

# Hypothesenprüfungen



Dr László Smeller

1

## Vergleich der Schätzungen und Hypothesenprüfungen

### Schätzungen:

Frage: **Wie groß** (ist eine physikalische Größe)  $\mu=?$

z.B.: Körperhöhe, Blutdruck,  
Blutzuckerkonzentration...

Antwort: Punktschätzung: Ein Wert

Intervallschätzung: **Ein Intervall + Konfidenzniveau**  
(Sicherheitswahrscheinlichkeit)

### Hypothesenprüfungen:

Frage: Eine Entscheidungsfrage (**ist es wahr** oder nicht?)

zB: hat ein Medikament eine Wirkung oder nicht?

Mathematisch: ist  $\mu=\mu_0?$

Antwort: **Ja oder Nein** + Konfidenzniveau (Sicherheitswahrsch.)

**Signifikanzniveau (Irrtumswahrsch.)**

## Typische Aufgaben der Hypothesenprüfung

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
  - 1a. Verursacht es eine Änderung (zB. Blutdruckänderung, d.h.: ist der Blutdruck kleiner nach der Eingabe?)
  - 1b. Gibt es einen Unterschied zwischen den unbehandelten und behandelten Gruppen?
2. Gibt es eine Korrelation
  2. a. zwischen zwei Parametern (zB. Körperhöhe und Gewicht, ...)
  2. b. Gibt es eine Korrelation zwischen zwei Eigenschaften (Alkoholismus, Leberschrumpfung)

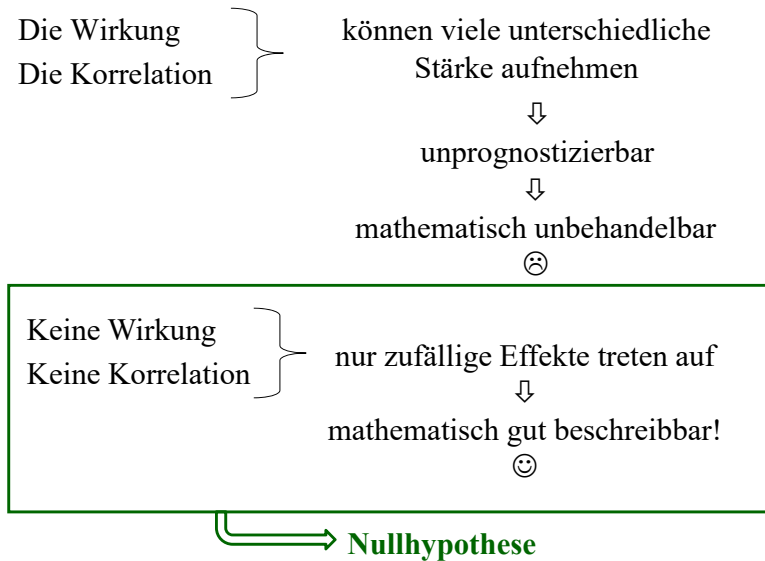
## Typische Fragen - **gebrauchte Merkmale**

1. Hat ein Medikament/Behandlung eine Wirkung?
 

Änderung von einer **numerischen (kontinuierlichen) Größe**  
(zB. Blutdruck, Körpertemperatur, Blutzuckerkonzentration, ...)

  - 1a. Änderung nach einem Einfluss an einer Stichprobe
  - 1b. Unterschied zwischen zwei Stichproben
2. Gibt es eine Korrelation
  - 2a. zwischen **zwei numerischen Größen**  
(zB. Körperhöhe und Gewicht, ...)
  - 2b. zwischen zwei (oder mehreren) **kategorischen Merkmalen**  
(zB: Alkoholiker – Antialkoholiker, Leberschrumpfung – keine Leberschr.  
Raucher – Nichtraucher, Lungenkrebs – kein Lungenkrebs)

## Grundprinzip der Hypothesenprüfungen



## Die Nullhypothese und die Alternativhypothese

### Nullhypothese ( $H_0$ ):

Es gibt **keine Wirkung**  $\mu = \mu_0$

Alle **Abweichungen** von dem theoretischen Wert sind rein **zufällig**.

### Alternativhypothese ( $H_1$ )

Es gibt eine Wirkung  $\mu \neq \mu_0$

Die Abweichungen sind nicht zufällig, sondern systematisch!

Eine von  $H_0$  und  $H_1$  wird unbedingt auftreten!  $p(H_0 \text{ oder } H_1) = 1$

## Nullhypothesen

beim Fiebermittel:

Keine Wirkung ( $H_0$ ):

Wenn es keine Wirkung gibt, ist die Temperaturänderung nach der Eingabe = 0.

Genauer: Erwartungswert der Temperaturänderungen ist  $\mu_0 = 0$

beim Würfelspiel:



## Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Sei es vorausgesetzt, dass wir keine Wirkung/Korrelation haben! (D.h.  $H_0$  ist richtig.)

Wenn unsere Ergebnisse dieser Voraussetzung nicht entsprechen, dann haben wir wahrscheinlich eine Wirkung/Korrelation.





## Beispiel 1.: Fiebermittel

Seien die Temperaturen vor und nach der Eingabe gemessen.  
Die Messergebnisse (in °C):

| $T_{\text{vor}}$       | $T_{\text{nach}}$ | $x = T_{\text{nach}} - T_{\text{vor}}$ |
|------------------------|-------------------|--|
| 39,7                   | 39,0              | -0,7                                   |
| 38,8                   | 38,4              | -0,4                                   |
| 37,9                   | 38,3              | 0,4                                    |
| 39,2                   | 38,9              | -0,3                                   |
| 38,9                   | 38,4              | -0,5                                   |
| Durchschnitt $\bar{x}$ |                   | -0,3                                   |

Temperatur  
-änderung



Nullhypothese: das Fiebermittel ist unwirksam.  
Die Temperaturänderungen ( $x_i$ ) sind zufällig.  
Der Erwartungswert der Temperaturänderungen ist null.

9

## 1. Beispiel: Fiebermittel

Nullhypothese:  $\mu_0 = 0$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, dann befindet sich  
 $\bar{x}$  nicht weit von  $\mu_0$ .

Ist  $\bar{x} = -0,3^\circ\text{C}$  klein genug um den als zufällig zu betrachten?  
d.h. die Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist  $\bar{x} = -0,3^\circ\text{C}$  groß genug um den als systematische Abweichung  
zu betrachten? d.h. Nullhypothese abzulehnen?



Aber wo ist die Grenze?

Wie groß muss der Durchschnitt sein um die Nullhypothese  
abzulehnen?

10

## 2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.

Wird die Pulszahl geändert nach der Kniebeugungen?

$H_0$ : keine Änderung  $\mu=0$

| $p_{\text{vor}}$ | $p_{\text{nach}}$ | $x = \Delta p$ |
|------------------|-------------------|----------------|
| 65               | 79                | 14             |
| 68               | 77                | 9              |
| 72               | 91                | 19             |
| 63               | 70                | 7              |
| 74               | 88                | 14             |
| 69               | 84                | 15             |
| Durchsch.        |                   | 13             |

Ist  $13 \frac{1}{\text{Min}}$  klein genug um die  
Nullhypothese anzunehmen?

oder

Ist  $13 \frac{1}{\text{Min}}$  groß genug um die  
Nullhypothese abzulehnen?



Wie große zufällige Abweichung ist erlaubt?

(Rein zufällige, statistische) Streuung des Durchschnittes  
beträgt:  $s_{\bar{x}}$

$s_{\bar{x}}$  ist der „Maßstab“ für die Abweichung des  
Durchschnittes von dem Erwartungswert  $\mu_0$ .

Einige  $s_{\bar{x}}$  große Abweichung ist „erlaubt“,  
aber merfache  $s_{\bar{x}}$  Abweichung ist sehr unwahrscheinlich.  
(Angenommen dass die Nullhypothese gültig ist.)

## Der $t$ -Wert

Weil die zufällige Abweichungen des Durchschnittswertes von  $\mu$  können einige  $s_{\bar{x}}$  betragen, vergleichen wir  $\bar{x}$  mit  $s_{\bar{x}}$ .

Definieren wir eine neue Größe:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} \quad (\bar{x} \text{ in } s_{\bar{x}} \text{ Einheiten gemessen})$$

oder mathematisch:

$$t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$t$  für unseren „Fibermittel“:

$$t = -0,3/0,187 = -1,6$$

für Kniebeugungen  $t' = 7,34$

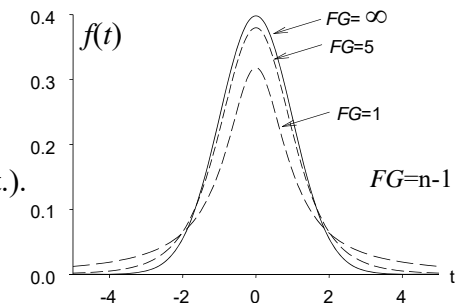
## Die Verteilung des $t$ -Wertes: die $t$ -Verteilung

$$t = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Wenn die Nullhypothese gültig ist, alle  $x_i$  Werte folgen einer  $t$ -Verteilung mit  $\mu = 0$ .

Wenn die  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Daten einer Normalverteilung folgen, die Verteilung von  $t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}}$  kann berechnet werden:  $t$ -Verteilung

Wenn die Nullhypothese gültig ist, der aus unserer Stichprobe ausgerechnete  $t$ -Wert folgt einer  $t$ -Verteilung (Student-Vert.).



**Bedingung:  $x$  muss normalverteilt sein.**

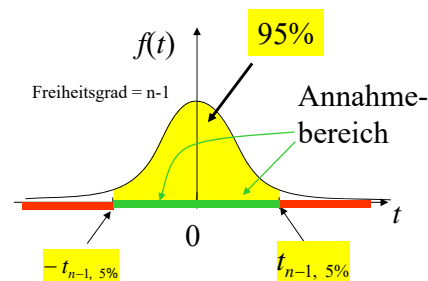
D.h.: man braucht normalverteilte Messwerte.

## Die Anwendung der $t$ -Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer richtigen Nullhypothese

$$-t_{n-1, 5\%} < t < +t_{n-1, 5\%}$$

gilt, beträgt 95%.



**Bei richtiger Nullhypothese** ist der aus der Stichprobe ausgerechnete  $t$ -Wert mit 95% Wahrscheinlichkeit in dem Annahmebereich. Wir können diesen kleinen  $t$ -Wert mit zufälligen Abweichungen erklären.  
 $\Rightarrow$  Wir müssen keine Wirkung voraussetzen.

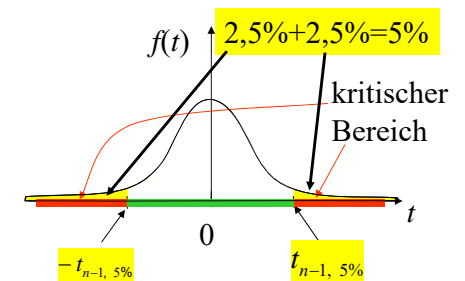
**Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.**  
 ( $H_0$  wird angenommen)

## Die Anwendung der $t$ -Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer richtigen Nullhypothese

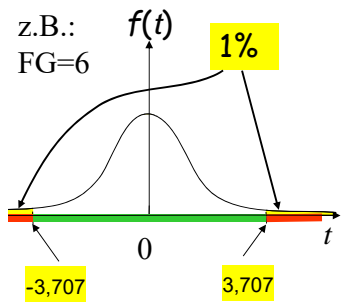
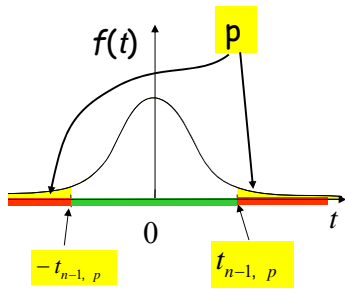
$$t < -t_{n-1, 5\%} \quad \text{oder} \quad t > +t_{n-1, 5\%}$$

gilt, beträgt 5%.



D.h.: Es ist sehr unwahrscheinlich ( $< 5\%$ ), dass wir **bei richtiger Nullhypothese** einen so großen  $t$ -Wert bekommen.  $\Rightarrow$  Wir haben wahrscheinlich eine Wirkung, **die Nullhypothese kann abgelehnt werden, die Alternativhypothese wird angenommen.**

Das 5% nennt man als **Signifikanzniveau** oder **Irrtumswahrscheinlichkeit**.



| Freiheits-grad<br>(FG) | p (Irrtumswahrscheinlichkeit) |       |       |       |       |
|------------------------|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
|                        | 0,2                           | 0,1   | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                      | 3,078                         | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                      | 1,886                         | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3                      | 1,638                         | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4                      | 1,533                         | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5                      | 1,476                         | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6                      | 1,440                         | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7                      | 1,415                         | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8                      | 1,397                         | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9                      | 1,383                         | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10                     | 1,372                         | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11                     | 1,363                         | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12                     | 1,356                         | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13                     | 1,350                         | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14                     | 1,345                         | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15                     | 1,341                         | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16                     | 1,337                         | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17                     | 1,333                         | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18                     | 1,330                         | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19                     | 1,328                         | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20                     | 1,325                         | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21                     | 1,323                         | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22                     | 1,321                         | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23                     | 1,319                         | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |

## Ablauf der Hypothesenprüfung bei einem t-Test

1. Fragestellung (mit der Definition der Population!)  
(Bedingung: Normalverteilung)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus ( $\alpha$ )
4. Messung (Stichprobe mit  $n$  Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des  $t$ -Wertes
6. Vergleich von unserem  $t$  und dem Grenzwert ( $t_{n-1, \alpha}$ )

$$|t| < t_{n-1, \alpha}$$

$$|t| > t_{n-1, \alpha}$$

7. Die Entscheidung:

die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden.

die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau abgelehnt werden

Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.

Die Alternativhypothese ist angenommen  
(mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha$ ).

## 1. Beispiel: Fiebermittel

1. Die Frage: Ist das Fiebermittel wirksam?
2. Nullhypothese: Das Fiebermittel ist unwirksam.  
(Die Temperaturänderungen sind rein zufällig).

3. Sei  $p=5\%$

4. Die Messergebnisse:  
Temperaturen vor und nach der Eingabe (in  $^{\circ}\text{C}$ ):  
 $x$  = Temperaturänderung

5.  $\bar{x} = -0,3^{\circ}\text{C}$   
 $s_{\bar{x}} = 0,187^{\circ}\text{C}$

$$t = \frac{-0,3^{\circ}\text{C}}{0,187^{\circ}\text{C}} = -1,6$$

$$\text{FG} = n-1=4$$

| $T_{\text{vor}}$ | $T_{\text{nach}}$ | $x = T_{\text{nach}} - T_{\text{vor}}$ |
|------------------|-------------------|--|
| 39,7             | 39,0              | -0,7                                   |
| 38,8             | 38,4              | -0,4                                   |
| 37,9             | 38,3              | 0,4                                    |
| 39,2             | 38,9              | -0,3                                   |
| 38,9             | 38,4              | -0,5                                   |
| Durchschnitt     |                   | -0,3                                   |

Temperatur-  
änderung

6. Vergleich des unseren  $t$ -Wertes mit dem Grenzwert

FG=4

$$t_{4; 5\%} = 2,776$$

| Freiheits-grad<br>(FG) | p (Irrtumswahrscheinlichkeit) |       |       |       |       |
|------------------------|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
|                        | 0,2                           | 0,1   | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                      | 3,078                         | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                      | 1,886                         | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3                      | 1,638                         | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4                      | 1,533                         | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5                      | 1,476                         | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6                      | 1,440                         | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7                      | 1,415                         | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8                      | 1,397                         | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9                      | 1,383                         | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10                     | 1,372                         | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11                     | 1,363                         | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12                     | 1,356                         | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |

$|t| < t_{4; 5\%}$  die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.  
Die Nullhypothese wird angenommen  
(mit einem 5% Signifikanzniveau).

Das Fiebermittel ist mit 5% Sign.n unwirksam!



## 2. Beispiel: Kniebeugungen

Pulszahl vor und nach 10 Kniebeugungen.

| p <sub>vor</sub> | p <sub>nach</sub> | x=Δp |
|------------------|-------------------|------|
| 65               | 79                | 14   |
| 68               | 77                | 9    |
| 72               | 91                | 19   |
| 63               | 70                | 7    |
| 74               | 88                | 14   |
| 69               | 84                | 15   |
|                  | Durchsch.         | 13   |
|                  | Stabw.            | 4,34 |
|                  | Stfehler          | 1,77 |

$$n=6$$

$$t = \frac{13}{1,77} = 7,34$$

| Freiheits-grad<br>(FG) | p (Irrtumswahrscheinlichkeit) |       |       |       |       |
|------------------------|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
|                        | 0,2                           | 0,1   | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                      | 3,078                         | 6,314 | 12,70 | 31,82 | 63,65 |
| 2                      | 1,886                         | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3                      | 1,638                         | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4                      | 1,533                         | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5                      | 1,476                         | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6                      | 1,440                         | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7                      | 1,415                         | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8                      | 1,397                         | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9                      | 1,383                         | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10                     | 1,372                         | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11                     | 1,363                         | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12                     | 1,356                         | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13                     | 1,350                         | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14                     | 1,345                         | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15                     | 1,341                         | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16                     | 1,337                         | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17                     | 1,333                         | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |

## Hypothesenprüfung mit Excel

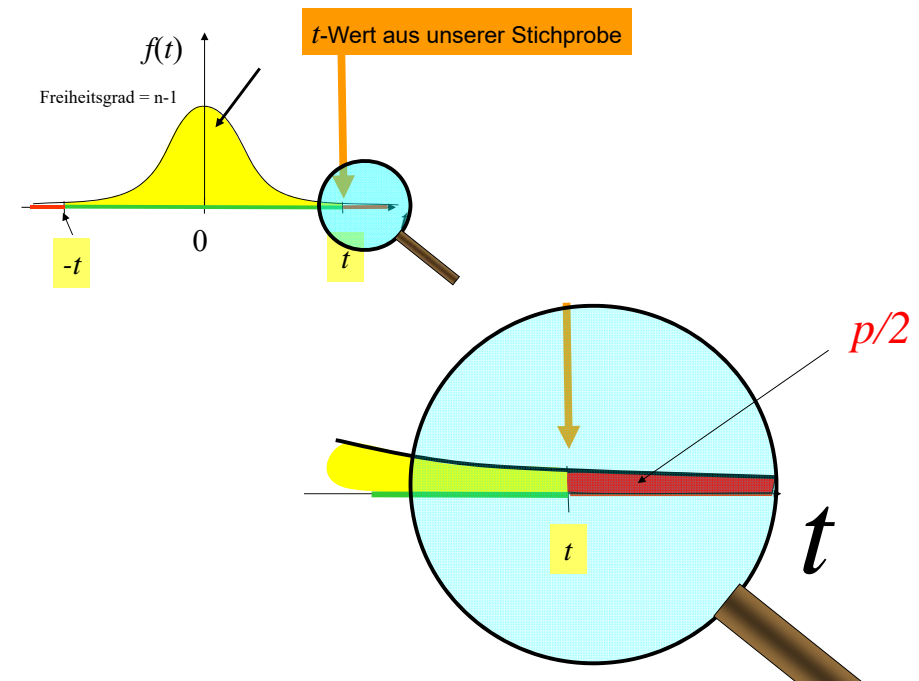
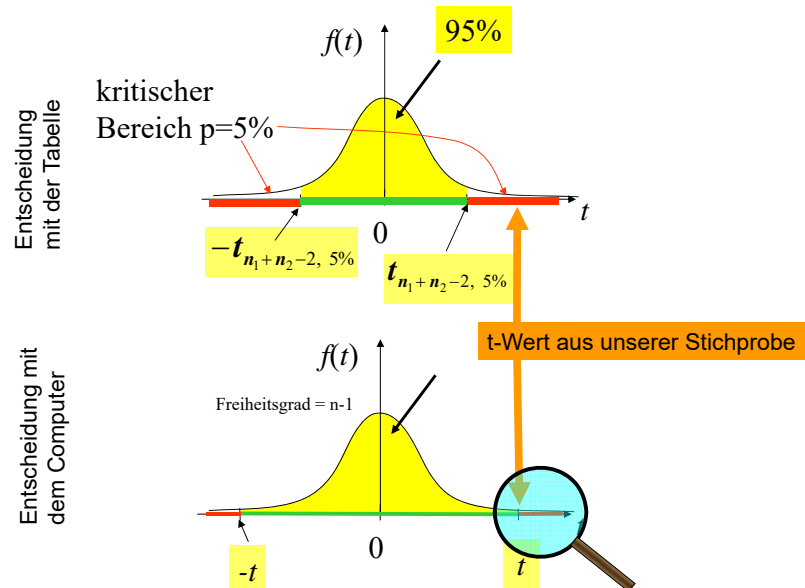
Excel Funktion für  $t$ -Teste:

**ttest(Reihe1; Reihe2; Seiten; Typ)**

Typ: **1 - gepaart (Eine Stichprobe)**  
 2 - Zwei Stichproben, gleiche Varianz  
 3 - Zwei Stichproben, ungleiche Varianz

Diese Funktion gibt einen  $p$  Wert an!

### Die Bedeutung des $p$ -Wertes der Excel Funktion





## Entscheidung mit dem $p$ -Wert

1. Fragestellung (mit der Definition der Population!)  
(Bedingung: Normalverteilung)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus ( $\alpha$ )
4. Messung (Stichprobe mit  $n$  Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des  $p$ -Wertes
6. Vergleich von unserem  $p$  und dem Signifikanzniveau ( $\alpha$ )

$$p > \alpha$$

$$p < \alpha$$

7. Die Entscheidung:

die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau **nicht abgelehnt** werden.

Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.

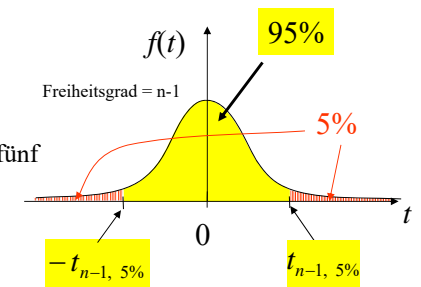
die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau **abgelehnt** werden.

Die Alternativhypothese ist angenommen  
(mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha$ ).

## Die Bedeutung des Signifikanzniveaus

Bei einem unwirksamen Medikament beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $|t| > t_{n-1, \alpha}$  ist, 5%.  
( $\Rightarrow$  Bei der Untersuchung von hundert unwirksamen Pillen werden zufällig fünf als wirksam gefunden!)

$\Downarrow$   
**Fehler erster Art**



## Fehler von 1. und 2. Art

### Fehler erster Art:

Die Nullhypothese wird zufällig abgelehnt werden, obwohl sie richtig ist!

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art = Signifikanzniveau

*zB: Unwirksame Pille als wirksam gefunden*

### Fehler zweiter Art:

Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl sie nicht richtig ist.







Wahrscheinlichkeit =?

*zB: Die Wirkung einer Pille ist so klein, dass man es aus der Messung nicht beweisen kann.  $\Rightarrow$  Man braucht noch mehrere Messungen.*

*$\Rightarrow$  So kleine Wirkung ist oft uninteressant*

## Fehler von 1. und 2. Art

Nullhypothese: unschuldig

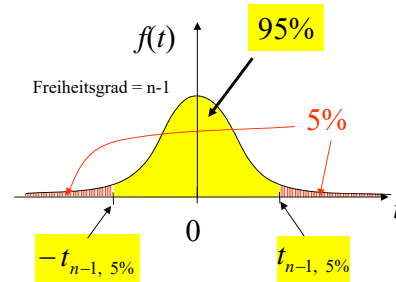
|                | Unschuldige                      | Kriminelle                       |
|----------------|---|---|
| Im Gefängnis   | <b>Fehler erster Art</b><br>     | <b>Richtige Entscheidung</b><br> |
| Auf freiem Fuß | <b>Richtige Entscheidung</b><br> | <b>Fehler zweiter Art</b><br>    |

## Einseitige/zweiseitige Teste

Ist es interessant wenn das Medikament die Körpertemperatur erhöht?

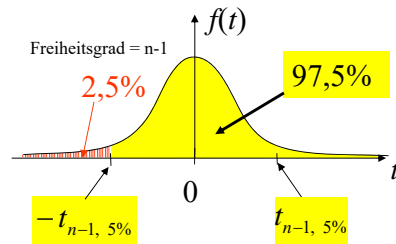
Zweiseitiger Test:

Nullhyp: das Medikament ändert die Körpertemperatur nicht.



Einseitiger Test

Nullhyp: das Medikament erniedrigt die Körpertemperatur nicht.



## Verallgemeinerung: $\mu_0 \neq 0$

Beispiel:

Eine Maschine stellt Pillen mit einem nominalen Wirkstoffgehalt von 20mg her.

Man mißt 10 Tabletten und die Wirkstoffgehalte sind (in mg):

20,1 19,8 19,5 17,9 18,8 19,9 18,6 20,3 19,2 19,3

Durchschnitt 19,34 mg, Standardabweichung 0,74 mg, Standardfehler 0,24 mg

Nullhypothese:  $\mu_0 = 20$  mg

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

Alle weitere Schritte sind wie früher.

$t = -2,80$