Biostatisztika és informatika alapjai

3. előadás:
A valószínűségszámítás elemei
2017. szeptember 28.
Veres Dániel

Egy kísérlet...

Az adott betegséget kimutató gyorsteszt:
kék: egészséges
zöld: beteg
Szeretnénk kideríteni a gyorsteszt segítségével, hogy egy kérdéses területen van-e járvány. A következőket tudjuk:
- A betegséggel nem sújtott („egészséges”) területeken:
  1-2 zöld / 10 megvizsgált egyénre.
- A betegséggel sújtott („beteg”) területeken:
  7-9 zöld / 10 megvizsgált egyénre

Felütötte-e a fejét a járvány az adott területen?

A vizsgálatok számának növelésével nő a „bizonyosság”.
Hány mérést kell végeznünk?
Valamekkora bizonytalanság mindig lesz ... – De ez mekkora?

Alapsokaság és minta

Alapsokaság (populáció)

VÉLETLEN

Minta

Az **alapsokaság** rendszerint olyan méretű, hogy az összes eleme nem vizsgálható meg.

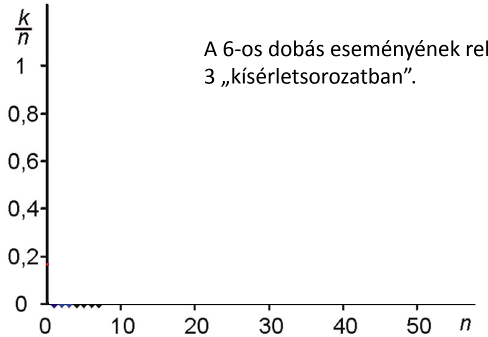
Emiatt az alapsokaságnak csak egy részhalmazát vizsgáljuk, ezt nevezzük mintának.

A minta elemein méréseket végzünk, majd az így keletkező adathalmazt (amit szintén mintának nevezünk) grafikusan és matematikailag jellemezzük

A minta jellemzői alapján az alapsokaságra vonatkozó következtetést vonhatunk le

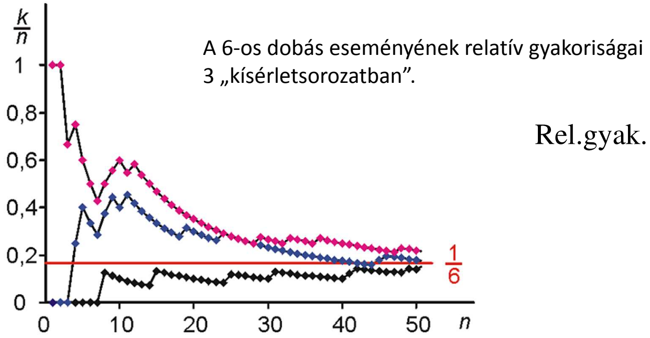
BIZONYTALANSÁG!

Egy másik szemszögből...



$$\text{Rel.gyak.} = \frac{N_{\text{„kedvező”}}}{N_{\text{összes}}}$$

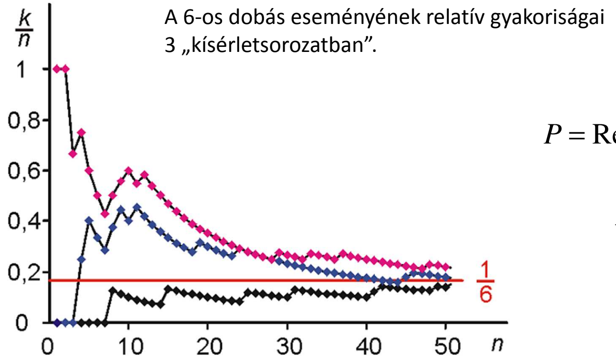
Egy másik szemszögből...



$$\text{Rel.gyak.} = \frac{N_{\text{"kedvező"}}}{N_{\text{összes}}}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a **relatív gyakoriságok** ilyen sorozatai – bár ingadozásokat mindig mutatnak – a „kísérletsorozat” hosszának növekedtével egyre inkább **stabilizálódnak** **valamilyen érték** **körül.** Továbbá ez az érték az aktuális „kísérletsorozattól” függetlenül lényegében ugyanakkora.

Valószínűség, mint mennyiség?



$$P = \text{Rel.gyak.} = \frac{N_{\text{"kedvező"}}}{N_{\text{összes}}}$$

$$N_{\text{összes}} \to \infty$$

A **nagy számok** ***(**relatív gyakoriságokra vonatkozó**)** tapasztalati törvénye:*** a relatív gyakoriság értéke egy végtelen sorozatban egy adott értékhez tart.
Az adott **eseményhez** hozzárendelhetjük ezt az **értéket**: 6 dobáshoz az 1/6-ot.
Ezt az értéket nevezzük az **esemény valószínűségének**.

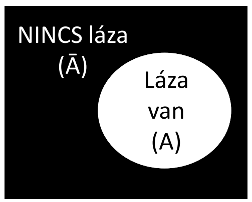
Ez a törvény *tapasztalati* törvény, tehát logikai úton nem bizonyítható.

Események valószínűségei I.

Jelölések:
Esemény: **A**
(a páciensnek láza van)
Az *A* esemény bekövetkezésének valószínűsége**: P(A)**
(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza van)

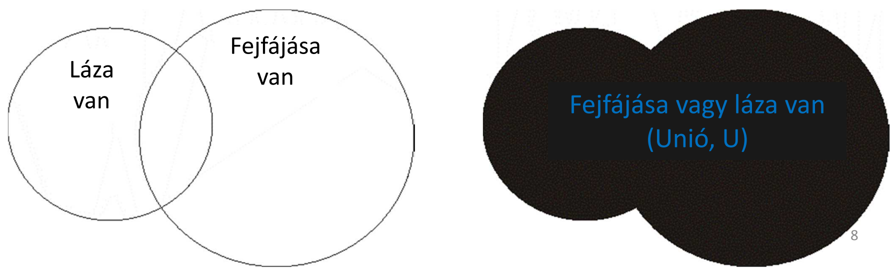
Ellentett esemény: **Ā**
(a páciensnek NINCS láza)
Az A esemény be NEM következésének valószínűsége**: P(Ā) vagy P(nemA)**
(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek NINCS láza)

Venn-diagram



Események valószínűségei II.

Annak a valószínűsége, hogy *A* **vagy** *B* esemény bekövetkezik:
P(AvagyB), **P(A+B)**, **P(AUB)**
(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza vagy fejfájása van)

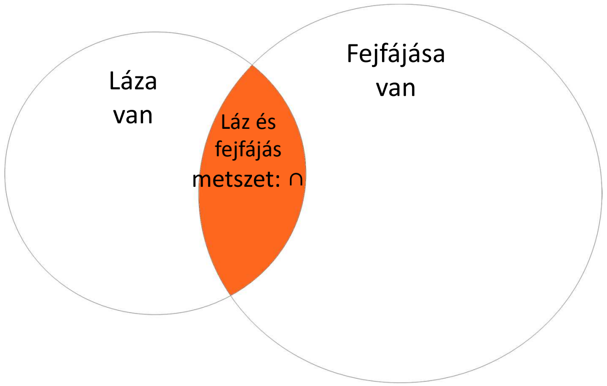


Események valószínűségei III.

Annak a valószínűsége, hogy ***A* és *B*** esemény egyaránt bekövetkezik:

P(AésB), **P(A*B)**, **P(AB)**, **P(A∩B)**

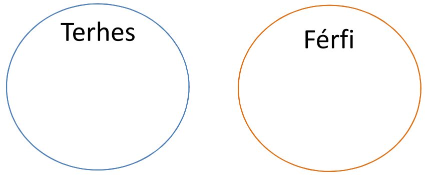
(annak a valószínűsége, hogy a páciensnek láza és fejfájása van)



Események valószínűségei IV.

Egymást (kölcsönösen) kizáró események: ***A*** *és* ***B*** események együttesen nem következhetnek be.

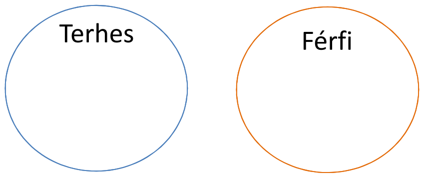
(a páciens terhes és férfi) *(A∩B)=0*



Események valószínűségei IV.

Egymást (kölcsönösen) kizáró események: *A és B* események együttesen nem következhetnek be.

(a páciens terhes és férfi) *(A∩B)=0*



Független események: *A* esemény bekövetkeztének nincs hatása *B* bekövetkezésére.

(az első páciensünk férfi, a második nő)

Események valószínűségei V.

Feltételes valószínűség

A esemény bekövetkezésének valószínűsége tudva, hogy **B** esemény bekövetkezett: **P(A|B).**

(annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van (nem más fertőzése) tudva azt, hogy vírusos eredetű a fertőzése)

Események valószínűségei VI.

Események valószínűségének alaptörvényei ***(Kolmogorov-axiómák)***:

1. **0 ≤ P(A) ≤ 1**

2. **P(*biztos*) = 1** *(a páciens előbb vagy utóbb meghal)*
P(*lehetetlen*) = 0 *(a páciens teljesen egészséges*)*

*3. Egymást kölcsönösen kizáró eseményekre: (*P(AésB)=0)
P(AvagyB)=P(A)+P(B)
*(annak a valószínűsége, hogy páciensünk terhes **vagy** férfi)*

Ezekből levezethető:

+4. *Független eseményekre*: **P(AésB)=P(A)*P(B)**
*(annak a valószínűsége, hogy az első páciensünk férfi **és** a második nő)*

Események valószínűségei VII.

Feltételes valószínűség számítása
általános forma 2 eseményre: **P(A|B)=P(AésB)/P(B)**

Események valószínűségei VIIa.

Feltételes valószínűség számítása
általános forma 2 eseményre: **P(A|B)=P(AésB)/P(B)**

Különleges esetek:

I. Független eseményekre:
annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi,
***HA** az első nő volt*

P(A|B)=P(AésB)/P(B)
P(A|B)=P(A)*P(B)/P(B)
P(A|B)=P(A)

annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi,
***HA** az első nő volt = annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi*

Események valószínűségei VIIb.

II. A esemény részhalmaza B eseménynek:
annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van HA ismert, hogy fertőzése vírusos eredetű

P(A|B)=P(AésB)/P(B)
P(A|B)=P(A)/P(B)

Számolási példa:
Annak a valószínsége, hogy páciensünknek vírusos fertőzése van:
P(B)=8%
Annak a valószínűsége, hogy páciensünknek influenza fertőzése van:
P(A)=2%
annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van HA ismert, hogy fertőzése vírusos eredetű:
P(A|B) = 2% / 8 % = 25%.

Kockázat (Rizikó)

		Betegség		
		Igen	Nem	Összesen
Rizikófaktor	Igen	a	b	a+b
	Nem	c	d	c+d
	Összesen	a+c	b+d	a+b+c+d

A betegség kockázata (valószínűsége), ha van rizikófaktor:

$$P(Bet_i \mid Riz_i) = \frac{P(Bet_i \cap Riz_i)}{P(Riz_i)} = \frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{a+b}{a+b+c+d}} = \frac{a}{a+b}$$

A betegség kockázata (valószínűsége), ha NINCS rizikófaktor:

$$P(Bet_i \mid Riz_n) = \frac{P(Bet_i \cap Riz_n)}{P(Riz_n)} = \frac{\frac{c}{a+b+c+d}}{\frac{c+d}{a+b+c+d}} = \frac{c}{c+d}$$

Kockázati hányados (Rizikó hányados)

		Betegség		
		Igen	Nem	Összesen
Rizikófaktor	Igen	a	b	a+b
	Nem	c	d	c+d
	Összesen	a+c	b+d	a+b+c+d

Kockázati hányados, rizikóhányados (RR, Risk Ratio, Relative Risk): azt az arányt mutatja, hogy hányszor gyakoribb az esemény kockázata, ha jelen van a rizikófaktor, mint a rizikófaktor hiányában

$$\frac{P(Bet_i \mid Riz_i)}{P(Bet_i \mid Riz_n)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{c}{c+d}} = \frac{a*(c+d)}{c*(a+b)}$$

Esély

Esély (esélyérték; O - odds): „hányszor akkora a valószínűsége annak, hogy az esemény bekövetkezik, mint annak, hogy nem következik be”

$$O = \frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

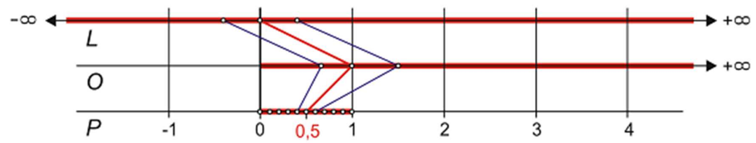
Esély

Esély (esélyérték; O - odds): „hányszor akkora a valószínűsége annak, hogy az esemény bekövetkezik, mint annak, hogy nem következik be”

$$O = \frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

Logit (L): esély természetes alapú logaritmusa

Logit – Esély – Valószínűség



Esély

		Betegség		
		Igen	Nem	Összesen
Rizikófaktor	Igen	a	b	a+b
	Nem	c	d	c+d
	Összesen	a+c	b+d	a+b+c+d

A betegség esélye, ha van rizikófaktor:

$$\frac{P(Bet_i \mid Riz_i)}{P(Bet_n \mid Riz_i)} = \frac{\frac{P(Bet_i \cap Riz_i)}{P(Riz_i)}}{\frac{P(Bet_n \cap Riz_i)}{P(Riz_i)}} = \frac{P(Bet_i \cap Riz_i)}{P(Bet_n \cap Riz_i)} = \frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{b}{a+b+c+d}} = \frac{a}{b}$$

A betegség esélye, ha NINCS rizikófaktor

$$\frac{P(Bet_i \mid Riz_n)}{P(Bet_n \mid Riz_n)} = \frac{c}{d}$$

Esélyhányados

		Betegség		
		Igen	Nem	Összesen
Rizikófaktor	Igen	a	b	a+b
	Nem	c	d	c+d
	Összesen	a+c	b+d	a+b+c+d

Esélyhányados, esélyarány (OR, Odds Ratio):
hányszor nagyobb a betegség kialakulásának esélye a rizikófaktor meglétes estében, mint annak hiányakor

$$\frac{\left(\frac{P(Bet_i \mid Riz_i)}{P(Bet_n \mid Riz_i)}\right)}{\left(\frac{P(Bet_i \mid Riz_n)}{P(Bet_n \mid Riz_n)}\right)} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a*d}{c*b}$$

Rizikóhányados és Esélyhányados

		Betegség		
		Igen	Nem	Összesen
Rizikófaktor	Igen	a	b	a+b
	Nem	c	d	c+d
	Összesen	a+c	b+d	a+b+c+d

OR **RR**

$$\frac{a*d}{c*b} \neq \frac{a*(c+d)}{c*(a+b)}$$

A betegség ritka

$$a << b \qquad OR \Rightarrow RR$$
$$c << d$$

Rizikóhányados és Esélyhányados

		Tüdődaganat		
		Van daganat	Nincs daganat	Összesen
Dohányzási szokás	Dohányzik	79	71	150
	Nem dohányzik	9	18	27
	Összesen	88	89	177

OR

$$\frac{a*d}{c*b}$$

$$\frac{79*18}{9*71} = 2{,}23$$

RR

$$\frac{a*(c+d)}{c*(a+b)}$$

$$\frac{79*27}{9*150} = 1{,}58$$

Jelentése? (OR, RR: R)
R=1: „nincs rizikóhatás"
R>1: nagyobb kockázat/esély a faktorral
R>1: kisebb kockázat/esély a faktorral
Lehet, de NEM BIZTOS
Mintavételi bizonytalanság!

Valószínűségszámítás......

Permutációk
Variációk
Kombinációk

Na mire is lehet jó….

Influenzaszezont megelőzően a rendelőnkben az adott napra 4 oltóanyag áll rendelkezésre. Az előző években átlagosan 2989 páciensből 402 személyt kellett beoltanunk. Az előző év alapján mekkora a valószínűsége, hogy a rendelkezésre álló 4 oltóanyag elegendő lesz és el is fogy, ha 25 embert várunk aznapra?

$$P=\binom{n}{k}\cdot(p)^k\cdot(1-p)^{(n-k)}=\binom{25}{4}\cdot\left(\frac{402}{2989}\right)^4\cdot\left(1-\frac{402}{2989}\right)^{(25-4)}\approx 0{,}2$$

Na mire is lehet jó….

Mekkora a valószínűsége annak, hogy páciensünk 3.45 mmol/l-es (normál tartományon kívüli) K^+ szintje még „egészséges”?

Hány szülés várható az esti ügyeletben, ha az éves statisztika 1000 szülést mutat éjfél és 8:00 között?

Az évfolyamból várhatóan hányan lesznek alkalmasak egy csípőprotézis elvégzésére (tömegük alapján)?

Vajon hat-e az adott gyógyszer?...

Az influenza/AIDS teszt pozitív – milyen valószínűséggel vagyok tényleg beteg?

...... Hogyan számoljunk? Ismerjük a „képletet”? milyen „egyenletet”, táblázatot, excel függvényt... válasszunk, mikor melyiket?

Az emberi gondolkodás...

Tomi csendes, visszahúzódó, szerény, szorgalmas fiú, aki másoknak szívesen segít. Melyiket tartod valószínűbbnek:

a) Tomi könyvtáros
b) Tomi kétkezi munkás

Az emberi gondolkodás...

Linda tehetséges, független, filozófia szakot végzett 31 éves nő. Nagyon érzékeny a társadalmi igazságtalanságokra. Diákként részt vett az antinukleáris demonstrációkban. Sorszámozza meg az alábbi állításokat aszerint, hogy mennyire tartja valószínűnek (1-es sorszám a legvalószínűbb):

a) Linda tanító egy általános iskolában,
b) Linda könyvesboltban dolgozik, és jóga tanfolyamra jár,
c) Linda a nőszavazók ligájának tagja,
d) Linda bankpénztáros,
e) Linda biztosítási ügynök,
f) Linda bankpénztáros és feminista.

Valószínűség másképp...

Ellenőrző kérdések #1

- Definiáld a valószínűséget a nagy számok törvénye alapján.
- Ismertesd a nagy számok törvényét.
- Hogyan bizonyítható a nagy számok törvénye?
- Hogyan jelölhető az A vagy B esemény bekövetkezésének valószínűsége?
- Hogyan jelölhetjük azt a valószínűséget, hogy A és B esemény egyaránt bekövetkezik?
- Mit jelent két esemény metszete, illetve uniója?
- Definiált az egymást kölcsönösen kizáró eseményeket.
- Mondj példát az egymást kölcsönösen kizáró eseményekre.
- Mit tudsz az egymást kölcsönösen kizáró események metszetéről?
- Definiáld az egymástól független események fogalmát.
- Mondj példát független eseményekre.
- Mit jelent a feltételes valószínűség?
- Mondj példát a feltételes valószínűségre.
- Hogyan jelöljük a feltételes valószínűséget?
- Hogyan számítható P(A) ha P(A|B) és P(B) adott?
- Mik a Kolmogorov axiómák?
- Mit tudsz A és B esemény viszonyáról, ha P(AvagyB)=P(A)+P(B) igaz?
- Mit tudsz A és B esemény viszonyáról , ha P(AB)=P(A)*P(B) igaz?
- Mekkora a biztos esemény valószínűsége?
- Mekkora a lehetetlen esemény valószínűsége?
- Adj példát biztos és lehetetlen eseményekre.
- Mekkora lehet egy esemény valószínűségének értéke?
- Mit jelent az esély?
- Definiáld a logitot.
- Add meg az esemény logit értékét, ha az esemény valószínűsége 0,12.
- Mekkora az esély értéke, ha a valószínűség 0,4.
- Add meg a valószínűséget, ha az esély 3.
- Add meg a valószínűséget, ha a logit – 32.
- Definiáld a populációt és a mintát
- Lehet két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége nagyobb az egyes események bekövetkezésének valószínűségénél?

Ellenőrző kérdések #2

		Tüdődaganat		
		Van daganat	Nincs daganat	Összesen
Dohányzási szokás	Dohányzik	79	71	150
	Nem dohányzik	9	18	27
	Összesen	88	89	177

Mekkora az esélyhányados és a rizikóhányados?