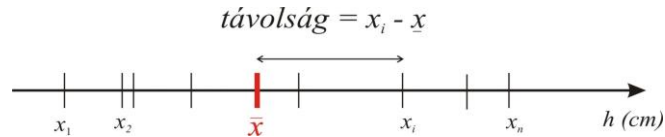


A μ becslése



átlag: az elemekhez képest közepén kell elhelyezkednie.

$$\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

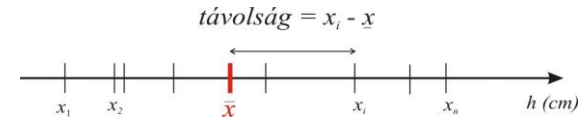


$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

A σ becslése

σ = Az adatok átlagos eltérése a μ -tól.

s (tapasztalati szórás) = az elemek átlagos eltérése az átlagtól.



$$Q_x = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \geq 0$$

A (tapasztalati) szórás

$$s = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}}$$

s : az elemek átlagos eltérése az átlagtól.

$n-1$: a **szabadsági fok**

Példa: 3 szám átlaga = 12. Melyik ez a három szám?

Minta	1. szám	2. szám	3. szám
1.	8	15	$36 - (8+15) = 13$
2.	3	14	$36 - (3+14) = 19$
3.	10	21	$36 - (10+21) = 5$

- $(x \pm s) \sim 68\%$
- $(x \pm 2s) \sim 95\%$
- $(x \pm 3s) \sim 99,5\%$

A minta és a populáció kapcsolata

minta

$n \rightarrow \infty$

populáció

átlag



μ

s

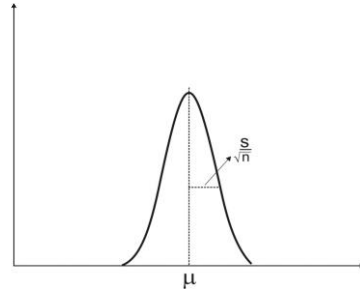


σ

A μ és az átlag

Minta	átlag
1	170
2	168
3	166
4	173

Az átlagok szintén ingadoznak a μ körül.



Standard hiba

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Az átlagok átlagos eltérése a μ -tól!

A μ **konfidencia intervalluma**.

$$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}}) \sim 68\%$$

~68% annak a valószínűsége, hogy a μ ebben a tartományban van.
(~32% , hogy nem!)

A μ becslése

Átlag

Konfidencia intervallum

Pont becslés

Egy egyszerű érték.

Intervallum becslés

Egy tartomány és egy valószínűség, amely megadja annak az esélyét, hogy μ ebbe a tartományba esik.

Információ tartalom

$$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}}) \sim 68\%$$

$$(\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}) \sim 95\%$$

$$(\bar{x} \pm 3s_{\bar{x}}) \sim 99.5\%$$

$$(\bar{x} \pm \infty) = 100\%$$

konfidencia
intervallum
hossza



valószínűség,
megbízhatóság



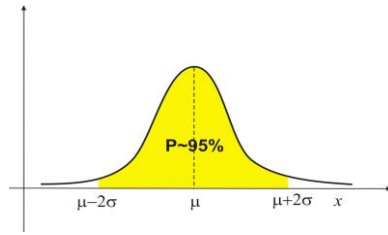
információ
tartalom



De: a konfidencia intervallum hossza függ a standard hiba nagyságától!

Normál tartomány

Normális eloszlású változó



Egyéb típusú változó

Egy olyan tartomány, amely a lehetséges értékek 95%-át tartalmazza.

De: 5% az esélye, hogy a tartományon kívülre esik!!!

Hipotézis vizsgálatok

Kérdések
(példa)

Hatásos-e a gyógyszer?

Hogyan
adhatunk
választ?



irodalomból

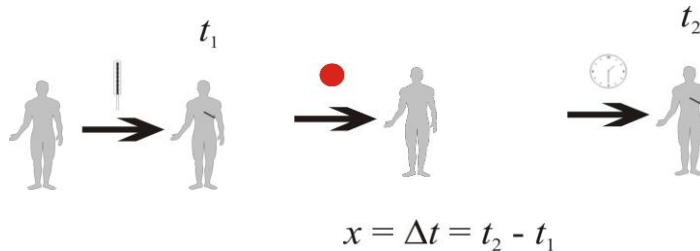


kísérletekből

Egy példa

Kérdés: Hatásos a lázcsillapító gyógyszer?

kísérlet



Hipotézisek

A gyógyszer
hatástalan

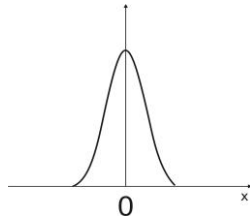
A gyógyszer
hatásos

Egymást kizáró állítások,
elég az egyiket
megvizsgálni!

Melyikkel érdemes
foglalkozni?

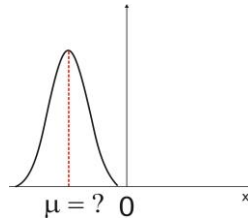
A megfigyelt változó eloszlása

A gyógyszer
hatástalan



A véletlen hatások
eredője 0.

A gyógyszer
hatásos



Mekkora a hatás?



**Ha a populációt
megismerhetnénk!!!**

Eredmény

$$\mu = 0$$



Következtetés

A gyógyszer hatástalan.

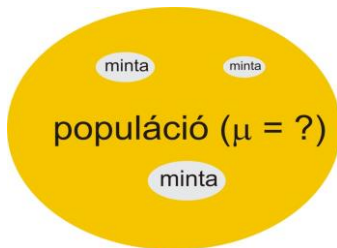
$$\mu < 0$$



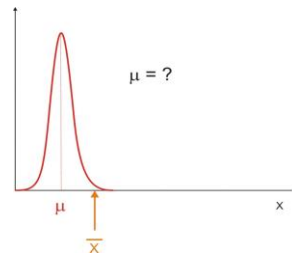
A gyógyszer hatásos, a
hatás mértékére a μ
jellemző.

A helyzet „fokozódik”

A populáció általában
nem ismert.



A minta nem azonos a
populációval!
pl. az átlagok ingadoznak a
várható érték körül!



**Mi az oka az
eltérésnek?**



Mintavételezés
véletlen ingadozás.
(A feltevésünk helyes!)



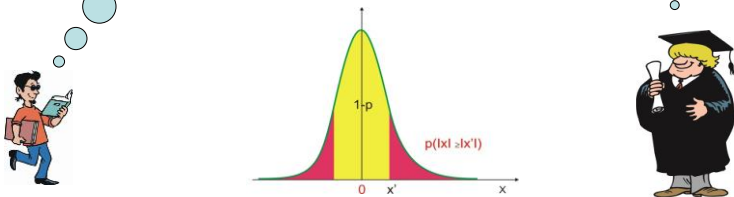
Az alapfeltevésünk
(hipotézisünk) nem igaz
(tévedtünk!).
Az eltérés nem
véletlen.



Mi alapján dönthetünk?

Mekkora az esélye, hogy a minta valóban az adott populációból származik?

Ehhez ismert paraméterű eloszlás szükséges!



Nullhipotézis: (H_0)

a minta/minták eltérése a választott populáció(k)tól a mintavételből származó véletlen eltérés. Gyakran egy tagadó válasz a feltett kérdésre. (példa: a gyógyszer nem hatásos.)



Alternatív hipotézis: (H_1)

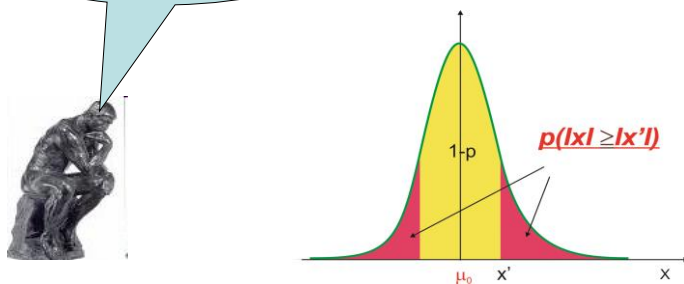
a minta/minták eltérése a választott populáció(k)tól nem véletlen. (példa: a gyógyszer hatásos)

Nullhipotézis

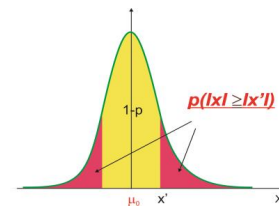
Mekkora az esélye a véletlen eltérésnek?

Ismert eloszlás esetében megadható!

(Az eloszlás alakja nem mindig ilyen, de ismert!)



Szignifikáns?



Ha p elég nagy, lehet véletlen, ha p elég kicsi a különbséget szignifikánsnak tekintjük!

p annak a valószínűsége, hogy az eltérés véletlen!



Szignifikancia szint

Elég nagy,
elég kicsi?



Válasszunk egy
értéket, amelyet
határnak tekintünk!
Ez a szignifikancia
szint.

Jelölése: α .
Orvosi gyakorlatban értéke
igen gyakran 5%.



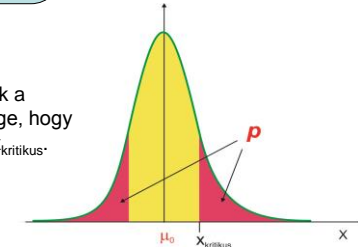
A döntés alapja

Ha a p elég kicsi, nagyobb az
esélye, hogy a nullhipotézis nem
igaz. Azaz inkább az alternatív
hipotézis a valószínűbb.

$x_{kritikus}$: a szignifikancia
szinthez tartozó
érték

$x_{számolt}$: a mintá(k)ból
számolt érték

p annak a
valószínűsége, hogy
 $x_{számolt} \geq x_{kritikus}$



A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi
($p(|x| \geq |x_{krit}|) \leq 5\%$) – **elvetjük** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy
($p(|x| \geq |x_{krit}|) > 5\%$) – **megtartjuk** a
nullhipotézist.

A válasz sohasem igen - nem, vagy igaz - hamis!!!

A döntés „jósága”

döntés:
a nullhipotézist

megtartjuk

elvetjük

igaz

Helyes döntés

I. Típusú hiba (α)

hamis

II. Típusú hiba (β)

Helyes döntés

tény:
a nullhipotézis

Vizsgálat egy csoportban: (egymintás t -próba)

Kérdés: A minta alapján lehet-e a populáció jellemző értéke egy megadott érték?

A példa: Hatásos-e a lázcsillapító vagy sem?

Nullhipotézis: nem! $\mu_0 = 0$. De az átlag nem 0!

minta	átlag
1.	-0,2 °C
2.	-1 °C
3.	-1,5 °C

Ha az eltérés nagyobb, biztosabbnak tűnik az alternatív hipotézis (a gyógyszer hatásos)

Mit jelent a nagy eltérés?

Mi a mértéke az eltérésnek?

Standard hiba: az átlagok átlagos eltérése a μ -tól.

$$(\bar{x} \pm s_{\bar{x}})$$

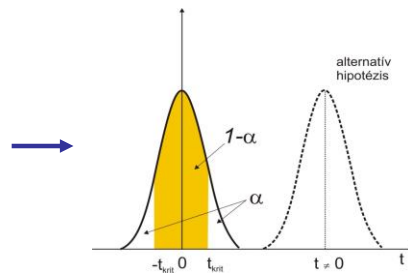
~ 68% - konfidencia intervallum.

A t -érték

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

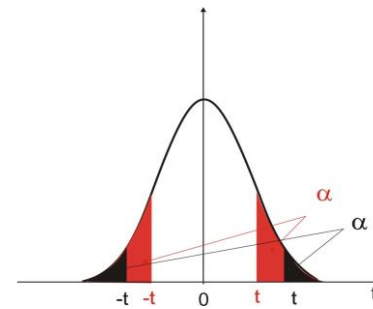
Viszonyítsuk az eltérést a standard hibához!
(μ_0 igen gyakran = 0)

Mivel az átlagok a μ_0 körül ingadoznak, a t -értékek a 0 körül.
(feltéve, hogy a nullhipotézis igaz!)



Miért alkalmasabb a t -érték?

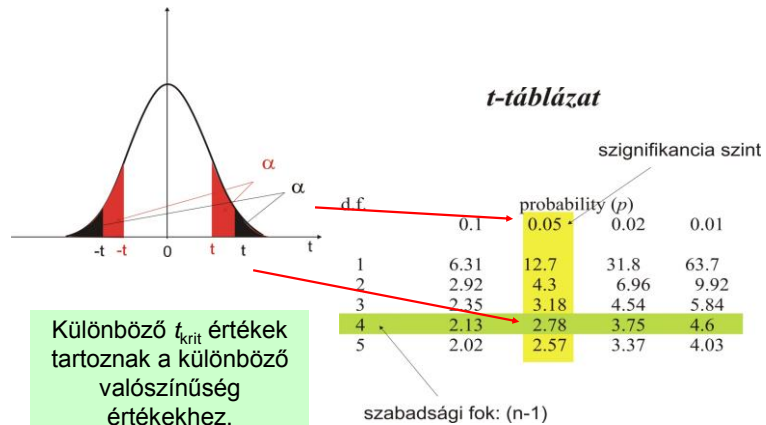
Képesek vagyunk kiszámolni ennek az eltérésnek a valószínűségét!!! (Student- vagy t -eloszlás)



Csak a t -értékek véletlen ingadozását írja le!

Az eloszlás alakja függ az elemszámtól.

A t-táblázat



A szabadsági fok

Gondoltam 3 számra! (minta)

A 3 szám átlaga: 8! (információ!)

3, 12, 8 vagy 5, 7, 11 stb.
A szabadsági fok = n

3, 12, **9** vagy 5, 7, **12** stb.
A szabadsági fok = n-1

Döntés t-táblázat alapján

t-táblázat

szignifikancia szint

d.f.	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.31	12.7	31.8	63.7
2	2.92	4.3	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.6
5	2.02	2.57	3.37	4.03

szabadsági fok: (n-1)

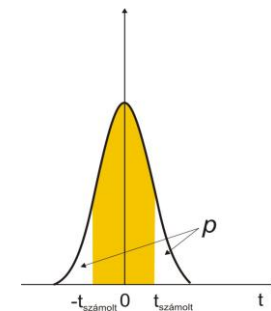
Kiválasztunk egy alkalmas szignifikancia szintet!



Döntés számítógép segítségével

Én tudok integrálni!!!

p : annak a valószínűsége, hogy véletlenül ilyen nagy a $t_{számolt}$.



A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(|t| \geq t_{\text{krit}}) \leq 5\%$) – **elvetjük** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(|t| \geq t_{\text{krit}}) > 5\%$) – **megtartjuk** a nullhipotézist.

Az egymintás t-próba feltétele

- A feladat: egy minta alapján döntés a μ értékéről.
- A változó **normális eloszlású** legyen.



Vizsgálat két csoportban

Kérdés: A két minta származhat-e azonos populációból, vagy a két populáció paraméterei azonosak?

$$\mu_1 = \mu_2 ?$$

Nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2$

(általában $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$)

kétmintás t-próba

kétmintás t-próba

$$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$



Ismert eloszlású változóra van szükség!

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

A próba

A t-érték az t-érték!

Akkor meg tudom csinálni!
Pardon, mennyi a szabadsági fokok száma?

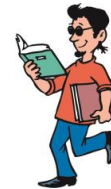
$$\text{sz.f.} = n_1 + n_2 - 2$$

$$((n_1 - 1) + (n_2 - 1))$$



A kétmintás t-próba feltétele

- A feladat: két egymástól **független** csoport összehasonlítása.
- A változó **normális eloszlású** legyen.
- A **szórás** a két csoportban **azonos**nak tekinthető.



Ez utóbbi új!
Hogyan állapítható meg?

A szórások vizsgálata

Hogyan fogjunk hozzá?

Nullhipotézis: a két szórás azonos, az eltérés véletlen (mintavétel).



De hiszen ez olyan, mint egy hipotézis-vizsgálat!

Az F-próba

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

A nullhipotézishez tartozik egy ún. F-eloszlás.

De melyik variancia legyen a számlálóban?



A számlálóban mindig a nagyobb variancia van! ($F \geq 1$)



Döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(F \geq F_{\text{krit}}) \leq 5\%$) – **elvetjük** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(F \geq F_{\text{krit}}) > 5\%$) – **megtartjuk** a nullhipotézist.

2 vagy több változó

Korreláció és regresszió

Kapcsolat két változó között.

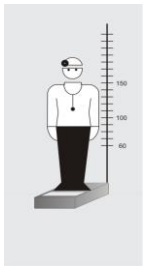
Függvényszerű leírás.

Korreláció

Példa:

Van-e kapcsolat a testsúly és a testmagasság között?

kísérlet:



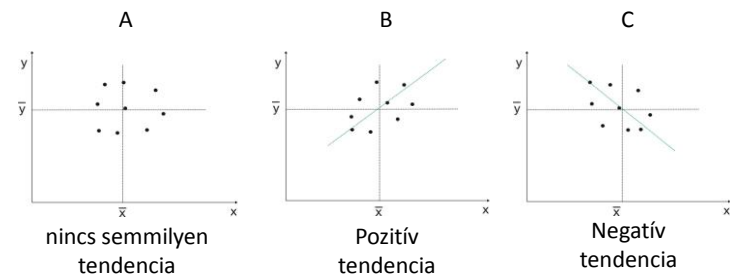
adatok:

n	magasság (cm)	súly (kg)
1	150	61
2	170	70
3	166	75
4	174	70
5	180	72
6	155	50
7	172	65
8	161	59
9	177	81

Ábrázolás

például: x a magasság és y a súly.

lehetséges esetek:



Pearson-féle korrelációs együttható

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}}$$

Az r lehetséges értékei:

$$-1 \leq r \leq 1$$

$$Q_{xy} = \sum_i [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]$$

$$Q_x = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$Q_y = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

A populációban:

$r = 0$ nincs korreláció,

$r \neq 0$ van! (mértéke arányos az r abszolút értékével.)

Determinációs együttható

$$r^2$$

Megadja, hogy milyen erős a kapcsolat.
Az y változásainak mekkora része értelmezhető az x változásaival.

Korrelációs t -teszt

A számolt r csak becslése az r populációbeli értékének. A számolt érték az elmélet r körül ingadozik.
(pl. $r_{\text{számolt}} = 0,1$?)

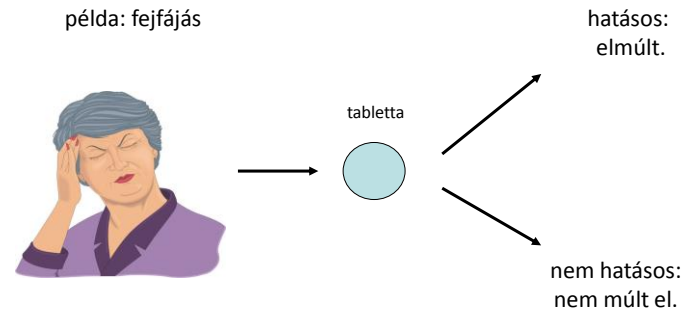
$$H_0: r = 0! \longrightarrow t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \longrightarrow \text{sz.f.: } n-2$$

Döntés: a t -érték alapján. Lásd előző példákat!

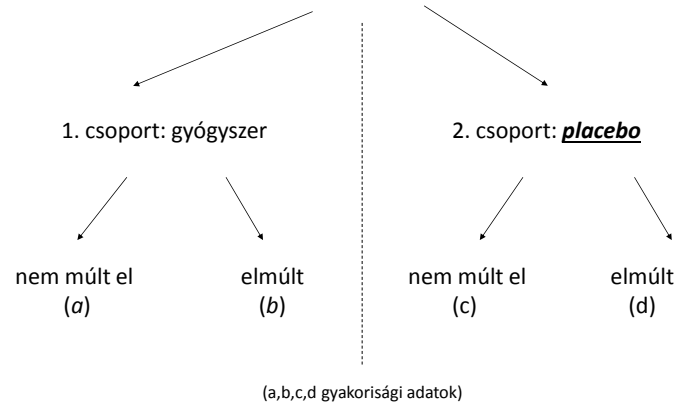
Feltétele: Legalább az egyik változó normális eloszlású.

Khi-négyzet teszt (gyakorisági adatok elemzése)

példa: fejfájás



Kísérlet



Kontingencia tábla

	Nem múlt el	elmúlt	Összes
1. csoport	a	b	a+b
2. csoport	c	d	c+d
összes	a+c	b+d	n

2 x 2 tábla.

Nullhipotézis

Ha a hatás független a gyógyszertől,
azt várjuk, hogy:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a \times d = b \times c$$

Nullhipotézis: a hatás független a gyógyszertől,
csupán placebo hatás.

khi-négyzet teszt (függetlenség).

χ^2 -eloszlás

Képlet 2 x 2 táblákhoz:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Nullhipotézis: $\chi^2 = 0$, a különbség csupán mintavételi hiba.

χ^2 -eloszlás: megadja a χ^2 -érték véletlen eltéréseit.

Döntés

Hasonló a t -eloszlás esetében megbeszéltekhez. A különbség: a χ^2 -eloszlást használjuk.

A várható érték = 0, ha a nullhipotézis igaz.

ha $\chi^2_{\text{számolt}} \geq \chi^2_{\text{krit}}$ - elvetjük ellenkező esetben megtartjuk a nullhipotézist.
vagy $p(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{számolt}}) \leq 5\%$ - elvetjük ellenkező esetben megtartjuk a nullhipotézist.

szabadsági fokok száma: ebben a speciális esetben = 1.

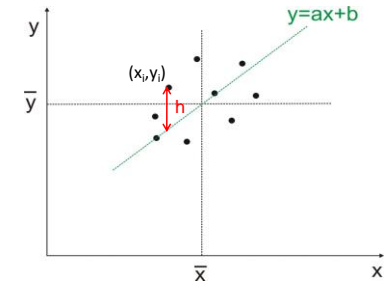
általában:

sz.f. = $(s-1)(o-1)$, ahol s – a sorok száma
 o – az oszlopok száma

Lineáris regresszió

Ha a változók normális eloszlásúak, a kapcsolat közöttük lineáris jellegű.

$$y_i = ax_i + b + h_i$$



y : függő változó

x : független változó

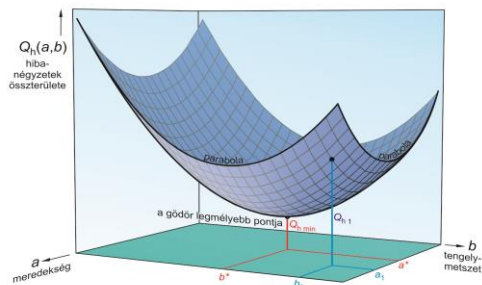
h_i : hibateg = $y_i - (ax_i + b)$.

(A különbség a megfigyelt és a feltételezett érték között)

A legkisebb négyzetek módszere

$$Q_h = \sum_i h_i^2 = \sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$$

x_i és y_i mért értékek.
 a és b az ismeretlen!



Melyik a legjobban illeszkedő egyenes?

$$Q_h \text{ minimális!} \rightarrow a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad b^* = \bar{y} - a^* \bar{x}$$

Kapcsolat az inzulin érzékenység és a BMI között.

r^2 : determinációs koefficiens.

független	regressziós együttható	st. hiba	t	p	döntés
BMI	-0,077	0,018	-4,25	0,0011	szignifikáns
r^2	0,6				