SEMMELWEIS EGYETEM

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet,
Nanokémiai Kutatócsoport

Lágy Anyagok Laboratóriuma

TRANSZPORTFOLYAMATOK II
biológiai rendszerekben

Zrínyi Miklós
egyetemi tanár, az MTA rendes tagja
mikloszrinyi@gmail.com

2018

Konduktív transzportfolyamatok egységes leírása

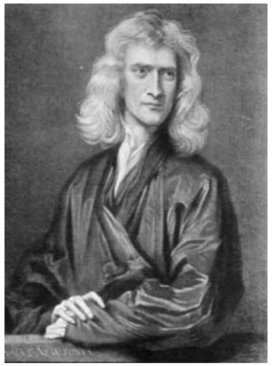
	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (*tömeg áram*)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D\nabla c$	$j_Q = -k\nabla T$	$j_i = -\eta\nabla v$
VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$	
	Fick	Fourier	Newton

Laplace operátor: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

A különböző anyagi rendszerek folyásával foglalkozó tudományt 1928-ban Bingham javaslatára nevezték el reológiának.

(Rheos logos = folyástan)

ΕΛΛΗΝΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΟΣ ΡΕΟΛΟΓΙΑΣ • HELLENIC SOCIETY OF RHEOLOGY • 1996
Τά πάντα ῥεῖ
6ος π.Χ.



Sir Isac Newton (1642-1727)

Ha egy testre **erő** hat → **hely**változás
→ **alak**változás

DEFORMÁCIÓ

rugalmas

viszkózus

Fluidumok áramlása

Fluid fázis: a folyadék és a gáz halmazállapot összefoglaló neve, amely arra utal, hogy az anyagok mindkét állapotban viszonylag könnyen változtatják alakjukat, könnyen folynak.

A reológiai viselkedés viszonylagossága

Deborah-szám

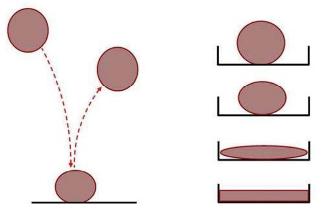
$$D_e = \frac{\tau}{t}$$

τ – Relaxációs idő

t – Megfigyelés ideje

$D_e >> 1$	$D_e \approx 1$	$D_e << 1$
szilárd	**viszkoelasztikus**	**folyékony**

rugalmas **viszkózus**

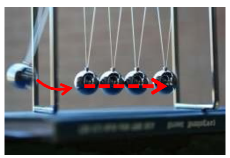


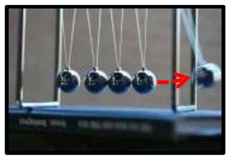
rugalmas	viszkózus
$\tau >> t$	$\tau << t$
$D_e >> 1$	$D_e << 1$

Még a kőzetek is folynak a geológiai időtartam alatt!

REOLÓGIA

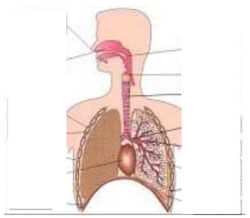
(*konduktív impulzustranszport*)



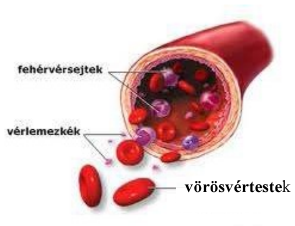


(Rheos logos = áramlástan)

Légzés



Vérkeringés



A térfogatáram hajtóereje: a nyomáskülönbség

$1\ Hgmm = 133{,}32\ Pa$

$1\ atm = 735{,}55\ Hgmm$

	P/Hgmm
arteriás (szisztolés)	100 - 140
arteriás (diasztolés)	60 - 90
kapilláris az artéria végénél	30

Alapfogalmak

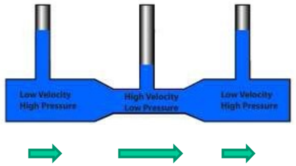
Folyás

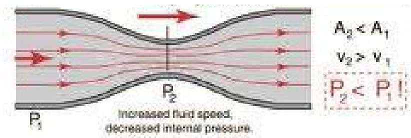
- **lamináris**,
- turbulens,
- összenyomható,
- **összenyomhatatlan**,
- „száraz”,
- **viszkózus,**
- **állandó,**
- pulzáló,
- rotáló.

Daniell Bernoulli
1700-1782

Bernoulli egyenlet

$$p + \frac{1}{2}\rho v_x^2 + \rho g h = konst.$$





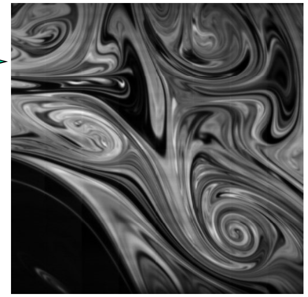
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$$

Az áramlás típusai

turbulens

átmenet

laminÁris



$$R_e = \left.\frac{tehetetlenségi}{viszkózus}\right\} \text{ erők}$$

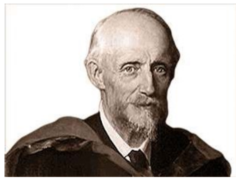
$$\boxed{R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}}$$

v: *átlagos áramlási sebesség*

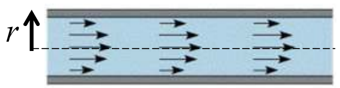
ρ: *folyadék sűrűsége*

η : *viszkozitás*

d: *átmérő*



Osborne Reynolds
1842-1912

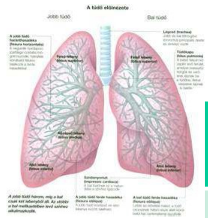


ha $R_e < 2100$

Lamináris áramlás

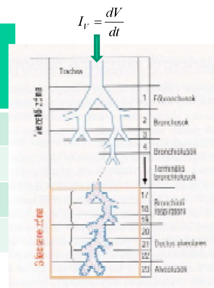
Megjegyzés*: ha átmérő helyett sugarat használunk, akkor Re=1150*

Levegő áramlása a tüdőben



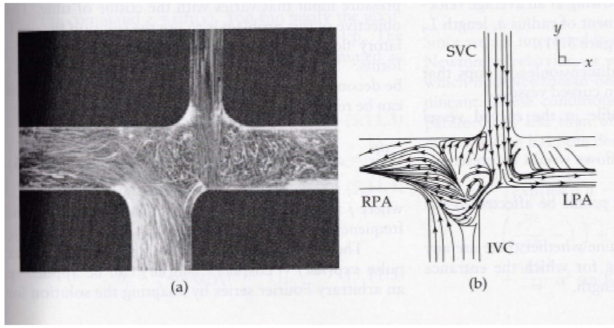
23 generáció a légcsövek átmérőjében

	Normál légzés 12/perc		Heves légzés 30/perc	
átmérő (cm)	***v* (cm/s)**	**Re**	***v* (cm/s)**	**Re**
1,8	197	2325	790	**9324**
0,56	250	921	1002	**3684**
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127



$$\frac{dV_{lev.}}{dt} =: 6 \;\; L/\min \;\; \Rightarrow \;\; O_2 \;:\; 2kg/nap$$

Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légcsövekben.

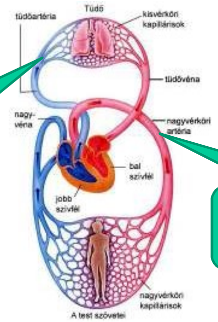


Elágazásoknál és szűkületeknél könnyen kialakulhat turbulencia!

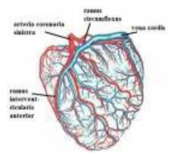
A vérkeringés

Impulzus, anyag és energia transzport

A **kisvérkör**, amelynek feladata a szívből a tüdőbe eljuttatni az oxigénben szegény és széndioxidban dús vért és a tüdőből a szívbe szállítani az oxigénben dús vért.
A **nagyvérkör**, amely a szívből a szervekhez juttatja az oxigénben dús és onnan szállítja el az „elhasznált" vért együttesen alkotja a vérkeringést.



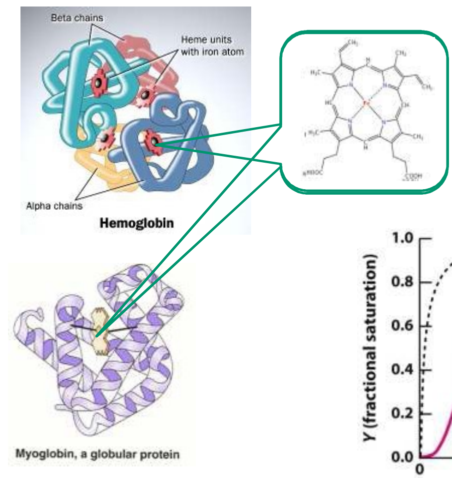
Vér áramlása a szív- és érrendszerben

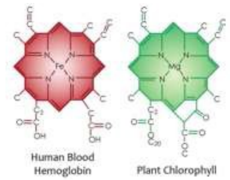


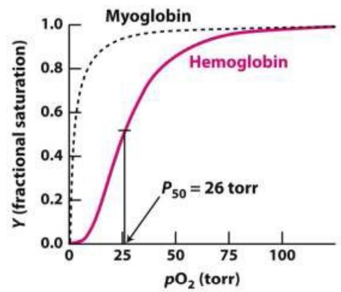
erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	4500	20	750
↓ aorta	1,3	105	3400	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	10^{-6}

A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris.** Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

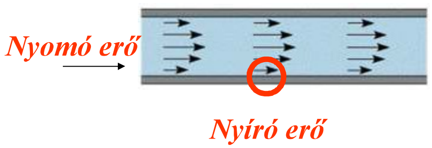
Az oxigén megkötése a hemoglobinnal kooperatív folyamat



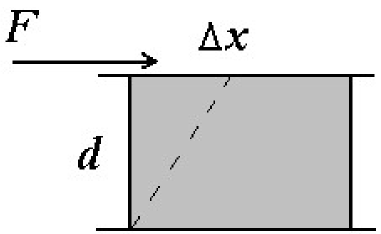




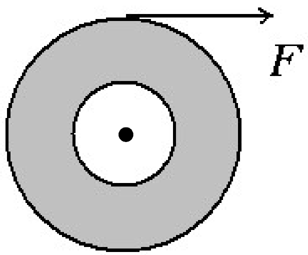
Alapfogalmak:



Nyírás: tangenciálisan ható (***nyíró***)erő (F) vált ki deformációt.



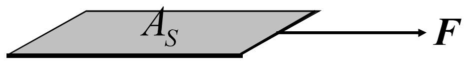
Tiszta nyírás



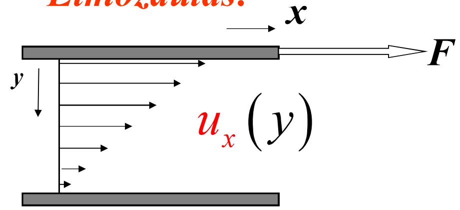
Rotációs nyírás

Alapfogalmak:

Nyírófeszültség: $\boxed{\tau = \dfrac{F}{A_S}}$

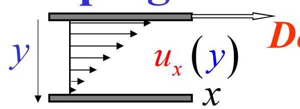


Elmozdulás:



Deformáció: $\boxed{\gamma = \dfrac{du_x(y)}{dy}}$

Alapfogalmak:



Deformáció: $\boxed{\gamma = \dfrac{du_x}{dy}}$

Deformáció sebesség: $\boxed{\dfrac{d\gamma}{dt}}$

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du_x}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du_x}{dt}\right) = \frac{dv_x}{dy}}$$

*A **deformáció sebesség** megegyezik a **sebesség gradienssel**!*

Alapfogalmak:

$$j_i = -\eta \nabla v \quad \xrightarrow{\boxed{j_i = -\tau}} \quad \tau = \eta \nabla v$$

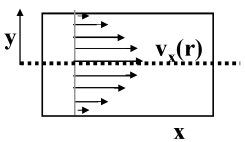
Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

$$\boxed{\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}}$$

Newton egyenlet

viszkozitás

A reológia alapösszefüggése. Newton egyenlet



$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow \boxed{\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}}$$

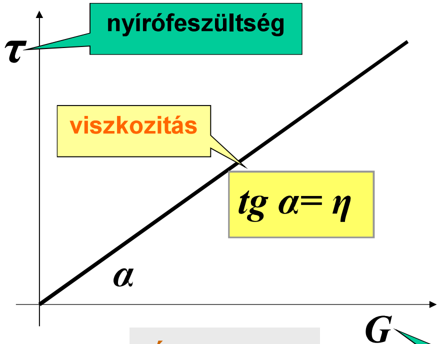
Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

Nyírófeszültség: $\tau = \dfrac{F}{A_S}$

Sebesség gradiens:

$$G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}$$

Newtoni folyadék folyásgörbéje



$$\tau = \eta \cdot G$$

$[Pa]$ $[Pa \cdot s]$ $[s^{-1}]$

víz,

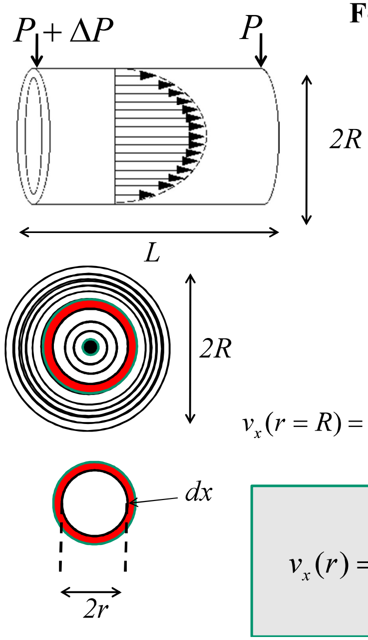
tej,

cukor oldat,

étolaj

Folyadék áramlása kapillárisban

áramlási profil



$$\tau = \eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} = -\frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L}$$

$$dv_x = \frac{\tau}{\eta} dr = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot r \cdot dr = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d\left(r^2\right)$$

$$v_x(r = R) = 0 \qquad v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konst.$$

$$\boxed{v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

Folyadék áramlása kapillárisban

térfogatáram

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

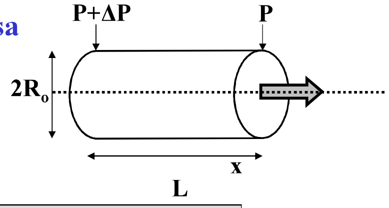
$$\boxed{v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}} \qquad v_x(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr \qquad I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot dr$$

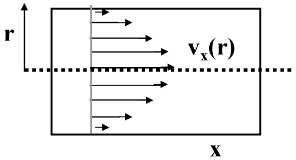
$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$\boxed{\overline{v_x} = \frac{I_V}{R_o^2 \pi} = \frac{R_0^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max}}$$

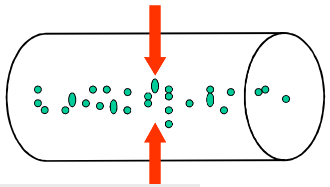
Newtoni folyadék lamináris áramlása
(összefoglalás)



Parabolikus sebesség profil



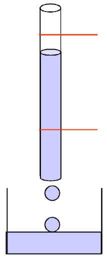
$$v_z(r)=\frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta}\cdot\left(1-\frac{r^2}{R_0^2}\right)$$



Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V=\frac{\pi\cdot R_o^{\;4}}{8\eta}\cdot\frac{\Delta P}{L}$$

Térfogatáram



$p+\frac{1}{2}\rho v_x^2+\rho g h=const$ Bernoulli törvény

Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt *pascal secundum (Pa·s)*

Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) tiszteletére használták a

1 poise = 100 centipoise = 0.1 Pa·s.

Az orvosi gyakorlatban ma is gyakran a cP (centi-poise)-t használják

Fluiditás a viszkozitás reciproka

Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa *($m^2\ s^{-1}$) vagy stoke (St).*

Néhány folyadék viszkozitása

anyag	T/ °C	viszkozitás $/mPa\cdot s$
víz	20	1,0
glicerin	20	1500
n-pentán	20	0,23

biofolyadék	T/ °C	viszkozitás $/mPa\cdot s$
vér	37	4 (nem Newtoni !)
vér plazma	37	1,5
könny	37	0,73 – 0,97
levegő	18	0,018
liquor	20	1,02

Relatív viszkozitás (η_{rel}).

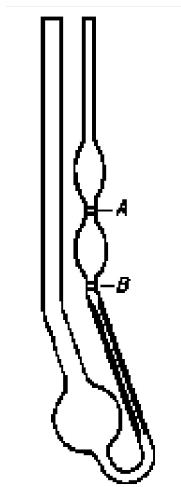
$$\eta_{rel}=\frac{\eta}{\eta_o}=\frac{t}{t_o}$$

oldat

oldószer

Specifikus viszkozitás (η_{sp})

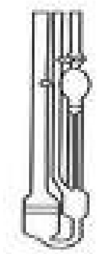
$$\eta_{sp}=\eta_{rel}-1$$



Ostwald-féle viszkoziméter

Redukált viszkozitás (η_{red})

$$\boxed{\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}}$$

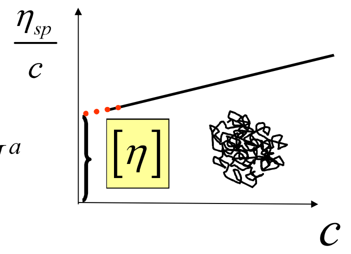


Ubbelohde féle viszkoziméter

Jellemző viszkozitás ($[\eta]$)

$$\boxed{[\eta] = \lim_{c \to 0} \eta_{red}}$$

$$[\eta] = k \cdot M^{a}$$



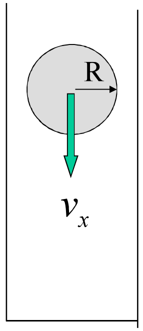
$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$f_S = 4R^2\pi \cdot \tau \qquad \frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{R}$$

$$f_S = 4R^2\pi \cdot \eta \cdot \frac{v}{R}$$

$$\boxed{f_S = 4\pi\eta R v_x}$$

George Stokes
1819-1903

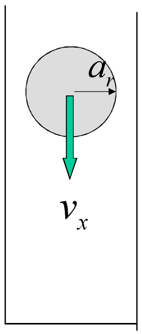


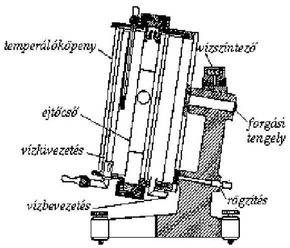
Stokes törvény:

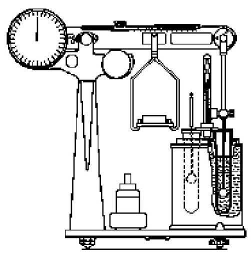
$$\boxed{f_\eta = 6\pi\eta R v_x}$$

$$\boxed{f_g = f_\eta} \Rightarrow \boxed{v_x = \frac{2}{9}\frac{R^2 \Delta\rho g}{\eta}}$$

$$\boxed{f_\eta = 6\pi\eta a_r v_x}$$

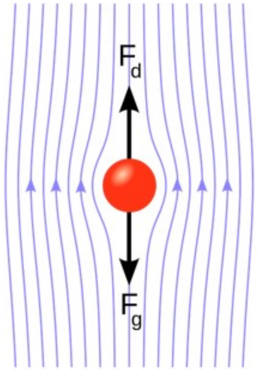


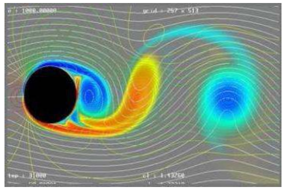




Höppler féle viszkoziméter

Kármán örvénysor





Kármán Tódor
1881-1963

lamináris

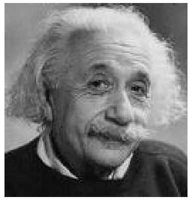
$R_e < 2100$

turbulens

$R_e >> 2100$

Híg szuszpenziók viszkozitása

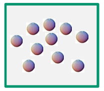
Általában *newtoni* viselkedés



Albert Einstein
1879-1955

Einstein-egyenlet

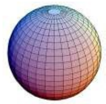
$$\left[\eta\right] = 2.5\Phi$$



$$\eta = \eta_o\left(1 + 2.5\Phi\right)$$

Térfogati tört

Einstein-egyenlet általánosítása:



$$\left[\eta\right] = \nu_a\Phi$$

$$\eta = \eta_o\left(1 + \nu_a\Phi\right)$$

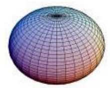
Aszimmetria faktor

$$\nu_a = \frac{(a/b)^2}{15\left[\ln\left(\frac{2a}{b}\right) - \frac{3}{2}\right]} + \frac{(a/b)^2}{5\left[\ln\left(\frac{2a}{b}\right) - \frac{1}{2}\right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid

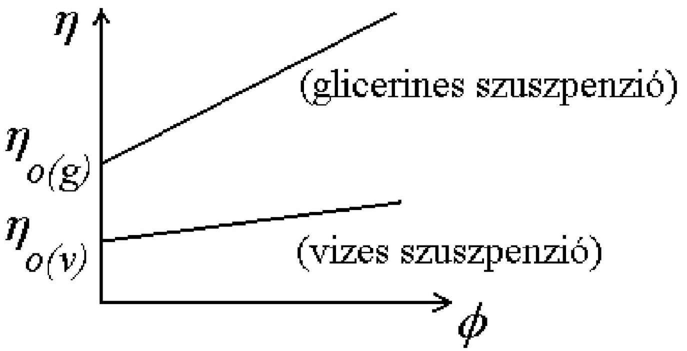
$$\nu_a = \frac{16(a/b)}{15\tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid

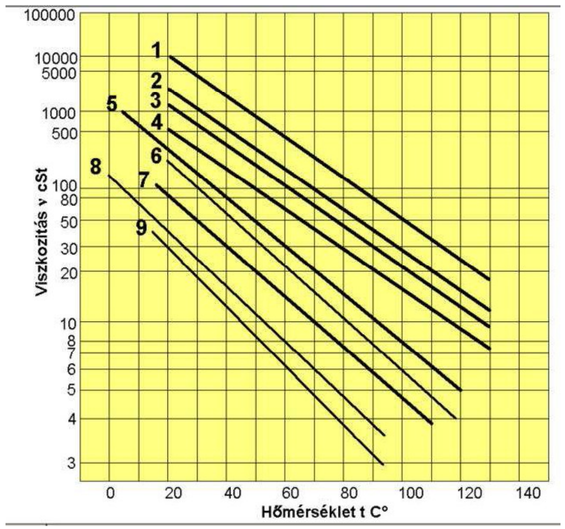


DNS-re: $a/b = 27{,}8$ $\nu_a = 65{,}2$

$$\eta = \eta_o\left(1 + 2.5\Phi\right)$$



A viszkozitás függése a hőmérséklettől:



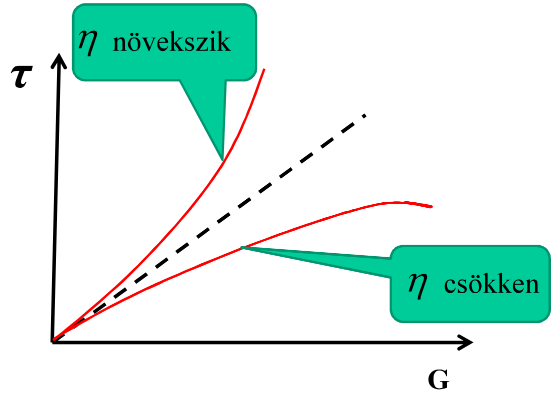
$$\eta(T) = \eta_o \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

Stokes-Einstein törvény:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a_r}$$

Nem newtoni folyadékok

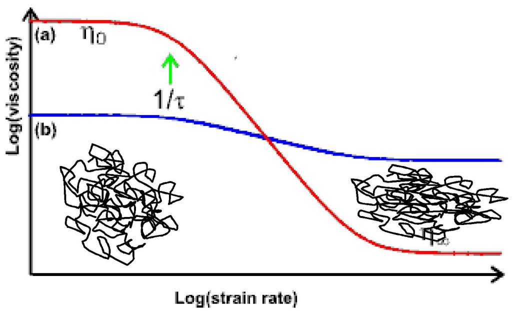
- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a deformációs hatás mértékétől és idejétől is függ.



•szerkezeti viszkozitás

.

Viszkozitás csökken nyírás hatására



polimer oldat

festék

ketchup

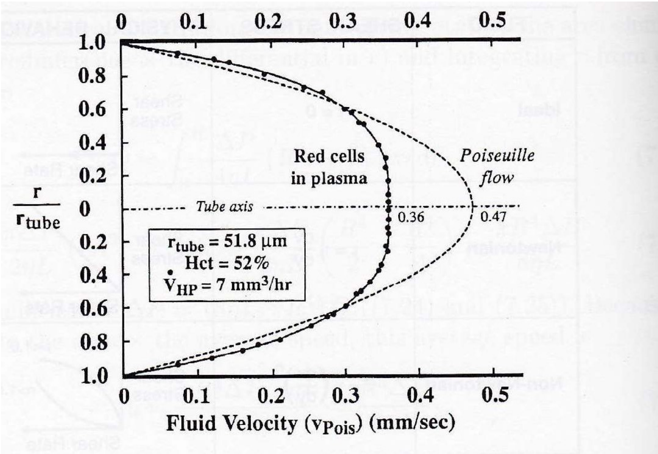
Vér áramlása elágazó erekben

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta L} \cdot \Delta P = \frac{1}{R_{res}} \cdot \Delta P$$

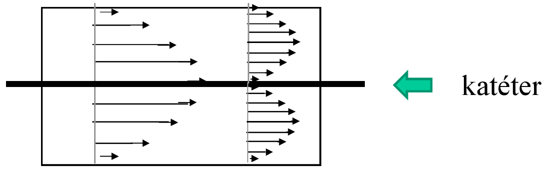
$$R_{res}(soros) = \sum_i R_{res,i}$$

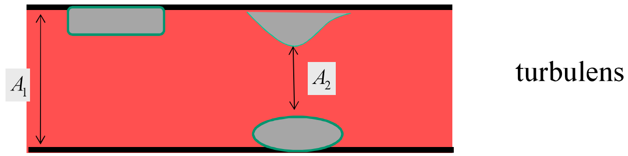
$$\frac{1}{R_{res}(párhuzamos)} = \sum_i \frac{1}{R_{res,i}}$$

érszakasz	átmérő cm	hossz cm	elágazások száma	áramlási seb. cm/s
aorta	2,4	40	1	23
artériák	0,4	15	160	5
kapillárisok	0,0007	0,07	$1,2 \cdot 10^{10}$	0,022
vénák	0,5	15	200	2,5

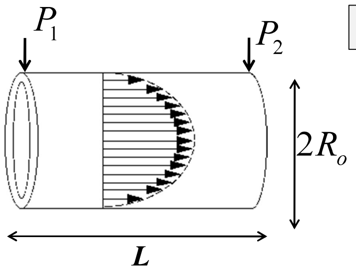


Parabolikus sebesség profil módosulása





Gázok áramlása kapillárisban



$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2\pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} \neq \frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L}$$

$$I_V = \frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P}\frac{dn}{dt} = \frac{RT}{P} I_n$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{8\eta} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx}$$

$$I_n dx = \frac{R_o^4 \pi}{16\eta RT} d\left(p^2\right)$$

$$\boxed{I_n = \frac{R_o^4 \pi}{16 L \eta RT}\left(P_1^2 - P_2^2\right)}$$

A gáz áramlási sebessége nem a nyomások, hanem a nyomásnégyzetek különbségével arányos!