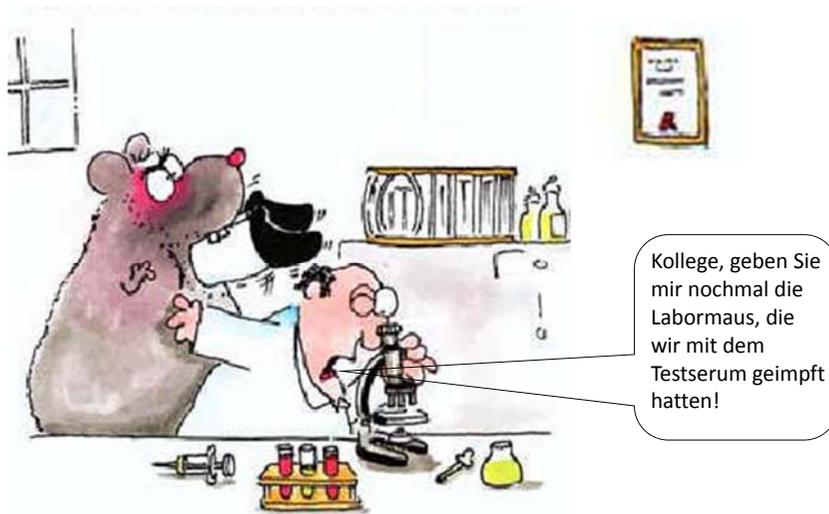


Hypothesenprüfungen. t-Tests



Schätzungen und Hypothesenprüfungen

Schätzungen

Wie gross ist eine Grösse?

Punktschätzungen

ein Wert ist gegeben und nichts über die Sicherheit

Parameter der Stichprobe

Parameter der Population

$$\bar{x} \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$s \rightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

Intervallschätzungen

95 % Konfidenzintervall für den Erwartungswert:

$$\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}$$

ein Intervall ist mit einem Konfidenzniveau gegeben

(95 %) Referenzintervall:

$$\bar{x} \pm 2s$$

Hypothesenprüfungen

Beantwortung einer Entscheidungsfrage

ja oder nicht mit einem Signifikanzniveau

2

Typische Entscheidungsfragen in der Medizin

- Ist die Therapie erfolgreich?
(Gibt es eine Änderung in der erwarteten Richtung?)
Hat eine Behandlung eine Wirkung?
Verkleinert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?



- Gibt es einen Unterschied zwischen zwei Therapiemethoden?
- Gibt es eine Beziehung zwischen zwei Grössen?

3

Gibt es eine Wirkung einer Behandlung?

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?



(a) $T_2 \neq T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 \neq 0$, z.B.: $T_2 - T_1 = -1.5 \text{ C}$,
 $T_2 - T_1 = -2.1 \text{ C}$,
 $T_2 - T_1 = +0.4 \text{ C}$

...

(b) $T_2 \approx T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 \approx 0$

4

Die Nullhypothese

Es gibt keine Wirkung der Behandlung.

Die Wirkung der Behandlung ist Null (Nullhypothese, H_0).

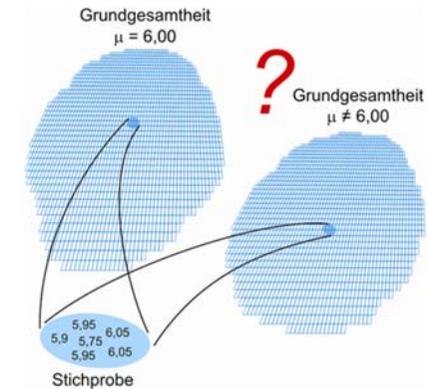
Das Fiebermittel verändert die Körpertemperatur nicht.

Wir müssen die Temperaturen in einer Gruppe (Stichprobe) messen.

Wenn die Nullhypothese richtig ist, müssen die Temperatur-differenzen um 0 streuen. Alle Abweichungen von Null sind zufällig.

5

Die möglichen Grundgesamtheiten der Stichprobenentnahme



Wenn die Nullhypothese richtig ist, müssen die Daten der Stichprobe um den theoretischen Wert streuen. Alle Abweichungen von dem theoretischen Wert sind zufällig.

Pr.Buch Abb. 17

6

Die Alternativhypothese

Es gibt eine Wirkung der Behandlung.

Die Wirkung der Behandlung ist nicht Null (Alternativhypothese, H_1).

Das Fiebermittel verändert die Körpertemperatur.

Man unterscheidet als **Gegensatzpaar** Nullhypothese und Alternativhypothese.

Entweder H_0 oder H_1 ist richtig.

Nehmen wir an, dass H_0 richtig ist!

Wenn Ergebnisse mit dieser Voraussetzung nicht passen: ablehnen wir H_0 richtig H_1 ist richtig



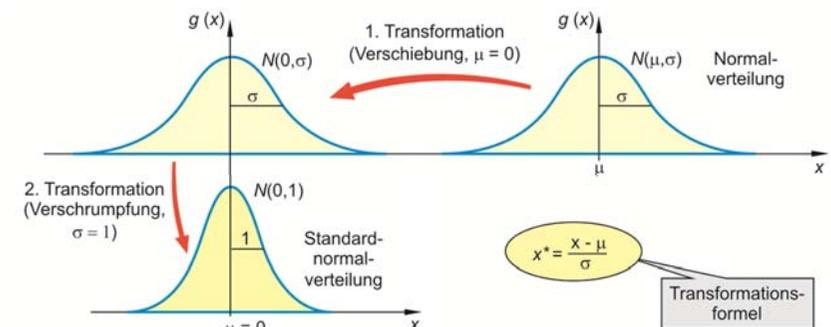
7

Transformation einer Normalverteilung mit allgemeiner Lage und Breite in eine Standardnormalverteilung

Mit welcher Verteilung sollen wir unsere Stichprobe vergleichen?

Die Standardnormalverteilung hat eine ausgezeichnete Rolle zwischen der Normalverteilungen.

Alle Normalverteilungen können in Standardnormalverteilung transformiert werden.



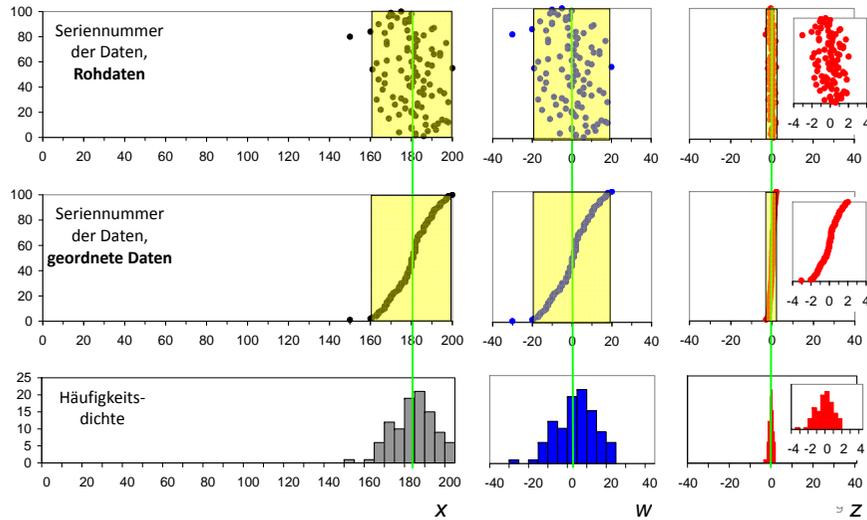
Pr.Buch Abb. 18

Transformation von Daten (Variable Transformation)

$$x \quad W = x - \bar{x} \quad Z = \frac{W}{s} = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$\bar{x} = 180 \text{ cm} \quad \bar{w} = 0 \text{ cm} \quad \bar{z} = 0 \text{ cm}$$

$$s_x = 10 \text{ cm} \quad s_w = 10 \text{ cm} \quad s_z = 1 \text{ cm}$$



Einstichproben t-Test

Variable x $W = x - \mu$ $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Verteilung $N(\mu, \sigma)$ $N(0, \sigma)$ $N(0, 1)$

Wenn die originale Variable x zu einer **Normalverteilung** mit Parameter μ und σ gehört, dann gehört die transformierte Variable z zu der Standardnormalverteilung.

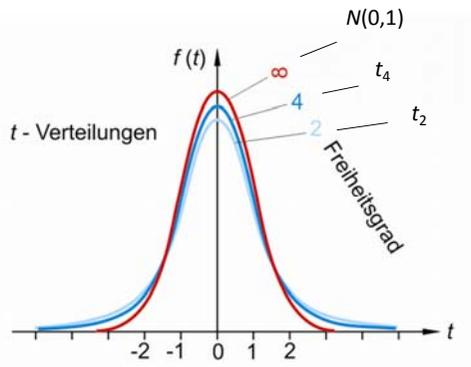
Wenn H_0 richtig ist, kennen wir den Wert von μ , aber σ nicht.

Die durchgeführte Transformation:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}$$

Variable x $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ $t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}$

Verteilung $N(\mu, \sigma)$ $N(0, 1)$ t_{n-1}

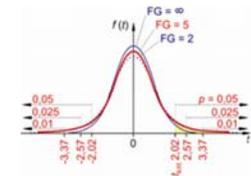


1. STATISTISCHE TABELLEN

t-Verteilungsfamilie

t-VERTEILUNG

Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499



„Glockenkurven“

Je grösser ist der Freiheitsgrad, desto schmaler ist die Kurve.

25	0,236	0,684	1,516	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,255	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,66
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,250	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

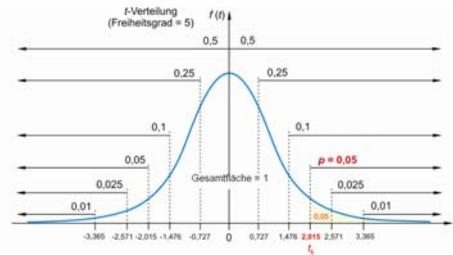
$$t_{\infty} \equiv N(0, 1)$$



Kann der (aus der Stichprobe kalkulierte) t -Wert der t -Verteilung (mit entsprechendem Freiheitsgrad) gehören?

Alle Werte können zu der t -Verteilung gehören.
Aber: Wenn der t -Wert gross ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit klein.

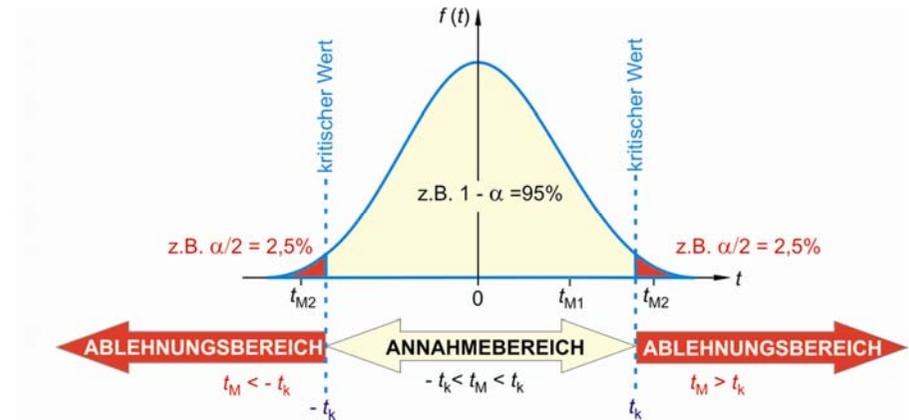
Deswegen benützen wir nicht die gesamte t -Verteilung, sondern eine abgestuzte t -Verteilung!



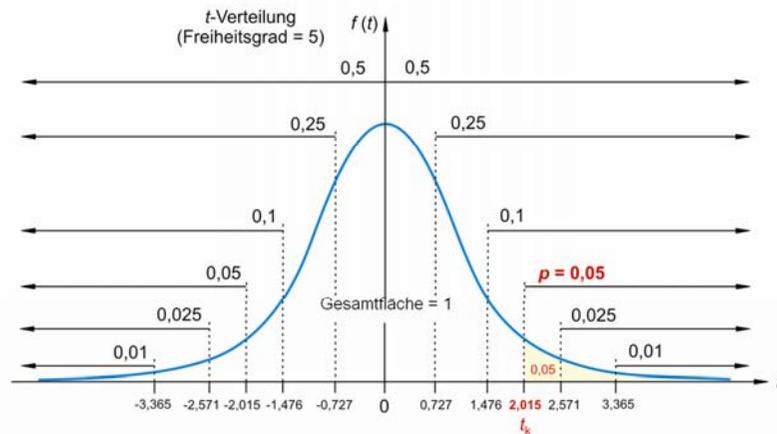
akzeptierbare Irrtumswahrscheinlichkeit in der Medizin: kleiner oder gleich 5 %

Zweiseitiger t -Test

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?



t -Verteilungskurve mit Freiheitsgrad 5. Die kritischen Werte und Wahrscheinlichkeiten des einseitigen t -tests



H_0 abgelehnt, obwohl richtig

ENTSCHEIDUNG AUF DIE WAHRE SITUATION	STICHPROBEN BASIS	
	Nullhypothese ist angenommen	Nullhypothese ist abgelehnt
Nullhypothese ist wahr	<p>RICHTIGE ENTSCHEIDUNG</p> <p>t-Verteilung</p> <p>$1-\alpha$</p> <p>t_k kritischer Wert</p>	<p>FEHL-ENTSCHEIDUNG (Fehler 1. Art)</p> <p>t-Verteilung</p> <p>$1-\alpha$</p> <p>t_k kritischer Wert</p> <p>Fehler 1. Art (bekannt)</p>
Nullhypothese ist falsch	<p>FEHL-ENTSCHEIDUNG (Fehler 2. Art)</p> <p>unbekannte Verteilung</p> <p>$1-\beta$</p> <p>t_k</p> <p>Fehler 2. Art (unbekannt)</p>	<p>RICHTIGE ENTSCHEIDUNG</p> <p>unbekannte Verteilung</p> <p>$1-\beta$</p> <p>t_k</p>

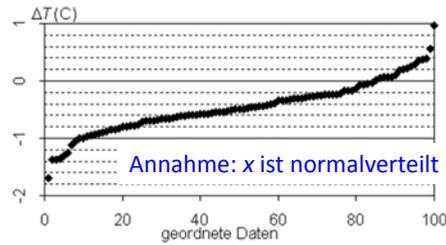
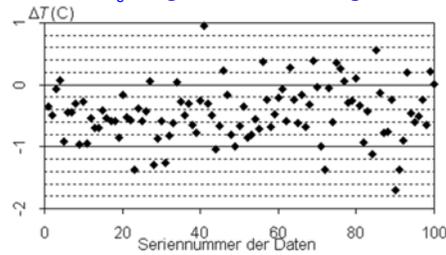
H_0 angenommen, obwohl falsch

x = Temperaturdifferenzen

-0.35 -0.52 0.96 -0.07 -0.34
 -0.50 -0.57 -0.31 -0.58 -0.94
 -0.07 -1.37 -0.49 0.28 -0.43
 0.07 -0.39 -1.05 -0.24 -1.12
 -0.92 -0.58 -0.66 -0.62 0.56
 -0.44 -0.43 0.23 -0.16 -0.13
 -0.45 0.06 -0.16 -0.69 -0.78
 -0.30 -1.30 -0.80 -0.31 -0.77
 -0.97 -0.88 -1.00 0.38 -0.24
 -0.28 -0.58 -0.67 -0.04 -1.69
 -0.95 -1.26 -0.34 -1.00 -1.37
 -0.55 -0.82 -0.86 -1.36 -0.90
 -0.70 -0.61 -0.80 -0.05 0.19
 -0.70 0.05 -0.55 -0.60 -0.46
 -0.41 -0.27 -0.71 0.36 -0.61
 -0.54 -0.50 0.38 0.26 -0.50
 -0.59 -0.31 -0.24 0.06 -0.24
 -0.59 -0.65 -0.68 -0.29 -0.65
 -0.85 -0.77 -0.47 -0.25 0.21
 -0.17 -0.26 -0.22 0.10 0.01

Beispiel: Einstichproben t-Test

Verändert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?
 H_0 : es gibt keine Wirkung



Annahme: x ist normalverteilt

Kalkulation:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{x}}}, \quad \mu = 0$$

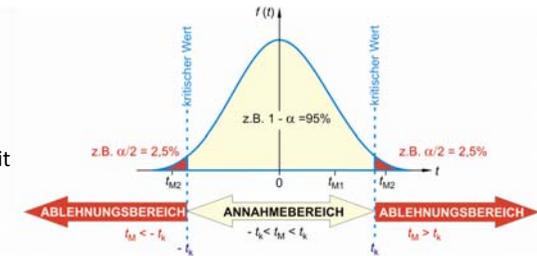
$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$$

zweiseitiger Test

$$|t| > t_{krit} \rightarrow$$

wir ablehnen die Nullhypothese mit einem Signifikanzniveau von 5%

Anzahl der Daten	n	100
Durchschnitt	avg	-0.457
Standardabweichung	stdev	0.454
Standardfehler	sem	0.045
t-Wert	t	-10.056
Freiheitsgrad	df	99
max. zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit	α	0.05
kritischer t-Wert	t_{krit}	1.984



$$|t| > t_{krit} \rightarrow$$

Das Fiebermittel signifikant verändert (verkleinert) die Körpertemperatur ($p \leq 0.05$).

Im Klammer steht die Irrtumswahrscheinlichkeit. Es gibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese richtig ist. In diesem Fall unsere Klassifikation ist falsch (Fehler 1. Art).

Die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
60	0,255	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,66
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,250	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

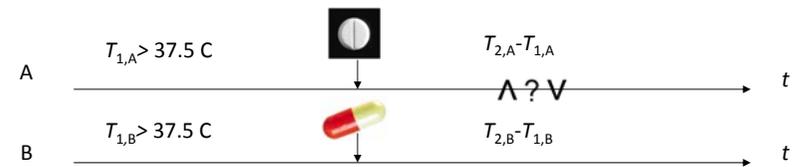
weitere Bemerkungen:

$$|t| = 10.056 > 2.66$$

$p \leq 0.01$ (zweiseitiger Test)

Typische Entscheidungsfragen in der Medizin

- Ist die Therapie erfolgreich?
(Gibt es eine Änderung in der erwarteten Richtung?)
Hat eine Behandlung eine Wirkung?
Verkleinert ein Fiebermittel die Körpertemperatur?
- Gibt es einen Unterschied zwischen zwei Therapiemethoden?



- Gibt es eine Beziehung zwischen zwei Größen?

Einstichproben t-Test

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \text{ wo}$$

$$s = \sqrt{\frac{Q}{n-1}}$$

Zweistichproben t-Test

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S^*} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \text{ wo}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Vergleichen wir die Formeln!

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}}{s \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

Einstichproben

$$t_{n_1+n_2-1} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Zweistichproben

Wirkung?:

Effekt der 5 Kniebeugen auf die Pulsfrequenz

Einstichproben t-Test

n: Pulsfrequenz (1/30s), 1: vor, 2 nach, d: Differenz

H_0 : keine Wirkung

			Zweistichproben t-Test bei abhängigen Stichproben (Paarvergleichstest)		
	n1	n2	dn		
m	36	37	1		
m	33	35	2		
m	34	37	3		
m	33	37	4		
m	34	38	4		
m	37	41	4		
m	37	46	9		
w	30	29	-1		
w	45	49	4		
w	50	55	5		
w	35	40	5		
w	28	37	9		
w	39	48	9		
w	49	63	14		
				Variable 1	Variable 2
Mittelwert				37.142857	42.285714
Varianz				43.516484	80.681319
Beobachtungen				14	14
Pearson Korrelation				0.9196855	
Hypothetische Differenz der Mittelwerte				0	
Freiheitsgrade (df)				13	
t-Statistik				-4.9342498	←
P(T<t) einseitig				0.0001365	
Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test				1.7709334	
P(T<t) zweiseitig				0.000273	
Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test				2.1603687	←

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,05)} = 2.160 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p <= 0.05)$$

(p = 0.000273)

Zweistichproben t-Test

m: männlich, w: weiblich

Gibt es einen Unterschied zwischen zwei (Therapie)methoden?

			Zweistichproben t-Test unter der Annahme gleicher Varianzen		
	n1	n2	dn		
m	36	37	1		
m	33	35	2		
m	34	37	3		
m	33	37	4		
m	34	38	4		
m	37	41	4		
m	37	46	9		
w	30	29	-1		
w	45	49	4		
w	50	55	5		
w	35	40	5		
w	28	37	9		
w	39	48	9		
w	49	63	14		
				Variable 1	Variable 2
Mittelwert				3.8571429	6.4285714
Varianz				6.4761905	22.619048
Beobachtungen				7	7
Gepoolte Varianz				14.547619	
Hypothetische Differenz der Mittelwerte				0	
Freiheitsgrade (df)				12	
t-Statistik				-1.261283	←
P(T<t) einseitig				0.1155878	
Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test				1.7822875	
P(T<t) zweiseitig				0.2311755	←
Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test				2.1788128	

$$|t| = 1.261 < t_{12, \text{krit}(0,05)} = 2.179$$

⇒ H_0 ist richtig

			Zweistichproben t-Test bei abhängigen Stichproben (Paarvergleichstest)		
	n1	n2	dn		
m	36	37	1		
m	33	35	2		
m	34	37	3		
m	33	37	4		
m	34	38	4		
m	37	41	4		
m	37	46	9		
w	30	29	-1		
w	45	49	4		
w	50	55	5		
w	35	40	5		
w	28	37	9		
w	39	48	9		
w	49	63	14		
				Variable 1	Variable 2
Mittelwert				3.8571429	6.4285714
Varianz				6.4761905	22.619048
Beobachtungen				7	7
Gepoolte Varianz				14.547619	
Hypothetische Differenz der Mittelwerte				0	
Freiheitsgrade (df)				12	
t-Statistik				-1.261283	
P(T<t) einseitig				0.1155878	
Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test				1.7822875	
P(T<t) zweiseitig				0.2311755	
Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test				2.1788128	
			Zweistichproben t-Test unter der Annahme gleicher Varianzen		
				Variable 1	Variable 2
Mittelwert				3.8571429	6.4285714
Varianz				6.4761905	22.619048
Beobachtungen				7	7
Gepoolte Varianz				14.547619	
Hypothetische Differenz der Mittelwerte				0	
Freiheitsgrade (df)				12	
t-Statistik				-1.261283	
P(T<t) einseitig				0.1155878	
Kritischer t-Wert bei einseitigem t-Test				1.7822875	
P(T<t) zweiseitig				0.2311755	
Kritischer t-Wert bei zweiseitigem t-Test				2.1788128	

H_0 : keine Wirkung

H_0 ist falsch

H_0 : keine Differenz zwischen der Wirkungen

H_0 ist richtig

Freiheitsgrad (FG)	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
	p (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947

Einstichproben t-Test

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,05)} = 2.160 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p < 0.05)$$

$$|t| = 4.934 > t_{13, \text{krit}(0,01)} = 3.012 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p < 0.01)$$

$$|t| = 4.934 \geq t_{13, \text{krit}(0.00027)} = 4.934 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch (} p \leq 0.00027)$$

5 Kniebeugen verursachen Veränderung der Pulsfrequenzen mit einem Signifikanzniveau von 5 % (sogar: 1 %, ..., 0.027%)

Zweistichproben t-Test

$$|t| = 1.261 < t_{12, \text{krit}(0,05)} = 2.179 \quad H_0 \text{ ist richtig}$$

Es gibt keine signifikante Differenz zwischen der Pulsfrequenzen in der Männer- und Frauengruppen nach 5 Kniebeugen.