



SEMMELWEIS EGYETEM

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet,
Nanokémiai Kutatócsoport



TRANSPORTFOLYAMATOK II biológiai rendszerekben

Zrínyi Miklós

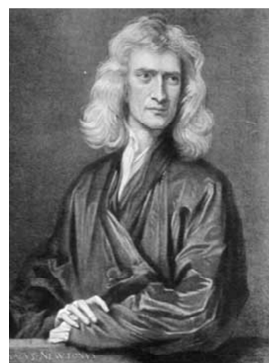
egyetemi tanár, az MTA rendes tagja
mikloszrinyi@gmail.com

2017



A különböző anyagi rendszerek folyásával
foglalkozó tudományt 1928-ban **Bingham**
javaslatára nevezték el **reológiának**.

(Rheos logos = folyástan)



Sir Isac Newton (1642-1727)

Konduktív transzportfolyamatok egységes leírása

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	

Fick

Fourier

Newton

Laplace operátor: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ha egy testre **erő** hat

- hely**változás
- alak**változás

DEFORMÁCIÓ

rugalmasság

viszkózus

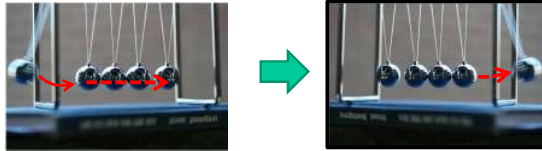


Fluidumok áramlása

Fluid fázis: a folyadék és a gáz halmazállapot összefoglaló neve,
amely arra utal, hogy az anyagok mindkét állapotban viszonylag
könnyen változtatják alakjukat, könnyen folynak.

REOLÓGIA

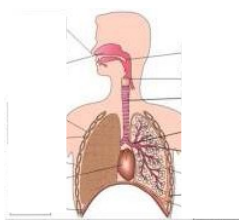
(konduktív impulzustranszport)



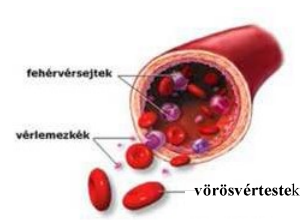
(Rheos logos = áramlástan)



Légzés



Vérkeringés



A térfogatáram hajtóereje: a nyomáskülönbség



$$1 \text{ Hgmm} = 133,32 \text{ Pa}$$

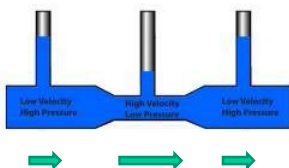
$$1 \text{ atm} = 735,55 \text{ Hgmm}$$

	P/Hgmm
arteriás (szisztolés)	100 - 140
arteriás (diasztolés)	60 - 90
kapilláris az artéria végénél	30

Alapfogalmak

Folyás

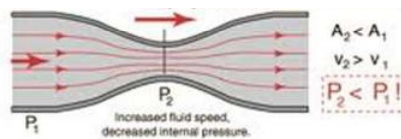
- lamináris,
- turbulens,
- összenyomható,
- összenyomhatatlan,
- „száraz”,
- viszkózus,
- állandó,
- pulzáló,
- rotáló.



Daniell Bernoulli
1700-1782

Bernoulli egyenlet

$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = konst.$$

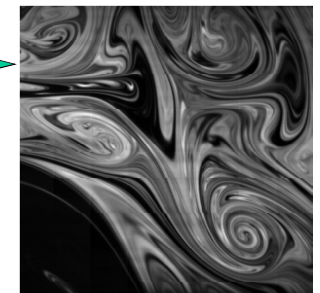


$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$$

Az áramlás típusai



turbulens



á
t
m
e
n
e
t

lamináris

$$R_e = \frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}} \left. \vphantom{\frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}}} \right\} \text{erők}$$

$$R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}$$

v : átlagos áramlási sebesség

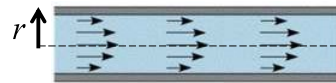
ρ : folyadék sűrűsége

η : viszkozitás

d : átmérő



Osborne Reynolds
1842-1912

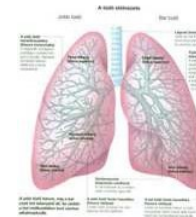


ha $R_e < 2100$

Lamináris áramlás

Megjegyzés: ha átmérő helyett sugarat használunk, akkor $Re=1150$

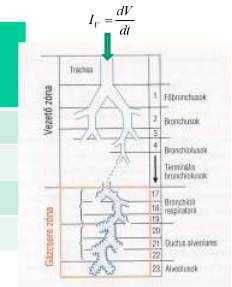
Levegő áramlása a tüdőben



23 generáció a
légsövek
átmérőjében

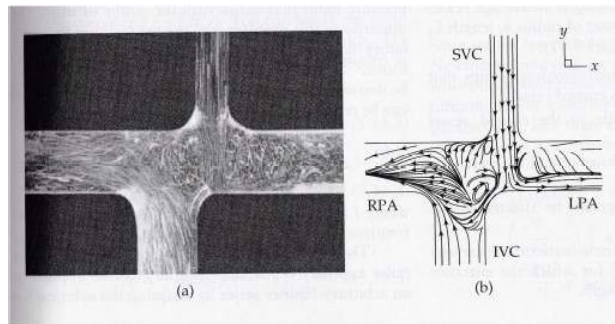
Normál légzés 12/perc
Heves légzés 30/perc

átmérő (cm)	v (cm/s)	Re	v (cm/s)	Re
1,8	197	2325	790	9324
0,56	250	921	1002	3684
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127



$$\frac{dV_{\text{lev.}}}{dt} \approx 6 \text{ L/min} \rightarrow O_2 \sim 2 \text{ kg/nap}$$

Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légsövekben.



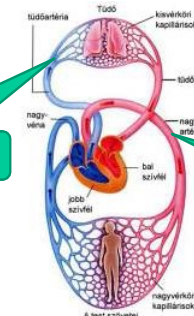
Elágazásoknál és szűkületeknél könnyen kialakulhat turbulencia!

A vérkeringés

Impulzus, anyag és energia transport

A **kisvérkör**, amelynek feladata a szívből a tüdőbe eljuttatni az oxigénben szegény és széndioxidban dús vért és a tüdőből a szívbe szállítani az oxigénben dús vért.

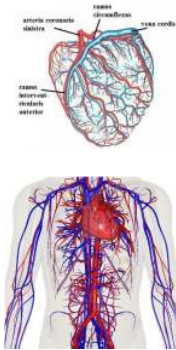
A **nagyvérkör**, amely a szívből a szervekhez juttatja az oxigénben dús és onnan szállítja el az „elhasznált” vért együttesen alkotja a vérkeringést.



A gázcserét végzi el

Az oxigénnel dúsult vért juttatja a szövetekbe.

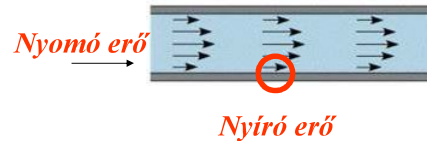
Vér áramlása a szív- és érrendszerben



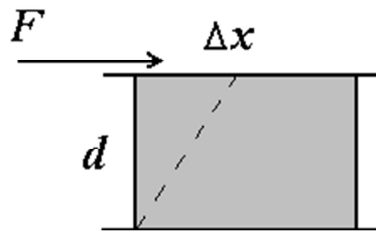
erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	4500	20	750
↓ aorta	1,3	105	3400	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	10^{-6}

A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris**. Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

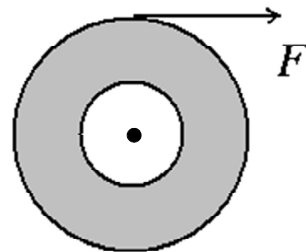
Alapfogalmak:



Nyírás: tangenciálisan ható (**nyíró**)erő (F) vált ki deformációt.

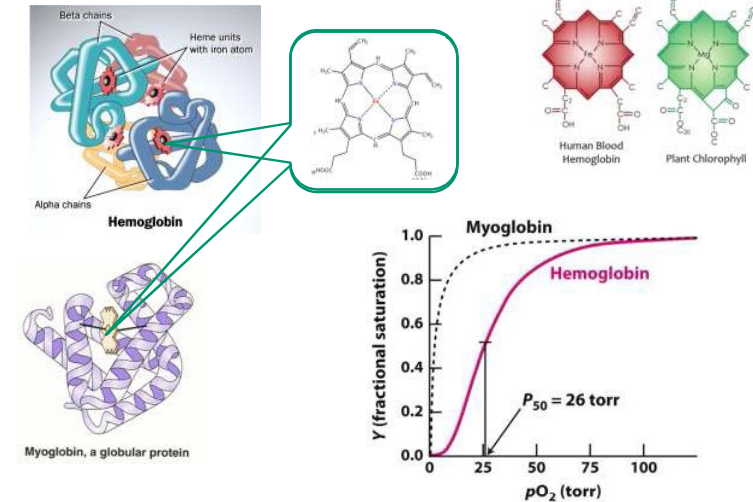


Tiszta nyírás



Rotációs nyírás

Az oxigén megkötése a hemoglobinnal kooperatív folyamat



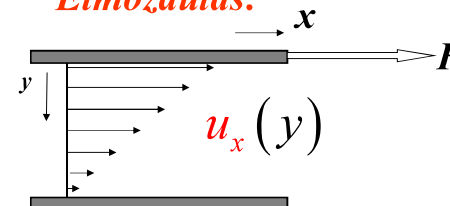
Alapfogalmak:

Nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A_S}$$



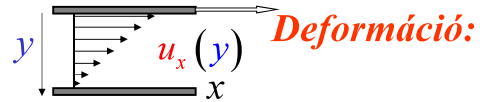
Elmozdulás:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x(y)}{dy}$$

Alapfogalmak:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x}{dy}$$

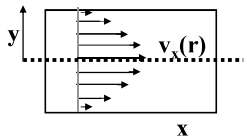
Deformáció sebesség:

$$\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{du_x}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{du_x}{dt} \right) = \frac{dv_x}{dy}$$

A **deformáció sebesség** megegyezik a **sebesség gradienssel**!

A reológia alapösszefüggése. **Newton egyenlet**



$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

Nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$



Sebesség gradiens:

$$G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}$$

Alapfogalmak:

$$j_i = -\eta \nabla v \quad \xrightarrow{j_i = -\tau} \quad \tau = \eta \nabla v$$

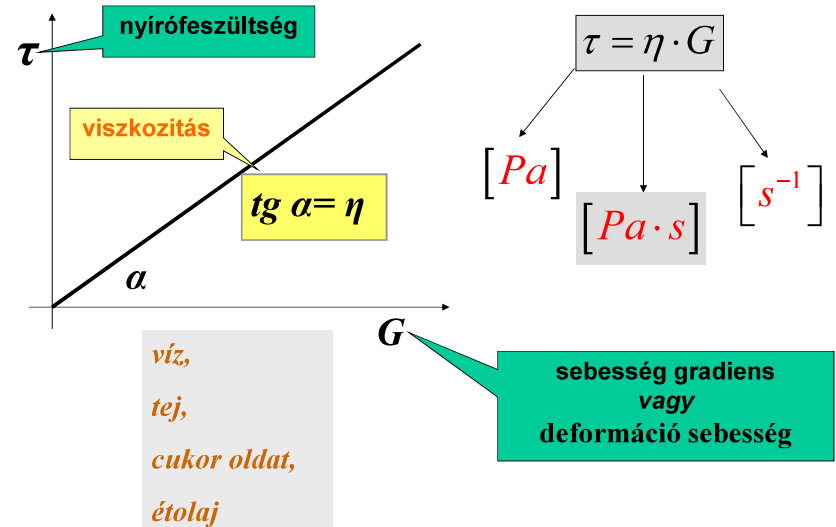
Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

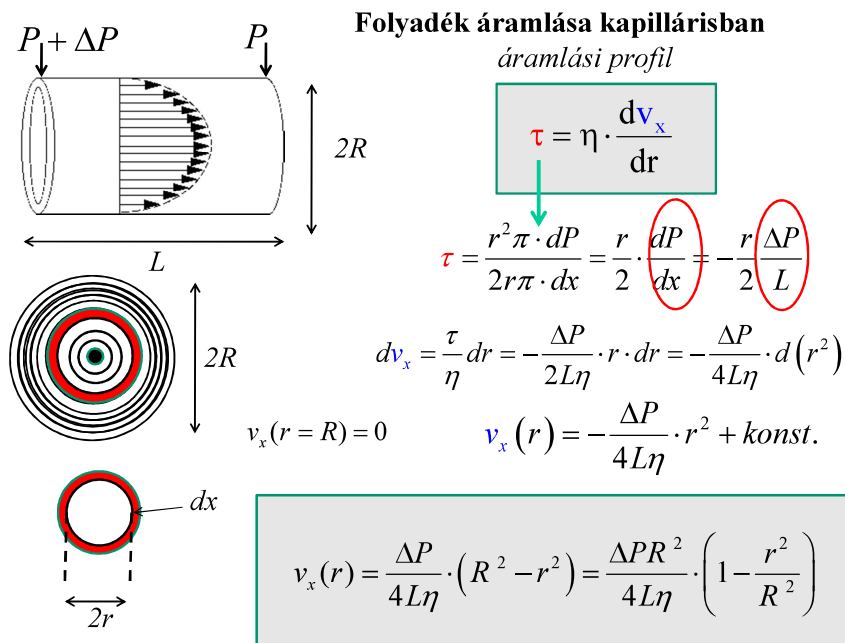
$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Newton egyenlet

viszkozitás

Newtoni folyadék folyásgörbéje





Folyadék áramlása kapillárisban
térfogatáram

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \quad v_x(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

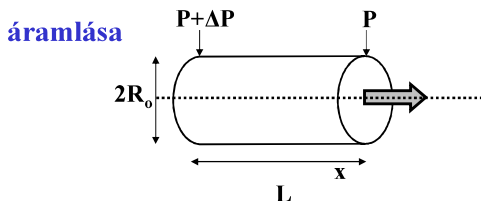
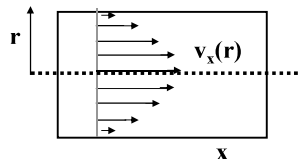
$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr \quad I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot dr$$

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$\overline{v_x} = \frac{I_V}{R_o^2 \pi} = \frac{R_o^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max}$$

Newtoni folyadék lamináris áramlása
(összefoglalás)

Parabolikus sebesség profil

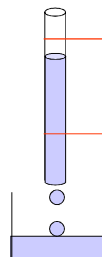


$$v_z(r) = \frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)$$

Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Térfogatáram



$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = const$ Bernoulli törvény

Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt
pascal secundum (Pa·s))

Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869)
tisztelőre használták a

1 poise = 100 centipoise = 0.1 Pa·s.

Az orvosi gyakorlatban ma is gyakran a cP (centi-poise)-t
használják

Fluiditás a viszkozitás reciproka

Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a
sűrűség hányadosa ($m^2 s^{-1}$) vagy *stoke (St)*.

Néhány folyadék viszkozitása

anyag	T/ °C	viszkozitás /mPa·s
víz	20	1,0
glicerín	20	1500
n-pentán	20	0,23

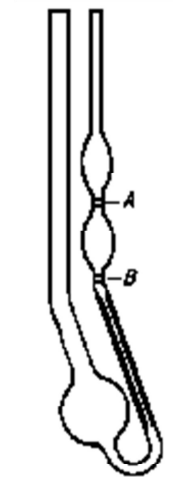
biofolyadék	T/ °C	viszkozitás /mPa·s
vér	37	4 (nem Newtoni !)
vér plazma	37	1,5
kőnny	37	0,73 – 0,97
levegő	18	0,018
liquor	20	1,02

Relatív viszkozitás (η_{rel}).

$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_o} = \frac{t}{t_o}$$

oldat

oldószer



Specifikus viszkozitás (η_{sp})

$$\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$$

Ostwald-féle viszkoziméter

Redukált viszkozitás (η_{red})

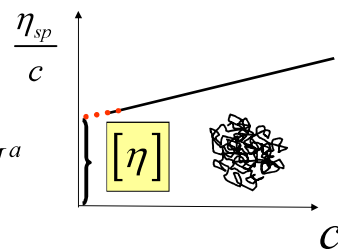
$$\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}$$



Jellemző viszkozitás ($[\eta]$) Ubbelohde féle viszkoziméter

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \eta_{red}$$

$$[\eta] = k \cdot M^a$$

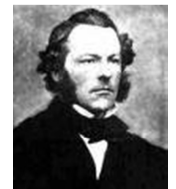


$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$f_s = 4 R^2 \pi \cdot \tau$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{R}$$

$$f_s = 4 R^2 \pi \cdot \eta \cdot \frac{v}{R}$$



George Stokes
1819-1903

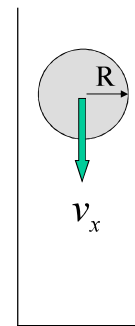
$$f_s = 4 \pi \eta R v_x$$

Stokes törvény:

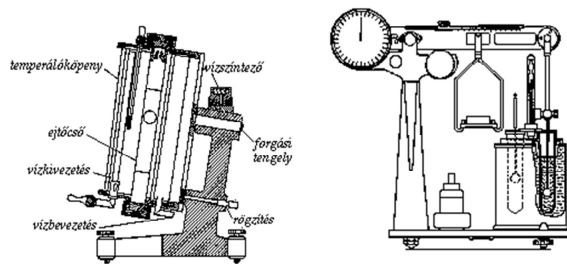
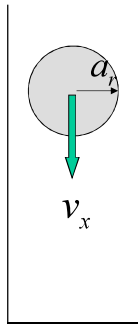
$$f_\eta = 6 \pi \eta R v_x$$

$$f_g = f_\eta$$

$$v_x = \frac{2}{9} \frac{R^2 \Delta \rho g}{\eta}$$

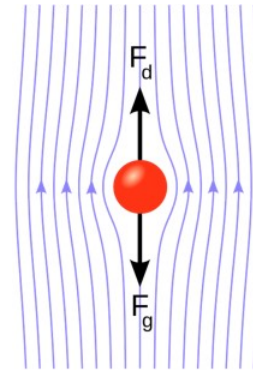


$$f_{\eta} = 6\pi\eta a_r v_x$$

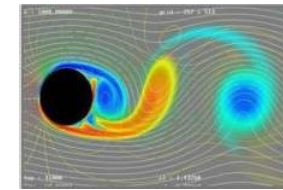


Höppler féle viszkoziméter

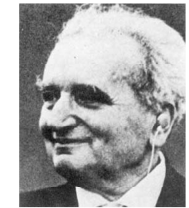
Kármán örvénysor



lamináris
 $Re < 2100$



turbulens
 $Re \gg 2100$



Kármán Tódos
1881-1963

Híg szuszpenziók viszkozitása

Általában newtoni viselkedés

Einstein-egyenlet

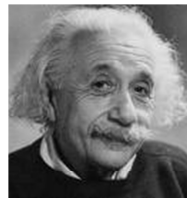


$$[\eta] = 2.5\Phi$$



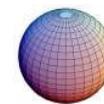
$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$

Térfogati tört



Albert Einstein
1879-1955

Einstein-egyenlet általánosítása:



$$[\eta] = v_a \Phi$$

$$\eta = \eta_o (1 + v_a \Phi)$$

Aszimmetria faktor

$$v_a = \frac{(a/b)^2}{15 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{3}{2} \right]} + \frac{(a/b)^2}{5 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{1}{2} \right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid



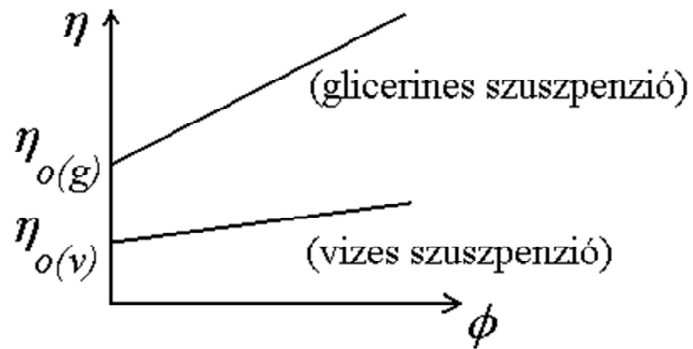
$$v_a = \frac{16(a/b)}{15 \tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid

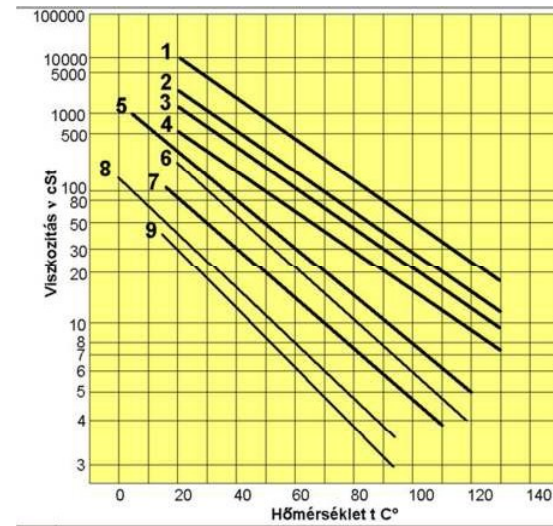


DNS-re: $a/b = 27,8$ $v_a = 65,2$

$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$



A viszkozitás függése a hőmérséklettől:



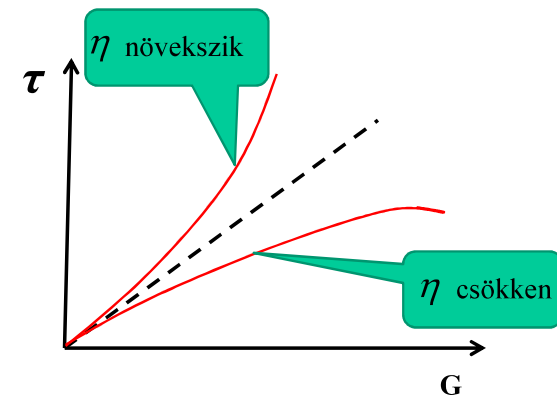
$$\eta(T) = \eta_o \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

Stokes-Einstein törvény:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a_r}$$

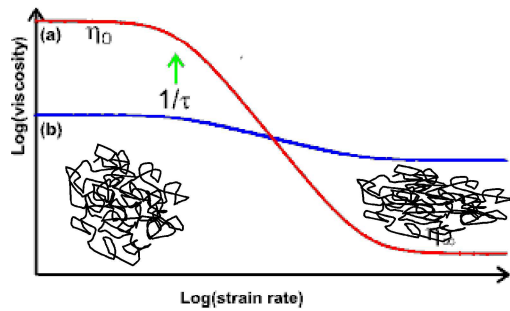
Nem newtoni folyadékok

- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a deformációs hatás mértékétől és idejétől is függ.

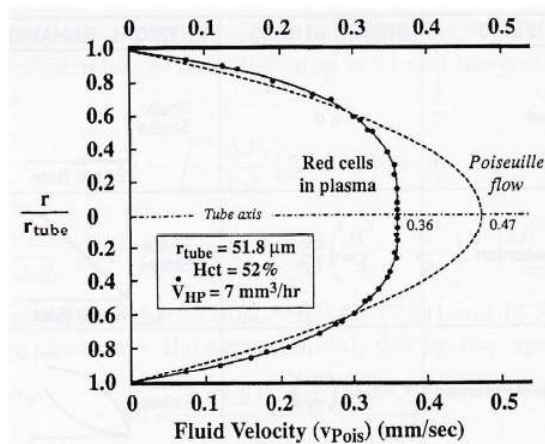


• szerkezeti viszkozitás

Viszkozitás csökken nyírás hatására



polimer oldat
festék
ketchup



Vér áramlása elágazó erekben



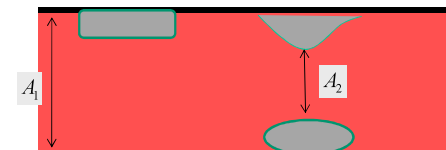
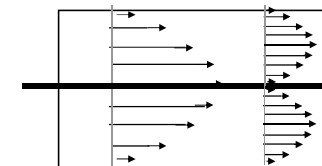
$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta L} \cdot \Delta P = \frac{1}{R_{res}} \cdot \Delta P$$

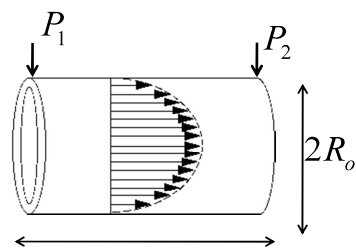
$$R_{res} (soros) = \sum_i R_{res,i}$$

$$\frac{1}{R_{res} (párhuzamos)} = \sum_i \frac{1}{R_{res,i}}$$

érszakasz	átmérő cm	hossz cm	elágazások száma	áramlási seb. cm/s
aorta	2,4	40	1	23
artériák	0,4	15	160	5
kapillárisok	0,0007	0,07	$1,2 \cdot 10^{10}$	0,022
vénák	0,5	15	200	2,5

Parabolikus sebesség profil módosulása





Gázok áramlása kapillárisban

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r \pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \left(\frac{dP}{dx} \right) \neq \frac{r}{2} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$I_v = \frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{dn}{dt} = \frac{RT}{P} I_n$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{8\eta} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx}$$

$$I_n dx = \frac{R_o^4 \pi}{16\eta RT} d(p^2)$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{16L\eta RT} (P_1^2 - P_2^2)$$

A gáz áramlási sebessége nem a nyomások, hanem a nyomásnégyzetek különbségével arányos!

Pennes bio-hő egyenlete

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k_t \nabla T) + c_b w_b (T - T_b) + Q + Q_m$$

Parameter name	Symbol	Tissue	Tumor
Thermal conductivity (W/m)	k	0.42	0.42
Blood perfusion rate (l/s)	ω_b	$18e^{-8}$	$9e^{-6}$
Density (kg/m ³)	ρ_b	920	920
Specific heat of blood (J/kg.K)	c_b	3000	3000
Arterial blood temperature (K)	T_b	310	310
Metabolic heat generation rate(W/ m ³)	Q_{met}	450	29000

Konduktív hővezetés: Fourier törvények

$$j_Q = -k_r \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \alpha T(x) \text{ függvény görbülete } \alpha = \frac{k_r}{\rho \cdot C_p} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

anyag	T/K	$k_r / Wm^{-1}K^{-1}$	α / m^2s^{-1}	$c_p / kJkg^{-1}K^{-1}$
levegő	300	0,025	$2,11 \cdot 10^{-5}$	1,006
víz	300	0,609	$1,5 \cdot 10^{-7}$	4,186
zsír	298	0,21	$0,69 \cdot 10^{-7}$	3,258
vér	298	0,642	$1,76 \cdot 10^{-7}$	3,889
bőr	310	0,442	$1,19 \cdot 10^{-7}$	3,471

$$\frac{\Delta Q_{\text{hővezetés}}}{\Delta t} = -k_T \cdot A_s \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

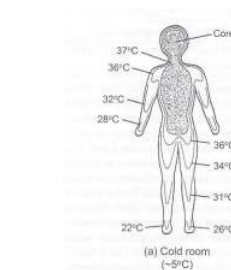
A BELSŐ ENERGIA (HŐ) TRANSZPORTJA

Hol keletkezik a nyugalmi metabolikus hő?

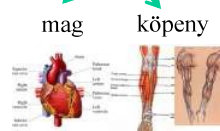
agyvelő	25%
szív	15%
vázizom	25%
hasi zsigerek	25%
vese	6%
bőr	4%

Hol veszik el a metabolikus hő?

$$Q_{\text{vesztés}} = Q_{\text{sugárzó}} + Q_{\text{konvektív}} + Q_{\text{konduktív}} + Q_{\text{párolgási}} + Q_{\text{légzés}}$$



A szervezetben belül a hőmérséklet eloszlás nem homogén.



54-60 %

25 %

7 %

14 %

Testhőmérséklet szabályozás

metabolizmus \longleftrightarrow hővesztés

T=28 C° ♥ fibrilláció

T=30 C° Hőmérséklet szabályozás felborul -

T=33 C° Tudat vesztés

T=37 C°

T=41 C° Központi idegrendszer -

T=42 C° Fehérjék denaturálódnak

↑
testhőmérséklet



Konvektív hővezetés (1)

$$-\frac{1}{A_s} \frac{\Delta Q_{\text{konvektív}}}{\Delta t} = h_c \cdot (T_{\text{bőr}} - T_{\text{levegő}})$$

h_c : egységnyi felületre vonatkozó
konvektív hővezetési tényező
 $W / m^2 C^\circ$

Szél sebessége [m/s]	$h_c [W / m^2 C^\circ]$
0,1	2,6
0,6	6,4
2,0	11,7
4,0	16,6

Szélben: $h_c = 10,45 - v + 10v^{1/2}$ v : áramló levegő sebesség: m/sec
(közelítés)

egységnyi
felület

Hősugárzás



Wien törvény: $R = \varepsilon \sigma T^4$ ε : emisszió

Stefan-Boltzmann konst.: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W / m^2 K^4$

$$-\frac{\Delta Q_{\text{sugárzó}}}{\Delta t} = R \cdot A_s = \varepsilon \sigma T^4 \cdot A_s \quad A_s = 1,85 m^2 \text{ átlagos felület}$$

$\varepsilon \cong 1$ emberi bőr

$$\frac{\Delta Q_{\text{sugárzó}}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{nyereség}} - \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{vesztés}}$$

$$R = \varepsilon \sigma (T_{\text{test}}^4 - T_{\text{környezet}}^4)$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

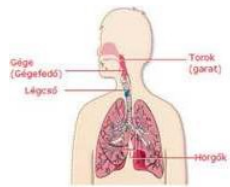
anyag	emisszió
emberi bőr	0,95 – 0,99
fa	0,99
beton	0,95
tégla	0,92



Testen belüli hővezetés (2)

(Test és vér közötti hővezetés)

$$-\frac{1}{A_s} \frac{\Delta Q_{\text{véráram}}}{\Delta t} = h_c \cdot (T_{\text{vér}} - T_{\text{testrész}})$$



Hővesztesség párolgással (1) légzés

Ki- és belégzés térfogata nyugalomban: 500 ml

Ki- és belégzés frekvenciája nyugalomban: 12 – 14 / perc

$$I_{\text{levegő}} = \frac{\Delta V_l}{\Delta t} \approx 0,1 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$-\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_l c_{p,l} (T_{ki} - T_{be}) \frac{\Delta V_l}{\Delta t}$$



V_{izz}

Hővesztesség párolgással (2) izzadás

Víz párolgáshője: $\Delta h_{\text{parolgas}} = 2,25 \text{ kJ / g}$

$$-\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta h_{\text{parolgas}} \cdot (\rho_{lev}^{ki} - \rho_{lev}^{be}) \frac{\Delta V_{izz}}{\Delta t}$$