a) Tomi könyvtáros
b) Tomi kétkezi munkás

A mindennapi gondolkodásunk sok esetben eltér attól, ahogyan annak a valószínűségszámítás ismeretében működnie kellene.
A dián látható két állítás közül sokan közületek az elsőt (Tomi könyvtáros) tartotta valószínűbbnek. Pedig belegondolva abba, hogy mennyire gyakori a könyvtárosi állás, illetve a kétkezi munkás, egyértelmű, hogy annak nagyobb a valószínűsége, hogy Tomi kétkezi munkás.

Az emberi gondolkodás...

Linda tehetséges, független, filozófia szakot végzett 31 éves nő. Nagyon érzékeny a társadalmi igazságtalanságokra. Diákként részt vett az antinukleáris demonstrációkban. Sorszámozza meg az alábbi állításokat aszerint, hogy mennyire tartja valószínűnek (1-es sorszám a legvalószínűbb):

a) Linda tanító egy általános iskolában,
b) Linda könyvesboltban dolgozik, és jóga tanfolyamra jár,
c) Linda a nőszavazók ligájának tagja,
d) Linda bankpénztáros,
e) Linda biztosítási ügynök,
f) Linda bankpénztáros és feminista.

A következő példában két állításra hívnám fel a figyelmet: Linda bankpénztáros, illetve Linda bankpénztáros és feminista. Az előadás során többetek előrébb sorolta azt, hogy Linda bankpénztáros és feminista, mint azt, hogy Linda bankpénztáros. Pedig ismerve a 11. dián is leírt független események valószínűségének együttes előfordulási valószínűségét, beláthatjuk, hogy egy esemény valószínűsége mindig legalább ugyanakkora, mint ugyanezen esemény és egy másik esemény együttes előfordulásának valószínűsége...

Valószínűség másképp...

Javaslom mindenkinek, érdekességként olvasson utána a Buffon-féle tűkísérletnek.

Ellenőrző kérdések #1

- Definiáld a valószínűséget a nagy számok törvénye alapján.
- Ismertesd a nagy számok törvényét.
- Hogyan bizonyítható a nagy számok törvénye?
- Hogyan jelölhető az A vagy B esemény bekövetkezésének valószínűsége?
- Hogyan jelölhetjük azt a valószínűséget, hogy A és B esemény egyaránt bekövetkezik?
- Mit jelent két esemény metszete, illetve uniója?
- Definiált az egymást kölcsönösen kizáró eseményeket.
- Mondj példát az egymást kölcsönösen kizáró eseményekre.
- Mit tudsz az egymást kölcsönösen kizáró események metszetéről?
- Definiáld az egymástól független események fogalmát.
- Mondj példát független eseményekre.
- Mit jelent a feltételes valószínűség?
- Mondj példát a feltételes valószínűségre.
- Hogyan jelöljük a feltételes valószínűséget?
- Hogyan számítható P(A) ha P(A|B) és P(B) adott?
- Mik a Kolmogorov axiómák?
- Mit tudsz A és B esemény viszonyáról, ha P(AvagyB)=P(A)+P(B) igaz?
- Mit tudsz A és B esemény viszonyáról , ha P(AB)=P(A)*P(B) igaz?
- Mekkora a biztos esemény valószínűsége?
- Mekkora a lehetetlen esemény valószínűsége?
- Adj példát biztos és lehetetlen eseményekre.
- Mekkora lehet egy esemény valószínűségének értéke?
- Mit jelent az esély?
- Definiáld a logitot.
- Add meg az esemény logit értékét, ha az esemény valószínűsége 0,12.
- Mekkora az esély értéke, ha a valószínűség 0,4.
- Add meg a valószínűséget, ha az esély 3.
- Add meg a valószínűséget, ha a logit – 32.

A kérdések megválaszolhatók az előadáson elhangzottak, a gyakorlatvezetővel folytatott konzultációk, illetve saját utánaolvasás segítségével. Az ellenőrző kérdések egyben példák arra, hogy milyen tesztkérdések (feleletválasztós formában) fordulhatnak elő.

Ellenőrző kérdések #2

- Mondj egy példát ismétlés nélküli kombinációra.
- Hogyan számítható egy folytonos eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható egy diszkrét eloszlás várható értéke?
- Melyik középérték egyezik meg a várható értékkel egy populáció esetében?
- Mivel becsülhető egy elméleti eloszlás várható értéke?
- Mivel becsülhető egy elméleti eloszlás szórása?
- Definiáld a z elméleti varianciát.
- Melyik két mutató határoz meg egyértelműen egy speciális eloszlást?
- Ábrázold az egyenletes eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Poisson eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Bernoulli eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a geometriai eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a normál eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Gauss eloszlás kumulált eloszlásfüggvényét.
- Ábrázold az exponenciális eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a lognormál eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Írj 2 példát az egyenletes eloszlásra.
- Írj 2 példát binomiális eloszlásra.
- Írj 2 példát a geometriai eloszlásra.
- Írj 3 példát a normál eloszlásra.
- Írj 2 példát a lognormál eloszlásra.
- Írj 2 példát a Poisson eloszlásra.
- Írj 2 példát az exponenciális eloszlásra.
- Hogyan számítható az egyenletes eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a binomiális eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a lognormál eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható az exponenciális eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a Poisson eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható normál eloszlás várható értéke?
- Miről szól a centrális határeloszlás tétele?
- Miért követ a legtöbb orvosi gyakorlatban használt változó normál eloszlást?

Ellenőrző kérdések #3

- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában binomiális eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában geometriai eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában Poisson eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában lognormál eloszlást.
- Lehet két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége nagyobb az egyes események bekövetkezésének valószínűségénél?
- Definiáld a populációt és a mintát.