Hypothesenprüfungen

Dr László Smeller

Vergleich der Schätzungen und Hypothesenprüfungen

Schätzungen:

Frage: Wie groß (ist eine physikalische Größe) $\mu=?$

z.B.: Körperhöhe, Blutdruck, Blutzuckerkonzentration...

Antwort: Punktschätzung: Ein Wert

Intervallschätzung: Ein Intervall + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrscheinlichkeit)

Hypothesenprüfungen:

Frage: Eine Entscheidungsfrage (ist es wahr oder nicht?)

zB: hat ein Medikament eine Wirkung oder nicht?

Mathematisch: ist $\mu=\mu_0$?

Antwort: Ja oder Nein + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrsch.)

Signifikanzniveau (Irrtumswahrsch.)

Typische Aufgaben der Hypothesenprüfung

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
   - 1a. Verursacht es eine Änderung (zB. Blutdruckänderung, d.h.: ist der Blutdruck kleiner nach der Eingabe?)
   - 1b. Gibt es einen Unterschied zwischen den unbehandelten und behandelten Gruppen?

2. Gibt es eine Korrelation
   - 2. a. zwischen zwei Parametern (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)
   - 2. b. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei Eigenschaften (Alkoholismus, Leberschrumpfung)

Typische Fragen - gebrauchte Merkmale

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?

   Änderung von einer **numerischen (kontinuierlichen) Größe**

   (zB. Blutdruck, Körpertemperatur, Blutzuckerkonzentration, …)
   - 1a. Änderung nach einem Einfluss an einer Stichprobe
   - 1b. Unterschied zwischen zwei Stichproben

2. Gibt es eine Korrelation
   - 2a. zwischen **zwei numerischen Größen**

     (zB. Körperhöhe und Gewicht, …)
   - 2b. zwischen zwei (oder mehreren) **kategorischen Merkmalen**

     (zB: Alkoholiker – Antialkoholiker, Leberschrumpfung – keine Leberschr. Raucher – Nichtraucher, Lungenkrebs – kein Lungenkrebs)

Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Die Wirkung
Die Korrelation
können viele unterschiedliche Stärke aufnehmen

⇩

unprognostizierbar

⇩

mathematisch unbehandelbar

☹

Keine Wirkung
Keine Korrelation
nur zufällige Effekte treten auf

⇩

mathematisch gut beschreibbar!

☺

⇒ **Nullhypothese**

Die Nullhypothese und die Alternativhypothese

Nullhypothese (H_0):

Es gibt **keine Wirkung** $\mu = \mu_0$

Alle **Abweichungen** von dem theoretischen Wert sind rein **zufällig**.

Alternativhypothese (H_1)

Es gibt eine Wirkung $\mu \neq \mu_0$

Die Abweichungen sind nicht zufällig, sondern systematisch!

Eine von H_0 und H_1 wird unbedingt auftreten! $p(H_0 \text{ oder } H_1)=1$

Nullhypothesen

beim Fiebermittel:

Keine Wirkung (H_0):

Wenn es keine Wirkung gibt, ist die Temperaturänderung nach der Eingabe = 0.

Genauer: Erwartungswert der Temperaturänderungen ist $\mu_0=0$

beim Würfelspiel:

Normal aussehende Würfel.

Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Sei es vorausgesetzt, dass wir keine Wirkung/Korrelation haben!
(D.h. H_0 ist richtig.)

Wenn unsere Ergebnisse dieser Voraussetzung nicht entsprechen, dann haben wir wahrscheinlich eine Wirkung/Korrelation.

Normal aussehende Würfel.

Gezinkte Würfel?

Beispiel 1.: Fibermittel

Seien die Temperaturen vor und nach der Eingabe gemessen.
Die Messergebnisse (in °C):

T_{vor}	T_{nach}	$x = T_{nach} - T_{vor}$
39,7	39,0	-0,7
38,8	38,4	-0,4
37,9	38,3	0,4
39,2	38,9	-0,3
38,9	38,4	-0,5
Durchschnitt $\bar{x}$		-0,3

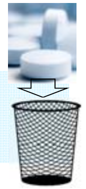
Temperatur - änderung

Nullhypothese: das Fiebermittel is unwirksam.
Die Temperaturänderungen (x_i) sind zufällig.
Der Erwartungswert der Temperaturänderungen ist null.

1. Beispiel: Fibermittel

Nullhypothese: $\mu_0 = 0$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, dann befindet sich $\bar{x}$ nicht weit von μ_0.



Ist $\bar{x} = -0{,}3\,°C$ klein genug um es als zufällig zu betrachten? d.h. die Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist $\bar{x} = -0{,}3\,°C$ groß genug um es als systematische Abweichung zu betrachten? d.h.Nullhypothese abzulehnen?

Aber wo ist die Grenze?
Wie groß muss der Durchschnitt sein um die Nullhypothese abzulehnen?

2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.
Wird die Pulszahl geändert nach der Kniebeugungen?
H_0: keine Änderung $\mu=0$

p_{vor}	p_{nach}	$x=\Delta p$
65	79	14
68	77	9
72	91	19
63	70	7
74	88	14
69	84	15
	Durchsch.	13

Ist 13 $^1/_{Min}$ klein genug um die Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist 13 $^1/_{Min}$ groß genug um die Nullhypothese abzulehnen?

Wie große zufällige Abweichung ist erlaubt?

(Rein zufällige, statistische) Streuung des Durchschnittes beträgt: $s_{\bar{x}}$

$s_{\bar{x}}$ ist der „Maßstab" für die Abweichung des Durchschnittes von dem Erwartungswert μ_0.

Einige $s_{\bar{x}}$ große Abweichung ist „erlaubt",
aber merfache $s_{\bar{x}}$ Abweichung ist sehr unwahrscheinlich.
(Angenommen dass die Nullhypothese gültig ist.)

Der t-Wert

Weil die zufällige Abweichungen des Durchschnittwertes von μ können einige $s_{\bar{x}}$ betragen, vergleichen wir $\bar{x}$ mit $s_{\bar{x}}$.

Definieren wir eine neue Größe:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}}$$ ($\bar{x}$ in $s_{\bar{x}}$ Einheiten gemessen)

oder mathematisch:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

t für unseren „Fibermittel“:

$t = -0{,}3/0{,}187 = -1{,}6$

für Kniebeugungen $t' = 7{,}34$

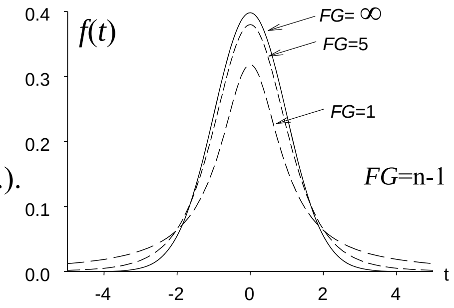
Die Verteilung des t-Wertes: die t-Verteilung

$t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, alle x_i Werte folgen einer t-Verteilung mit $\mu = 0$.

Wenn die $x_1, x_2, \ldots x_n$ Daten einer Normalverteilung folgen, die Verteilung von $t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}}$ kann berechnet werden: t-Verteilung

Wenn die Nullhypothese gültig ist, der aus unserer Stichprobe ausgerechnete t-Wert folgt einer t-Verteilung (Student-Vert.).



Bedingung: x muss normalverteilt sein.

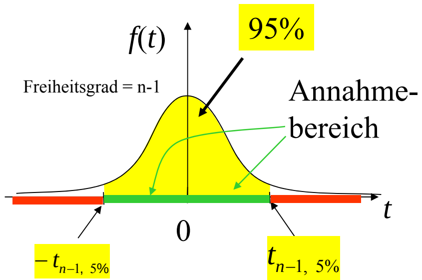
D.h.: man braucht normalverteilte Messwerte.

Die Anwendung der t-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer richtigen Nullhypothese

$-t_{n-1,\ 5\%} < t < +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 95%.



Bei richtiger Nullhypothese ist der aus der Stichprobe ausgerechnete t-Wert mit 95% Wahrscheinlichkeit in dem Annahmebereich. Wir können diesen kleinen t-Wert mit zufälligen Abweichungen erklären. $\Rightarrow$ Wir müssen keine Wirkung voraussetzen.

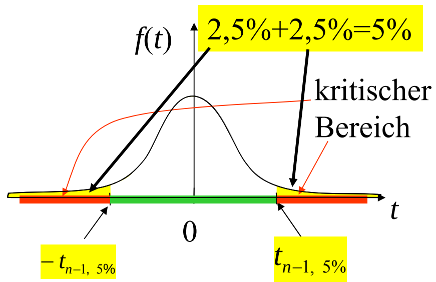
Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.
(H_0 wird angenommen)

Die Anwendung der t-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer richtigen Nullhypothese

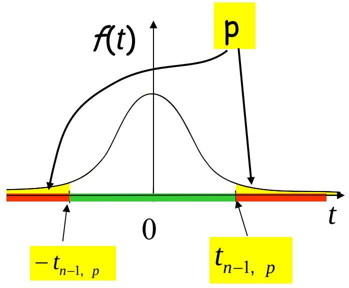
$t < -t_{n-1,\ 5\%}$ oder $t > +t_{n-1,\ 5\%}$

gilt, beträgt 5%.

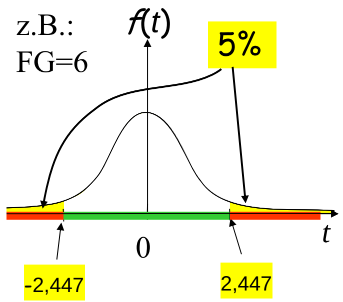


D.h.: Es ist sehr unwahrscheinlich (<5%), dass wir ***bei richtiger Nullhypothese*** einen so großen t-Wert bekommen. $\Rightarrow$ Wir haben wahrscheinlich eine Wirkung, ***die Nullhypothese kann abgelehnt werden, die Alternativhypothese wird angenommen.***

Das 5% nennt man als ***Signifikanzniveau*** oder ***Irrtumswahrscheinlichkeit.***



z.B.:
FG=6



Freiheits-grad (FG)	*p* (Irrtumswahrscheinlichkeit)				
	0,2	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807

Ablauf der Hypothesenprüfung bei einem *t*-Test

1. Fragestellung (mit der Definition der Population!)
   (Bedingung: Normalverteilung)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus (α)
4. Messung (Stichprobe mit *n* Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des *t*-Wertes
6. Vergleich von unserem *t* und dem Grenzwert ($t_{n-1,\alpha}$)

$|t| < t_{n-1,\alpha}$ $|t| > t_{n-1,p}$

7. Die Entscheidung:

die **Nullhypothese** kann mit einem α Signifikanzniveau **nicht abgelehnt** werden.

Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.

die **Nullhypothese** kann mit einem α Signifikanzniveau **abgelehnt** werden

***Die Alternativhypothese ist angenommen* (mit einem Signifikanzniveau von α).**

1. Beispiel: Fibermittel

1. Die Frage: Ist das Fibermittel wirksam?
2. Nullhypothese: Das Fibermittel ist unwirksam.
   (Die Temperaturänderungen sind rein zufällig).
3. Sei p=5%
4. Die Messergebnisse:
   Temperaturen vor und nach der Eingabe (in °C):
   x= Temperaturänderung

Temperatur - änderung

T_{vor}	T_{nach}	$x = T_{nach} - T_{vor}$
39,7	39,0	-0,7
38,8	38,4	-0,4
37,9	38,3	0,4
39,2	38,9	-0,3
38,9	38,4	-0,5
Durchschnitt		-0,3

5.
$$\bar{x} = -0{,}3\,°\mathrm{C}$$
$$s_{\bar{x}} = 0{,}187^\circ\mathrm{C}$$
$$t = \frac{-0{,}3^\circ\mathrm{C}}{0{,}187^\circ\mathrm{C}} = -1{,}6$$

FG= n-1=4

6. Vergleich des unseren *t*-Wertes mit dem Grenzwert

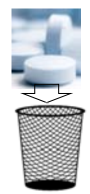
p=0,05

FG=4

$t_{4;5\%}$=2,776

Freiheits-grad (FG)	*p* (Irrtumswahrscheinlichkeit)				
	0,2	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055

$|t| < t_{4;\ 5\%}$ die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.
Die Nullhypothese wird angenommen
(mit einem *5%* Signifikanzniveau).



Das Fiebermittel ist mit 5% Sign.n unwirksam!

2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.

p_{vor}	p_{nach}	$x=\Delta p$
65	79	14
68	77	9
72	91	19
63	70	7
74	88	14
69	84	15
	Durchsch.	13
	Stabw.	4,34
	Stfehler	1,77

$n=6$

$$t = \frac{13}{1{,}77} = 7{,}34$$

Entscheidung: Hausaufgabe

Freiheits-grad (FG)	*p* (Irrtumswahrscheinlichkeit)				
	0,2	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898

Fortsetzung folgt…