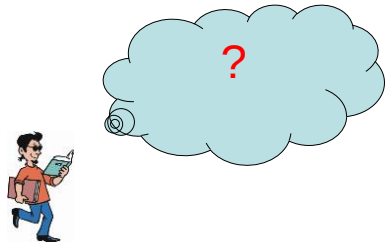
Valószínűségszámítás és a statisztika



Valószínűség számítás

↓

Matematikai statisztika

↓

Alkalmazott statisztika

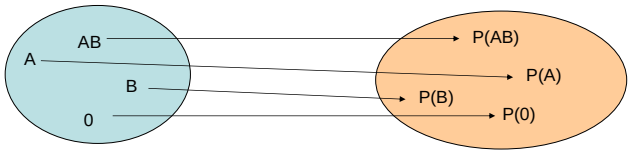
közgazdasági statisztika

népesség statisztika

orvosi statisztika

Stb.

Példa: vércsoportok



Elemi esemény: A, B, AB, 0
Teljes eseményhalmaz.
Valószínűségek:
P(A), P(B), P(AB), P(0)
Egymást kizáró események, tehát:

$$P(A)+P(B)+P(AB)+P(0)=1$$

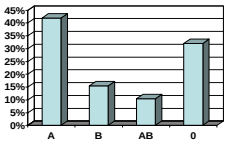
Összetett esemény pl.:
megtalálható az *A* antigén:
valószínűsége = P(A)+P(AB)
Egy és csak egy antigén található:
valószínűsége = P(A)+P(B)

„Be van fejezve a nagy mű, igen.
A gép forog, az alkotó pihen.”

?

Az eloszlás

Vércsoportok eloszlása
Magyarországon



Hogyan juthatunk ilyen információhoz?
Mennyire megbízható?

Elméleti úton (nagyon ritka)
(pl. kocka feldobás:
minden elemi esemény valószínűsége: 1/6.)

Tapasztalati úton
(kísérletet végzünk.
Kísérlet: mérés,
megfigyelés,
kikérdezés stb.)

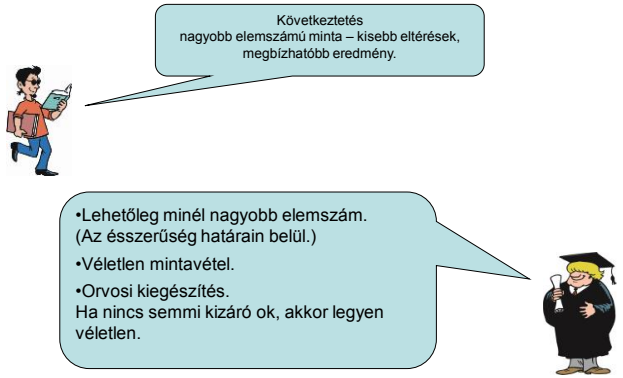
Populáció és minta

Ideális, ha minden lehetséges esetet megvizsgálunk.

Populáció (alapsokaság)
Alapsokaság, olyan vizsgálni kívánt egyedek, vagy más tetszőleges elemek véges vagy végtelen összessége, amelyeknek közös megfigyelhető jellemzői vannak. Elméleti összesség is lehet, potenciálisan megfigyelhető elemekkel.

Minta
A populáció relatíve kis méretű kiragadott része valamilyen előírás szerint válogatva.

Mintavétel alapelvei



A hiba forrásai

Mintavételi hiba

Abból adódik, hogy nem az alapsokaságot, hanem csak egy részét (minta) vizsgáljuk.

A statisztika módszereivel elemezhető, számba vehető!

Nem mintavételi hiba

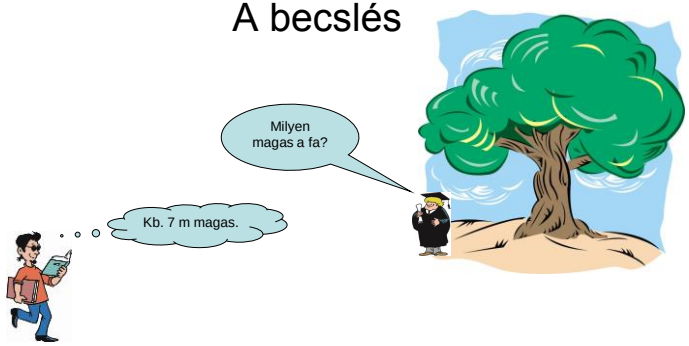
Adatfelvételi hiba pl.: válaszadási hiba, feldolgozási hiba stb.

Extrém példa: Férfiak és nők aránya a társadalomban. (Teljesen hibás minta!)

Nőgyógyászat

Kérem a következőt!

A becslés



A **becslés** olyan eljárás, amely hiányos, többnyire tapasztalati adatok alapján, egy adott esetre, adott változóhoz egy *becsült* értéket rendel.

A becslés típusai

Pontbecslés

Egyetlen értékkel történő közelítés.

Körözés
…
kb. 175 cm magas
…

Intervallumbecslés

Egy intervallummal (amiben nagy megbízhatósággal megtalálható) történő közelítés.

Körözés
…
170-175 cm magas
…

A jó becslés fontosabb tulajdonságai

Torzítatlan: A becslés várható értéke minden minta-elemszám esetén éppen a keresett paraméter. (Körülötte ingadoznak a becslések)

Hatásos: A becslésnek a paramétertől való közepes négyzetes eltérése minimális. (Azaz a szórása kicsi.)
Két egyaránt torzítatlan becslés közül az a hatásosabb, amelyre a közepes négyzetes eltérés a kisebb.

Konzisztens: becsléssorozat, amelyben a becslések torzítatlanok és közepes négyzetes eltérésük a zérushoz közeledik, (sztochasztikusan) konvergál a paraméter valódi értékéhez.
Ingadozása n növekedésével csökken.

Elégséges: Olyan becslés, amely az összes információt tartalmazza a paraméterre, amit a mintából kaphatunk. (Pl. a normális eloszlásra középérték és a szórás elégséges statisztika).

Kategoriális változó

Kísérlet: kiválasztunk egy embert és elvégezzük a vizsgálatot.

Kimenetel:
A vagy B vagy AB vagy 0.

Kiválasztunk elegendő számú embert.

n: elemszám.

Minta: a kiválasztott *n* számú ember a sokaságból.

vércsoport	gyakoriság
A	k_A
B	k_B
AB	k_{AB}
0	k_0

Egy valószínűség becslése

P(A) az *A* vércsoport előfordulásának valószínűsége.
Az A vércsoport előfordulásának a várható értéke n·P(A) .

Az n·P(A) becslése a minta alapján: k_A

A P(A) pontbecslése: $\mathbf{k_A / n}$.

Rendben van, de egy másik mintából más érték származik.
Mennyire megbízható ez az érték?

A relatív gyakoriság hibája

Binomiális eloszlás (vagy A, vagy nem A vércsoportú).
várható érték: np
variancia: np(1-p)

(no lám! Valószínűség számítás?)

n elemű minta:
k elem *A* vércsoportú, (*n*-*k*) nem.

A k_A érték szórásának becslése:

$$s_k = \sqrt{nP(A)(1-P(A))}$$

A k_A/n érték szórásának becslése:

$$s_{k/n} = \frac{\sqrt{nP(A)(1-P(A))}}{n} = \sqrt{\frac{P(A)(1-P(A))}{n}}$$

$P(A)$ helyett a k_A/n-t használjuk!

$s_{k/n}$ érték a k/n szórása, vagy **standard hibája**.

Konfidencia intervallum

Ennek segítségével megadhatunk egy intervallumot.
(intervallumbecslés)

$$\left(\frac{k}{n} \pm s_{k/n}\right)$$

68%-os konfidencia (megbízhatósági) intervallum, amihez 68%-os ***konfidencia szint*** tartozik.

Jelentése:
Ha nagyon sok mintán megismételjük a megfigyelést, akkor a konfidencia intervallumok 68%-a tartalmazza a P(A)-t.

Vagyis az intervallumbecslés megbízhatósága 68%

Folytonos változó

Példa: testmagasság

Helyes kijelentés?

testmagasság: 172 cm.

Nem!
- Pontos mérés nem lehetséges,
- végtelen pontosságú eszköz kellene.

Az eseménytér végtelen nagy!

Véges elemszámú minta.
Nincs két azonos elem.
(gyakoriság értékek: 1 vagy 0)

↓

Hamis következtetés, gyakorlatban nem kivitelezhető.

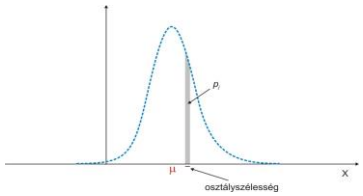
Mintavétel folytonos változó esetében

Helyes kijelentés:

A testmagasság (x):

$171{,}5 \le x < 172{,}5\,\text{cm}$

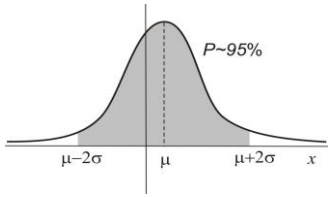
Egy meghatározott érték helyébe, egy intervallum (osztály) lép.
(Továbbiakban a diszkrét eloszláshoz hasonlóan használjuk)



p_i – annak a valószínűsége, hogy:
x az adott osztályba tartozzon.

A μ és a σ

A σ az adatok szóródását jellemzi a μ körül.
Az adatoknak kb. 68%-a a μ körüli 2σ széles intervallumban van.

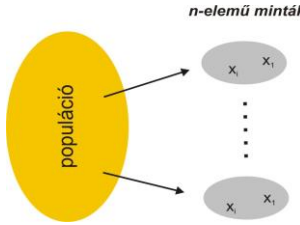


$(\mu \pm \sigma) \approx 68\%$

$(\mu \pm 2\sigma) \approx 95\%$

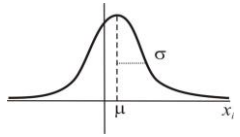
$(\mu \pm \infty) = ?$

A minták eloszlása



Mindegyik x_i-edik elem eltér egymástól.
Egy eloszlás rendelhető hozzá.

Az x_i-k eloszlása megegyezik az alapsokaság eloszlásával.



$M(x_i) = \mu$ és $D^2(x_i) = \sigma^2$

Az átlag várható értéke és varianciája

Ez egy egyszerű összeadás.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_i M(x_i) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

$$D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sum_i D^2(x_i) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Az átlag várható értéke azonos az alapsokaságéval, varianciája annak *n*-ed része.

A várható érték becslése

$$M(x) = \int x f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \sum_j p_j x_j$$

p_j-t közelítsük
a k_j/n relatív gyakorisággal!

$$\sum_j \frac{k_j}{n} x_j = \frac{1}{n}\sum_j k_j x_j = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

A várható érték becslése az átlag.

Torzítatlan becslés, mert:

$$M(\bar{x}) = \mu$$

Korrigált tapasztalati szórás

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n} \quad ? \quad s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Az eltérés az átlag és a várható érték különbségéből fakad.

$$(\bar{x} - \mu)^2$$

$$\downarrow$$

$$M\left[(\bar{x} - \mu)^2\right]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sigma^2}{n}$$

A minták közötti eltérések varianciája.

$$\sigma^2 = M(s^2) + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{n-1}{n} M(s^2)$$

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2$$

$$\downarrow$$

$$s^{*2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

A továbbiakban *s*-el jelöljük a korrigált tapasztalati szórást.

A standard hiba

Az átlag varianciája:

$$\frac{\sigma^2}{n}$$

Az átlag szórása:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De általában a σ sem ismert.

s a jó becslése a σ-nek.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ez tehát az átlag szórása, vagy standard hibája.

A várható érték konfidencia intervalluma

Hasonlóan a *P* becsléséhez, a standard hiba ismeretében megadhatjuk a várható érték konfidencia intervallumát.

$$\left[\bar{x} \pm s_{\bar{x}}\right]$$

Ez az intervallum kb. 68% megbízhatósággal tartalmazza μ-t.

Az intervallum becslés sajátosságai

68%? Nem kevés egy kicsit?

Hát növelhetjük, pl.: a következő esetében kb. 95% a konfidencia szint, de az információ kevesebb.

$$\left[\bar{x} \pm 2 \cdot s_{\bar{x}}\right]$$

intervallum	megbízhatóság	információ
↑	↑	↓

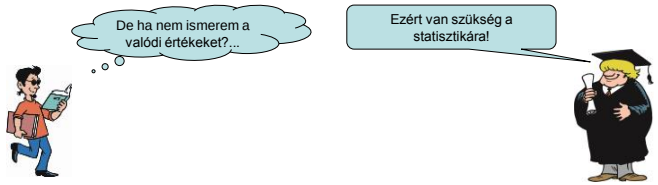
A pontos összefüggés:

$$\left[\bar{x} \pm t_p \cdot s_{\bar{x}}\right]$$

ahol t_p: az (n-1)-ed fokú t-eloszlás esetében a p valószínűséghez tartozó érték.
(a megbízhatósági szint (1-p))

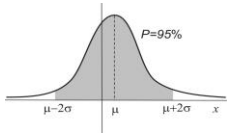
Kapcsolat a paraméterek között

n	∞
minta	populáció
átlag	várható érték
szórás	elméleti szórás
standard hiba	0



Normál értékek

	férfiak	nők
kálium	3,5-5 mmol/l	3,5-5 mmol/l
WBC	4-10·10⁹/l	4-10·10⁹/l
HCT	42-54 %	38-50 %



Normális eloszlású változó esetében lásd az ábrát! (A μ és σ helyett általában nagy elemszámú mintából becsült értékeket használnak).
Egyébként pedig az az intervallum, amelynek mindkét oldalán „kieső" rész együttesen 5%.

Egyéb elnevezések: normál tartomány, referencia tartomány.