Variancia-analízis (ANOVA)

A

B

C

Van különbség a csoportok között?

Nincs, az eltérés csak véletlen! Ez a nullhipotézis.

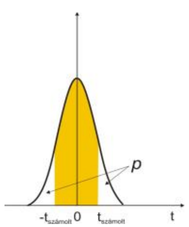
Miért nem csinálunk kétmintás t-próbákat?

Mert a tévedés lehetősége nagyon megnőne!

A – B és B – C valamint A – C összehasonlítása. (nem tranzitív)

csoportok száma	próbák száma
3	3
4	6
5	10

Mekkora a tévedés esélye?



Tételezzük fel, hogy mindhárom esetben elvetjük a nullhipotézist.

p – annak a valószínűsége, hogy kívül van (**1-p**) – annak, hogy belül van az érték véletlenül.

Kérdés: Mekkora az esélye, hogy legalább egy esetben tévedtünk?

Mekkora az esélye, hogy legalább egy kívül essen véletlenül?

Egy próba esetében ez ***p*** (legyen 5%). Több próba esetében a binomiális eloszlás adja meg.

Ez ebben az esetben kb. 15%!!!

5% eléréséhez a p értékének kb. 5/3 %-nak kell lennie.

$$1-(1-p)^3$$

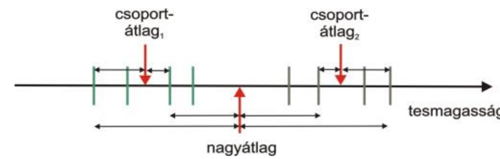
Több csoport

A csoportokat kezelhetjük
külön-külön
és együtt!

Csoportátlag: a csoport elemeiből számolt átlag.

Nagyátlag: a teljes adathalmazból számolt átlag.

A variancia összetevői



Emlékeztető:

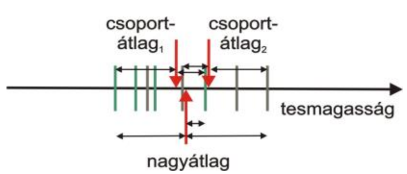
A variancia arányos az átlagtól való eltérések négyzetösszegével!

Ha a csoportok jelentősen különböznek egymástól, a nagyátlagtól való átlagos eltérések jóval nagyobbak, mint a csoporton belül a csoportátlagtól való eltérések!

Az ANOVA alapja

Ebben az esetben
nem olyan nagy a
különbség!

A teljes variancia (a nagyátlagtól vett eltérésekből számolt) a csoportokon belüli és a csoportok közötti varianciából tevődik össze!



A variancia összetevői

	1. csoport	2. csoport	3. csoport
1	173	170	175
2	175	163	174
3	169	165	171
4	168		172
5			172
csoportátlag	171,25	166	172,8

nagyátlag = 170, 58

(170-170,58) = (170-166) + (166-170,58)

(175-170,58) = (175-172,8) + (172,8-170,58)

$$(x_{i,j}-\bar{x}) = (x_{i,j}-\bar{x}_j)+(\bar{x}_j-\bar{x})$$

csoportok közötti különbség

csoporton belüli (pl. véletlen) eltérés

$\bar{x}$ - nagyátlag

$\bar{x}_j$ - csoportátlag

A variancia felbontása

(Nem kell tudni!)

$$(x_{i,j}-\bar{x})=(x_{i,j}-\bar{x}_j)+(\bar{x}_j-\bar{x})$$

$$\Downarrow$$

$$(x_{i,j}-\bar{x})^2=(x_{i,j}-\bar{x}_j)^2+(\bar{x}_j-\bar{x})^2+2(x_{i,j}-\bar{x}_j)(\bar{x}_j-\bar{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\sum(x_{i,j}-\bar{x})^2=\sum(x_{i,j}-\bar{x}_j)^2+\sum(\bar{x}_j-\bar{x})^2+\sum 2(\bar{x}_{i,j}-\bar{x}_j)(\bar{x}_j-\bar{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\sum(x_{i,j}-\bar{x})^2=\sum(x_{i,j}-\bar{x}_j)^2+\sum(\bar{x}_j-\bar{x})^2$$

SS_T SS_E SS_A

a csoporton belüli és a csoportok közötti eltérések kovarianciája. Ezeket függetlennek feltételezve, ez a tag nulla!

A varianciák kiszámolása

	négyzetösszeg	szab. fok	variancia
teljes	$SS_T=\sum_{i,j}(x_{i,j}-\bar{x})^2$	N-1	
csoportok között	$SS_A=\sum_j n_j(\bar{x}_j-\bar{x})^2$	k-1	$MS_A=\frac{SS_A}{k-1}$
csoporton belül	$SS_E=SS_T-SS_A$	N-k	$MS_E=\frac{SS_E}{N-k}$

$\bar{x}$ nagyátlag

$\bar{x}_j$ j-edik csoportátlag

N – összes elem száma
k – csoportok száma

A nullhipotézis

A csoportok között nincs különbség.

A csoportok közötti eltérés csupán a véletlen műve.

Döntés: a csoportok közötti és a csoporton belüli varianciák összehasonlítása alapján.

Hogyan hasonlítjuk össze?

Varianciák összehasonlítása? Ilyenről már volt szó!

Valóban, a kétmintás t-próba esetében.

$$F=\frac{MS_A}{MS_E}$$

A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(F \geq F_{krit}) \leq \alpha$) – ***elvetjük*** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(F \geq F_{krit}) > \alpha$) – ***megtartjuk*** a nullhipotézist.

(A döntés után, ha szükségesnek tartjuk, csinálhatunk *t*-próbákat)

Példa

ÖSSZESÍTÉS						
Csoportok	Darabszám	Összeg	Átlag	Variancia		
Oszlop 1	4	685	171,25	10,91667		
Oszlop 2	3	498	166	13		
Oszlop 3	5	864	172,8	2,7		
VARIANCIAANALÍZIS						
Tényezők	SS	df	MS	F	p-érték	F krit.
Csoportok között	89,36666667	2	44,68333	5,782171	0,02427	4,256495
Csoporton belül	69,55	9	7,727778			
Összesen	158,9166667	11				

$\alpha = 0{,}05$
$p = 0{,}024$

Döntés:
elvetjük a nullhipotézist, a példa alapján a csoportok szignifikánsan különböznek egymástól.

Az ANOVA feltétele

- A feladat: több egymástól **független** csoport összehasonlítása.
- A változó **normális eloszlású** legyen.
- A **szórás** a csoportokban **azonos**nak tekinthető.

Kruskal-Wallis próba

Ha a változó
nem normális eloszlású!

Az adatokat a csoportoktól függetlenül rangsoroljuk!

Rangsorolás

	1. csoport	2. csoport	3. csoport
1	173	170	175
2	175	163	174
3	169	165	171
4	168		172
5			172

elem	163	165	168	169	170	171	172	172	173	174	175	175
rang	1	2	3	4	5	6	7,5	7,5	9	10	11,5	11,5

csoport	elemszám	rangok összege
1	4	27,5
2	3	8
3	5	42,5

A nullhipotézis

A csoportok között nincs különbség.

A rangok „átlaga” közötti eltérés csupán a véletlen műve.

Milyen eloszlást használjunk?

A ***H*** változó χ^2-eloszlást követ!

Akkor jön az átalakítás!

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

N – az elemek száma
R_i – a rangok összege az i-edik csoportban
n_i – az elemek száma az i-edik csoportban

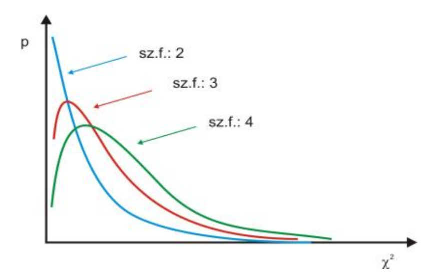
A *H* értéke ≥ 0!

A χ^2-eloszlás

Emlékeztető:

χ^2-eloszlás – normális eloszlású változók négyzetösszege esetén lép fel.

A szabadsági fokok száma = csoportok száma -1



A döntés

- 1. Ha a véletlen eltérés valószínűsége kicsi ($p(\chi^2 \geq \chi^2_{krit}) \leq \alpha$) – ***elvetjük*** a nullhipotézist.
- 2. Ha a véletlen eltérés valószínűsége nagy ($p(\chi^2 \geq \chi^2_{krit}) > \alpha$) – ***megtartjuk*** a nullhipotézist.

Példa

Csoport	Elemszám (n_i)	Rangok összege (R_i)
1	4	27,5
2	3	8
3	5	42,5

N = 12

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

$$4{,}97 = \frac{12}{12(12+1)} \left(\frac{27{,}5^2}{4} + \frac{8^2}{3} + \frac{42{,}5^2}{5} \right) - 3(12+1)$$

sz.f. = 3 – 1 = 2

α = 0,05
p = 0,083

Döntés:

megtartjuk a nullhipotézist, a példa alapján a csoportok nem különböznek egymástól szignifikánsan.

Hasonlítsuk össze!

	1. csoport	2. csoport	3. csoport
1	173	170	175
2	175	163	174
3	169	165	171
4	168		172
5			172

ANOVA

α = 0,05
p = 0,024

Döntés:
elvetjük a nullhipotézist.

!!!

Kruskall-Wallis próba

α = 0,05
p = 0,083

Döntés:
megtartjuk a nullhipotézist.

Hipotézis vizsgálat?

- Felállítjuk a **nullhipotézist**.
- Keresünk egy **ismert eloszlású változót**.
- Az eloszlás alapján kiszámoljuk a **véletlen eltérés valószínűségét**.
- Ha ez kisebb mint a szignifikancia szint **elvetjük**, ellenkező esetben **megtartjuk a nullhipotézist**.
- Ennyi!