Biostatisztika és informatika alapjai

4. előadás: Az orvostudományban előforduló nevezetes eloszlások

2017. október 5.

Veres Dániel

Alapsokaság és minta

Alapsokaság (populáció)

VÉLETLEN!

BIZONYTALANSÁG!

Minta

Alapsokaság
az elméletileg lehetséges összes mérést, vizsgálati eredményt tartalmazza

Minta
az alapsokaság egy részhalmaza, amit vizsgálunk

Adott mintára vonatkozó felmerülő statisztikai kérdések az orvostudományban…

Az előző év alapján mekkora a valószínűsége, hogy a rendelkezésre álló 4 oltóanyag elegendő lesz, ha 25 embert várunk aznapra?

Hány szülés várható az esti ügyeletben, ha az éves statisztika 1000 szülést mutat éjfél és 8:00 között?

Az évfolyamból várhatóan hányan lesznek alkalmasak egy csípőprotézis elvégzésére (tömegük alapján)?

Mekkora a valószínűsége annak, hogy páciensünk 3.45 mmol/l-es K szintje még „egészséges”?

Az influenza vagy AIDS tesztünk pozitív – mekkora a valószínűsége, hogy valóban betegek vagyunk?

Milyen a megfelelő alapsokaság ?

Hogyan etessük?

IGUÁNA

BÖLÉNY

STRUCC

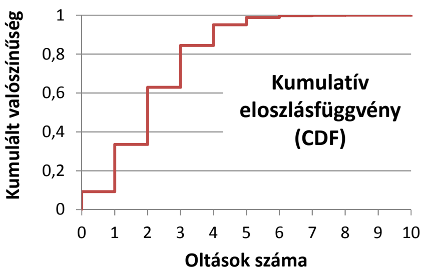
PANDA

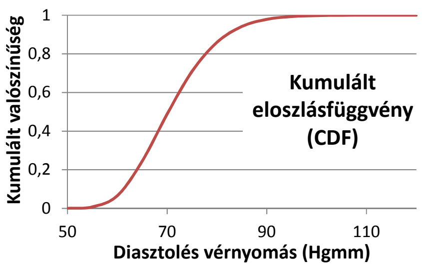
KATICABOGÁR

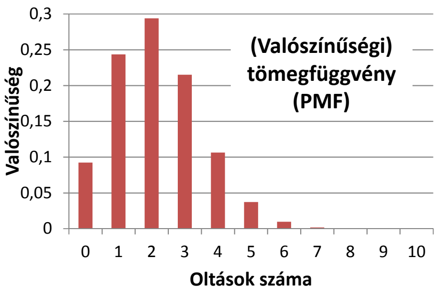
?

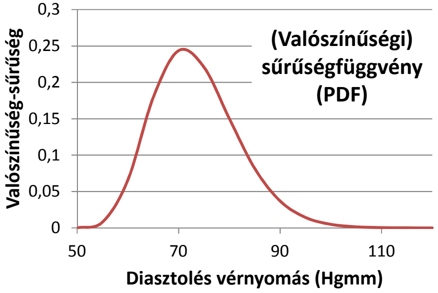
Elméleti eloszlások

Diszkrét | **Folytonos**

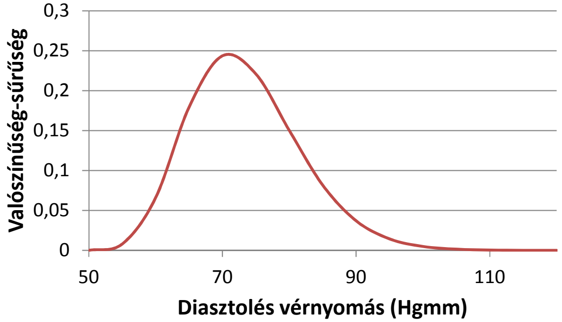








Elméleti eloszlások



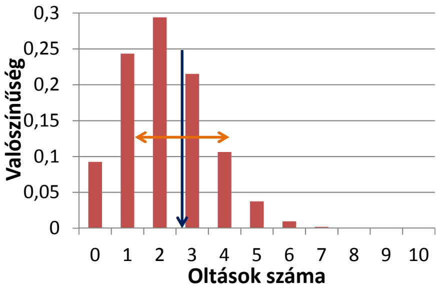
Ismerem az adott mennyiség valószínűségét minden esetre. (Nagyon-nagyon ritka – percentilis tábla.)

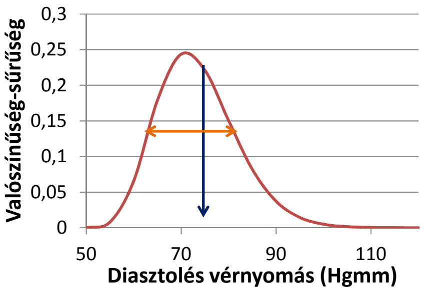
A valószínűséget ki tudom számítani *(vagy becsülni tudom)*: *nevezetes eloszlások paraméterei alapján.*

Milyen paramétereket, melyik eloszlást használjam?

Nevezetes eloszlások

Diszkrét | **Folytonos**





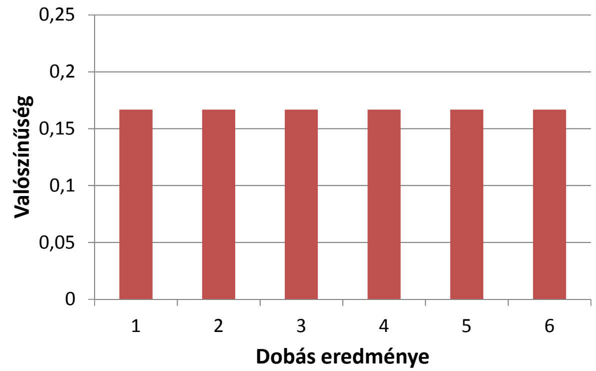
- ***Várható érték (E, M, μ) (hely paraméter)***

$$E(\xi)=\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i \qquad E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} p_i \cdot x_i$$

- Elméleti szórásnégyzet (Var, D^2, σ^2) (szóródási paraméter)

$$Var(\xi)=E\left[\left(\xi-E(\xi)\right)^2\right]$$

Egyenletes eloszlás



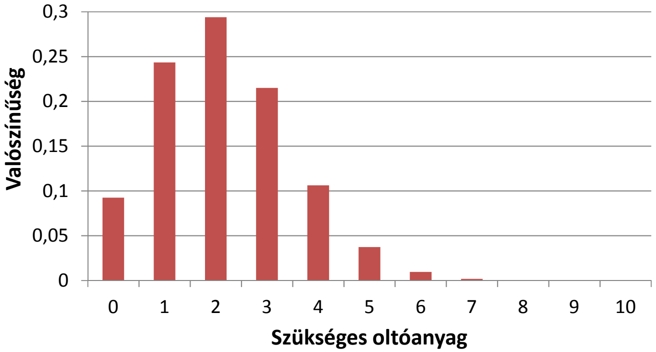
$$E(\xi)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$Var(\xi)=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

$$Var(\xi)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

Ideális kocka eredményeinek eloszlása
Ideális munkaterhelés eloszlása a nap folyamán
Hőmérséklet eloszlása egy üres terem különböző pontjain

Binomiális (Bernoulli) eloszlás



$$E(\xi) = n \cdot p$$

$$Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$P = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$$

Szükséges oltóanyagszám eloszlása
Általánosan: egy n-szer megismételt jelenség x-szer következik be
Ha p „kicsi” Poisson eloszláshoz „közelít”
Ha n „nagy” és p 0,5-höz tart, akkor normál eloszláshoz „közelít”

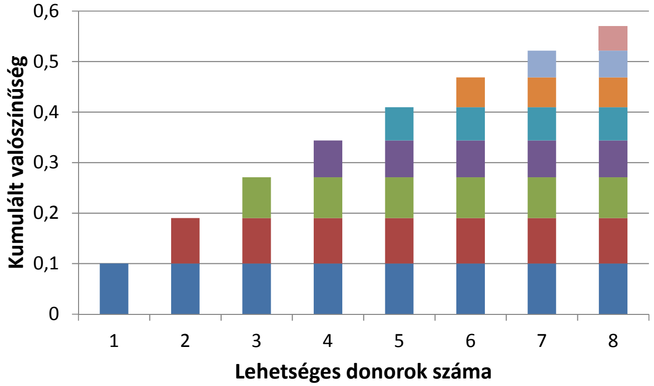
Példaszámítás….

Influenzaszezont megelőzően a rendelőnkben az adott napra 4 oltóanyag áll rendelkezésre. Az előző években átlagosan 2989 páciensből 402 személyt kellett beoltanunk. Az előző év alapján mekkora a valószínűsége, hogy a rendelkezésre álló 4 oltóanyag elegendő lesz és el is fogy, ha 25 embert várunk aznapra?

$$P = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{(n-k)} = \binom{25}{4} \cdot \left(\frac{402}{2989}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{402}{2989}\right)^{(25-4)} \approx 0{,}2$$

Egyszerűbben lehetne? - Excel

Geometriai eloszlás



$$E(\xi) = \frac{1}{p}$$

$$Var(\xi) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

$$P = p \cdot (1-p)^{(n-1)}$$

Független Bernoulli kísérletek egymásutánja
Hanyadikra találjuk meg a megfelelő donort? (Mekkora a valószínűsége annak, hogy az x. donorból megtaláljuk az első megfelelőt?)
Hanyadik szülésből lesz először fiú?

Péter és Pál

(pétervári paradoxon)

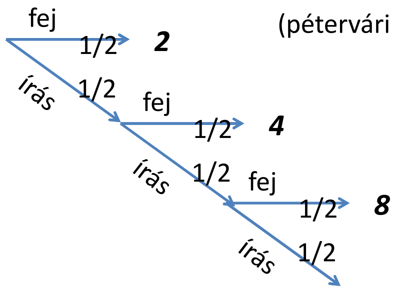
Pénzfeldobásos játék, eredménye szerint

- a kezdeti nyeremény 2 dukát és mindig duplázódik, ha írást dobunk
- ha fej, akkor vége a játéknak, írásnál folytatódik
- a nyeremények:
  - ha az 1. dobás fej: Pál ad 2 dukátot Péternek
  - ha az 1. írás, 2. dobás fej: Pál ad 4 dukátot Péternek
  - ha csak a 3. lesz fej: Pál ad 8 dukátot Péternek...

Mennyit fizessen Péter a játékélményért egy játékra átlagosan?
(Úgy hogy ne járjon se Pál, se Péter rosszul)

Péter és Pál

(pétervári paradoxon)

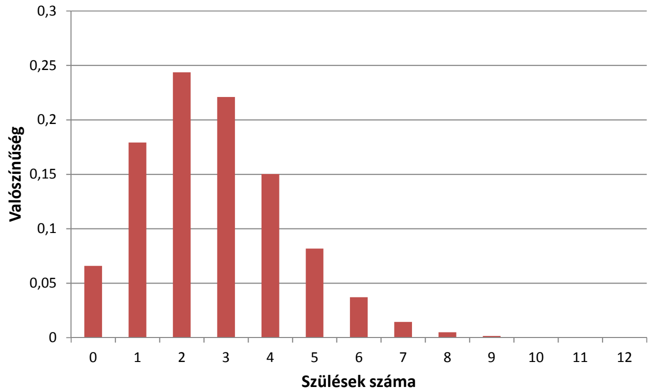


Az egy játékra jutó átlagos nyeremény matematikailag („elméletileg”): végtelen!

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2^2}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^n$$

Tapasztalat: Buffon 2084 játékból átlagosan 9,82 dukátot nyert egy játékra nézve.

Poisson eloszlás



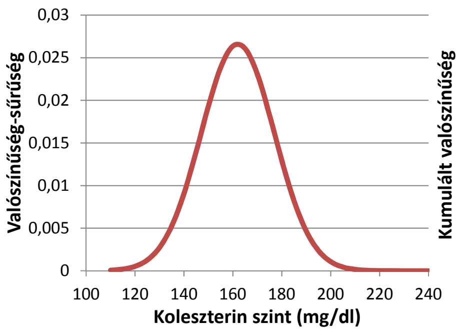
$$E(\xi)=\lambda$$

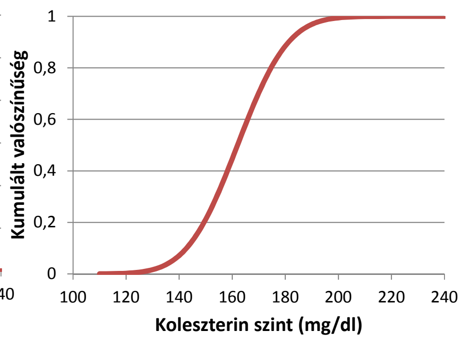
$$Var(\xi)=\lambda$$

$$P=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}$$

Szülések száma az ügyeletben
Új diagnosztizált karcinómák száma
Hálóban lévő halak száma
Radioaktív preparátumban adott idő alatt elbomló atomok száma
Normál eloszláshoz „közelíthető”

Normál (Gauss) eloszlás I.





$$E(\xi)=\mu$$

$$Var(\xi)=\sigma^2$$

$$P=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

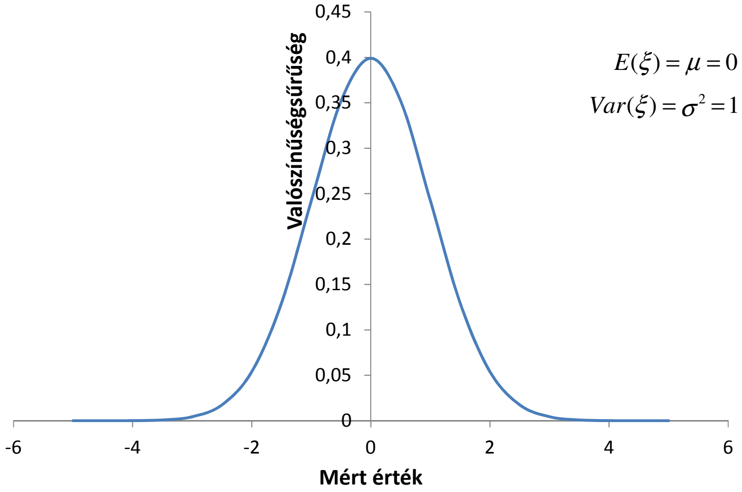
Koleszterinszin, vércukorszint....
Testmagasság, BMI
Diasztolés vérnyomás felnőtteknél
......

Normál eloszlás II.

Centrális határeloszlás tétele (változókra): ha sok független valószínűségi változót összegzünk, akkor elég általános feltételek teljesülése esetén az összeg normális eloszlású valószínűségi változó lesz.

Centrális határeloszlás tétele (mintavételi átlagokra): ha egy adathalmazból *n* elemű mintákat veszünk, akkor elég általános feltételek teljesülése esetén a minták átlagai normál eloszlásúak lesznek, és az eloszlás varianciája az eredeti eloszlás varianciájának *n*-ed része lesz.

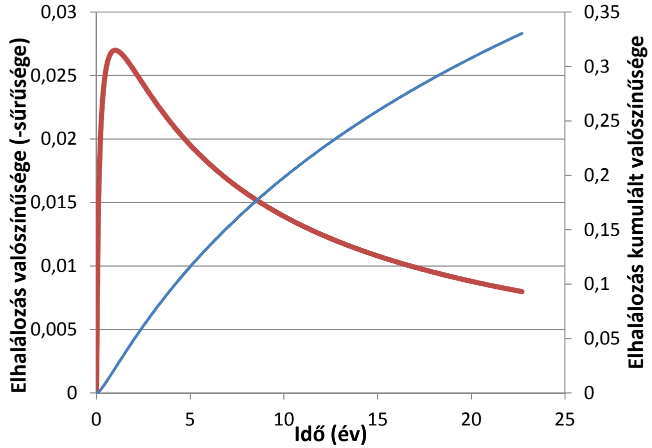
Standard normál eloszlás



$$E(\xi) = \mu = 0$$

$$Var(\xi) = \sigma^2 = 1$$

Lognormál (Galton) eloszlás

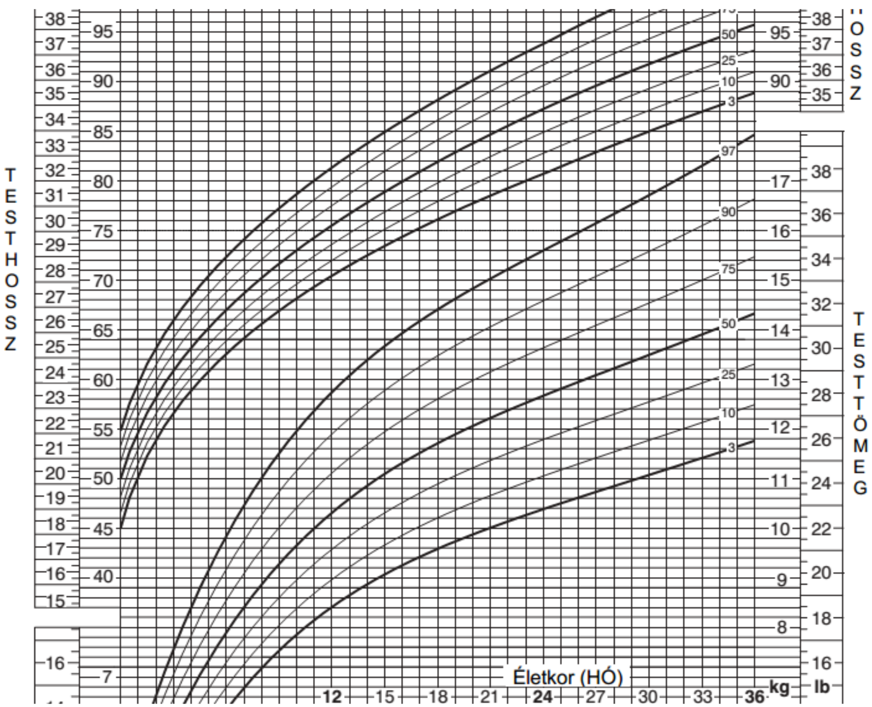


$$E(\xi) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

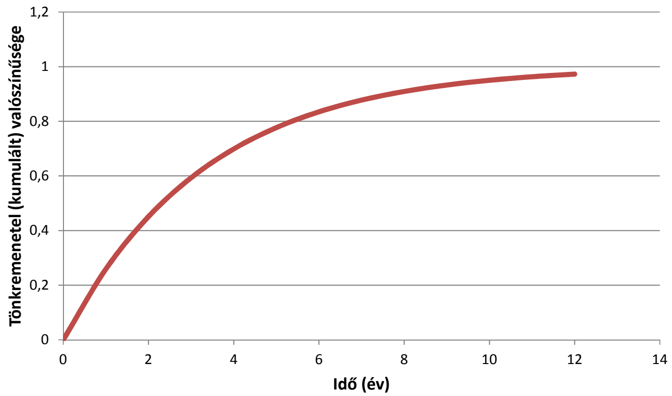
$$Var(\xi) = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$P = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Testtömeg gyermekkorban
Túlélési idő



Exponenciális eloszlás



$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Altatóberendezés működési ideje (az első hibáig).
Radioaktív bomlás során az egyes atomok élettartama.

Változók transzformációi

- Állandó hozzáadása

  $E(\eta) = E(\xi) + k \qquad Var(\eta) = Var(\xi)$
- Állandóval való szorzás

  $E(\eta) = E(\xi) * k \qquad Var(\eta) = Var(\xi) * k^2$
- Standardizálás

  Állandó hozzáadása, majd állandóval szorzás

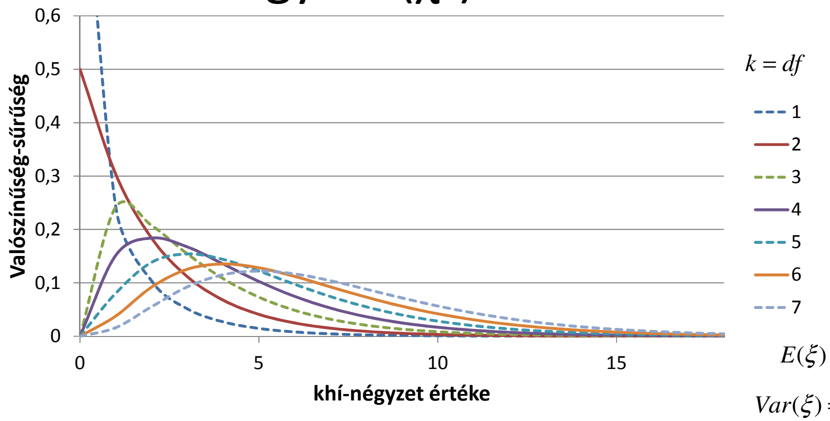
  $$\eta = (\xi - E(\xi)) * \frac{1}{\sqrt{Var(\xi)}} = \frac{(\xi - E(\xi))}{\sqrt{Var(\xi)}} \qquad E(\eta) = 0 \quad Var(\eta) = 1$$
- Változók összeadása

  $E(\eta) = E(\xi) + E(\omega) \qquad Var(\eta) = Var(\xi) + Var(\omega) \leftarrow$ *függetlenségnél!*

  Stabil eloszlás: ha az eloszlás ugyanaz marad
- Változók összeszorzása

  $E(\eta) = E(\xi) * E(\omega)$

Khí-négyzet (χ^2) eloszlások

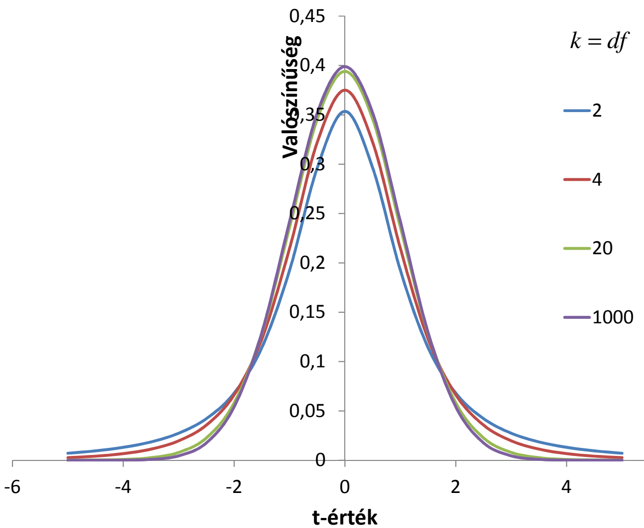


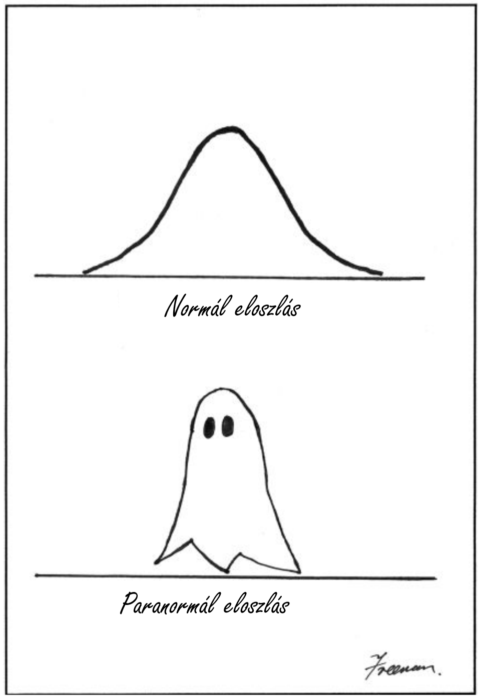
$E(\xi) = k$

$Var(\xi) = 2k$

Khí-négyzet érték: független, standard normál eloszlású változók négyzeteinek összege

Student-féle t-eloszlás





Ellenőrző kérdések #1

- Hogyan számítható egy folytonos eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható egy diszkrét eloszlás várható értéke?
- Melyik középérték egyezik meg a várható értékkel egy populáció esetében?
- Mivel becsülhető egy elméleti eloszlás várható értéke?
- Mivel becsülhető egy elméleti eloszlás szórása?
- Definiáld a z elméleti varianciát.
- Melyik két mutató határoz meg egyértelműen egy speciális eloszlást?
- Ábrázold az egyenletes eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Poisson eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Bernoulli eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a geometriai eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a normál eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a Gauss eloszlás kumulált eloszlásfüggvényét.
- Ábrázold az exponenciális eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Ábrázold a lognormál eloszlás gyakoriságfüggvényét.
- Írj 2 példát az egyenletes eloszlásra.
- Írj 2 példát binomiális eloszlásra.
- Írj 2 példát a geometriai eloszlásra.
- Írj 3 példát a normál eloszlásra.
- Írj 2 példát a lognormál eloszlásra.
- Írj 2 példát a Poisson eloszlásra.
- Írj 2 példát az exponenciális eloszlásra.
- Hogyan számítható az egyenletes eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a binomiális eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a lognormál eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható az exponenciális eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható a Poisson eloszlás várható értéke?
- Hogyan számítható normál eloszlás várható értéke?
- Miről szól a centrális határeloszlás tétele?
- Miért követ a legtöbb orvosi gyakorlatban használt változó normál eloszlást?
- Mik a standard normál eloszlás paramétereinek számszerű értéke?

Ellenőrző kérdések #2

- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában binomiális eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában geometriai eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában Poisson eloszlást.
- Add meg általánosan, hogy mikor kapunk általában lognormál eloszlást.
- Milyen transzformációval kaphatunk a lognormál eloszlásból normál eloszlást?
- Hogyan kapunk khí-négyzet eloszlású változót?
- Definiáld a populációt és a mintát.
- Hogyan változik a változó eloszlásának várható értéke és a szórása konstans hozzáadására?
- Hogyan változik a változó eloszlásának várható értéke és a szórása konstanssal való szorzáskor?
- Hogyan lehet standardizálni egy eloszlást? Mit jelent ez?
- Hogyan változik a várható érték és a szórás független normál eloszlású változók összeadásakor?