

## Kontingencia táblák. Khi-négyzet teszt

1. Függetlenségvizsgálat
2. Illeszkedésvizsgálat
3. Homogenitásvizsgálat



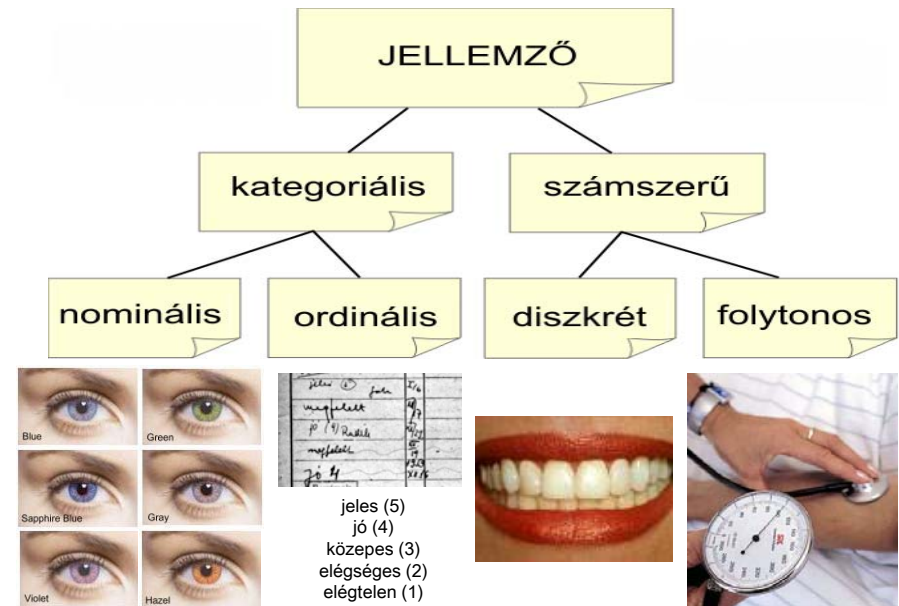
Példa 1

	szemü- veges	nem sz.	össze- sen
nő	28	75	103
fér- fi	48	49	97
	76	124	200



KAD 2018.11.22

Ismétlés: változók, mérési skálák típusai



## 1. Függetlenségvizsgálat

### Kapcsolatvizsgálat kategorikus változók között. Khi-négyzet teszt

gyakorisági táblázat (kontingencia táblázat):  
két változó közös gyakoriságának táblázatos  
ábrázolása  
X (pl. nem) és Y (szemüvegesség)

	szemü- veges	nem sz.	össze- sen
nő	a=28	b=75	103
fér- fi	c=48	d=49	97
	76	124	200

**kérdés:** különbözik-e egy  
rögzített tulajdonság  
gyakorisága a két  
csoportban?

3

## A nullhipotézis felállítása

$H_0$ : nem és szemüvegesség egymástól  
függetlenek  
(nincs különbség a csoportokban)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ vagy } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

mekkora lenne a **várt gyakoriság**  
(expected frequency) a bal felső (a)  
cellában, ha a nullhipotézis igaz?

a nők száma:

$$a + b = 103$$

a szemüveges személyek száma:

$$a + c = 76$$

a nők aránya a mintában:

$$p(\text{nő}) = (a + b)/n = 103/200$$

a szemüvegesek aránya a mintában :

$$p(\text{szemüveges}) = (a + c)/n = 76/200$$

	szemü- veges	nem sz.	össze- sen
nő	a=28	b=75	103
fér- fi	c=48	d=49	97
	76	124	200

a megfigyelt (observed)  
gyakoriságok táblázata

4

**Várt gyakoriságok.** feltevés:  $H_0$  igaz  $\Rightarrow$  a nem és a szemüvegesség független tulajdonságok

$$\text{várt gyakoriság a bal felső cellában: } \frac{a+b}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{várt gyakoriság a jobb felső cellában: } \frac{a+b}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(a+b) \cdot (b+d)}{n}$$

$$\text{várt gyakoriság a bal alsó cellában: } \frac{c+d}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (a+c)}{n}$$

$$\text{várt gyakoriság a jobb alsó cellában: } \frac{c+d}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(c+d) \cdot (b+d)}{n}$$

	sz.	nem	össz.
n	a=28	b=75	103
f	c=48	d=49	97
	76	124	200

megfigyelt (observed)  
kontingencia táblázat

	sz.	nem	össz.
n	$103 \cdot 76 / 200$	$103 \cdot 124 / 200$	103
f	$97 \cdot 76 / 200$	$97 \cdot 124 / 200$	97
	76	124	200

várt (expected)  
kontingencia táblázat

5

## A várt gyakoriságok a megfigyelt gyakoriságokból

	sz.	nem	össz.
n	a=28	b=75	103
f	c=48	d=49	97
	76	124	200

megfigyelt (observed)  
kontingencia táblázat

	sz.	nem	össz.
n	$103 \cdot 76 / 200$	$103 \cdot 124 / 200$	103
f	$97 \cdot 76 / 200$	$97 \cdot 124 / 200$	97
	76	124	200

várt (expected)  
kontingencia táblázat

$$(\text{várt gyakoriság}) = \frac{(\text{oszlopösszeg}) \cdot (\text{sorösszeg})}{(\text{a minta elemszáma})}$$

6

## Próbastatisztika

Ha a nullhipotézis igaz:

A megfigyelt és a várt gyakoriságokat tartalmazó kontingencia táblázatok megfelelő celláiban levő értékek nagyjából egyformák. A következő próbastatisztika (súlyozott négyzetes közép) **khi-négyzet eloszlású**:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

ahol

$O_i$  a megfigyelt (observed)

$E_i$  a(z el)várt gyakoriságok az i-dik cellában.

**Szabadsági fok:** (sorok száma - 1) \* (oszlopok száma - 1),  
ill. egydimenziós esetben: (cellák száma - 1)

pl. 2\*2 (négyezős-) táblázat: 1

7

## A teszt végrehajthatóságának feltételei

$n$  (a minta elemszáma) elegendően nagy:

a *várt gyakoriságokat* tartalmazó kontingencia táblázatban minden cellatartalomnak 1-nél nagyobbnak kell lenni

a *várt gyakoriságokat* tartalmazó kontingencia táblázatban azoknak a celláknak a száma, amelyekben a cellatartalom 1 és 5 közötti csak a cellák 20%-a lehet

(pl. négyezős táblázat: minden cellában a cellatartalomnak 5-nél nagyobbnak kell lenni)

8

## Speciális eset: négymezős táblázat (gyakorlati jegyzet 2.b.29)

	a vizsgált tulajdonság		összesen
	megvan	nincs meg	
A csoport	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>a+b</b>
B csoport	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>c+d</b>
összesen	<b>a+c</b>	<b>b+d</b>	<b>n</b>

$$\chi^2_M = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

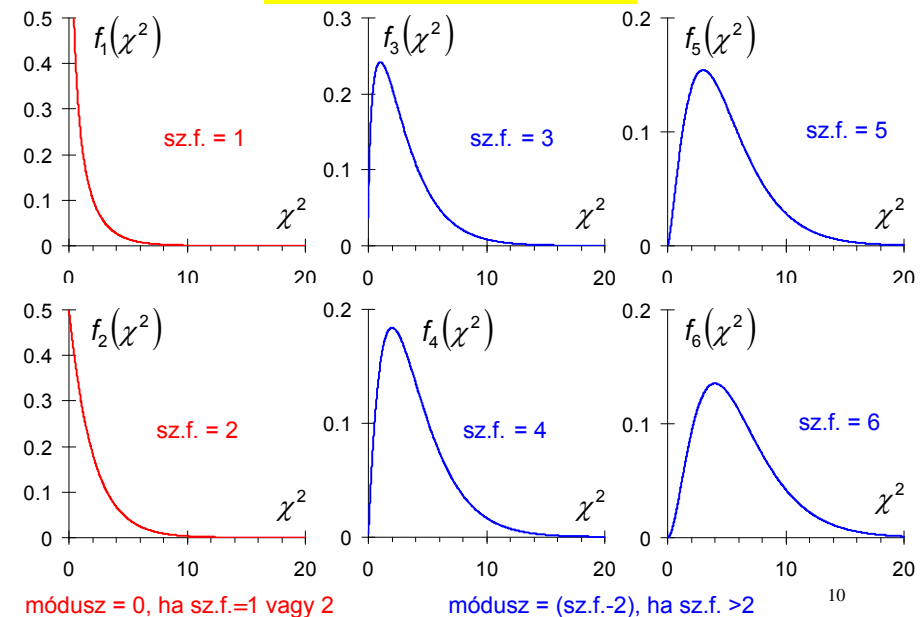
**a végrehajthatóság felétele:**

a két legkisebb részösszeg szorzata legyen nagyobb, mint  $5n$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

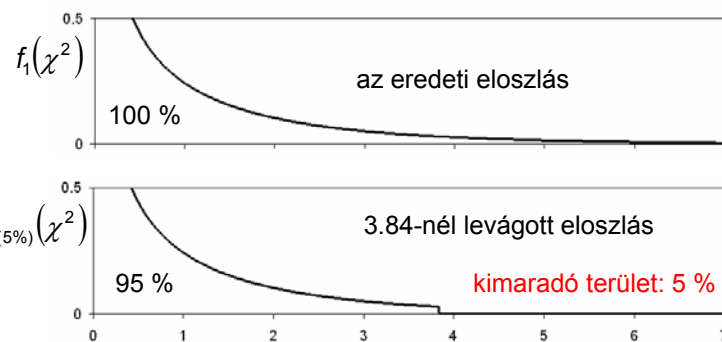
9

## Khi-négyzet eloszlások

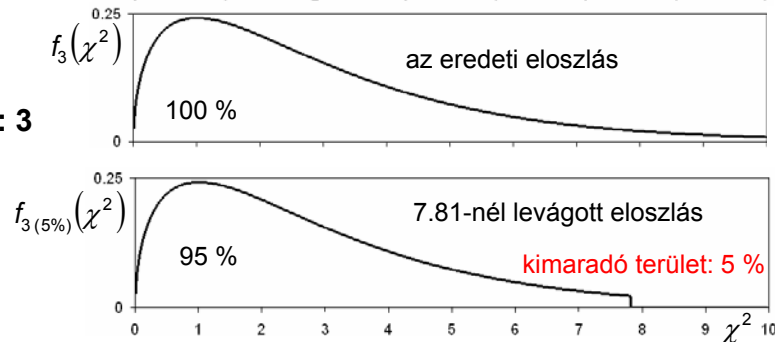


10

**sz. f.: 1**



**sz. f.: 3**



szabad sági fok	<i>p</i> (valószínűség)						
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,61	4,57	19,68	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	23,68	26,12	29,14	36,12

## Példa 1

### A teszt alkalmazhatóságának feltétele:

a két legkisebb részösszeg szorzata legyen nagyobb, mint 5n

	szemü- veges	nem sz.	össze- sen
nő	a=28	b=75	103
fér- fi	c=48	d=49	97
	76	124	200

$$76 \cdot 97 = 7372 > 5 \cdot 200 = 1000$$

a khi-négyzet teszt  
használható

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{krit} = 3.84 \quad H_0 \text{ hamis}$$

van kapcsolat a  
nem és a  
szemüvegesség  
(szemüvegviselési  
hajlandóság!)  
között

13

	p (valószínűség)						
szabad sági. fok	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$$10.54 > \chi^2_{krit} = 3.84 \quad H_0 \text{ hamis}$$

$$10.54 > \chi^2_{krit} = 6.63 \quad H_0 \text{ hamis}$$

elvetjük a nullhipotézist, elsőfajú hiba valószínűsége <0.01

14

	A	B	C	D
1	megfigyelt gyakoriságok			
2		szemüveg	nem sz.	
3	nő	28	75	=SUM(B3:C3)
4	férfi	48	49	=SUM(B4:C4)
5		=SUM(B3:B4)	=SUM(C3:C4)	=SUM(D3:D4)
6	várt gyakoriságok			
7		szemüveg	nem sz.	
8	nő	=D3*B\$5/\$D\$5	=D3*C\$5/\$D\$5	=SUM(B8:C8)
9	férfi	=D4*B\$5/\$D\$5	=D4*C\$5/\$D\$5	=SUM(B9:C9)
10		=SUM(B8:B9)	=SUM(C8:C9)	=SUM(D8:D9)
11		p : =CHITEST(B3:C4,B8:C9)		
12		khi-négyzet érték: =CHIINV(D11,1)		

	A	B	C	D
1	megfigyelt gyakoriságok			
2		szemüveg	nem sz.	
3	nő	28	75	103
4	férfi	48	49	97
5		76	124	200
6	várt gyakoriságok			
7		szemüveg	nem sz.	
8	nő	39.14	63.86	103
9	férfi	36.86	60.14	97
10		76	124	200
11		p : 0.0012		
12		khi-négyzet érték: 10.544		

### számolás Excel-lel

angol                      magyar  
SUM                      = SZUM  
CHISQ.TEST           = KHI.PRÓBA  
CHIDIST.RT           = KHI.ELOSZLÁS  
CHISQ.INV.RT       = KHI.INVERZ.JOBB

15

## példa 2



	sz.	nem sz.	öss- zes
nő	1	3	4
férfi	5	3	8
	6	6	12



$$4 \cdot 6 = 24 < 5 \cdot 12 = 60$$

a khi-négyzet teszt nem  
használható

(helyette: Fisher egzakt teszt)



**a minta  
elemszámának  
növelése**



	sz.	nem	össz.
nő	1	3	4
férfi	5	3	8
	6	6	12

12 → 200

$$\frac{n_{sz}}{n_{nem}} = \frac{1}{3} = 0.33$$

nők

$$\frac{n_{sz}}{n_{nem}} = \frac{5}{3} = 1.67$$

férfiak

sejtésünk van, de nem tudjuk igazolni

	sz.	nem	össz.
nő	28	75	103
férfi	48	49	97
	76	124	200

$$\frac{n_{sz}}{n_{nem}} = \frac{28}{75} = 0.37$$

$$\frac{n_{sz}}{n_{nem}} = \frac{48}{49} = 0.98$$

$n$  növelésével (12 → 200):  
a sejtés igazolható lesz

**Példa 3** (biofizika jegyzet 102. példa). Nem artériás típusú ischaemiás opticus neuropathia sikeres műtéti korrekciójáról jelent meg 1989-ben egy közlemény. Minthogy e betegségben korábban semmiféle hatásos kezelési módszer nem volt ismert, ezt a műtétet sok helyen alkalmazni kezdték. Rövidesen eredménytelen beavatkozásokról is megjelentek beszámolók, ezért számbavették 25 klinikai centrum 244 ilyen betegét, akik közül 119 főn elvégezték a műtétet, 125 betegen nem. A felmérés eredménye:

megfigyelt gyakoriságok

	műtött	nem m.	össz.
javult	39	53	92
változatlan	52	56	108
romlott	28	16	44
összes	119	125	244

várt gyakoriságok

	műtött	nem m.	össz.
javult	45	47	92
változatlan	53	55	108
romlott	21	23	44
összes	119	125	244

$$\chi^2 = (39-44.87)^2/44.87 + (53-47.13)^2/47.13 + (52-52.67)^2/52.67 + (56-55.33)^2/55.33 + (28-21.46)^2/21.46 + (16-22.54)^2/22.54 = 5.407$$

Mivel  $5.407 < 5.991 = \chi^2_{krit, sz.f.=2}$ , ezért nem vethetjük el a nullhipotézist. Azaz a mintánk alapján nincs okunk feltételezni különbséget a két módszer (műtét ill. nem műtét) hatásossága között.

18

egydimenziós kontingencia táblázatokkal kapcsolatos kérdés:  
a megfigyelt értékek illeszkednek-e egy feltételezett eloszláshoz?

## 2. Illeszkedésvizsgálat (goodness of fit). Khi-négyszet teszt

**tiszta  
illeszkedésvizsgálat**

(a gyakoriságokat ismert valószínűségekből kapott gyakoriságokkal hasonlítjuk össze)

egyenletes eloszlásra történő i.v.

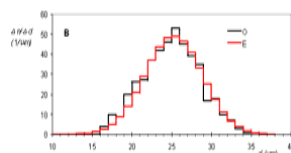
kockafeldobás eredménye

1	2	3	4	5	6
21	14	14	19	16	16

**becsléses  
illeszkedésvizsgálat**

(az eloszlás típusa alapján a megfigyelt gyakoriságokból becsüljük az eloszlás paramétereit)

normalitás-vizsgálat



egyéb becsült paraméteres i.v.

19

## Egyenletes eloszlásra történő illeszkedésvizsgálat

A megfigyelt gyakoriságokat tartalmazó kontingencia táblázatot (bekeretezett rész, O) kibővítjük a várt gyakoriságokat tartalmazó segéd-kontingencia táblázattal (E). Feltételezzük, hogy a kocka nem cinkelt ( $H_0$ ), ezért a 6 lehetséges esemény egyforma gyakoriságú:  $100/6 = 16.7$

a kockafeldobás eredménye

	1	2	3	4	5	6	össz.
O	21	14	14	19	16	16	100
E	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	100

$\chi^2 = (21-16.7)^2/16.7 + (14-16.7)^2/16.7 + (14-16.7)^2/16.7 + (19-16.7)^2/16.7 + (16-16.7)^2/16.7 + (16-16.7)^2/16.7 = 2.36 < 11.07 = \chi^2_{krit, sz.f.=5}$ , a nullhipotézist megtartjuk. A kocka nem cinkelt.

20



## Normalitás-vizsgálat

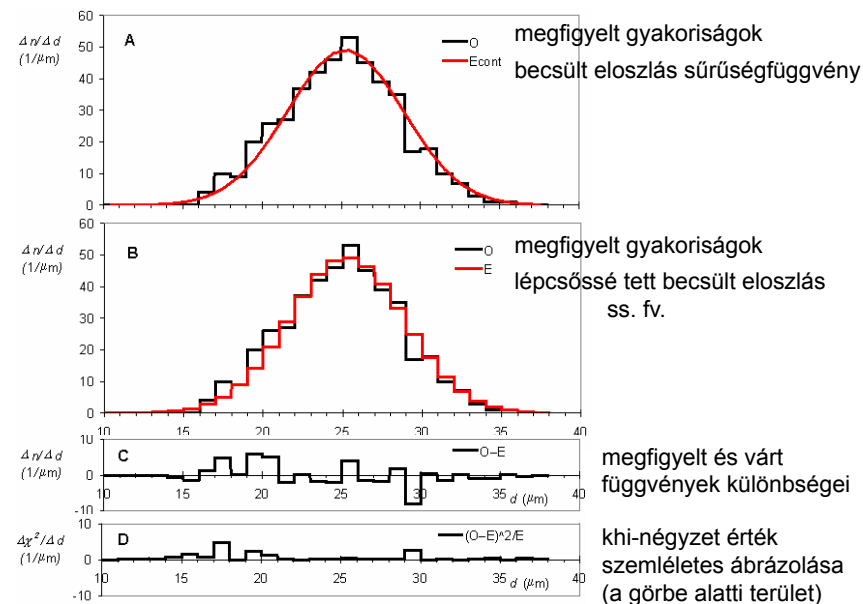
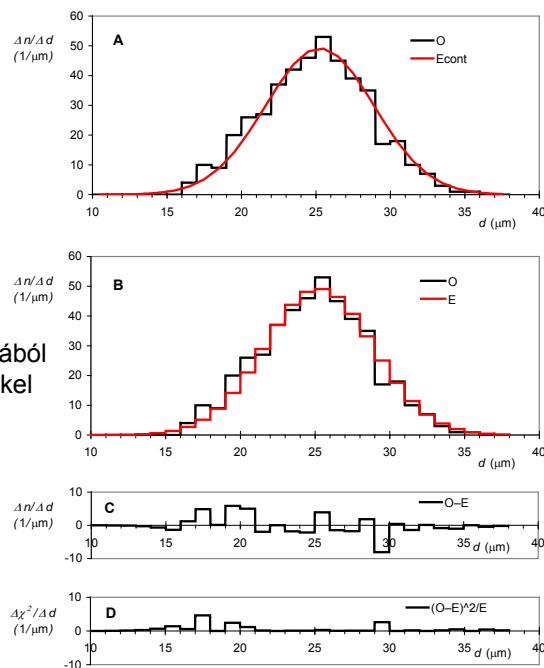
$H_0$ : a béka vörösvérsejt hosszabbik átmérője normáloszlású

Az elméleti értékeket a mintából számolt tapasztalati értékekkel becsljük.

Sz.f. =  $n-m-1$ ,  $m$ : a becslt paraméterek száma (itt: 2)

$$p = 0.9 > 0.05$$

$H_0$ : megtartjuk



22

### 3. Homogenitásvizsgálat, (test for homogeneity)

$H_0$ : a biofizika kollokviumjegyek eloszlása\* a női hallgatók között ugyanolyan mint a férfi hallgatók között (az eloszlások homogének)

kollokviumjegy, biofizika	nő	férfi		kollokviumjegy, biofizika	nő	férfi	
5	22	12	34	5	16.5	17.5	34
4	26	31	57	4	27.6	29.4	57
3	27	38	65	3	31.5	33.5	65
2	23	25	48	2	23.3	24.7	48
1	14	13	24	1	13.1	13.9	24
	112	119	231		112	119	231

megfigyelt (observed) gyakoriságok

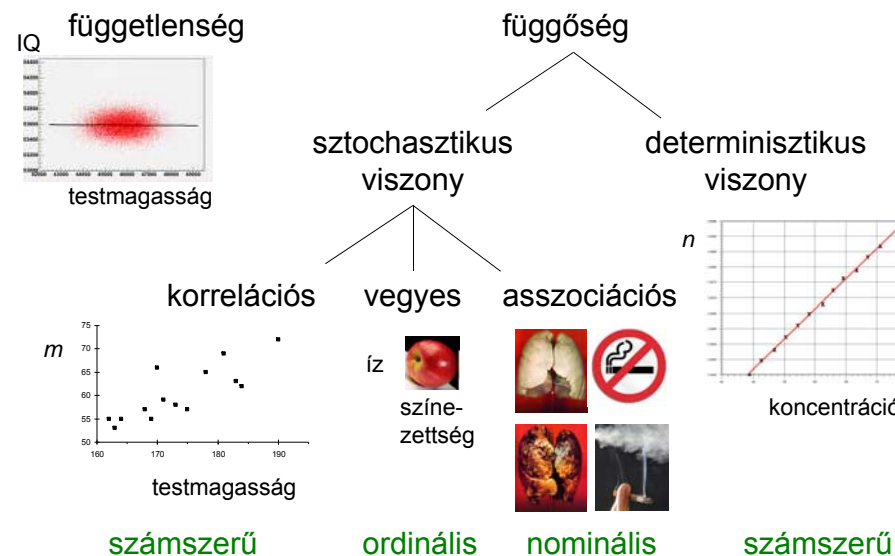
várt (expected) gyakoriságok

$$p = 0.27 > 0.05 \rightarrow H_0: \text{megtartjuk}$$

\*adatok: 2009 őszi szemeszter

23

## Függőségi viszonyok lehetőségei



24