

## Kontingenztabellen. Chi-Quadrat-Test

1. Unabhängigkeitstest
2. Anpassungstest
3. Homogenitätstest



KAD 2015.11.19

Beispiel 1

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	28	75	103
Mann	48	49	97
	76	124	200



?

## Aufstellung der Nullhypothese

$H_0$ : Geschlecht und Brillenträgerschaft sind voneinander **unabhängig** (es gibt keinen Unterschied)

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b'}{d'}$$

Wie gross wäre die **erwartete Häufigkeit** (expected frequency) in der Zelle  $a'$ , wenn die Nullhypothese gültig ist?

Anzahl der Frauen:

$$a + b = 103$$

Anzahl der Personen mit Brille:

$$a + c = 76$$

Proportion der Frauen in der Stichprobe:

$$P(\text{Frau}) = (a + b)/n = 103/200$$

Proportion der Personen mit Brille:

$$P(\text{mit Brille}) = (a + c)/n = 76/200$$

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	$a'=?$	$b'=?$	103
Mann	$c'=?$	$d'=?$	97
	76	124	200

erwartete (expected)  
Kreuztabelle

3

## 1. Unabhängigkeitstest

## Korrelationsanalyse zwischen kategorischen Merkmalen

Häufigkeitstabelle (Kontingenztable):  
eine tabellarische Darstellung der gemeinsamen Häufigkeitsverteilung zweier Variablen  
 $X$  (z.B. Geschlecht) und  $Y$  (Brillenträgerschaft)

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	$a=28$	$b=75$	103
Mann	$c=48$	$d=49$	97
	76	124	200

**Frage:** unterscheidet sich die Häufigkeit eines feststellbaren Merkmals (Symptoms) in zwei Populationen?

2

**Erwartete Häufigkeiten.** Annahme:  $H_0$  ist gültig  $\Rightarrow$   
Geschlecht und Brillenträgerschaft sind unabhängige Ereignisse

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links oben: } a' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts oben: } b' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (b+d)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links unten: } c' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts unten: } d' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (b+d)}{n}$$

	mit	ohne	Total
F	$a=28$	$b=75$	103
M	$c=48$	$d=49$	97
	76	124	200

empirische (observierte,  
observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	$103 \cdot 76 / 200$	$103 \cdot 124 / 200$	103
M	$97 \cdot 76 / 200$	$97 \cdot 124 / 200$	97
	76	124	200

erwartete (expected)  
Kreuztabelle

4

## Die erwartete Häufigkeiten aus der empirischen Häufigkeiten

	mit	ohne	Total		mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103	F	a'=39.14	b'=63.86	103
M	c=48	d=49	97	M	c'=36.86	d'=60.14	97
	76	124	200		76	124	200

empirische (observed)  
Kreuztabelle

erwartete (expected)  
Kreuztabelle

$$(\text{erwartete Häufigkeit}) = \frac{(\text{Spaltensumme}) \cdot (\text{Zeilensumme})}{(\text{Anzahl der Daten in der Stichprobe})}$$

5

Wenn die Nullhypothese ist gültig:

Die Werte in der entsprechenden Zellen der Kontingenztabellen mit empirischen und erwarteten Häufigkeiten sind ungefähr gleich.

Die folgende Prüfgrösse (gewichtete quadratische Summe) zeigt **Chi-quadrat Verteilung**:

**Prüfgrösse**

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

wobei

$O_i$  die empirische (observed)

$E_i$  die erwartete (expected) Häufigkeit  
in der i-ten Zelle sind.

**Freiheitsgrad:** (Anzahl der Zeilen - 1) \* (Anzahl der Spalten - 1)  
für eindimensionalen Tabellen:  $n-1$

z.B. 2\*2 (vierfelder-) Tabelle: 1

6

Wiederholung

## Wichtige Verteilungen der analytischen Statistik

### Chi-Quadrat ( $\chi^2$ ) Verteilung

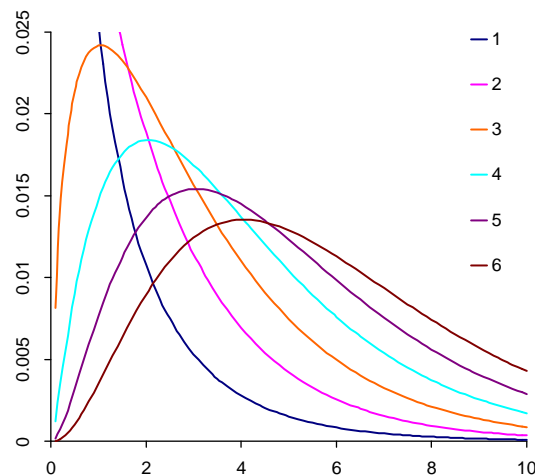
Wenn  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
unabhängige  
standardnormalverteilte  
Zufallsgrössen sind, dann  
hat die Zufallsgrösse

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

eine sogenannte  
 $\chi^2$ -Verteilung mit  
 $n$  Freiheitsgraden

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



Modus = 0, wenn FG = 1 bzw. 2

Modus = (FG-2), wenn FG > 2

7

## Bedingungen der Durchführung

$n$  (Stichprobenumfang) soll genügend gross sein

In der Kontingenztable der *erwarteten* Häufigkeiten sollen  
alle Zellenwerte grösser als 1 sein.

In der Kontingenztable der erwarteten Häufigkeiten soll die  
Anzahl der Zellen, in den der Wert zwischen 1 und 5 ist,  
weniger als 20 % der Stichprobenumfang sein.

(z.B. Vierfeldertabelle: alle Elemente sollen grösser als 5  
sein)

8

## Speziellfall für Vierfeldertabelle (Praktikumsbuch 2.b.30)

### Vierveldertest

	das untersuchte Merkmal		insgesamt
	ist vorhanden	ist nicht vorhanden	
Kollektiv A	a	b	a+b
Kollektiv B	c	d	c+d
insgesamt	a+c	b+d	n

$$\chi_M^2 = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

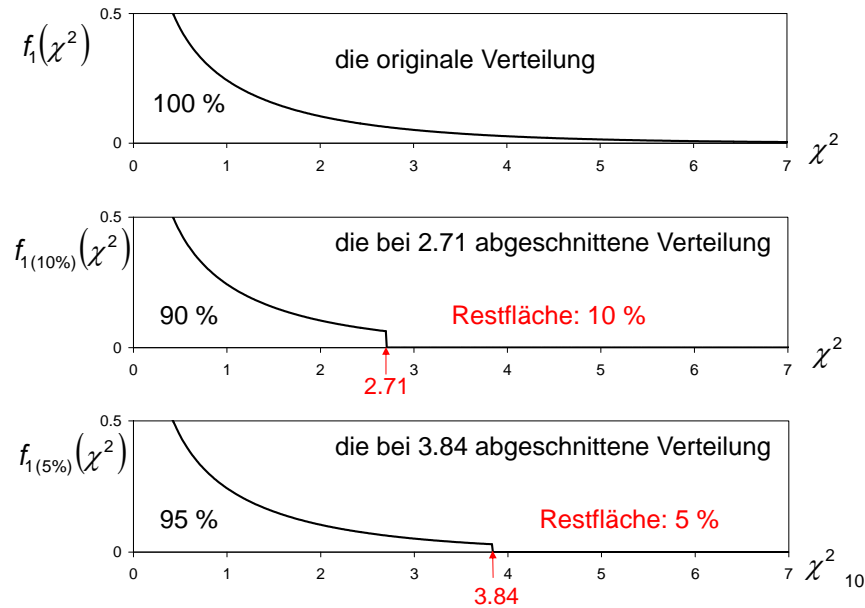
### Die Bedingung der Durchführung:

das Produkt der zwei kleinsten Teilsummen  
soll grösser sein als 5n

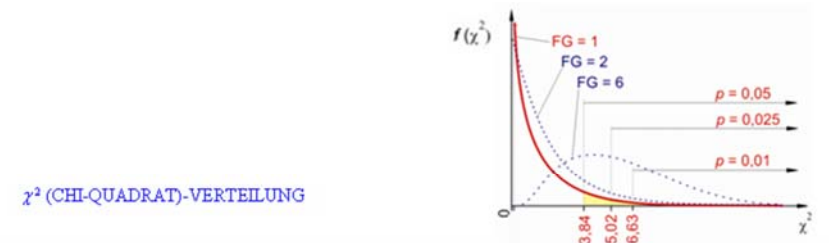
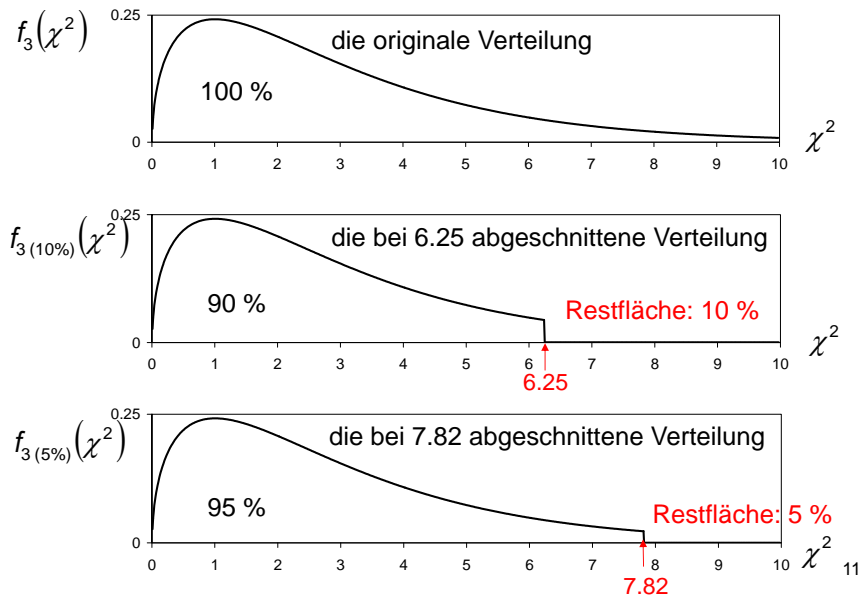
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

9

## Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 1



## Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 3



Freiheits- grad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	26,13

**Beispiel 1** Die Bedingung des Tests:  
das Produkt der zwei kleinsten  
Teilsummen soll grösser sein als  $5n$

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

$$76 \cdot 97 = 7372 > 5 \cdot 200 = 1000$$

Man darf den Chi-  
Quadrat-Test anwenden

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

Es gibt einen  
Zusammenhang zw.  
dem Geschlecht  
und der  
Brillenträgerschaft  
(Männer tragen  
Brille öfter)

13

	$p$ (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
Freiheits- grad (FG)	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 6.63 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

**mit einem Signifikanzniveau: <0.01**

14

	A	B	C	D
1	<b>Empirische Werte</b>			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	=SUMME(B3:C3)
4	Mann	48	49	=SUMME(B4:C4)
5		=SUMME(B3:B4)	=SUMME(C3:C4)	=SUMME(B5:C5)
6				
7	<b>Erwartete Werte</b>			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	=D3*B5/\$D\$5	=D3*C5/\$D\$5	=SUMME(B9:C9)
10	Mann	=D4*B5/\$D\$5	=D4*C5/\$D\$5	=SUMME(B10:C10)
11		=SUMME(B9:B10)	=SUMME(C9:C10)	=SUMME(B11:C11)
12				
13			Signifikanzniveau:	=CHITEST(B3:C4,B9:C10)
14			Chi <sup>2</sup> -Wert:	=CHIINV(D13,1)

	A	B	C	D
1	<b>Empirische Werte</b>			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	103
4	Mann	48	49	97
5		76	124	200
6				
7	<b>Erwartete Werte</b>			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	39.140	63.860	103
10	Mann	36.860	60.140	97
11		76	124	200
12				
13			Signifikanzniveau:	0.0012
14			Chi <sup>2</sup> -Wert:	10.5442606

**Kalkulation  
mit Excel**

15

## Beispiel 2



	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	1	3	4
Mann	5	3	8
	6	6	12



$$4 \cdot 6 = 24 < 5 \cdot 12 = 60$$

Dürfen wir in diesem  
Fall den Chi-Quadrat-  
Test nicht anwenden.





### Erhöhung des Umfanges der Stichprobe



	mit	ohne	Total
F	1	3	4
M	5	3	8
	6	6	12

12 → 200

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Frauen

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Männer

es gibt eine Vermutung, aber  
der Nachweis geht nicht

	mit	ohne	Total
F	28	75	103
M	48	49	97
	76	124	200

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{28}{75} = 0.37$$

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{48}{49} = 0.98$$

$n$  vergrößert sich (12 → 200):  
der Nachweis geht

**Beispiel 3**  $H_0$ : die Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nichtrauchern ist identisch, d.h.  $\chi^2 = 0$ .

$H_1$ : die beiden Häufigkeiten unterscheiden sich, also ist  $\chi^2 \neq 0$ .

In der Tabelle sind die Häufigkeiten der zwei Kollektive aus der Stichprobe einer Lungenförsorge dargestellt.

Da  $23 \cdot 27 = 621 > 5 \cdot 61 = 305$ ,  
kann der Test durchgeführt  
werden.

$$\chi^2_M = \frac{61 \cdot (14 \cdot 25 - 9 \cdot 13)^2}{23 \cdot 38 \cdot 34 \cdot 27} = 4.13$$

Es ist zu sehen, dass  $\chi^2_M \neq 0$   
ist, aber ist der Unterschied  
auch signifikant (oder nur  
zufällig)?

	Lungen krebs	kein Lungen krebs	
Raucher	14	13	27
Nichtraucher	9	25	34
	23	38	61

Sei das Signifikanzniveau: 5%.  
Der Freiheitsgrad (2x2 Tabelle) ist: 1.

$4.13 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \Rightarrow H_0$  ist falsch

Danach ist der Unterschied in der Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nicht-rauchern signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%).

18

Pr.Buch 2.b.29 (Bemerkung 15)

**Beispiel 4** (Pr. Buch, R.103.) Über eine erfolgreiche operative Korrektur einer bestimmten Augenkrankheit (ischaemische optische Neuropathie vom nicht-arterialen Typ) wurde im Jahre 1989 eine Veröffentlichung ausgegeben. Da in dieser Krankheit früher keinerlei wirksame Behandlungsmethode bekannt war, wurde dieser Eingriff verbreitet angewendet. Kürzlich erschienen jedoch Berichte auch von erfolglosen Eingriffen, daher hat man 244 solche Kranken in 25 klinischen Zentren statistisch erfasst, von denen bei 119 Personen die Operation durchgeführt wurde, bei 125 Kranken jedoch nicht. Die Beobachtungen in tabellarischer Form:

empirische Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	39	53	92
nicht verbessert	52	56	108
verschlechtert	28	16	44
insgesamt	119	125	244

erwartete Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	45	47	92
nicht verbessert	53	55	108
verschlechtert	21	23	44
insgesamt	119	125	244

Es ist mit statistischen Methoden zu prüfen, ob die Anzahl der Besserungen ohne Operation tatsächlich höher war?  $H_0$ : keine Differenz

$$\chi^2 = (39-44.87)^2/44.87 + (53-47.13)^2/47.13 + (52-52.67)^2/52.67 + (56-55.33)^2/55.33 + (28-21.46)^2/21.46 + (16-22.54)^2/22.54 = 5.407$$

Weil  $5.407 < 5.991 = \chi^2_{\text{krit}, FG=2}$ , ablehnen wir die  $H_0$  nicht.

19

## 2. Anpassungstest

die beobachtete Messwerte  
passen zu einer Verteilung an?

### Prüfung der Verteilungen (goodness of fit)

#### (reiner) Anpassungstest

(Vergleich der beobachteten  
Häufigkeiten mit Häufigkeiten einer  
bekannten Verteilung)

auf  
Gleichverteilung

auf weitere  
Verteilungen  
mit bekannten  
Parameter

Würfelversuch

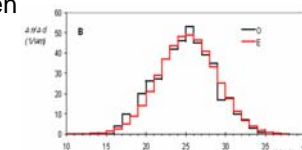
1	2	3	4	5	6
21	14	14	19	16	16

#### Anpassungstest mit Parameterschätzung

(Parameter der Verteilung sind aus  
der beobachteten Häufigkeiten  
geschätzt)

Normalitätstest

auf weitere  
Verteilungen



20

### Anpassungstest auf Gleichverteilung

Die Kontingenztafel mit beobachteten Häufigkeiten (O) wird mit der erwarteten Häufigkeiten ergänzt (E).

$H_0$ : Der Würfel ist regelmässig, die 6 mögliche Ereignisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit:  $100/6 = 16.7$

	1	2	3	4	5	6	Summe
O	21	14	14	19	16	16	100
E	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	100

$$\chi^2 = \frac{(21-16.7)^2}{16.7} + \frac{(14-16.7)^2}{16.7} + \frac{(14-16.7)^2}{16.7} + \frac{(19-16.7)^2}{16.7} + \frac{(16-16.7)^2}{16.7} + \frac{(16-16.7)^2}{16.7} = 2.36 < 11.07 = \chi^2_{\text{krit}, FG=5}$$

$H_0$  wird angenommen. Der Würfel ist regelmässig.

21

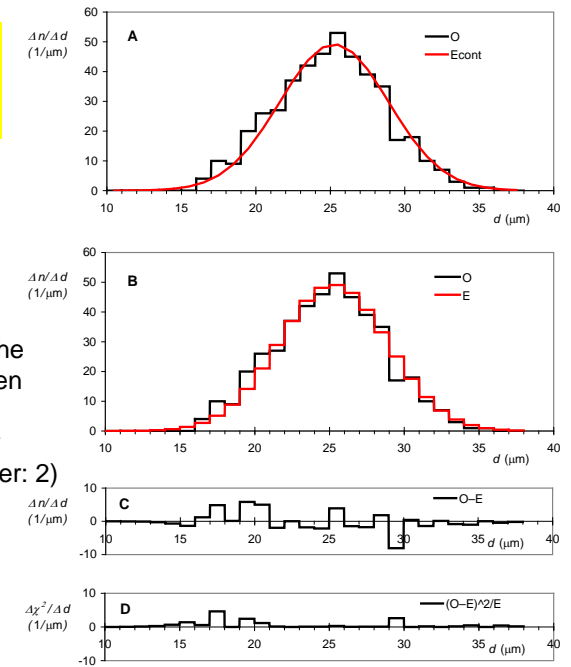
### Prüfung der Verteilungen, Normalverteilung

$H_0$ : der längere Durchmesser der Froscherythrozyten ist normalverteilt

Man schätzt die theoretische Werte der Verteilung mit den Stichprobenparametern.  
 $FG = n - m - 1$ ,  $m$ : Anzahl der geschätzten Parameter (hier: 2)

$$p = 0.9 > 0.05$$

$H_0$ : ist richtig



### 3. Homogenitätstest

### Prüfung der Homogenität (test for homogeneity)

$H_0$ : die Biophysik Kolloquiumsnote\*-Verteilung in der weiblichen Gruppe hat die gleiche Verteilung wie in der männlichen (die Verteilungen sind homogene Verteilungen)

Kolloquiums-note, Biophysik	Frau	Mann		Kolloquiums-note, Biophysik	Frau	Mann	
5	22	12	34	5	16.5	17.5	34
4	26	31	57	4	27.6	29.4	57
3	27	38	65	3	31.5	33.5	65
2	23	25	48	2	23.3	24.7	48
1	14	13	24	1	13.1	13.9	24
	112	119	231		112	119	231

empirische (observed) Kreuztafel

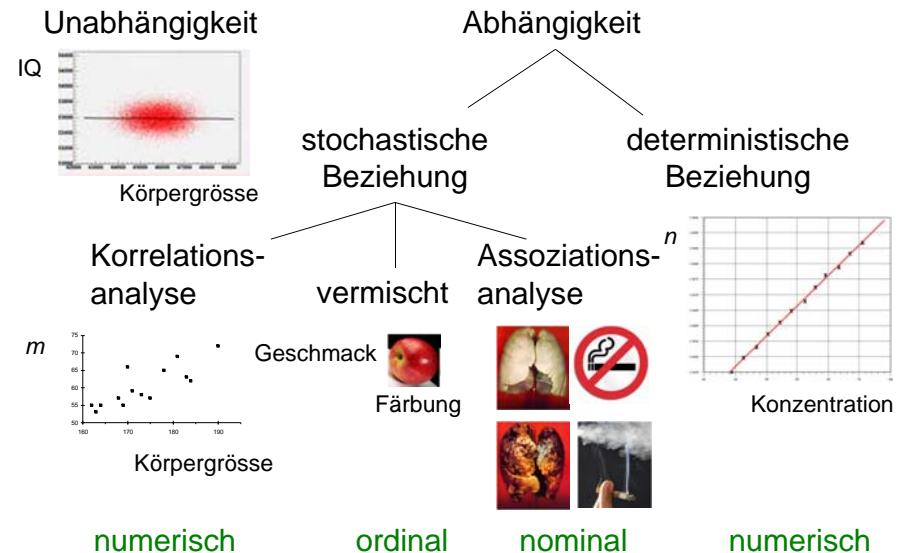
erwartete (expected) Kreuztafel

$$p = 0.27 > 0.05 \Rightarrow H_0: \text{ist richtig}$$

23

\*Daten: 2009 Herbst Semester

### Arten von Abhängigkeitsbeziehungen



24