

Hypothesenprüfungen II.

Fehler von erste u. zweite Art,
Anwendungsbedingungen, Verallgemeinerung,
Verhältnis der Schätzungen und Hypothesenprüfungen
Zweistichprobentest

László Smeller

Widerholung: Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Zu entscheidende Frage

Indirekter Beweis

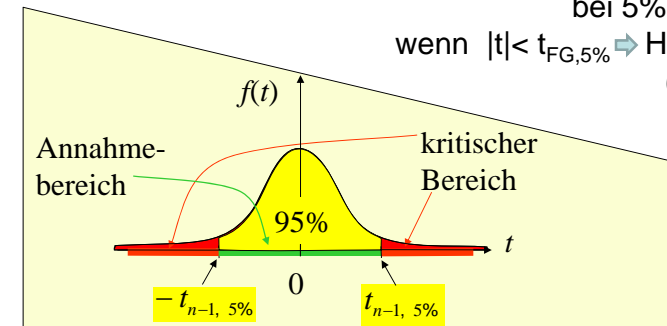
Nullhypothese (H_0): nur zufällige Änderungen
mathematisch behandelbar

Ein geeigneter Parameter (Prüfgröße) (zB. t)

Bei Gültigkeit der H_0 t folgt einer gut bestimmten Verteilung

Zu 95% $|t| < t_{FG,5\%}$ \Rightarrow Wenn $|t| > t_{FG,5\%}$ $\Rightarrow H_0$ wird abgelehnt
bei 5% Irrtumswahrsch.

wenn $|t| < t_{FG,5\%}$ $\Rightarrow H_0$ wird beibehalten
(bei 5% Irrtumsw.).



2

Hypothesenprüfung mit Excel

Excel Funktion für t -Teste:

ttest(Matrix1; Matrix2; Seiten; Typ)

Messreihe 1
z.B: Temperatur
vor der Eingabe
des Fiebermittels

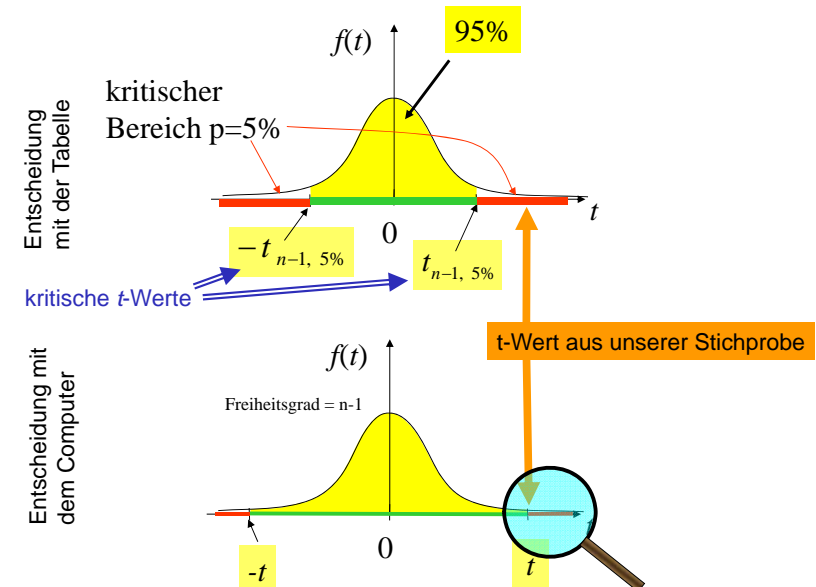
Messreihe 2
z.B: Temperatur
nach der Eingabe
des Fiebermittels

Siehe
später

Typ: 1 - gepaart (Eine Stichprobe)
2 - Zwei Stichproben, gleiche Varianz
3 - Zwei Stichproben, ungleiche Varianz

Diese Funktion gibt einen p Wert an! (statt t !)







Die Bedeutung des p -Wertes der Excel Funktion



4

Fehler von 1. und 2. Art

Bei der Gerichtsverhandlung: Nullhypothese: unschuldig

	Unschuldige 	Kriminelle 
Im Gefängnis	Fehler erster Art 	Richtige Entscheidung 
Auf freiem Fuß	Richtige Entscheidung 	Fehler zweiter Art 

Einseitige/zweiseitige Teste

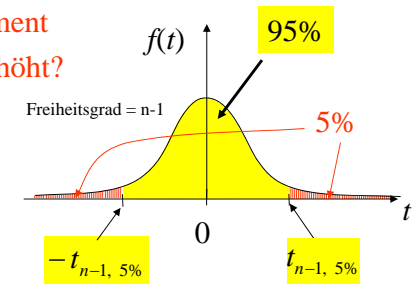
Wenn wir ein Fiebermittel testen:

Ist es interessant wenn das Medikament

die Körpertemperatur signifikant erhöht?

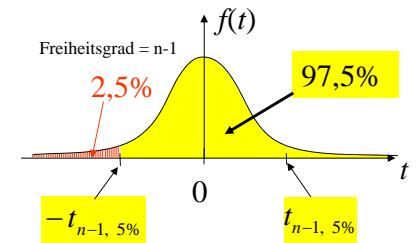
Zweiseitiger Test:

Nullhyp: das Medikament ändert die Körpertemperatur nicht.



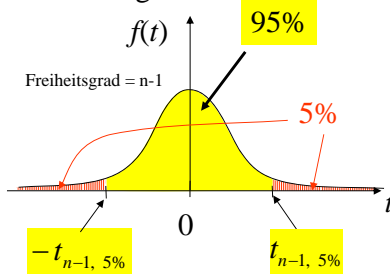
Einseitiger Test

Nullhyp: das Medikament erniedrigt die Körpertemperatur nicht.

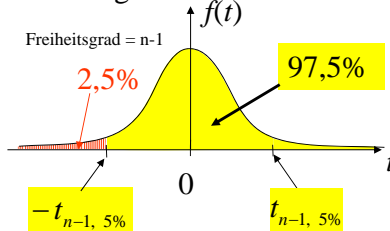


Einseitige/zweiseitige Teste

Zweiseitiger Test:



Einseitiger Test



Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,700	1,371	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,717	3,106
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,177	2,675	3,055
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,157	2,638	3,013
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831

Effekt des Stichprobenumfanges

Erhöhung des Stichprobenumfanges:

wenn $n \rightarrow \infty$ dann $s_{\bar{x}} \rightarrow 0$

Wenn H_0 ist ungültig, t steigt mit Erhöhung des n -es, und H_0 wird mit kleinerem Irrtumswahrscheinlichkeit abgelehnt:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_1}{s_{\bar{x}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_1}{0} = \infty$$

Erhöhte Stichprobenumfang führt zu bessere (sicherere) Entscheidung

Verallgemeinerung: $\mu_0 \neq 0$

Beispiel:

Eine Maschine stellt Pillen mit einem nominalen Wirkstoffgehalt von 20mg her.

Man misst 10 Tabletten und die Wirkstoffgehalte sind (in mg):

20,1 19,8 19,5 17,9 18,8 19,9 18,6 20,3 19,2 19,3

Durchschnitt 19,34 mg, Standardabweichung 0,74 mg, Standardfehler 0,24 mg

Nullhypothese: $\mu_0 = 20$ mg

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

Alle weitere Schritte sind wie früher.

$t = -2,80$

Vergleich von Hypothesenprüfungen und Schätzungen

zB.: Blutdrucksenker: Blutdruckänderungen (mmHg):

-13, 5, -29, -22, 13, -8, -19, -12

Durchschnitt: -10,625 mmHg

Standardfehler: 4,917 mmHg

$n=8$, $FG=7$

Schätzung: Konfidenzintervall:

$\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}} = -10,6 \pm 9,8$ mmHg -20,4 ... -0,8 mmHg
enthält Null nicht! => Blutdrucksänkender Effekt!

t-Test:

$t = -10,625/4,917 = -2,161$ $|t| < t_{FG=7; 5\%} = 2,365$

kein signifikanter Effekt!

15

Genaueres Konfidenzintervall

$\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}$ ist nur eine **grobe** Annäherung des Konfidenzintervalles.

Das **genaue** Konfidenzintervall für 95% Konfidenzniveau ist:

$$\bar{x} \pm t_{n-1; 5\%} s_{\bar{x}}$$

Es zählt nur bei kleinen Stichproben. ($n < 20$)

Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)					
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528
∞	0,250	0,674	1,282	1,645	1,960	2,576

Genaueres Konfidenzintervall beim Blutdrucksenker

In dem Beispiel des Blutdrucksenkers:

$$\bar{x} \pm t_{n-1; 5\%} s_{\bar{x}} =$$

$$\bar{x} \pm t_{7; 5\%} s_{\bar{x}} =$$

$(-10,6 \pm 2,365 \cdot 4,917)$ mmHg =

$(-10,6 \pm 11,6)$ mmHg

d.h. μ ist in: -22,2 ... 0,8 mmHg

mit 95% Wahrscheinlichkeit

=> μ kann 0 sein.

Die Schätzung und der t-Test geben dieselbe Ergebnisse!

Endlich habe ich es verstanden!



Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01	
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	

17