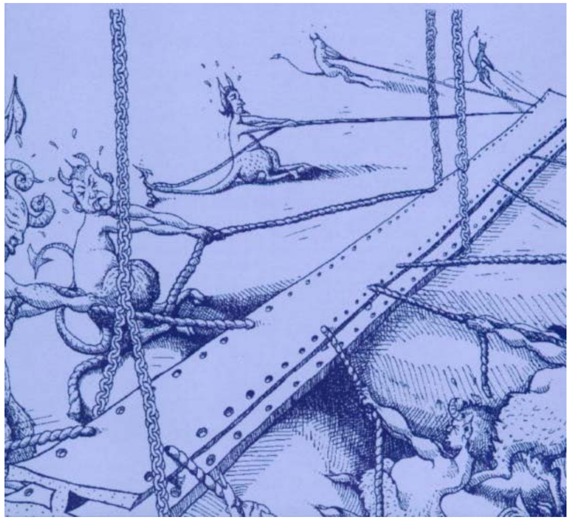
Regression und Korrelation



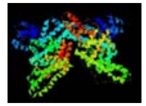
regression:
Zurückführung,
Rückschreiten

correlation:
Wechselbeziehung

Praktische Annäherung (Beispiel1)

wieviele Eiweissmoleküle sind in dem Blutplasma?
(Stück, mol, g, …)

nm



1 St. HSA Mölekül

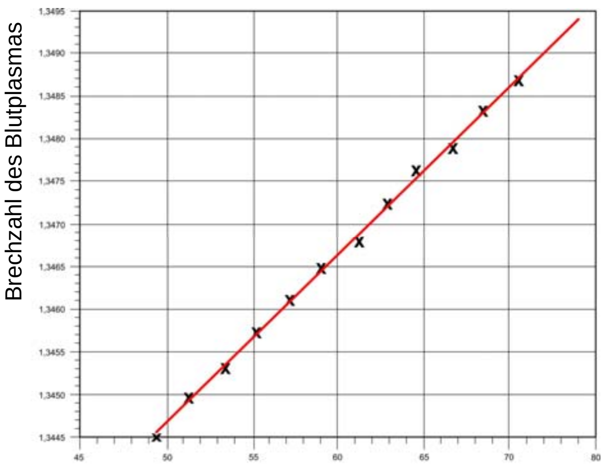
wie gross ist die Eiweisskonzentration
des Blutplasmas? (St/L, mol/L, g/L)

bei Patienten in Nephrose (schwere Nierenkrankheit) nimmt der Wert stark ab

direkte Methode:
Bestimmung der Anzahl der Moleküle in einem Volumen(?)

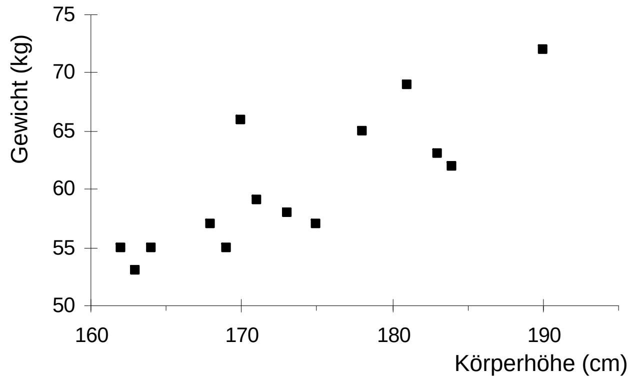
indirekte Methode :
mit Hilfe einer (einfach) messbaren physikalischen Grösse,
die steht in streng monoton wachsendem Zusammenhang
zu der unbekannten Grösse
(die solche einfachste Funktion ist ...)

Bemerkung:
das Licht breitet sich in Blutplasma langsamer, wenn die Plasmaeiweisskonzentration grösser ist, d.h. das Licht hat grössere Brechzahl (deterministischer Zusammenhang, Messfehler)



Plasma-
eiweiss-
konzentration
(g/L)

(Beispiel2) Daten aus einer Studentengruppe E2 (Sept. 1994) (zusammengehörige Wertepaare)

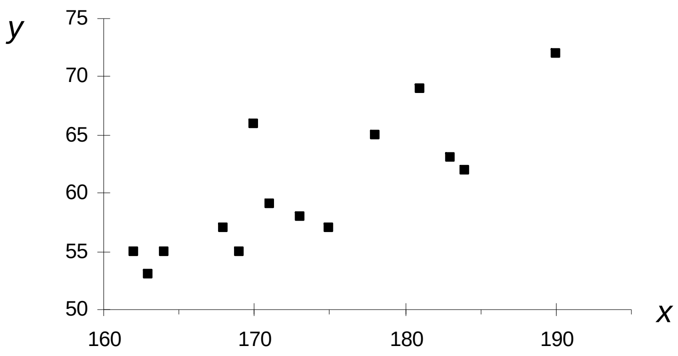


cm	kg
162	55
163	53
164	55
168	57
169	55
170	66
171	59
173	58
175	57
178	65
181	69
183	63
184	62
190	72

was für eine Tendenz kann man bemerken?

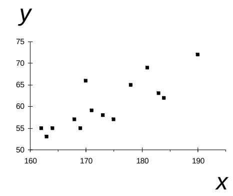
Die **Korrelationsrechnung** beschäftigt sich mit dem **symmetrischen** Zusammenhang zweier Zufallsgrössen

positive Korrelation: je mehr, desto mehr
negative Korrelation:je mehr, desto weniger



hier: positive Korrelation

Regressionsannäherung



Sucht man einen Funktionszusammenhang zwischen einer (oder mehreren) **unabhängigen Variable** (x) und einer abhängigen Variable (y)

Voraussetzungen: x und y numerische und stetige Merkmale, y Zufallsgrösse (ihre Grösse wird nicht nur von der unabhängigen Variable, sondern durch den Zufall beeinflusst)

Regressionsmodell fixiert den Typ der Funktion:

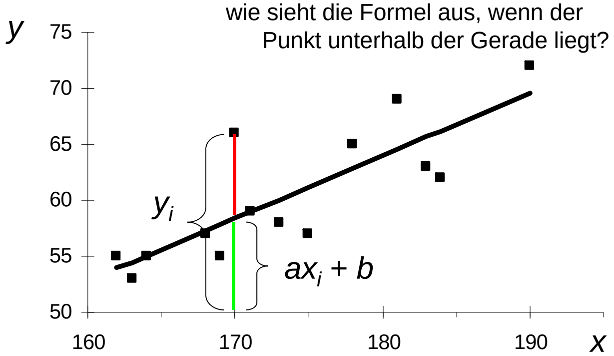
lineare F.	$y = (ax + b) + h$ (a: Steigung, b: Achsenabschnitt)
polinomiale F.	$y = a + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + h$
exponentiale F.	$y = ab^x\ h$
Potenzfunktion	$y = ax^b\ h$

und **wie wirkt der Zufall** auf die abhängige Variable
additiver Fehler ($+ h$) oder **multiplikativer** Fehler ($\cdot h$)

Das einfachste Regressionsmodell: **lineare Regression**

lineare Funktion: $y = (ax + b) + h$

$h_i = y_i - (ax_i + b)$ wenn der Punkt (x_i, y_i) oberhalb der Gerade liegt
wie sieht die Formel aus, wenn der Punkt unterhalb der Gerade liegt?



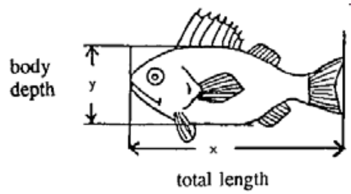
	x_i	y_i
1	162	55
2	163	53
3	164	55
4	168	57
5	169	55
6	170	66
7	171	59
8	173	58
9	175	57
10	178	65
11	181	69
12	183	63
13	184	62
14	190	72

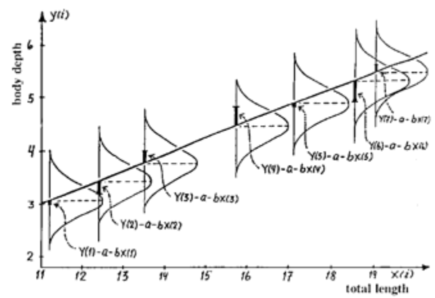
Beste Gerade: Summe der Fehlerquadrate ist minimal (Methode der kleinsten Quadraten)

Bedingungen zur Anwendung

(Unter welchen Bedingungen kann man eine lineare Regression durchführen?)

1. Es gibt eine lineare Korrelation zwischen x und y.
2. Die Messpunkte in einer Stichprobe sind unabhängige Messpunkte.
3. Für alle fixierte x-Werte ist die Verteilung von y normal.
4. Die Verteilung von y für alle x-Werte hat dieselbe Varianz.
5. Man kann die x-Werte ohne Fehler messen.





http://www.fao.org/docrep/w5449e/w5449e04.htm die (quadratische) **Fehlerfunktion**:

$$Q(\ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

unabhängige Variablen?

a und *b*

Funktionszusammenhang für *a* und *b*?

quadratische Zusammnehänge

Wie sehen diese Funktionen aus?

Parabeln mit unterschiedlicher Öffnung

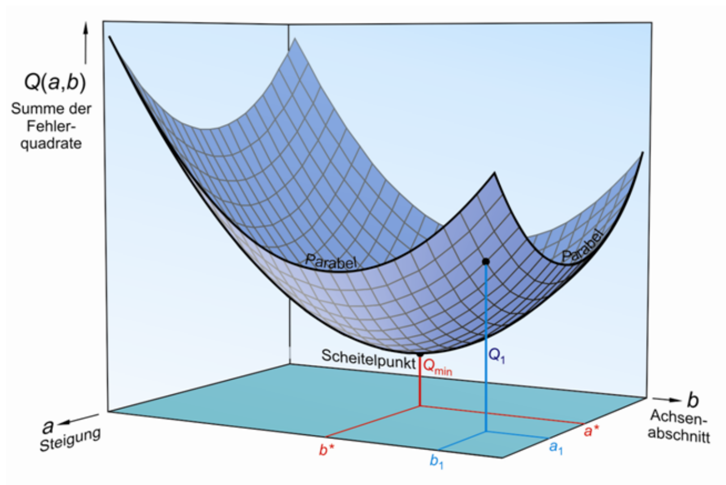
Besitzen diese Funktionen Maxima oder Minima?

die Graphen sind oben geöffnete Parabeln mit Minima

Lineare Regression

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

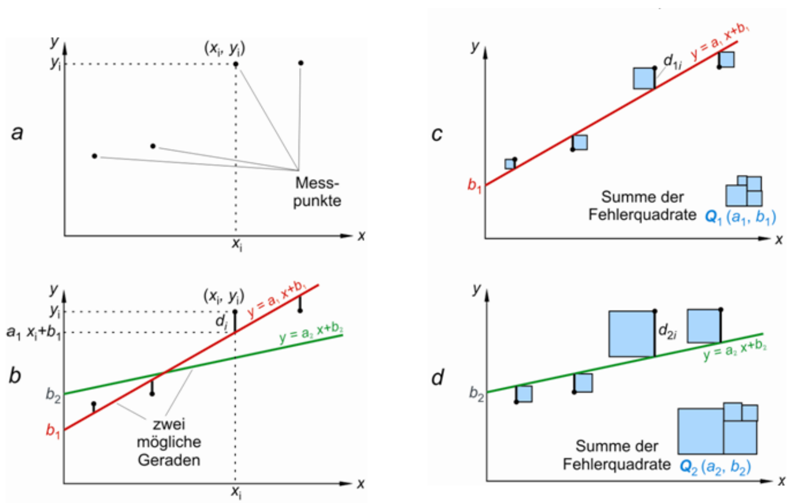
Fehlerfunktion



Pr.Buch Abb. 14

Suche nach der Geraden ($y = ax + b$) mit bester Näherung der Messpunkte

a: Steigung
b: Achsenabschnitt



Pr.Buch Abb. 13

Lineare Regression

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 = \min.$$

Minimalisierung der Fehlerfunktion

Möglichkeiten:

1. quadratische Ergänzung

   z.B. $y = x^2 - 6x + 14 = (x-3)^2 + 5$, Minimum: $x = 3$

2. Differentialrechnung

   Differentialquotient: Steigung der Tangente

   an dem Minimum/Maximum der Kurve ist die Steigung der Tangente gleich null

   2 Gleichungen, 2 Unbekannten

„Die beste” Steigung: $(y = ax + b)$

$$\boxed{a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{oder} \quad a^* = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$$

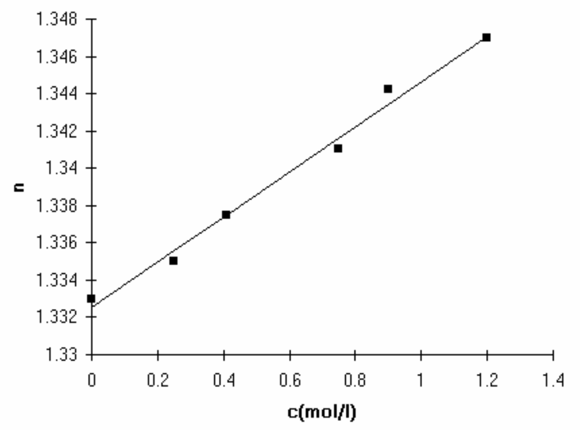
„Der beste” Achsenabschnitt:

$$\boxed{b^* = \bar{y} - a^* \cdot \bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a^* \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

wo $s_{xy}^2 = \frac{Q_{xy}}{n-1}$: Kovarianz

Beispiel: Refraktometrie

	A	B	C
1–7	unbekannte	Konzentration	Brechzahl
8	i	c (mol/l)	n
9		0	1.333
10		0.25	1.3350
11		0.41	1.3375
12		0.75	1.3410
13		0.90	1.3442
14		1.20	1.3470
15	4	0.19	1.3348
16	10	1.13	1.3462
17	n=ac+n0		
18	n0=	1.3325	
19	a=	0.0121	
20	r=	0.995	



Wie gut passen die Messpunkte an die Regressionsgerade?

Korrelationsrechnung beschreibt die lineare Beziehung zwischen zwei oder mehr statistischen Variablen

es beschreibt die Stärke der Korrelation
es gibt starke und schwache Korrelation

Korrelationskoeffizient
(Pearson)

$$\boxed{r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx} \cdot Q_{yy}}} = \frac{s_{xy}^2}{s_x s_y}}$$

der Zähler ist gleich dem Zähler der Steigung der Regressionsgerade (der Nenner ist im beiden Fall positiv)

$$a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} \Rightarrow$$

positive Steigung: r ist positive Zahl

negative Steigung: r ist negative Zahl

$$-1 \le r \le 1$$

weitere Bemerkungen:

$$-1 \le r \le 1 \qquad 0 \le r^2 \le 1$$

Korrelationskoeffizient (Pearson) — **Bestimmtheitsmass** (**Determinationskoeffizient**)

die Variation von *y* kann
durch das Modell erklärte Variation und
durch das Modell nicht erklärte Variation
zerlegt werden
z.B. r^2= 0,25, das Modell kann erklären 25 % der Variation von *y*

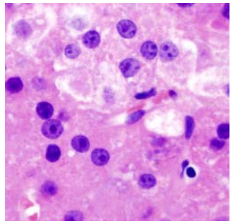
perfekter linearer Zusammenhang: $r^2 = 1$, $r = 1$ oder -1
kein linearer Zusammenhang: $r^2 = 0$, $r = 0$
Unabhängigkeit oder nichtlinearer Zusammenhang

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right)}}$$

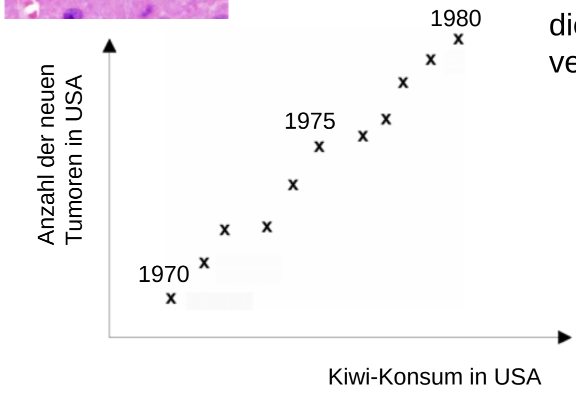
aus den Rangwerten berechneter Korrelationskoeffizient:
Spearmanns Rangkorrelationskoeffizient (r_s)
(Pearson-Korrelation zwischen den Rangwerten)

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{xi}-\bar{R}_x)(R_{yi}-\bar{R}_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_{xi}-\bar{R}_x)^2\sum_{i=1}^{n}(R_{yi}-\bar{R}_y)^2}} \qquad \tau = \frac{n_c - n_d}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

noch ein aus den Rangwerten berechneter Korrelationskoeff.:
Kendalls Tau (τ)
(es nutzt nur den Unterschied in den Rängen und nicht die Differenz der Ränge)

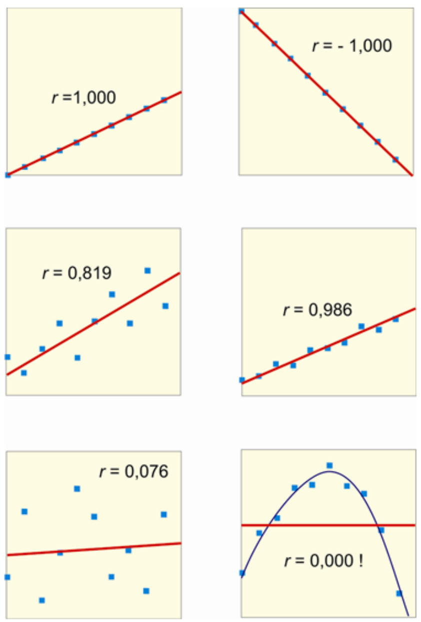


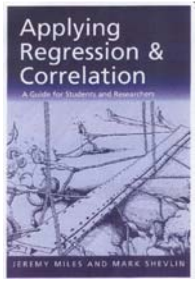
Korreliert heisst **nicht** notwendigerweise **kausal verknüpft**(!)

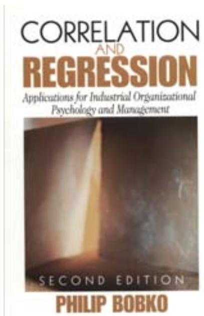


die Zeit als verdeckte Variable

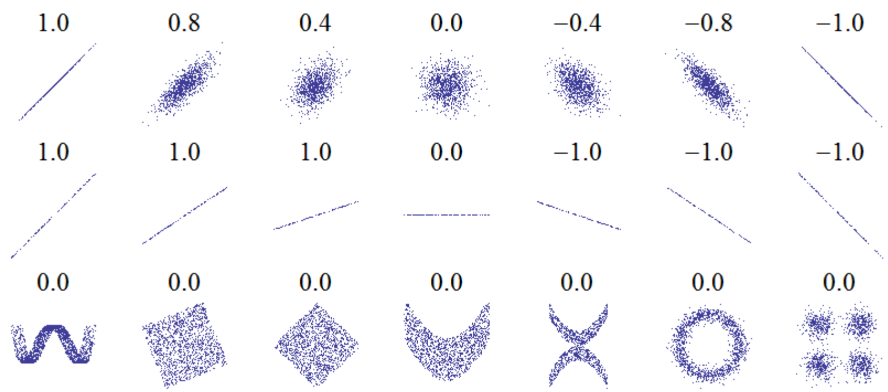
Beispiele:





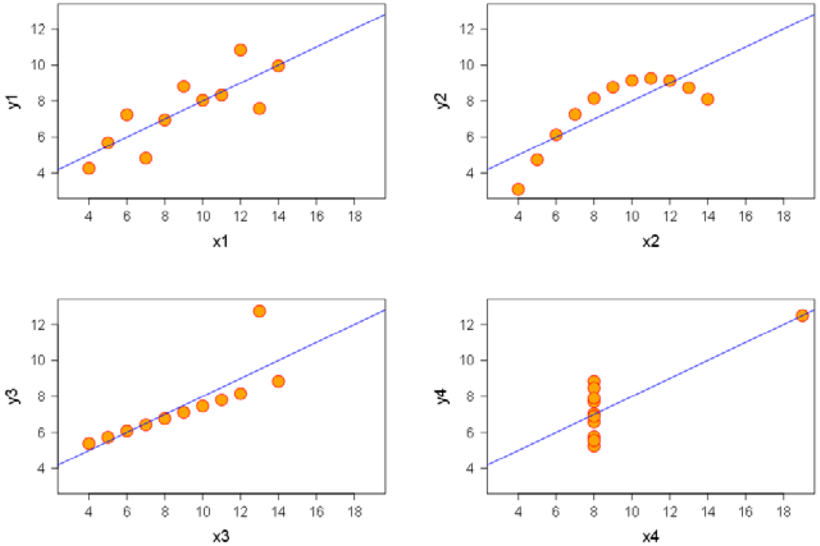


Pr.Buch Abb. 15



http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Correlation_examples.png

Extrembeispiel: r=0.816, y = 3 + 0.5x (Anscombe's quartet)

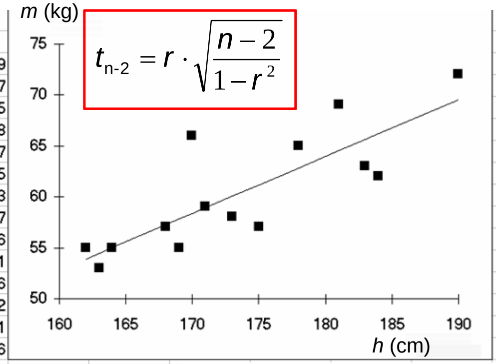


http://en.wikipedia.org/wiki/Anscombe%27s_quartet

t-Test zur Korrelationsanalyse

Gibt es eine Beziehung zw. der Körpergrösse und Gewicht?

Körperhöhe (cm)	Gewicht (kg)			
162	55	53.929		
163	53	54.487		
164	55	55.045		
168	57	57.278		
169	55	57.837		
170	66	58.395		
171	59	58.953		
173	58	60.07		
175	57	61.186		
178	65	62.861		
181	69	64.536		
183	63	65.652		
184	62	66.211		
190	72	69.56		
	m=	0.5583	-36.50955	=b
		0.1131	19.66358	
r=	0.818505	0.6699	3.492297	
n=	14	24.358	12	
t=	4.935	297.07	146.3537	



$$t_{\text{n-2}} = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

H_0: keine Korrelation

H_0: Korrelationskoeffizient der Population: 0

$$|t| = 4.935 > t_{12,\,\text{krit}(0{,}05)} = 2.179 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch } (p<0.05)$$

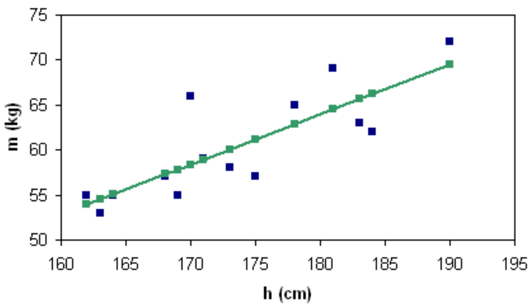
$$|t| = 4.935 > t_{12,\,\text{krit}(0{,}01)} = 3.055 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch } (p<0.01)$$

Steigung, Achsenabschnitt Funktionen in Excel

$y = ax + b$

C3   fx =$D$17*A3+$D$18

	A	B	C	D	E
1	h	m			
2	(cm)	(kg)			
3	162	55	53.93		
4	163	53	54.49		
5	164	55	55.05		
6	168	57	57.28		
7	169	55	57.84		
8	170	66	58.39		
9	171	59	58.95		
10	173	58	60.07		
11	175	57	61.19		
12	178	65	62.86		
13	181	69	64.54		
14	183	63	65.65		
15	184	62	66.21		
16	190	72	69.56		
17				0.558262	=SLOPE(B3:B16,A3:A16)
18				-36.5096	=INTERCEPT(B3:B16,A3:A16)
19				0.818505	=CORREL(B3:B16,A3:A16)



=Steigung(…)

=Achsenabschnitt()

=Korrel(…)