

Kontingenztabellen. Chi-Quadrat-Test

1. Unabhängigkeitstest
2. Anpassungstest
3. Homogenitätstest



KAD 2015.11.19

Beispiel 1

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	28	75	103
Mann	48	49	97
	76	124	200



?

1. Unabhängigkeitstest

Korrelationsanalyse zwischen kategorischen Merkmalen

Häufigkeitstabelle (Kontingenztafel):
eine tabellarische Darstellung der gemeinsamen
Häufigkeitsverteilung zweier Variablen
X (z.B. Geschlecht) und Y (Brillenträgerschaft)

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

Frage: unterscheidet sich
die Häufigkeit eines
feststellbaren Merkmals
(Symptoms) in zwei
Populationen?

2

Aufstellung der Nullhypothese

H_0 : Geschlecht und Brillenträgerschaft
sind voneinander **unabhängig**
(es gibt keinen Unterschied)

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b'}{d'}$$

Wie gross wäre die **erwartete Häufigkeit**
(expected frequency) in der Zelle a' ,
wenn die Nullhypothese gültig ist?

Anzahl der Frauen:

$$a + b = 103$$

Anzahl der Personen mit Brille:

$$a + c = 76$$

Proportion der Frauen in der Stichprobe:

$$P(\text{Frau}) = (a + b)/n = 103/200$$

Proportion der Personen mit Brille:

$$P(\text{mit Brille}) = (a + c)/n = 76/200$$

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	$a'=?$	$b'=?$	103
Mann	$c'=?$	$d'=?$	97
	76	124	200

erwartete (expected)
Kreuztabelle

3

Erwartete Häufigkeiten. Annahme: H_0 ist gültig \Rightarrow
Geschlecht und Brillenträgerschaft sind unabhängige Ereignisse

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links oben: } a' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts oben: } b' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (b+d)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links unten: } c' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts unten: } d' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (b+d)}{n}$$

	mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103
M	c=48	d=49	97
	76	124	200

empirische (observierte,
observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	$103 \cdot 76 / 200$	$103 \cdot 124 / 200$	103
M	$97 \cdot 76 / 200$	$97 \cdot 124 / 200$	97
	76	124	200

erwartete (expected)
Kreuztabelle

4

Die erwartete Häufigkeiten aus der empirischen Häufigkeiten

	mit	ohne	Total		mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103	F	a'=39.14	b'=63.86	103
M	c=48	d=49	97	M	c'=36.86	d'=60.14	97
	76	124	200		76	124	200

empirische (observed)
Kreuztabelle

erwartete (expected)
Kreuztabelle

$$(\text{erwartete Häufigkeit}) = \frac{(\text{Spaltensumme}) \cdot (\text{Zeilensumme})}{(\text{Anzahl der Daten in der Stichprobe})}$$

5

Wenn die Nullhypothese ist gültig:

Die Werte in der entsprechenden Zellen der Kontingenztabellen mit empirischen und erwarteten Häufigkeiten sind ungefähr gleich.

Die folgende Prüfgrösse (gewichtete quadratische Summe) zeigt **Chi-quadrat Verteilung**:

Prüfgrösse

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

wobei

O_i die empirische (observed)

E_i die erwartete (expected) Häufigkeit
in der i-ten Zelle sind.

Freiheitsgrad: (Anzahl der Zeilen - 1) * (Anzahl der Spalten - 1)
für eindimensionalen Tabellen: $n-1$

z.B. 2*2 (vierfelder-) Tabelle: 1

6

Wiederholung

Wichtige Verteilungen der analytischen Statistik

Chi-Quadrat (χ^2) Verteilung

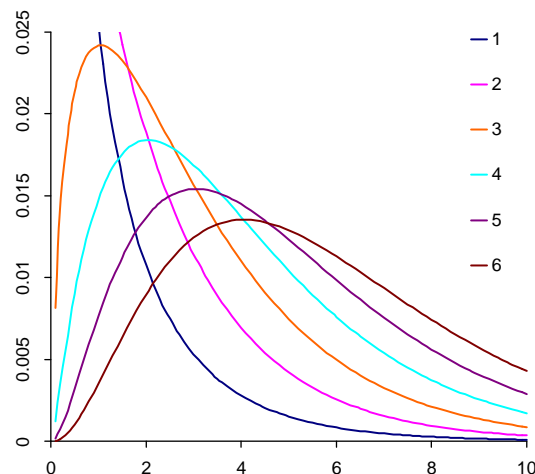
Wenn x_1, x_2, \dots, x_n
unabhängige
standardnormalverteilte
Zufallsgrössen sind, dann
hat die Zufallsgrösse

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

eine sogenannte
 χ^2 -Verteilung mit
 n Freiheitsgraden

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



Modus = 0, wenn FG = 1 bzw. 2

Modus = (FG-2), wenn FG > 2

7

Bedingungen der Durchführung

n (Stichprobenumfang) soll genügend gross sein

In der Kontingenztable der *erwarteten* Häufigkeiten sollen
alle Zellenwerte grösser als 1 sein.

In der Kontingenztable der erwarteten Häufigkeiten soll die
Anzahl der Zellen, in den der Wert zwischen 1 und 5 ist,
weniger als 20 % der Stichprobenumfang sein.

(z.B. Vierfeldertabelle: alle Elemente sollen grösser als 5
sein)

8

Speziellfall für Vierfeldertabelle (Praktikumsbuch 2.b.30)

Vierveldertest

	das untersuchte Merkmal		insgesamt
	ist vorhanden	ist nicht vorhanden	
Kollektiv A	a	b	a+b
Kollektiv B	c	d	c+d
insgesamt	a+c	b+d	n

$$\chi_M^2 = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

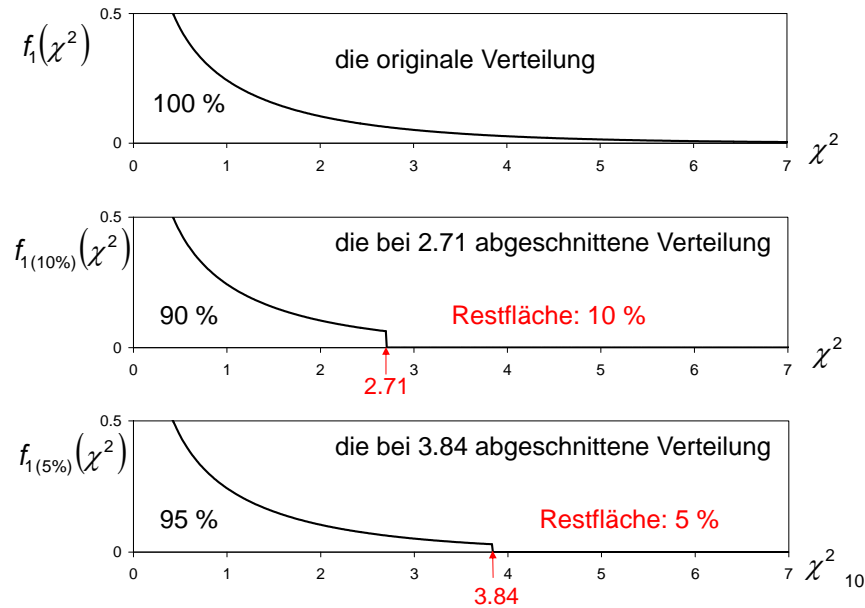
Die Bedingung der Durchführung:

das Produkt der zwei kleinsten Teilsummen
soll grösser sein als $5n$

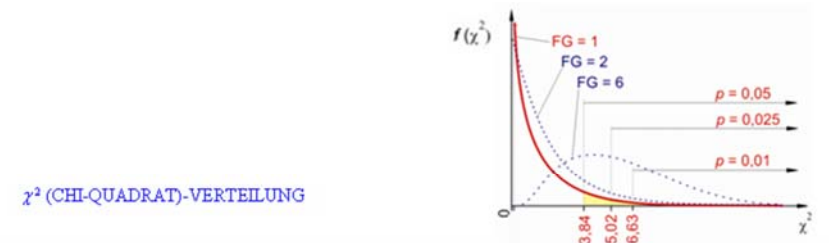
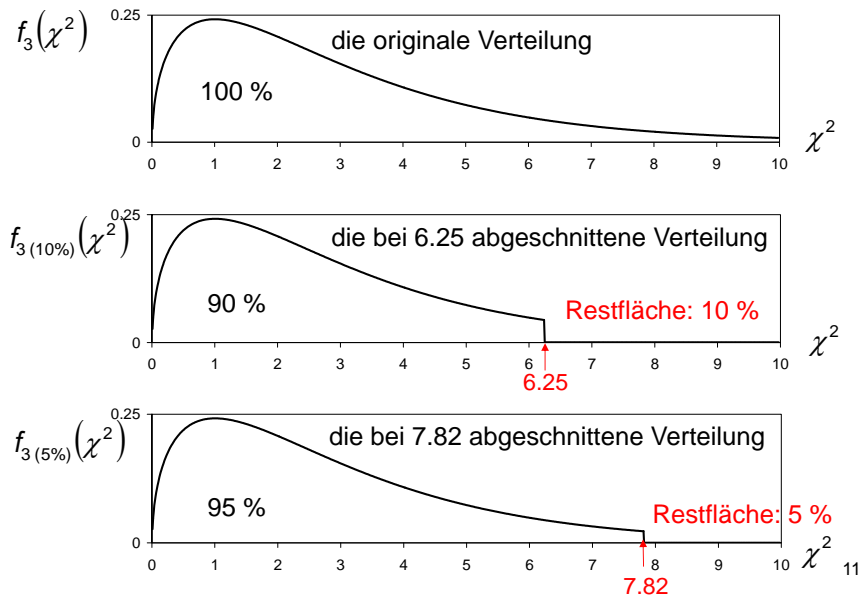
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

9

Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 1



Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 3



Freiheits- grad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	26,13

Beispiel 1 Die Bedingung des Tests:
das Produkt der zwei kleinsten
Teilsummen soll grösser sein als $5n$

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

$$76 \cdot 97 = 7372 > 5 \cdot 200 = 1000$$

Man darf den Chi-
Quadrat-Test anwenden

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

Es gibt einen
Zusammenhang zw.
dem Geschlecht
und der
Brillenträgerschaft
(Männer tragen
Brille öfter)

13

	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
Freiheits- grad (FG)	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

$$10.54 > \chi^2_{\text{krit}} = 6.63 \quad H_0 \text{ ist falsch}$$

mit einem Fehler von erster Art < 0.01

14

	A	B	C	D
1	Empirische Werte			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	=SUMME(B3:C3)
4	Mann	48	49	=SUMME(B4:C4)
5		=SUMME(B3:B4)	=SUMME(C3:C4)	=SUMME(B5:C5)
6				
7	Ewartete Werte			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	=D3*B\$5/\$D\$5	=D3*C\$5/\$D\$5	=SUMME(B9:C9)
10	Mann	=D4*B\$5/\$D\$5	=D4*C\$5/\$D\$5	=SUMME(B10:C10)
11		=SUMME(B9:B10)	=SUMME(C9:C10)	=SUMME(B11:C11)
12				
13			p: =CHITEST(B3:C4,B9:C10)	
14			Chi²-Wert = CHINV(D13,1)	

	A	B	C	D
1	Empirische Werte			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	103
4	Mann	48	49	97
5		76	124	200
6				
7	Ewartete Werte			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	39.140	63.860	103
10	Mann	36.860	60.140	97
11		76	124	200
12				
13			p: 0.0012	
14			Chi²-Wert: 10.5442606	

**Kalkulation
mit Excel**

15

Beispiel 2



	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	1	3	4
Mann	5	3	8
	6	6	12



$$4 \cdot 6 = 24 < 5 \cdot 12 = 60$$

Dürfen wir in diesem
Fall den Chi-Quadrat-
Test nicht anwenden.



Erhöhung des Umfanges der Stichprobe



	mit	ohne	Total
F	1	3	4
M	5	3	8
	6	6	12

12 → 200

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Frauen

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Männer

es gibt eine Vermutung, aber
der Nachweis geht nicht

	mit	ohne	Total
F	28	75	103
M	48	49	97
	76	124	200

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{28}{75} = 0.37$$

$$\frac{n_{\text{mit}}}{n_{\text{ohne}}} = \frac{48}{49} = 0.98$$

n vergrößert sich (12 → 200):
der Nachweis geht

Beispiel 3

H_0 : die Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nichtrauchern ist identisch, d.h. $\chi^2 = 0$.

H_1 : die beiden Häufigkeiten unterscheiden sich, also ist $\chi^2 \neq 0$.

In der Tabelle sind die Häufigkeiten der zwei Kollektive aus der Stichprobe einer Lungenförsorge dargestellt.

Da $23 \cdot 27 = 621 > 5 \cdot 61 = 305$,
kann der Test durchgeführt
werden.

$$\chi^2_M = \frac{61 \cdot (14 \cdot 25 - 9 \cdot 13)^2}{23 \cdot 38 \cdot 34 \cdot 27} = 4.13$$

Es ist zu sehen, dass $\chi^2_M \neq 0$
ist, aber ist der Unterschied
auch signifikant (oder nur
zufällig)?

	Lungen krebs	kein Lungen krebs	
Raucher	14	13	27
Nichtraucher	9	25	34
	23	38	61

Sei das Signifikanzniveau: 5%.
Der Freiheitsgrad (2x2 Tabelle) ist: 1.

$4.13 > \chi^2_{\text{krit}} = 3.84 \Rightarrow H_0$ ist falsch

Danach ist der Unterschied in der Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nicht-rauchern signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%).

18

Pr.Buch 2.b.29 (Bemerkung 15)

Beispiel 4 (Pr. Buch, R.103.) Über eine erfolgreiche operative Korrektur einer bestimmten Augenkrankheit (ischaemische optische Neuropathie vom nicht-arterialen Typ) wurde im Jahre 1989 eine Veröffentlichung ausgegeben. Da in dieser Krankheit früher keinerlei wirksame Behandlungsmethode bekannt war, wurde dieser Eingriff verbreitet angewendet. Kürzlich erschienen jedoch Berichte auch von erfolglosen Eingriffen, daher hat man 244 solche Kranken in 25 klinischen Zentren statistisch erfasst, von denen bei 119 Personen die Operation durchgeführt wurde, bei 125 Kranken jedoch nicht. Die Beobachtungen in tabellarischer Form:

empirische Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	39	53	92
nicht verbessert	52	56	108
verschlechtert	28	16	44
insgesamt	119	125	244

erwartete Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	45	47	92
nicht verbessert	53	55	108
verschlechtert	21	23	44
insgesamt	119	125	244

Es ist mit statistischen Methoden zu prüfen, ob die Anzahl der Besserungen ohne Operation tatsächlich höher war? H_0 : keine Differenz

$$\chi^2 = (39-44.87)^2/44.87 + (53-47.13)^2/47.13 + (52-52.67)^2/52.67 + (56-55.33)^2/55.33 + (28-21.46)^2/21.46 + (16-22.54)^2/22.54 = 5.407$$

Weil $5.407 < 5.991 = \chi^2_{\text{krit}, FG=2}$, ablehnen wir die H_0 nicht.

19

2. Anpassungstest

die beobachtete Messwerte
passen zu einer Verteilung an?

Prüfung der Verteilungen (goodness of fit)

(reiner) Anpassungstest

(Vergleich der beobachteten
Häufigkeiten mit Häufigkeiten einer
bekannten Verteilung)

auf
Gleichverteilung

auf weitere
Verteilungen
mit bekannten
Parameter

Würfelversuch

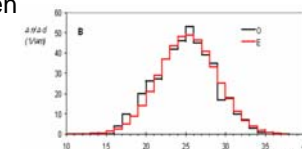
1	2	3	4	5	6
21	14	14	19	16	16

Anpassungstest mit Parameterschätzung

(Parameter der Verteilung sind aus
der beobachteten Häufigkeiten
geschätzt)

Normalitätstest

auf weitere
Verteilungen



20

Anpassungstest auf Gleichverteilung

Die Kontingenztafel mit beobachteten Häufigkeiten (O) wird mit der erwarteten Häufigkeiten ergänzt (E).

H_0 : Der Würfel ist regelmässig, die 6 mögliche Ereignisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit: $100/6 = 16.7$

	1	2	3	4	5	6	Summe
O	21	14	14	19	16	16	100
E	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	100

$$\chi^2 = (21-16.7)^2/16.7 + (14-16.7)^2/16.7 + (14-16.7)^2/16.7 + (19-16.7)^2/16.7 + (16-16.7)^2/16.7 + (16-16.7)^2/16.7 = 2.36 < 11.07 = \chi^2_{\text{krit}, FG=5}$$

H_0 wird angenommen. Der Würfel ist regelmässig.

21

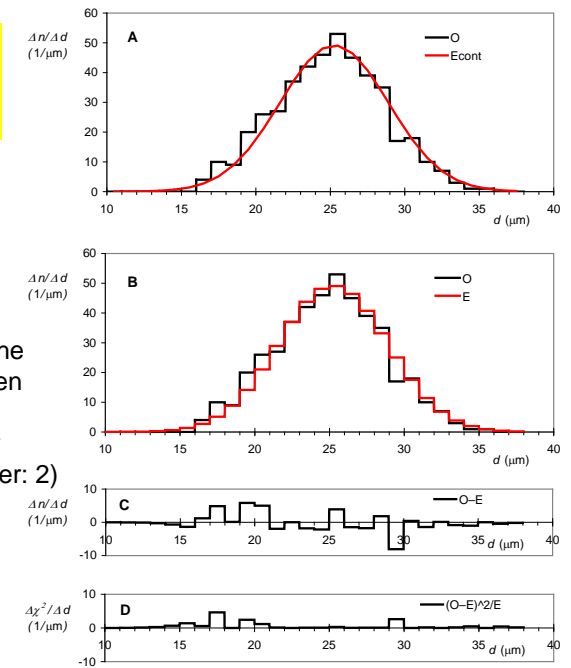
Prüfung der Verteilungen, Normalverteilung

H_0 : der längere Durchmesser der Froscherythrozyten ist normalverteilt

Man schätzt die theoretische Werte der Verteilung mit den Stichprobenparametern.
 $FG = n - m - 1$, m : Anzahl der geschätzten Parameter (hier: 2)

$$p = 0.9 > 0.05$$

H_0 : ist richtig



3. Homogenitätstest

Prüfung der Homogenität (test for homogeneity)

H_0 : die Biophysik Kolloquiumsnote*-Verteilung in der weiblichen Gruppe hat die gleiche Verteilung wie in der männlichen (die Verteilungen sind homogene Verteilungen)

Kolloquiums-note , Biophysik	Frau	Mann		Kolloquiums-note , Biophysik	Frau	Mann	
5	22	12	34	5	16.5	17.5	34
4	26	31	57	4	27.6	29.4	57
3	27	38	65	3	31.5	33.5	65
2	23	25	48	2	23.3	24.7	48
1	14	13	24	1	13.1	13.9	24
	112	119	231		112	119	231

empirische (observed) Kreuztabelle

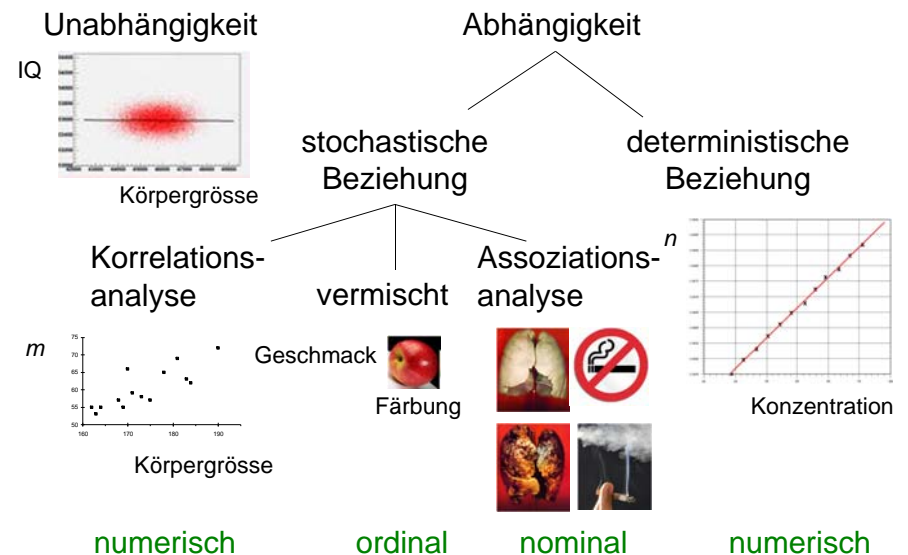
erwartete (expected) Kreuztabelle

$$p = 0.27 > 0.05 \Rightarrow H_0: \text{ist richtig}$$

23

*Daten: 2009 Herbst Semester

Arten von Abhängigkeitsbeziehungen



24