

## Hypothesenprüfungen II.

Fehler von erste u. zweite Art,  
Anwendungsbedingungen, Verallgemeinerung,  
Verhältnis der Schätzungen und Hypothesenprüfungen  
Zweistichprobentest

László Smeller

## Widerholung: Grundprinzip der Hypothesenprüfungen

Zu entscheidende Frage

Indirekter Beweis

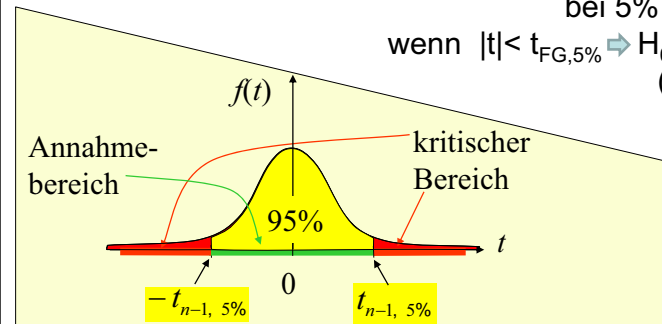
Nullhypothese ( $H_0$ ): nur zufällige Änderungen  
mathematisch behandelbar

Ein geeigneter Parameter (Prüfgröße) (zB.  $t$ )

Bei Gültigkeit der  $H_0$   $t$  folgt einer gut bestimmten Verteilung  
Zu 95%  $|t| < t_{FG,5\%} \Rightarrow$  Wenn  $|t| > t_{FG,5\%} \Rightarrow H_0$  wird abgelehnt  
bei 5% Irrtumswahrsch.

wenn  $|t| < t_{FG,5\%} \Rightarrow H_0$  wird beibehalten  
(bei 5% Irrtumsw.).

**Zur Erinnerung**



2

## Hypothesenprüfung mit Excel

Excel Funktion für  $t$ -Teste:

**ttest(Matrix1; Matrix2; Seiten; Typ)**

Messreihe 1  
z.B: Temperatur  
vor der Eingabe  
des Fiebersmittels

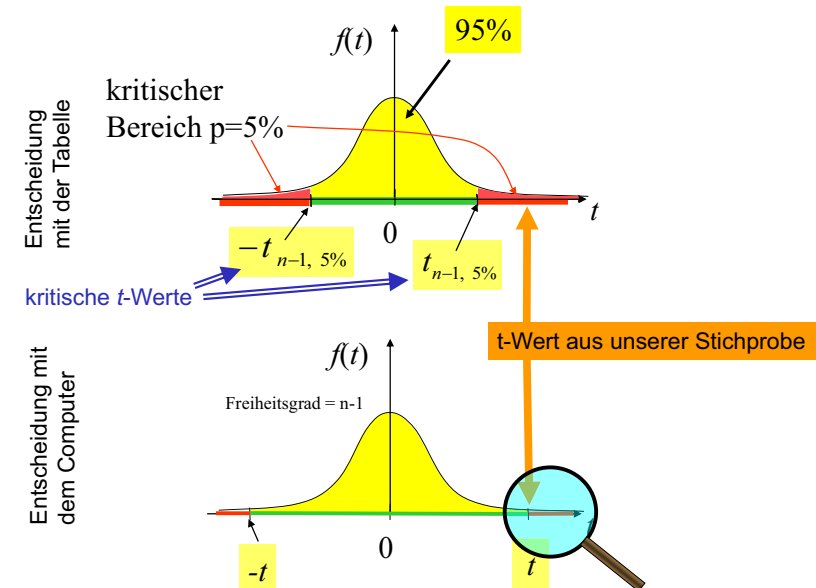
Messreihe 2  
z.B: Temperatur  
nach der Eingabe  
des Fiebersmittels

Siehe  
später

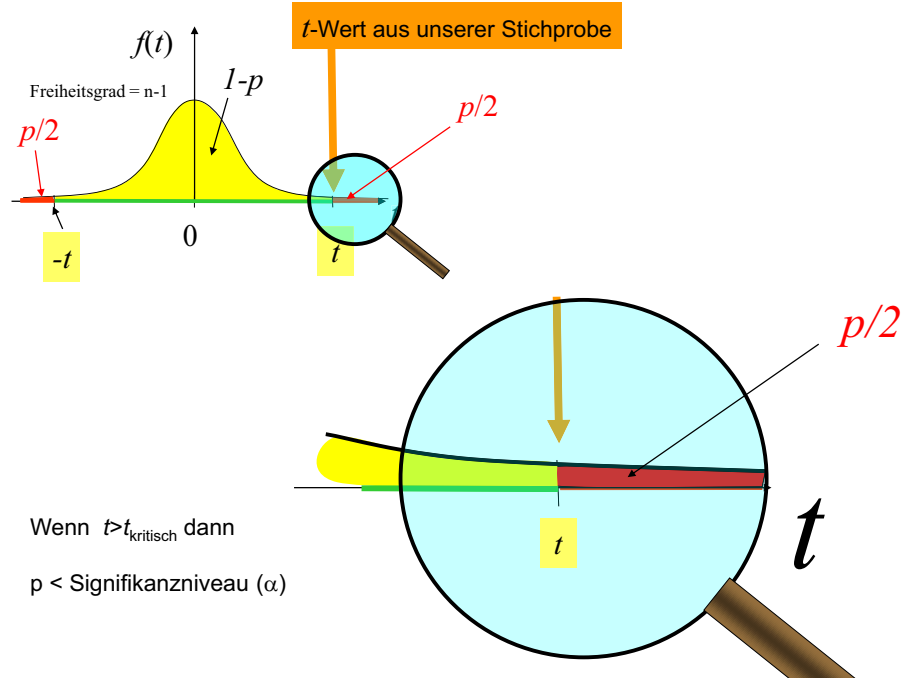
Typ: 1 - gepaart (Eine Stichprobe)  
2 - Zwei Stichproben, gleiche Varianz  
3 - Zwei Stichproben, ungleiche Varianz

Diese Funktion gibt einen  $p$  Wert an! (statt  $t$ !)

## Die Bedeutung des $p$ -Wertes der Excel Funktion



4



## Entscheidung mit dem $p$ -Wert

1. Fragestellung (mit der Definition der Population!)  
(Bedingung: Normalverteilung)
2. Nullhypothese - Alternativhypothese
3. Festlegung des Signifikanzniveaus ( $\alpha$ )
4. Messung (Stichprobe mit  $n$  Messungen, Repräsentativität!)
5. Berechnung des  $p$ -Wertes
6. Vergleich von unserem  $p$  und dem Signifikanzniveau ( $\alpha$ )

$$p > \alpha$$

$$p < \alpha$$

7. Die Entscheidung:

die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau **nicht abgelehnt** werden.

die Nullhypothese kann mit einem  $\alpha$  Signifikanzniveau **abgelehnt** werden

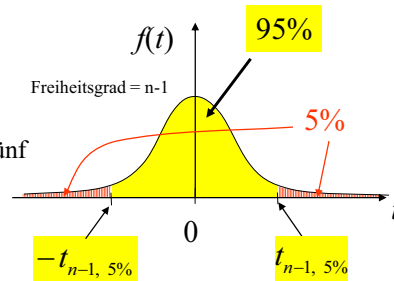
Anhand unserer Messung kann die Alternativhypothese nicht bewiesen werden.

Die Alternativhypothese ist angenommen (mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha$ ).

## Die Bedeutung des Signifikanzniveaus

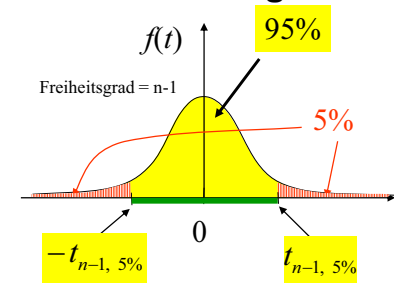
Bei einem unwirksamen Medikament beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $|t| > t_{n-1, \alpha}$  ist, 5%.  
( $\Rightarrow$  Bei der Untersuchung von hundert unwirksamen Pillen werden zufällig fünf als wirksam gefunden!)

**Fehler erster Art**

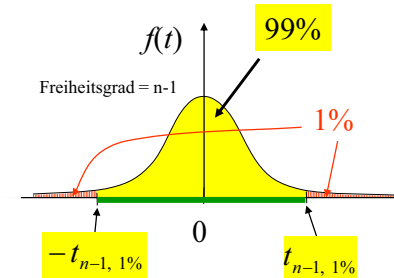


D.h.: wegen des Fehlers erster Art wird eine aus 20 unwirksamen Pillen zufällig und fehlerhaft als wirksam (mit 5% Irrtumswahrscheinlichkeit) gefunden.

## Die Bedeutung des Signifikanzniveaus



Signifikanzniveau=5%



Signifikanzniveau=1%

## Fehler von 1. und 2. Art

### Fehler erster Art ( $\alpha$ -Fehler):

Die Nullhypothese wird zufällig abgelehnt werden, obwohl sie richtig ist!

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art = Signifikanzniveau

zB: *Unwirksame Pille als wirksam gefunden*

### Fehler zweiter Art ( $\beta$ -Fehler):

Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl sie nicht richtig ist.



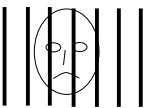



Wahrscheinlichkeit =?

zB: *Die Wirkung einer Pille ist so klein, dass man es aus der Messung nicht beweisen kann.*  $\Rightarrow$  *Man braucht noch mehrere Messungen.*

$\Rightarrow$  *So kleine Wirkung ist oft uninteressant, weil es klinisch irrelevant ist.*

## Fehler von 1. und 2. Art

Bei der Gerichtsverhandlung: Nullhypothese: unschuldig

	Unschuldige 	Kriminelle 
Im Gefängnis	Fehler erster Art 	Richtige Entscheidung 
Auf freiem Fuß	Richtige Entscheidung 	Fehler zweiter Art 

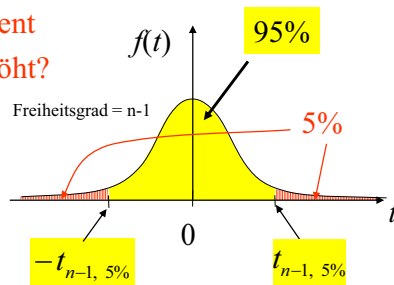
## Einseitige/zweiseitige Tests

Wenn wir ein Fiebermittel testen:

Ist es interessant wenn das Medikament die Körpertemperatur signifikant erhöht?

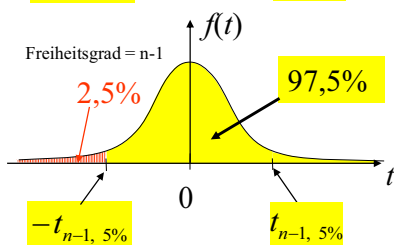
Zweiseitiger Test:

Nullhyp: das Medikament ändert die Körpertemperatur nicht.



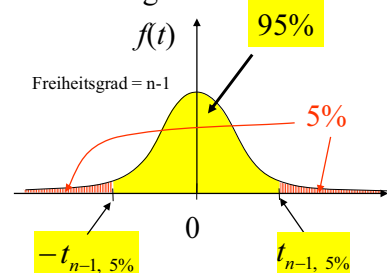
Einseitiger Test

Nullhyp: das Medikament erniedrigt die Körpertemperatur nicht.

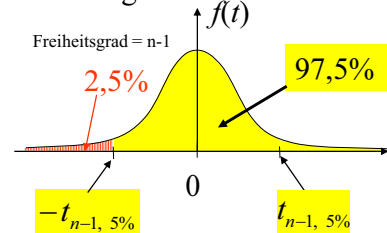


## Einseitige/zweiseitige Tests

Zweiseitiger Test:



Einseitiger Test



Freiheitsgrad (FG)	$p$ (Irrtumswahrscheinlichkeit, einseitiger Test)						
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
	$p$ (Irrtumswahrscheinlichkeit, zweiseitiger Test)						
	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,70	31,82	63,65
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,703	1,385	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,700	1,375	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,717	3,106
12	0,259	0,695	1,356	1,783	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,694	1,350	1,772	2,161	2,658	3,017
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831

## Effekt des Stichprobenumfanges

Erhöhung des Stichprobenumfanges:

wenn  $n \rightarrow \infty$  dann  $s_{\bar{x}} \rightarrow 0$

Wenn  $H_0$  ist ungültig,  $t$  steigt mit Erhöhung des  $n$ -es, und  $H_0$  wird mit kleinerem Irrtumswahrscheinlichkeit abgelehnt:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_1 - \mu_0}{0} = \infty$$

Erhöhter Stichprobenumfang führt zu besserer (sicherer) Entscheidung

## Verallgemeinerung: $\mu_0 \neq 0$

Beispiel:

Eine Maschine stellt Pillen mit einem nominalen Wirkstoffgehalt von 20mg her.

Man misst 10 Tabletten und die Wirkstoffgehalte sind (in mg):

20,1 19,8 19,5 17,9 18,8 19,9 18,6 20,3 19,2 19,3

Durchschnitt 19,34 mg, Standardabweichung 0,74 mg, Standardfehler 0,24 mg

Nullhypothese:  $\mu_0 = 20$  mg

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

Alle weiteren Schritte sind wie früher.

$t = -2,80$

## Placeboeffekt

Placebo: Scheinmedikament, d.h. Pille ohne Wirkstoff

Placeboeffekt: Positive psychische und körperliche Reaktion, die nicht auf die spezifische Wirksamkeit einer Behandlung zurückzuführen ist, sondern auf den psychosozialen Kontext der Behandlung.

Vergleich von zwei Gruppen: Zweistichprobentest