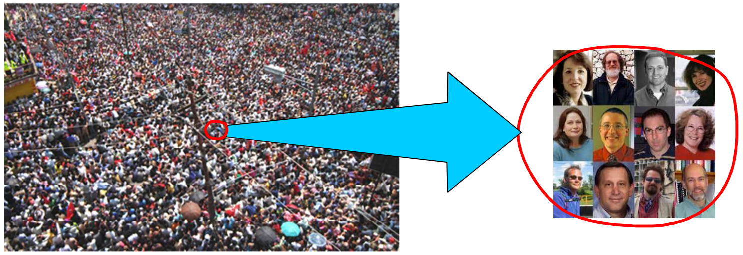
Analytische Statistik
Statistische Schätzungen, Konfidenz

László Smeller

Statistische Schätzungen

(8,5±1,5) cm

Analytische Statistik
(induktive o. schließende Statistik)



Population	Stichprobe
N = „unendlich”	n = endlich

Theoretische Verteilung
Erwartungswert
Theoretische Streuung

Häufigkeitsverteilung
Durchschnitt
Standardabweichung

Aufgabe der Schätztheorie

Aus einer Stichprobe Schätzwerte für

- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert
- Streuung
- oder andere Parametern einer Verteilung

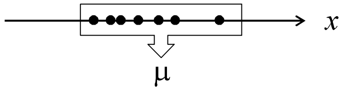
zu ermitteln.

Typen der Schätzungen:

- ***Punktschätzung***
- ***Intervallschätzung***

Punktschätzungen

Wir wollen jetzt die Parameter einer Verteilung (z.B.: μ,σ) aus den konkreten Werten $x_1,\ldots x_n$ einer Stichprobe „möglichst gut“ bestimmen, d.h. einen „Näherungswert“ errechnen.



Kriterien:

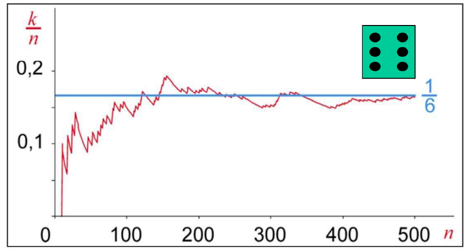
Erwartungstreue (unverzerrt)	Erwartungswert der Schätzwerte = zu schätzender Parameter
Konsistenz	$n \uparrow \;\Rightarrow$ bessere Schätzung
Effizienz (wirksam)	kleine Streuung
Exhaustivität (erschöpfend)	berücksichtigt alle Informationen

Punktschätzungen

Der Parameter wird mit einem Wert geschätzt.

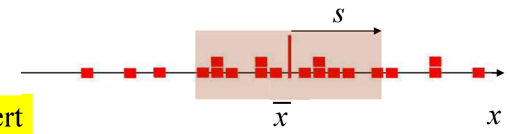
Relative Häufigkeit
ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

Siehe Definition der statistischen Wahrscheinlichkeit!

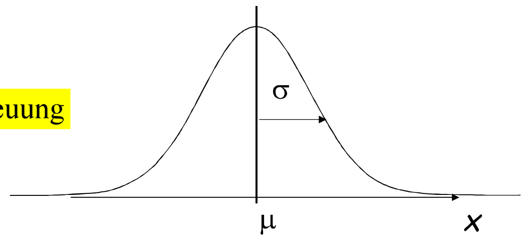


Punktschätzungen

Durchschnitt
ist ein Schätzwert
für den Erwartungswert



Standardabweichung
ist ein Schätzwert
für die theoretische Streuung



Punktschätzungen sagen
***nichts** über die Genauigkeit bzw. Sicherheit*
der Schätzung **!**

Intervallschätzungen

Intervallschätzung oder Konfidenzschätzung gibt zu einer vorgewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit γ, (Konfidenzniveau) ein Intervall (c_1,c_2) an, in dem der unbekannte Parameter (zB. μ oder σ) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens γ liegt.

Zb.: Erwartungswert der Pulszahl ist bei
95% Konfidenzniveau: (74±6) $^{1}/_{\mathrm{Min}}$

$\alpha=1-\gamma$ Irrtumswahrscheinlichkeit

Intervallschätzungen

Wie große γ Sicherheitswahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) soll gewählt werden?

Wichtige Faktoren:

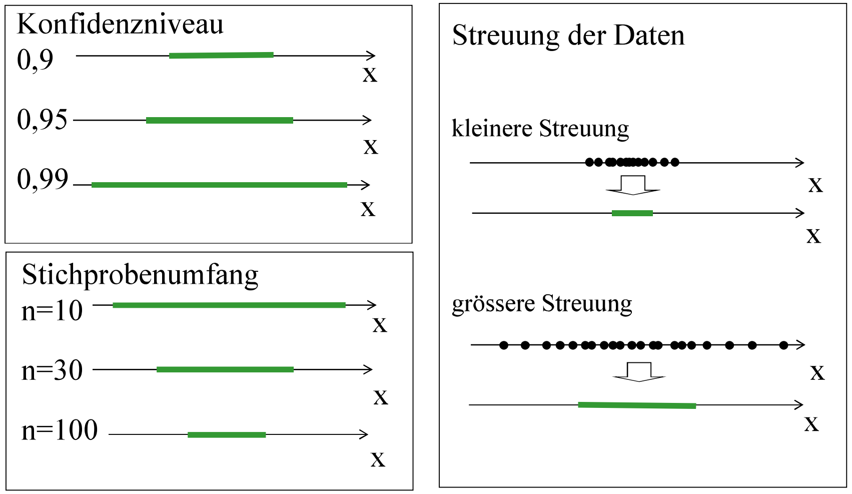
- Streuung der Daten
- Stichprobenumfang
- Größe der Schaden bei einer falschen Schätzung

Sozialwissenschaft $\gamma=0{,}9$

Medizin $\gamma=0{,}95$

Technik $\gamma=0{,}99$

Einfluss des Konfidenzniveaus, der Streuung und des Stichprobenumfanges auf die Breite des Konfidenzintervalles



Konfidenzintervall für den Erwartungswert

Wir wollen eine Intervallschätzung für den Erwartungswert (μ) einer Zufallsgröße (zB: Körperhöhe) geben.

Gedankenexperiment:

Nehmen wir jetzt viele Stichproben, (zB: viele Studentengruppen) alle mit gleichem Stichprobenumfang *n*.

$\bar{x}_i$ ist der Durchschnitt der *i*-ten Stichprobe

$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_4$ . . . $\bar{x}_i$ . . .

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

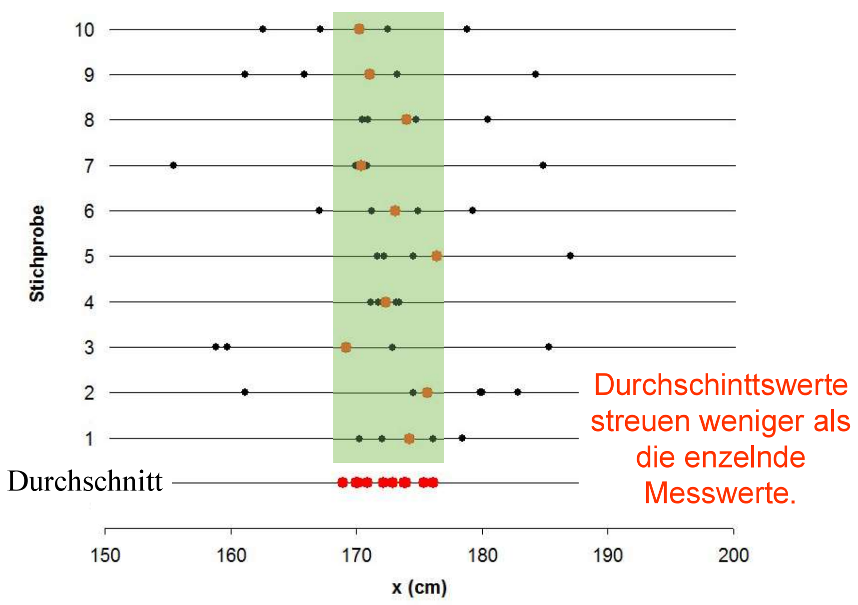
$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_4$ . . . $\bar{x}_i$

Wie sieht die Verteilung von $\bar{x}_i$ Werte aus?

Zentraler Grenzwertsatz: bei genug hohen *n* die Verteilung der Durchschinttswerte ($\bar{x}_i$) ist eine Normalverteilung.

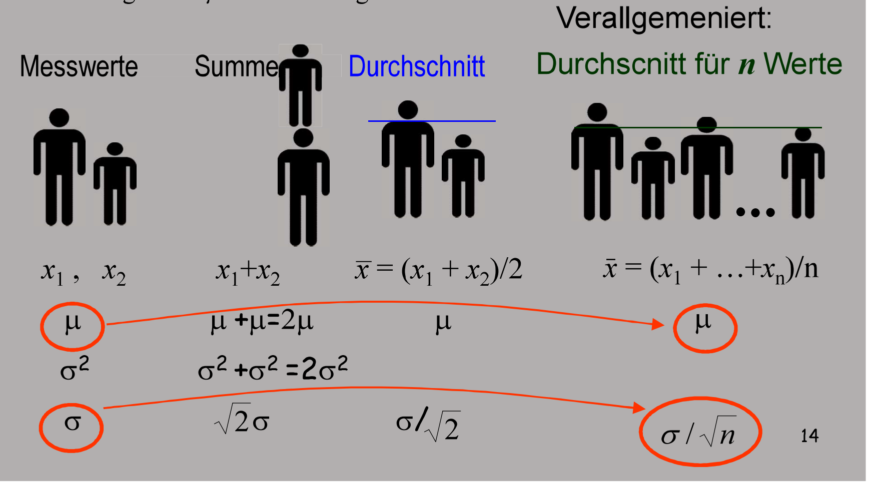
Lage ($\mu_{\bar{x}}$) und Breite ($\sigma_{\bar{x}}$) der Verteilung der Durchschnittswerte ($\bar{x}_i$)?

Daten und ihre Durchschnittswerte

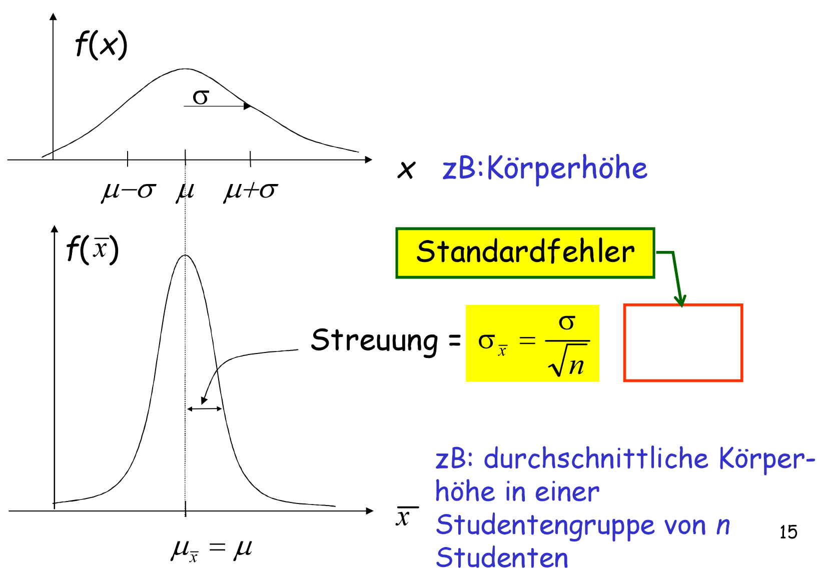


Verteilung von Durchschnitt der Zufallsgrößen

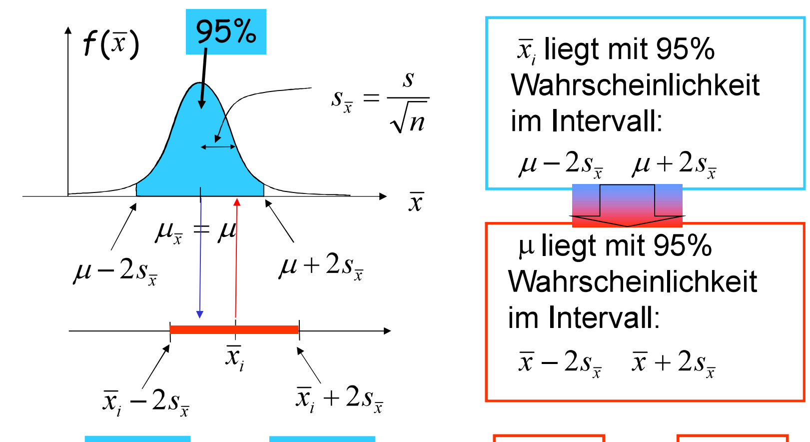
x_1 und x_2 sind unabhängige Zufallsgrößen. (z.B.: Ergebnisse von zwei Körperhöhemessungen) Beide folgen eine Normalverteilung mit derselben Erwartungswerte μ und Streuungen σ.



Konfidenzintervall für den Erwartungswert



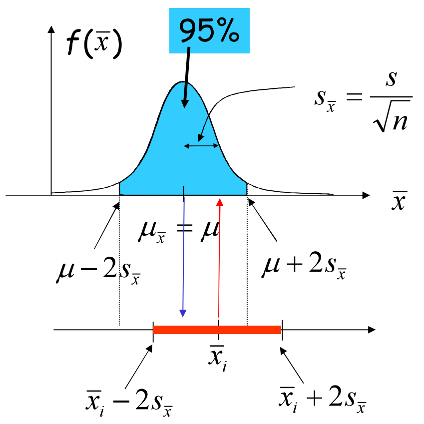
Konfidenzintervall für den Erwartungswert



wenn $\mu - 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \le \mu + 2s_{\bar{x}}$ dann $\bar{x}_i - 2s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x}_i + 2s_{\bar{x}}$

95% Wahrsch. 95% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert



$\bar{x}_i$ liegt mit 5% Wahrscheinlichkeit im Intervall
$\mu - 2s_{\bar{x}} \qquad \mu + 2s_{\bar{x}}$
nicht!

μ liegt mit 5% Wahrscheinlichkeit im Intervall
$\bar{x} - 2s_{\bar{x}} \qquad \bar{x} + 2s_{\bar{x}}$
nicht!

$$\bar{x}_i \le \mu - 2s_{\bar{x}} \text{ oder } \mu + 2s_{\bar{x}} \le \bar{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mu \le \bar{x}_i - 2s_{\bar{x}} \text{ oder } \bar{x}_i + 2s_{\bar{x}} \le \mu$$

5% Wahrsch. 5% Wahrsch.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

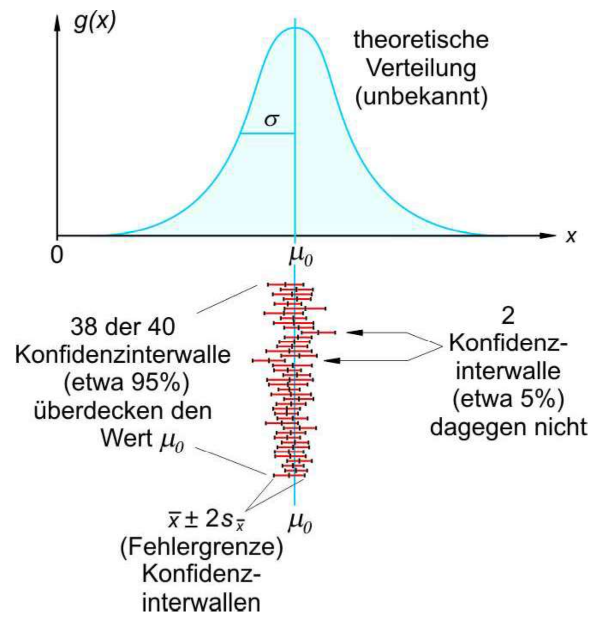
Der Erwartungswert (μ) liegt in dem Intervall $\bar{x} - 2s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 2s_{\bar{x}}$ (Konfidenzintervall) mit 95% Wahrscheinlichkeit

Eine ähnliche Ableitung gibt: μ liegt
-mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - s_{\bar{x}},\ \bar{x} + s_{\bar{x}}$

- mit 99,7% Wahrscheinlichkeit im Intervall: $\bar{x} - 3s_{\bar{x}},\ \bar{x} + 3s_{\bar{x}}$

Je größer ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit desto breiter ist das Konfidenzintervall!

Bemerkung: wenn n $\to \infty$ dann $s_{\bar{x}} \to 0$



Pr.Buch Abb. 11

Bestimmung des Stichprobenumfanges

Welcher Stichprobenumfang ist notwendig zu einer bestimmten Genauigkeit?
(z.B.: Körperhöhe mit ±1cm „Genauigkeit" bei 95% Konfidenzniveau)

$$2s_{\bar{x}} = 1\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad s_{\bar{x}} = 0{,}5\text{ cm}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{s^2}{s_{\bar{x}}^2}$$

s = ? s kann aus einer kleineren Stichprobe geschätzt werden.
Z.B.: Körperhöhe in einer Studentengruppe (20 St.): s = 8,3 cm

$$n = \frac{s^2}{s_{\bar{x}}^2} = \frac{8.3^2\text{cm}^2}{0.5^2\text{cm}^2} \approx 276$$

Konfidenzintervall für Quotient (Wahrscheinlichkeit)

Zwei Möglichkeiten: (E/$\bar{E}$, z.B.: Raucher/Nichtraucher)
Binomialverteilung
E kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von p vor.
Stichprobenumfang: n
In einem Versuch E kommt k –mal vor (k aus n Personen sind Raucher)
Die relative Häufigkeit h=k/n ist ein Schätzwert für p (Punktschätzung.)
k folgt eine Binomialverteilung mit einem Erwartungswert von pn
Theoretische Streuung der Binomialverteilung: $\sigma_k = \sqrt{np(1-p)}$ (Streuung von k)
p wird mit der relativen Häufigkeit geschätzt: $\sigma_k \approx \sqrt{nh(1-h)}$
Weil $p \approx h = k/n$, Streuung von p : $\sigma = \sigma_k / n = \sqrt{nh(1-h)}\,/n = \sqrt{h(1-h)/n}$
Analog zu $x \pm 2\sigma$
p befindet sich mit 95 % Wahrscheinlichkeit in:
$h \pm 2\sqrt{h\,(1-h)/n}$ (95% Konfidenzniveau)
zB.: 20 Raucher aus 100 ➡ P(Rauchen)= $0{,}2 \pm 2\sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8/100} = 0{,}2 \pm 0{,}08 =$
$=(20 \pm 8)\%$

Zusammenfassung der Schätzungen

Punktsätzungen:

Stich-probe	Grund-gesamtheit
$\bar{x}$ →	μ
s →	σ
n	∞
h →	P

Intervallschätzung mit 95% Konfidenzniveau
für den Erwartunswert (μ):

$\bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}}$

für die Wahrscheinlichkeit (P) :

$h \pm 2\sqrt{h\,(1-h)/n)}$