

# Signalverarbeitung in der Medizin

G.Schay

# Signalverarbeitung in der Medizin

Definition und Informationsgehalt von Signalen  
(siehe auch „Grundlagen der Biostatistik und Informatik“!)

Überblick von den bildgebenden Verfahren

Medizinische Signalkette  
einige Beispiele  
Kodierung/Dekodierung

Klassifizierung der Signale

Aufarbeitung von Signalen:  
Fourier-Theorie  
Verstärker  
Elektrizitätslehre (siehe Skript!)  
elektronische Schaltungen

Digitale Signalverarbeitung (DSP)

# Signale in der Medizin

Signale tragen **Information!**

**Signal: jede physikalische Größe bzw. ihre Änderung, die Informationen übermittelt.**

**(Druckwerte, Temperaturwerte, Lautheitswerte, usw.)**

Hier auf dem Bild:

**Information** : Kopf oder Zahl?

**Signal:**

- ohne Kodierung: einfach schauen
- nach **Kodierung**: 1/0, elektrisch, digital, sms...



Kodierung ist eine  
Form der Umwandlung



„Ich wünsche so ruhig zu sein wie J.B.  
wenn es zu ernsten Entscheidungen kommt”


## Kleine Wiederholung

„informare“ (lat.) = „der Gedanken einen Form geben“

### Information als Begriff der Informatik:

Information ist diejenige Bedeutung, welche durch eine Nachricht getragen ist.

Reihenfolge/Struktur der Zeichen, worin die Zeichen mit bestimmten **Wahrscheinlichkeiten** auftreten


$$H = \sum_i p_i \cdot \log_2 \left( \frac{1}{p_i} \right)$$

Informationsgehalt in Bit-Einheiten  
(durchschnittlich : Inf.Entropie)

### Kodierung:

Speicherung und **Übertragung** der Informationen durch Anwendung eines bestimmten Zeichensystems  
(Symbole)

# Informationsübertragung – Informationskodierung



generell

Informationsquelle

Kodierung



Übertragungskanal

Dekodierung



Informationsempfänger  
(Ziel)

Ein Beispiel

Welche Seite ist nach oben?

Kodierung



Seiten (Kopf oder Zahl)  
ins Zahlen: 1,0



Sprache, Schallwellen, SMS, usw

Dekodierung

1,0 → Kopf, Zahl



Entscheidung

# Informationsübertragung – Informationskodierung



generell

Informationsquelle

Kodierung

Übertragungskanal

Dekodierung

Informationsempfänger  
(Ziel)

Ein Beispiel

Welche Seite ist nach oben?

Kodierung



Seiten (Kopf oder Zahl)  
ins Zahlen: 1,0

Sprache, Schallwellen, SMS, usw

Dekodierung

1,0 → Kopf, cZahl



Entscheidung

$$H = p_{Kopf} \cdot \log_2 \left( \frac{1}{p_{Kopf}} \right) + p_{Zahl} \cdot \log_2 \left( \frac{1}{p_{Zahl}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = 1 [Bit]$$

# Informationsübertragung – Informationskodierung

## Informationsgehalt – Beispiele

Münze werfen, Kopf / Zahl : 1 bit

Welcher Zahn ist beschädigt?

$$p_i = p = 1/32, H = 32 * p * \log_2(1/p) = 5 \text{ bit}$$

1 Nukleotide im DNS (vereinfacht, nur ATCG)

$$H_{1 \text{ Nukl}} = 4 * 1/4 * \log_2(4) = 2 \text{ bit}$$

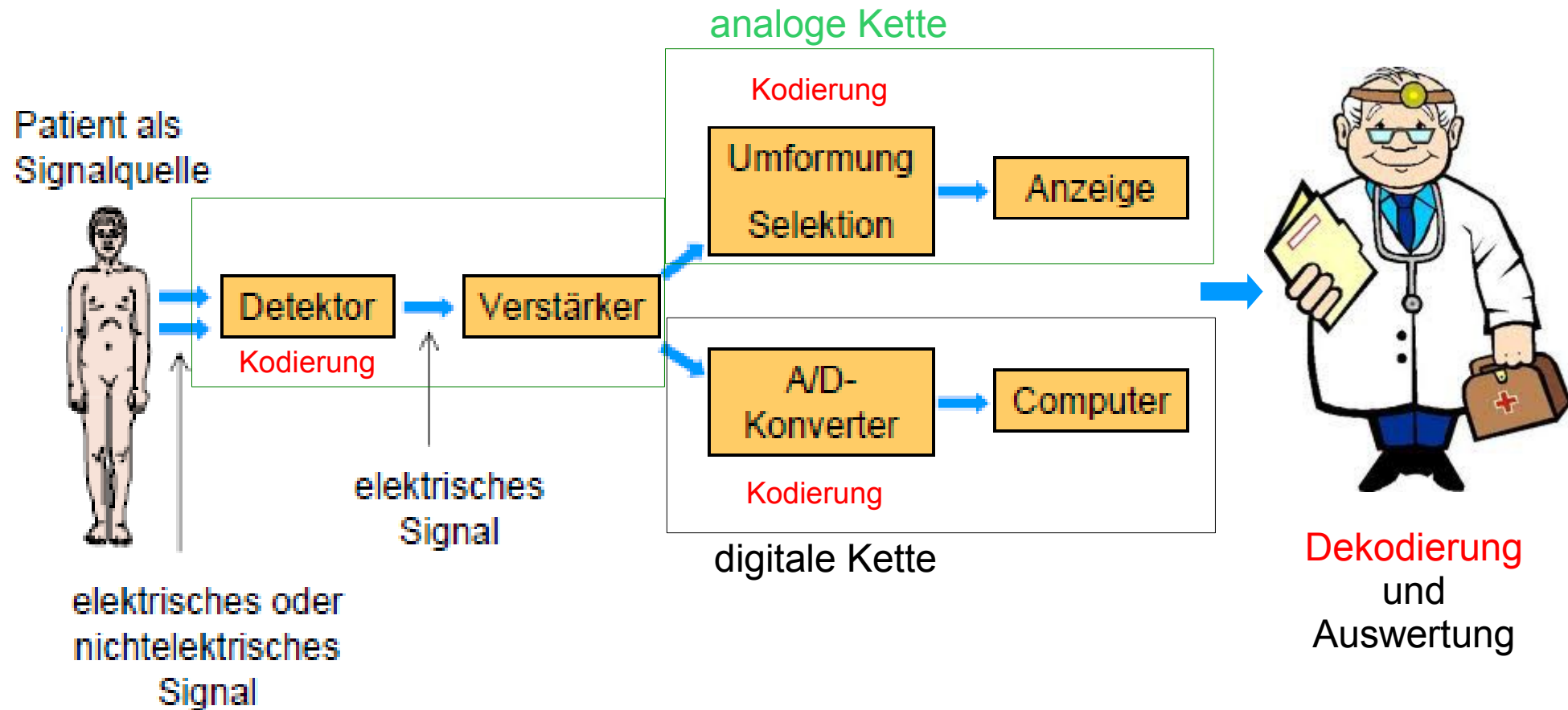
m Nukleotide im Reihe

$$H = \sum_k (n_k * H_k) = m * H_{1 \text{ Nukl}} = 2 * m \text{ bit}$$

(siehe Informatik-Vorlesung! allgemein, für k unterschiedliche Ereignisse.  
Hier haben wir nur ein Ereigniss-Typ, die Summe ist ein-teilig)

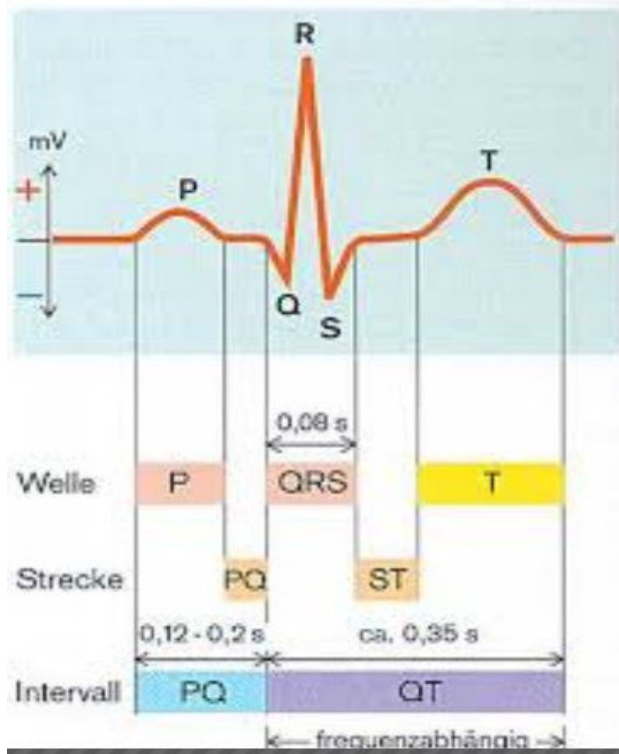
**Hausaufgabe:** Wie viele Bits brauchen wir, um den Informationsgehalt eines Polypeptides von 120 Elemente zu übertragen?

# Medizinische Signalkette

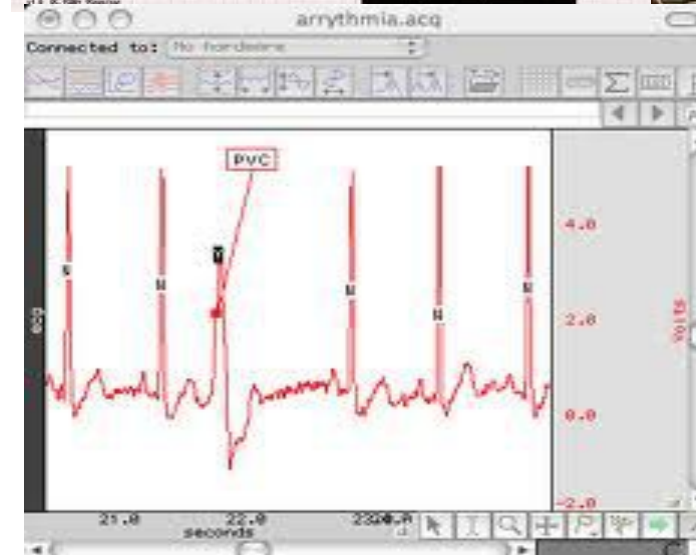
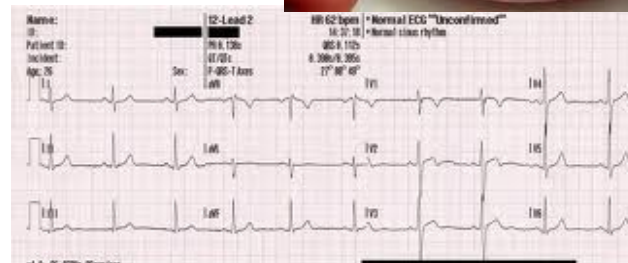




# Signale in der Medizin: Beispiel 1



Information: Herztätigkeit



Signal:  
Original: Spannung  
Kodierung: Keine,  
aber Filterung ist nötig

50 Hz Unterdrückung

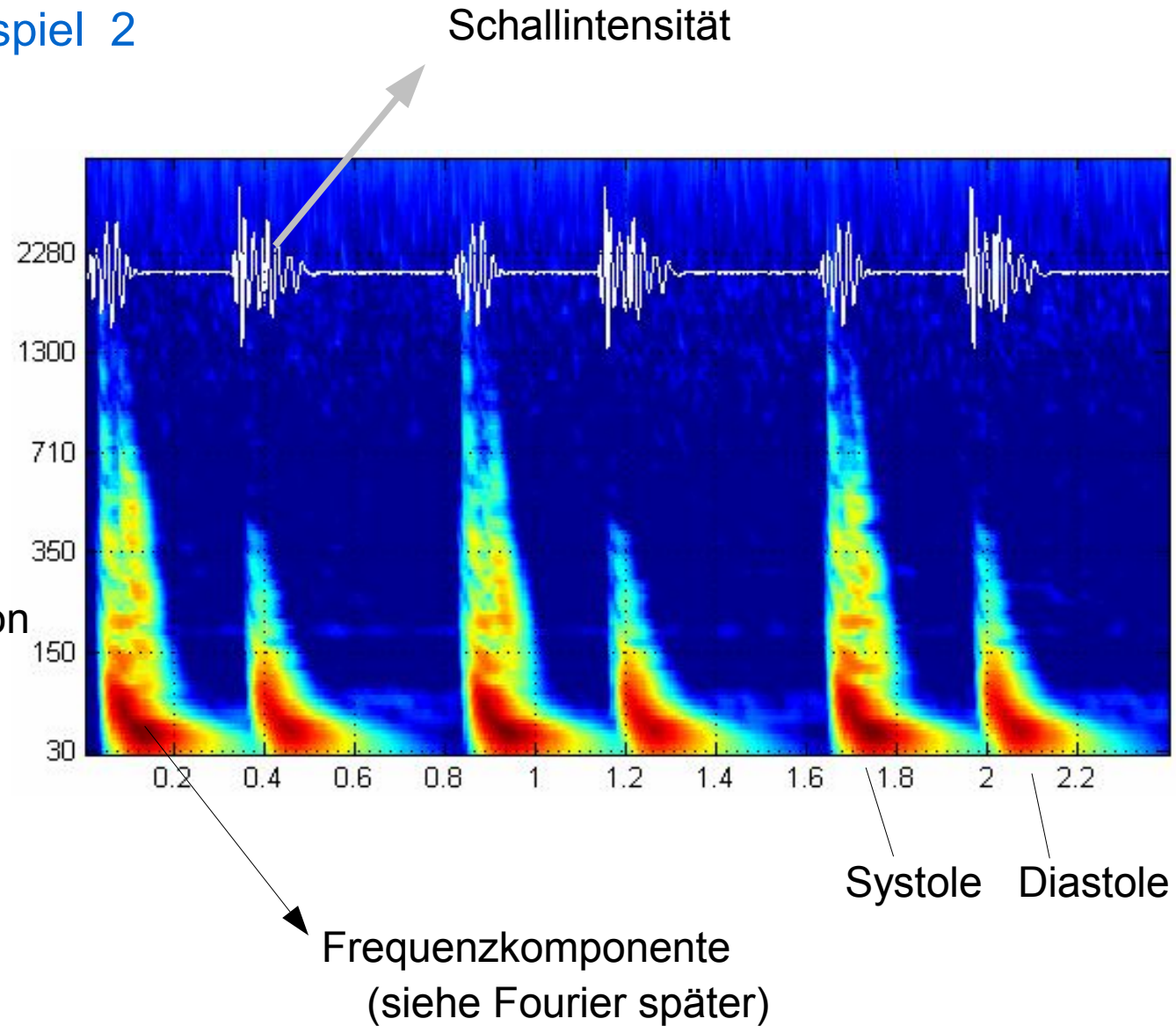
## Signale in der Medizin: Beispiel 2

Herztöne

Signal:  
Original: Schallwellen

Kodierung: Mikrofon

Kodierung: Fourier-Transformation



Information: Herzzyklus, mögliche anatomische und Strömungsprobleme

## Signale in der Medizin: Beispiel 3

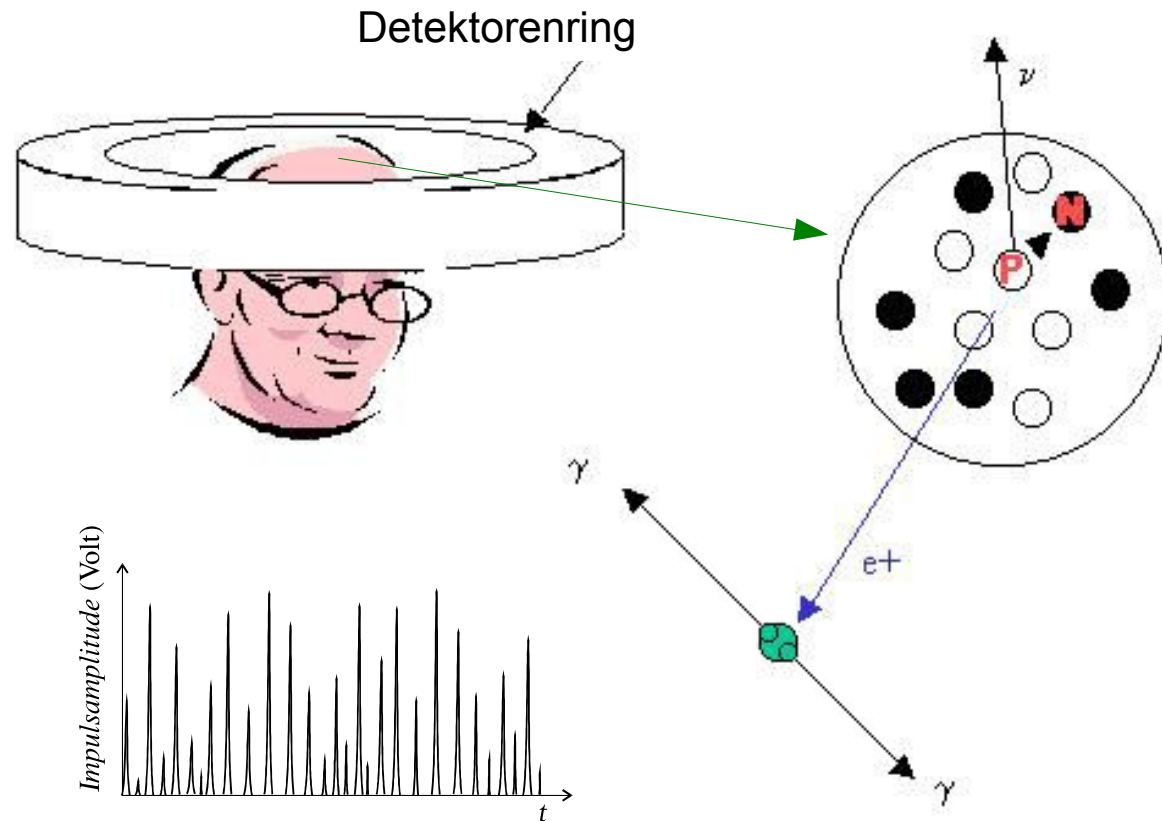
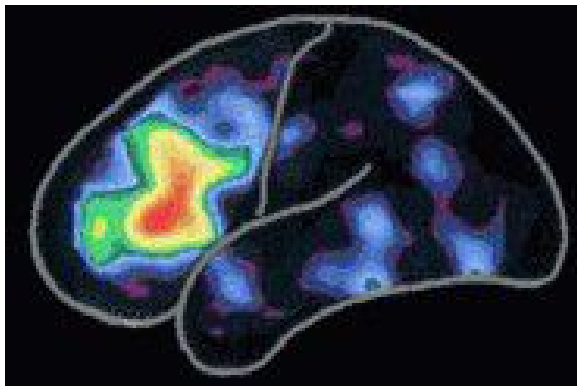
PET: PositronEmissionsTomografie

Signal:

Original:  $\gamma$ -Photonen

Kodierung: elektrische Impulse

Kodierung: Bildrekonstruktion

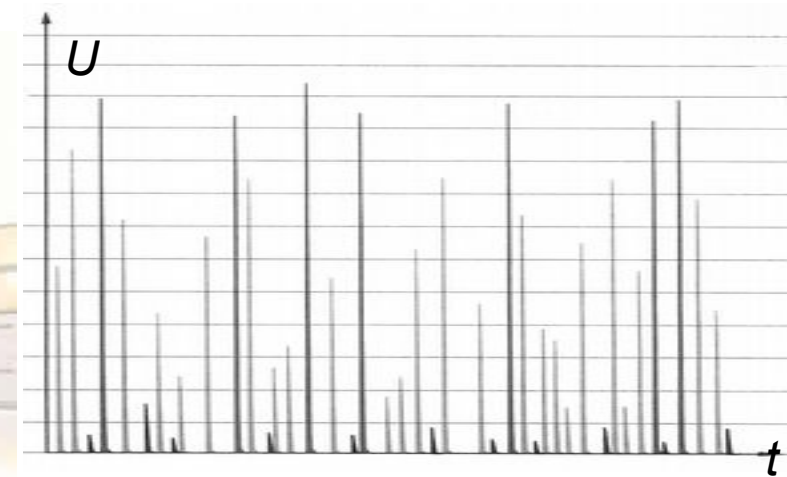


Information: zeitliche und räumliche Verteilung der Moleküle



## Signale in der Medizin: Beispiel 4

SPECT-CT:  
Einzelphotonenemissions-  
spektrometrie  
Komputertomografie



**Signal:**

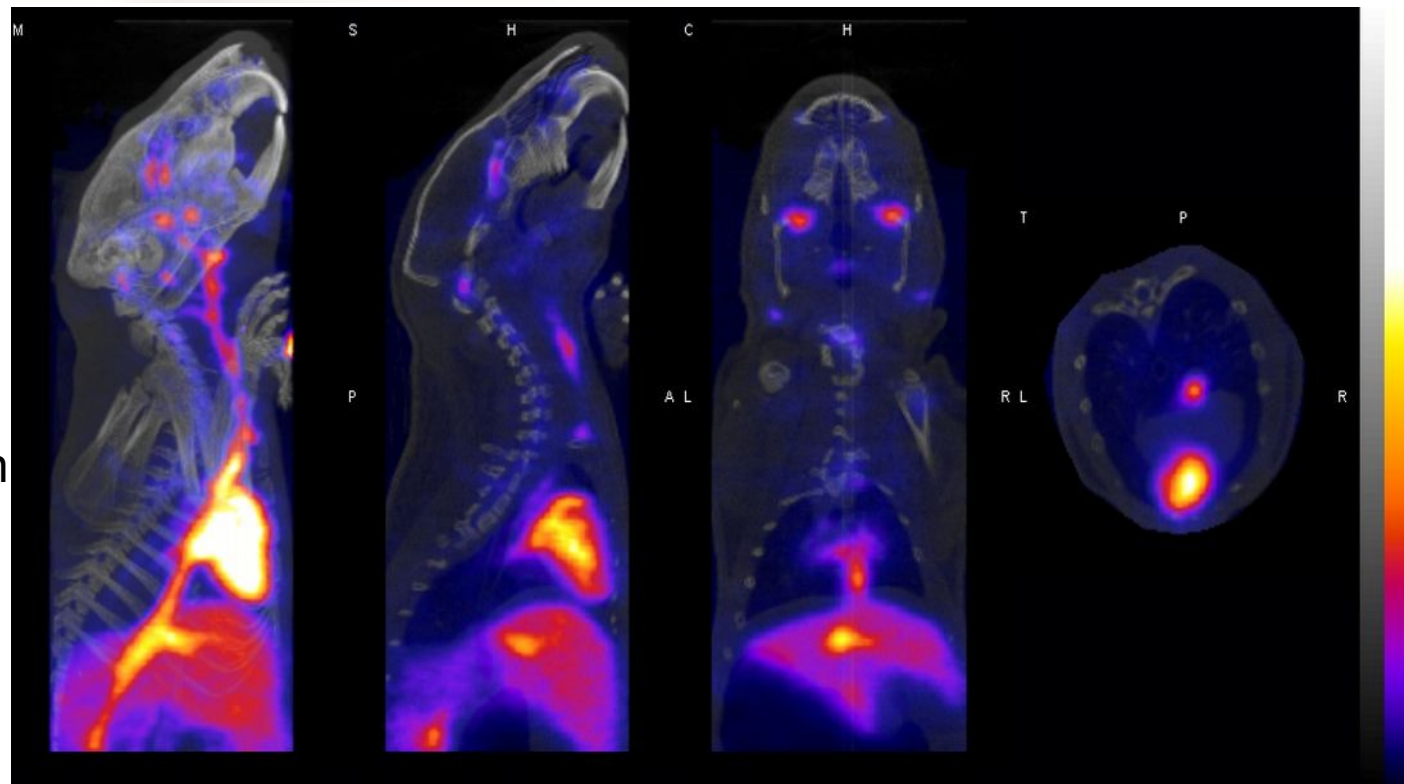
Original:  $\gamma$ -Photonen  
Rtg.-Photonen

**Kodierung:** elektrische  
Impulse

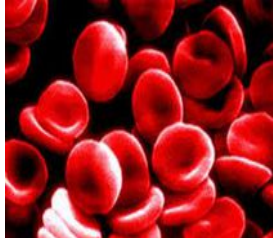
**Kodierung:** Bildrekonstruktion

**Information:**

Anatomie (Rtg)  
Funktion (Isotopdiagnostik)



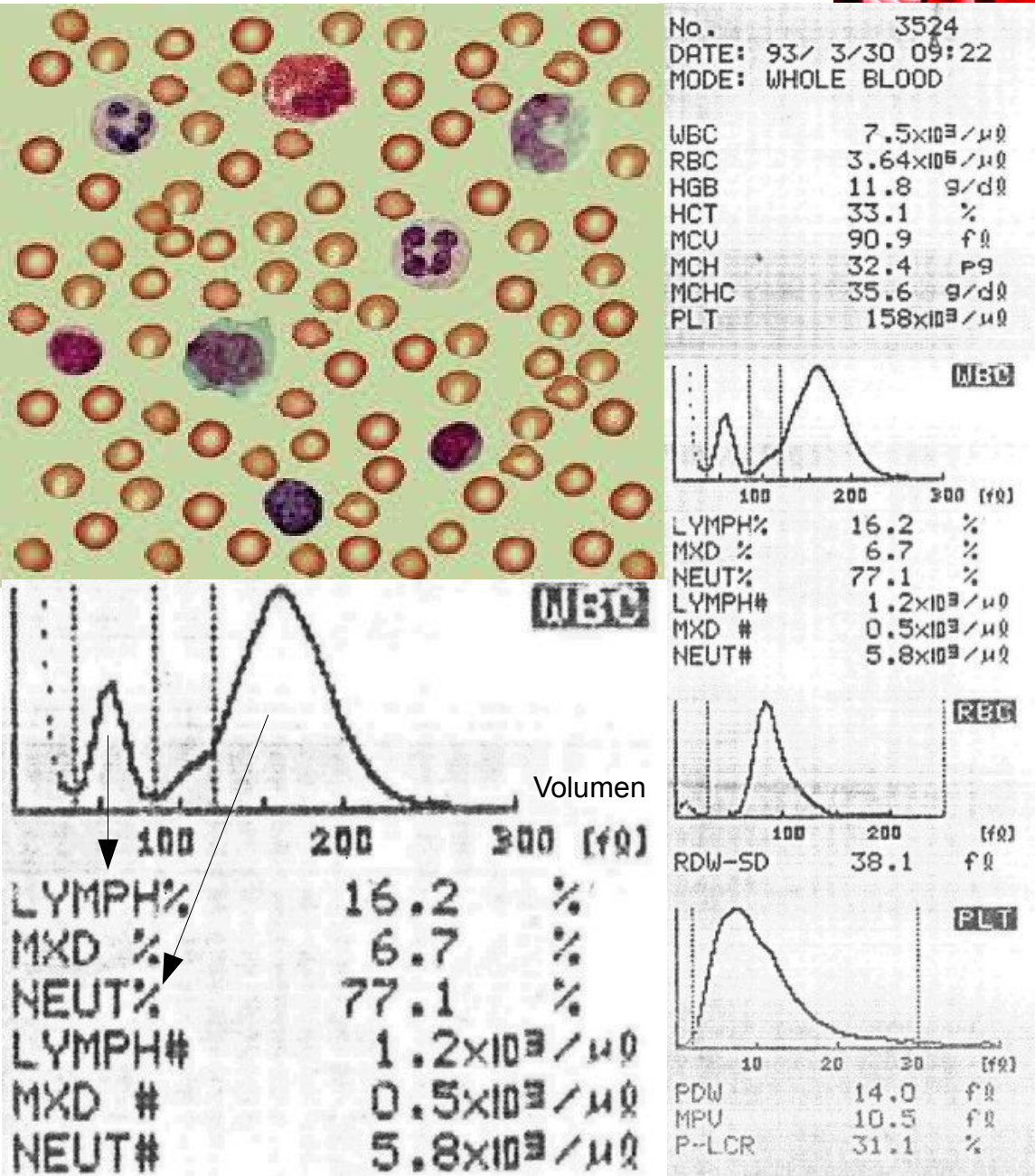
# Signale in der Medizin: Beispiel 5



Coulter-Zähler

Signal: Zellenvolumen

Kodierung: elektrische Impluse  
Kodierung: Histogramm



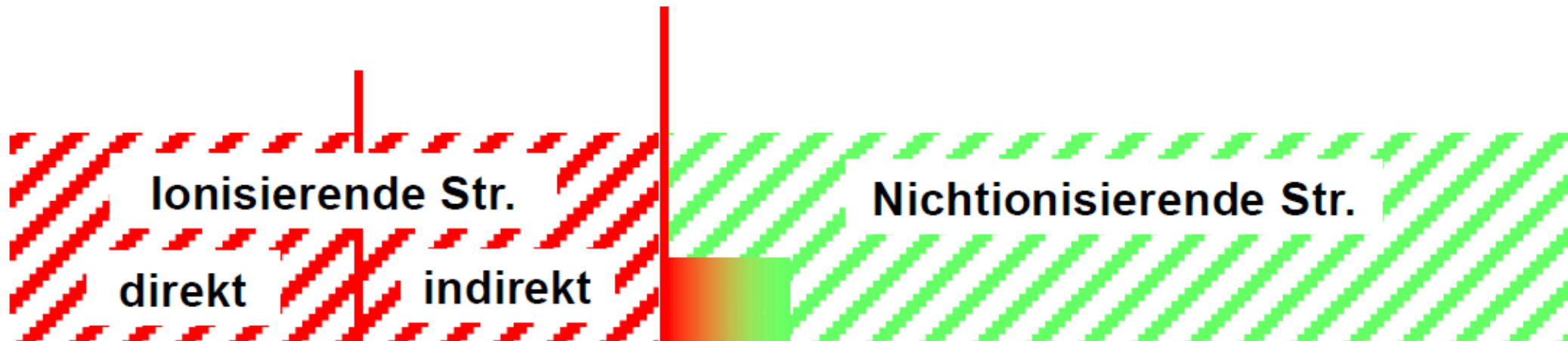
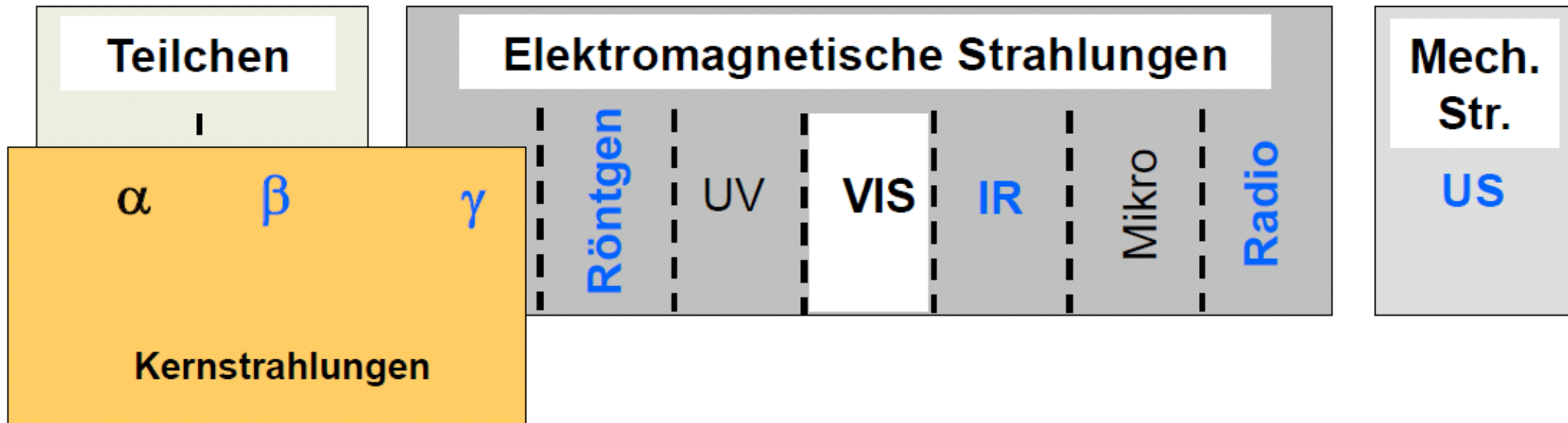
Information: Blut-Zusammensetzung

# Bildgebende Verfahren

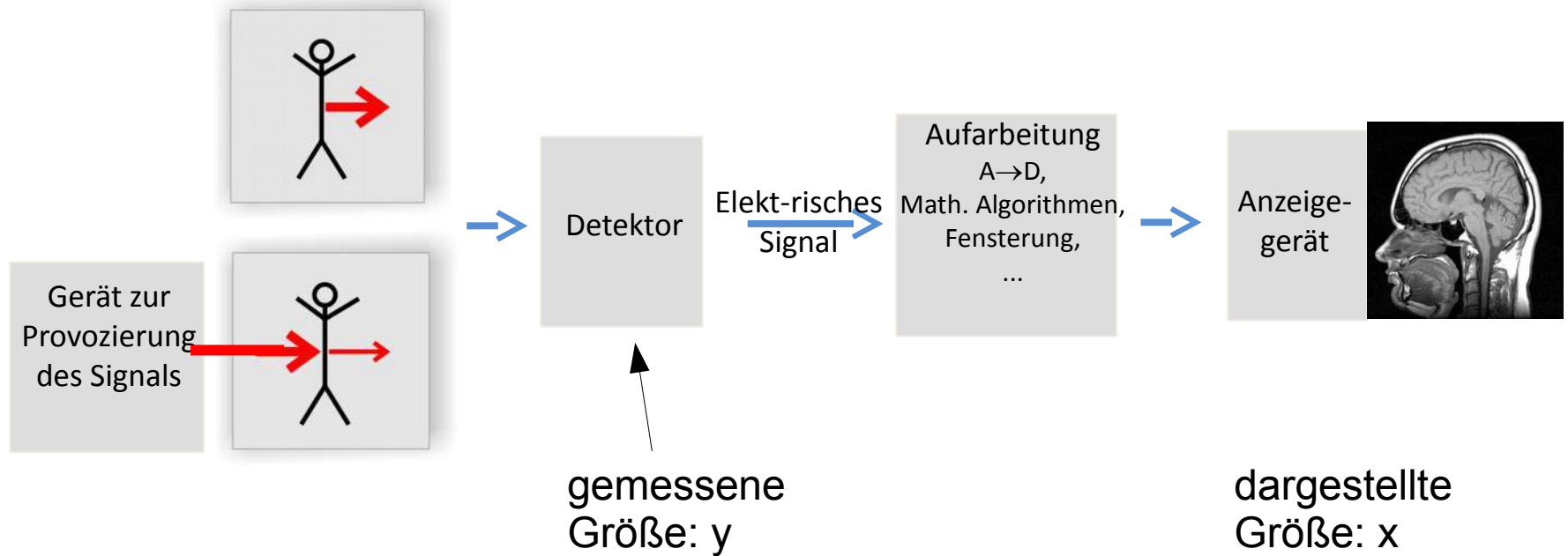
- **1. Endoskopie**
- **2. Infrarotdiagnostik (Telethermographie)**
- *3. Elektrische Potenzialkarte (EKG, EEG..)*
- *4. Elektrische Impedanztomographie (EIT)*
- **5. Nuklearmedizin (Szintigraphie)**
  - 5a. Gammakamera; 5b. SPECT; 5c. PET
- **6. Röntgendiagnostik**
  - 6a. Einfache Durchleuchtung; 6b. CT
- **7. Sonographie**
  - 7a. Echoimpulsverfahren; 7b. Farb-Doppler Verfahren
- **8. Magnetresonanztomographie (MRT)**

# Verwendete Strahlungen

Teilchenenergie



# Schema der bildgebenden Verfahren



**Zusammenhang zwischen  $y$  und  $x$  : Kodierung**

**Prinzip =**

Entstehung des gemessenen Signals

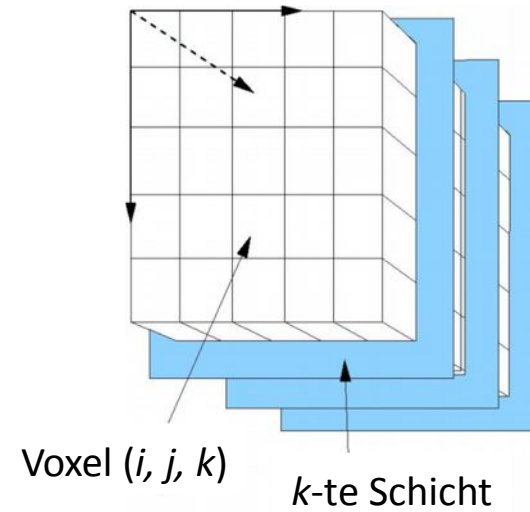
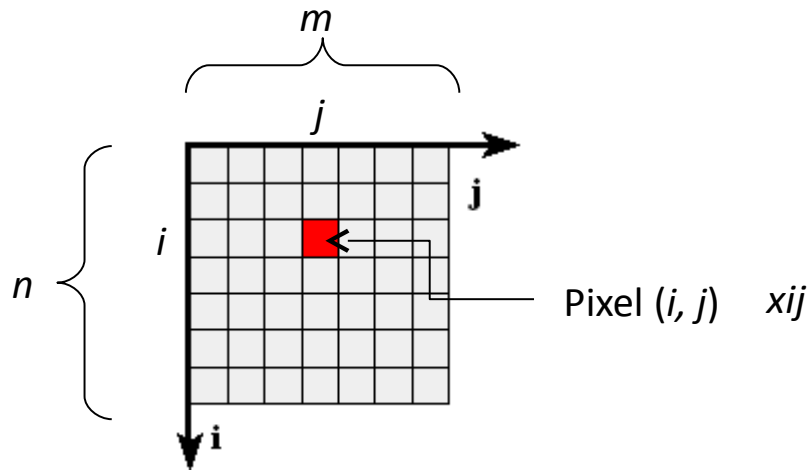
$y$

$x$

Zusammenhang:  $y=y(x)$  oder  $x=x(y)$



**Bild:** 2D oder 3D Darstellung der räumlichen Verteilung einer physikalischen Größe  $x$  im Körper  
(wir messen nicht unbedingt direkt  $x$ !)



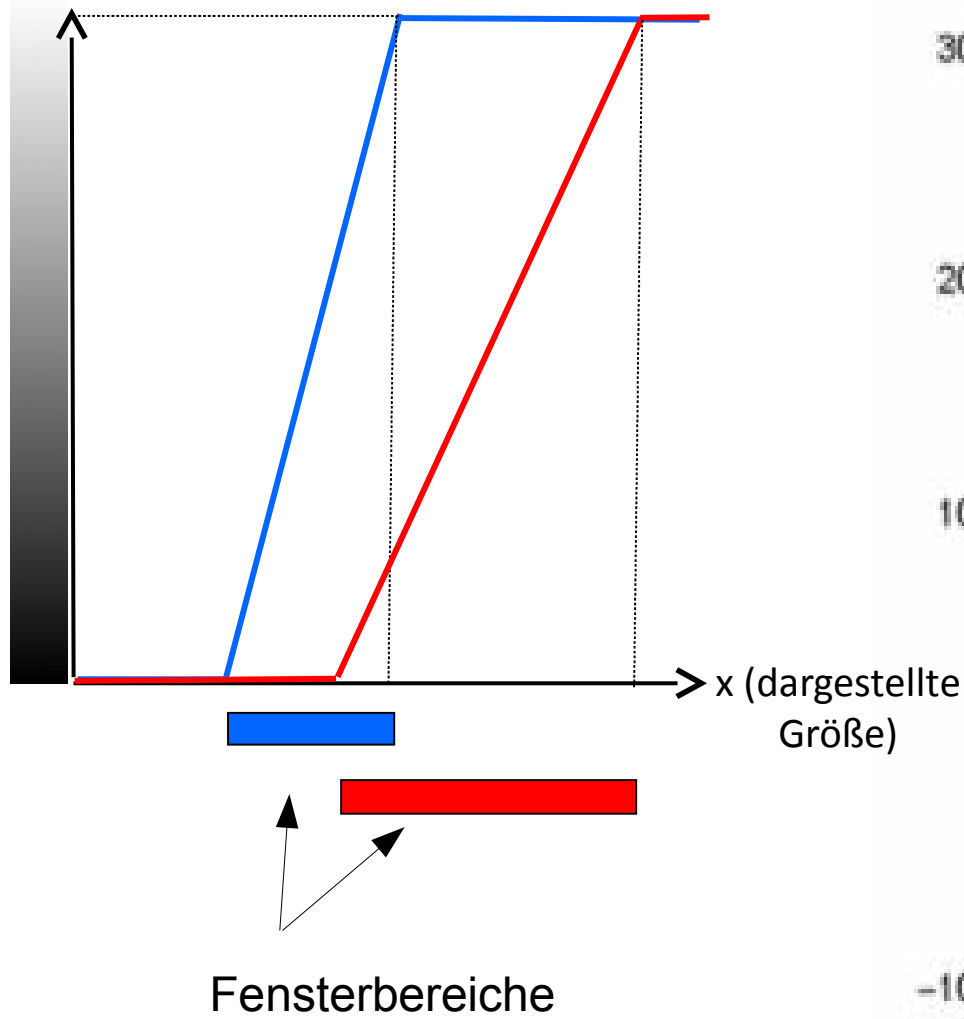
- Querschnittsfläche
- $n \times m$
- Dicke der Schicht

$\Leftrightarrow$  **räumliche Auflösung**

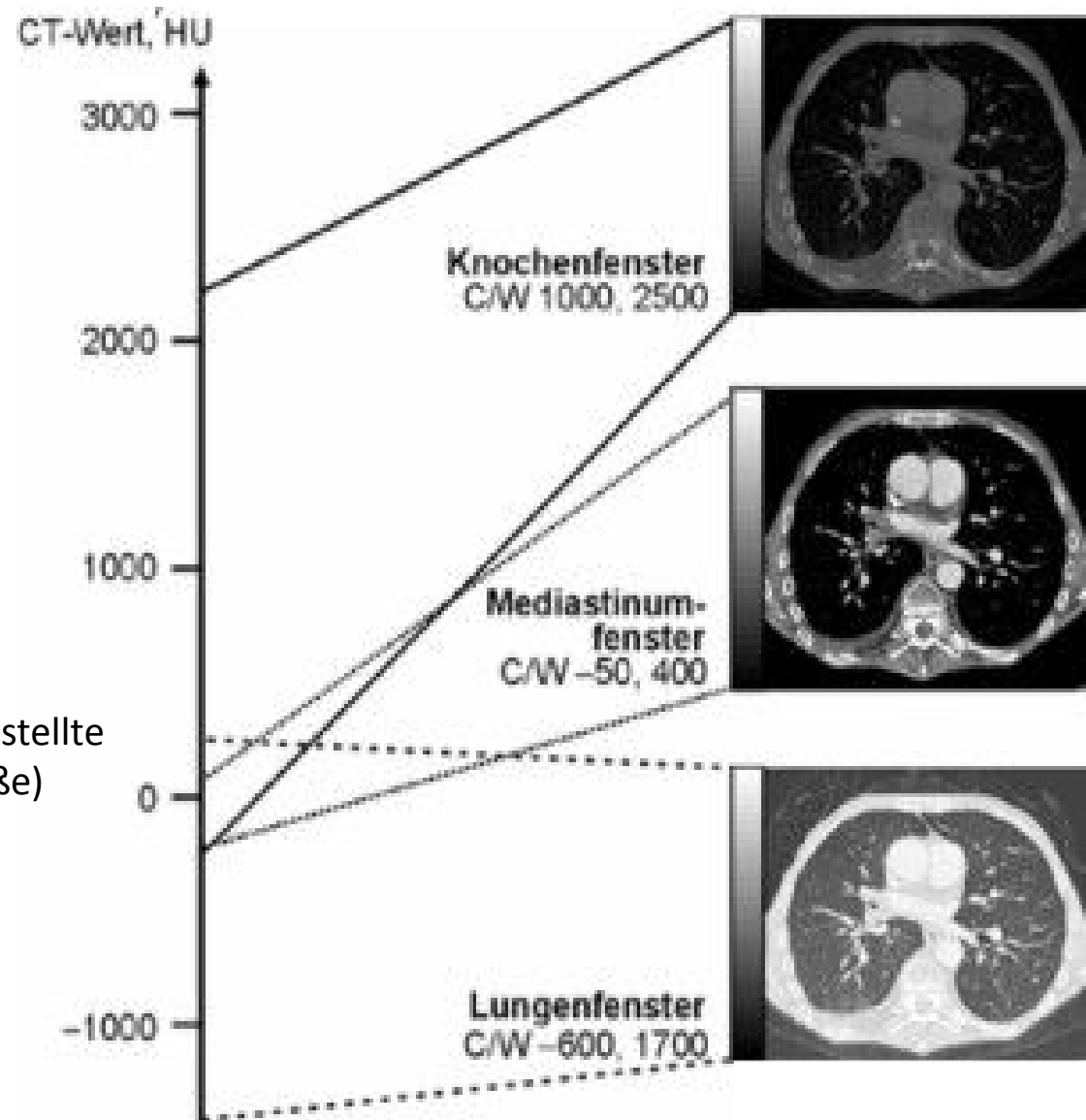
- **Bildrekonstruktion:**
  - $y \Rightarrow x$
  - Ort

- Darstellung:**
- Grautöne/Farbtöne
  - Fensterung

Graustufen

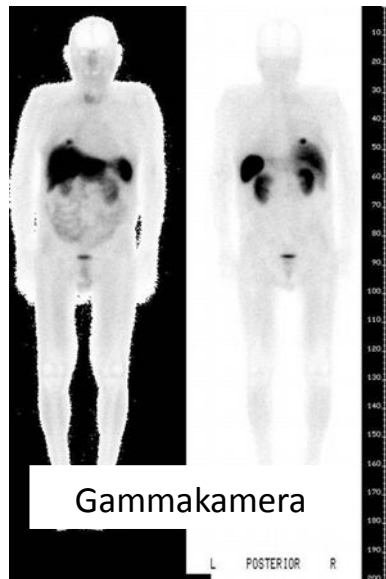


Zum Beispiel:



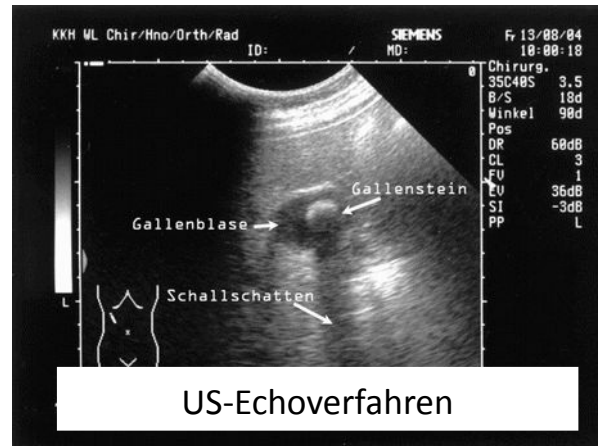
- **Bildtyp:**

- Summationsbild (S)

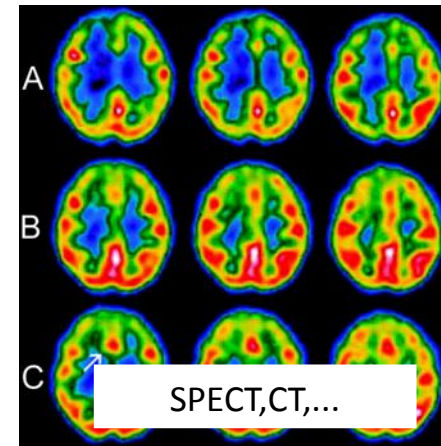


- Schichtbild = Tomogramm (T)

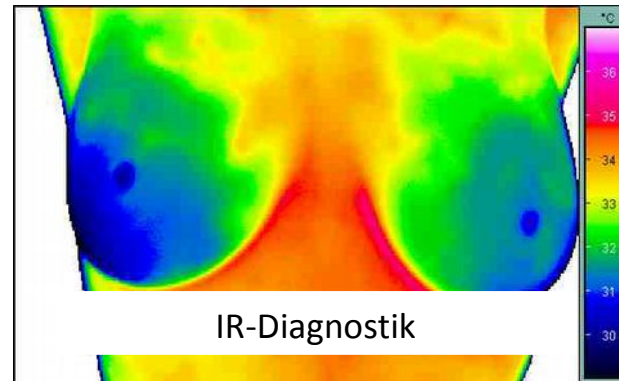
- direkt gemessenes Tomogramm (dT)



- berechnetes Tomogramm (bT)



- Spezielles Schichtbild, Oberflächenbild (O)



- **Bildinfo:**

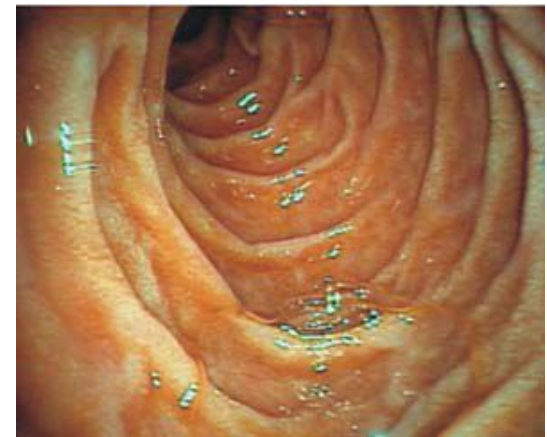
- (eher) morphologisch (M)
  - (eher) funktionell (F)

# Endoskopie



Strahlungsart?

e.m. Strahlung  
VIS



Gemessene  
Größe?

$J, \lambda$

Dargestellte  
Größe?

$J, \lambda$

Kodierung: keine  
 $y=x$

Prinzip?

Beleuchtung durch optische Faser (Totalreflexion) oder  
durch Kapsel-Endoskop.

Bildtyp?

O

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!

# Infrarotdiagnostik



Strahlungsart?  
e.m. Strahlung  
IR

Gemessene  
Größe?

$J$

Dargestellte  
Größe?

$T$

Prinzip?

**Temperaturstrahlung des menschlichen Körpers:**

Stefan-Boltzmann:  $M \sim T^4$  und  $J \sim M$

Bildtyp?

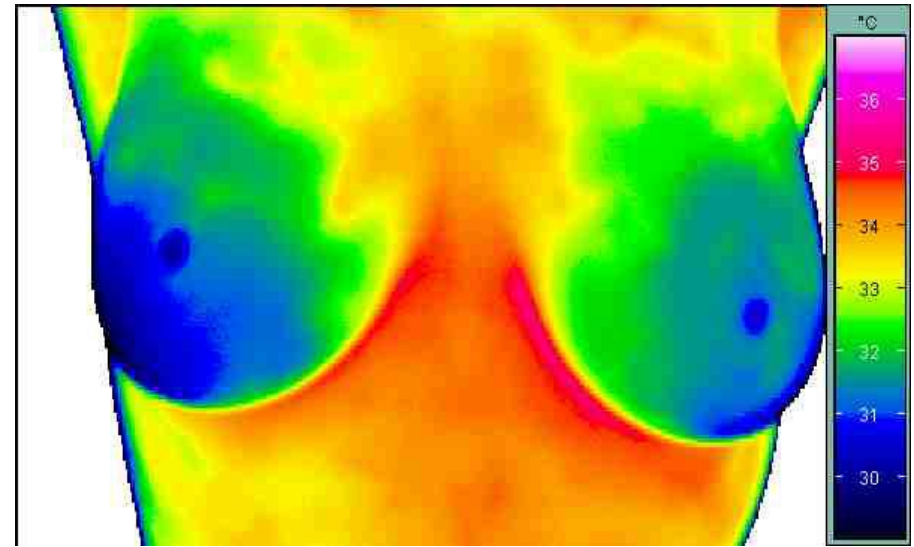
O

Infos?

F

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!



Kodierung:  
 $J \rightarrow T \rightarrow \text{Farbe}$

# Elektrische Potenzialkarte



Strahlungsart?

keine

Gemessene  
Größe?

$\varphi$

Dargestellte  
Größe?

$\varphi$

Prinzip?

Bei Muskel- und Nerventätigkeit entsteht ein elektrisches Feld im Körper, dessen Potenzialverteilung an der Körperoberfläche durch Elektroden direkt messbar ist.

Bildtyp?

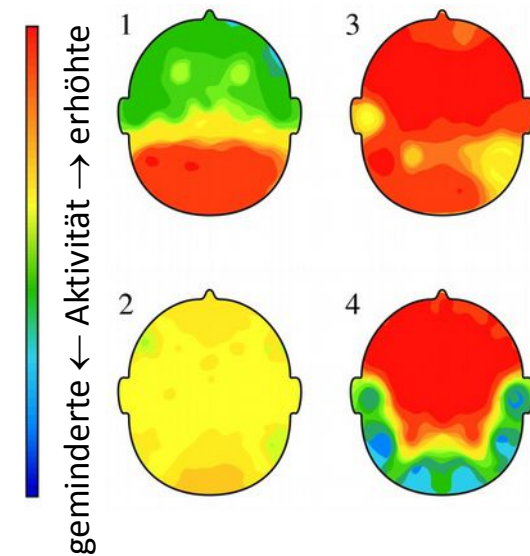
O

Infos?

F

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!



Kodierung:  $y=x$ ,  
aber  $x \rightarrow$  Farbe

# Elektrische Impedanztomographie



Strahlungsart?

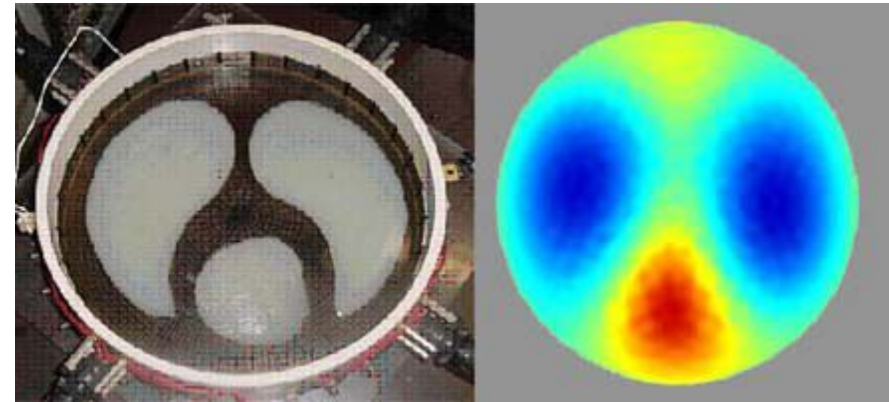
keine

Gemessene  
Größe?

$U$

Dargestellte  
Größe?

$Z$



Kodierung:  
 $U \rightarrow Z \rightarrow \text{Farbe}$

Prinzip?

Hochfrequente konstante Stromstärke wird an den Patient gelegt und die Spannung gemessen, und  $U = Z \cdot I$   
wobei die Impedanz  $Z$  gewebsabhängig ist.

Bildtyp?

bT

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!

# Nuklearmedizin

## Gammakamera



Strahlungsart?  
e.m. Strahlung  
 $\gamma$

Gemessene  
Größe?

$J$

Dargestellte  
Größe?

$c$

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch  
ununterscheidbar, physikalisch  
lokalisierbar und

$$J \sim \Lambda \sim c$$

Bildtyp?

S

Infos?

F/M



Kodierung:  $J \rightarrow c \rightarrow$  Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!



# Nuklearmedizin

## SPECT



Strahlungsart?

e.m. Strahlung

$\gamma$

Gemessene  
Größe?

$J$

Dargestellte  
Größe?

$c$

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch  
ununterscheidbar, physikalisch lokalisierbar und

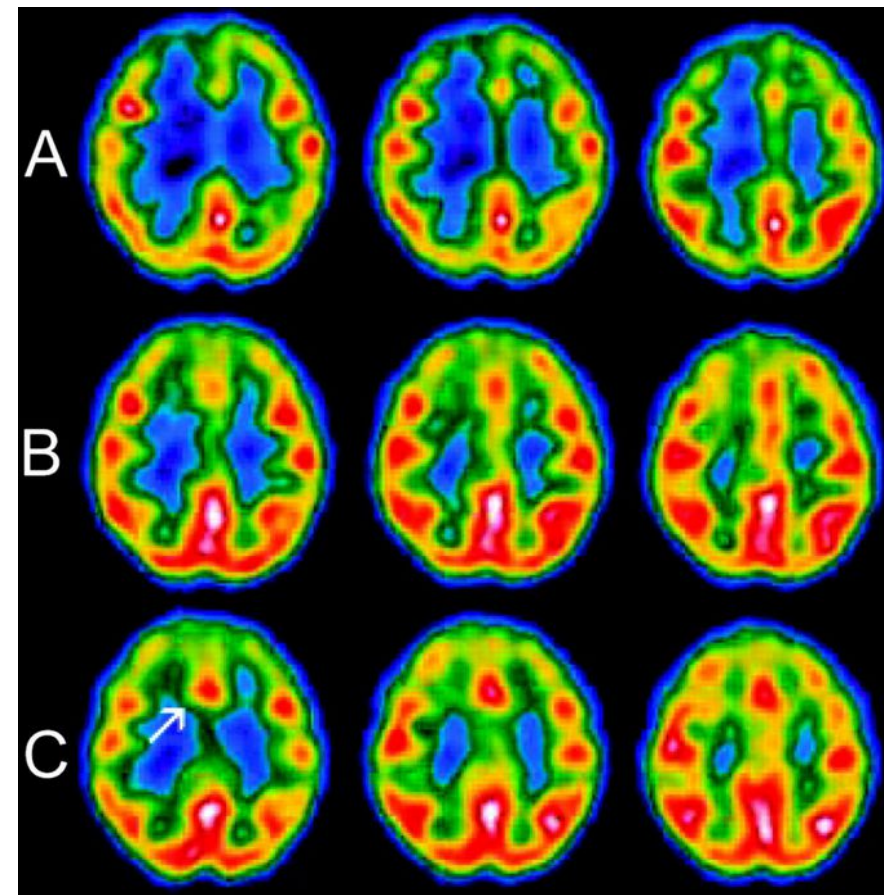
$$J \sim \Lambda \sim c$$

Bildtyp?

bT

Infos?

F



Kodierung:  $J \rightarrow \text{Bildrek.} \rightarrow c \rightarrow \text{Farbe}$

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!

# Nuklearmedizin

## PET



Strahlungsart?  
e.m. Strahlung  
 $\beta^+ \rightarrow \gamma$

Gemessene  
Größe?

$J$

Dargestellte  
Größe?

$c$

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch  
ununterscheidbar, physikalisch lokalisierbar und

$$J \sim \Lambda \sim c$$

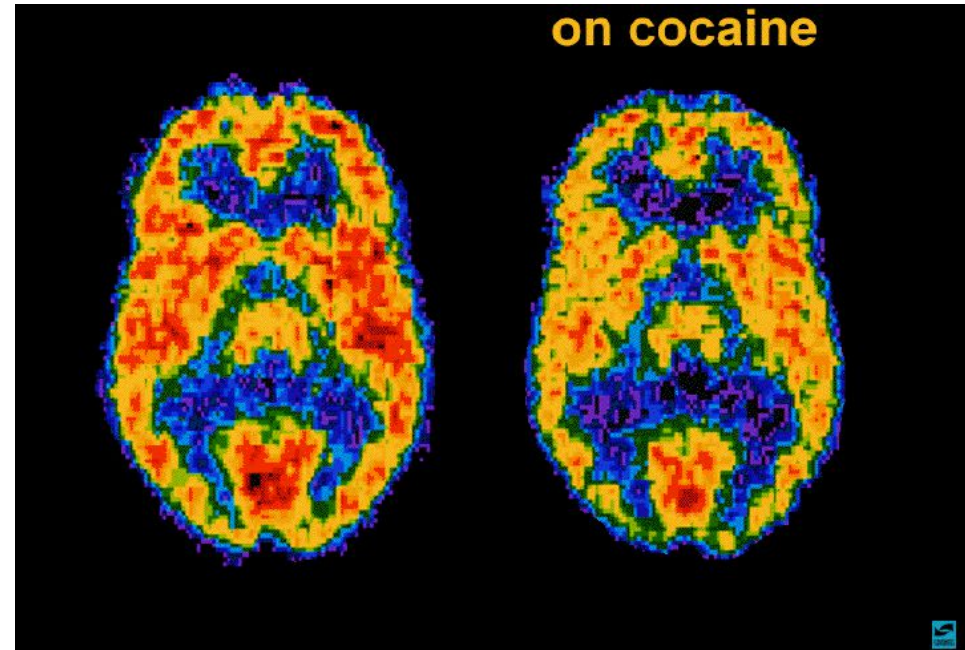
Bildtyp?

bT

Infos?

F

on cocaine



Kodierung:  $J \rightarrow \text{Bildrek.} \rightarrow c \rightarrow \text{Farbe}$

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!

# Röntgendiagnostik

## gewöhnliche Durchleuchtung



Strahlungsart?

e.m. Strahlung  
Röntgen

Gemessene  
Größe?

J

Dargestellte  
Größe?

J

Prinzip?

Unterschiedliche Schwächung der Rtg-Strahlen in  
verschiedenen Körperteilen.

Bildtyp?

S

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!



Kodierung: J → Graustufen

# Röntgendiagnostik

## Computertomographie



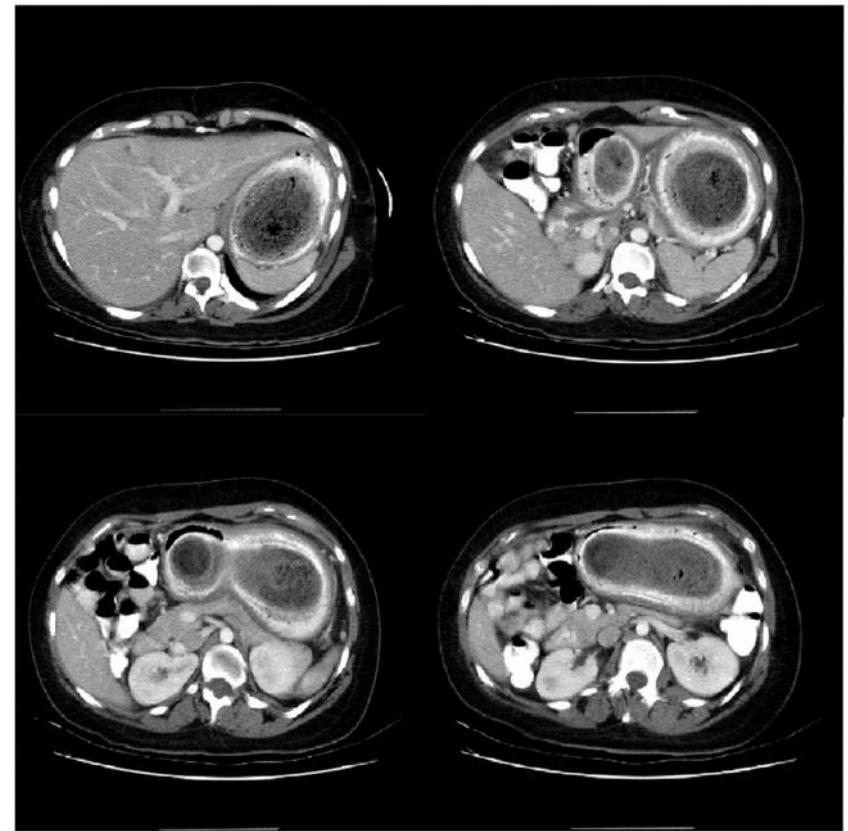
Strahlungsart?  
e.m. Strahlung  
Röntgen

Gemessene  
Größe?

$J$

Dargestellte  
Größe?

$\mu$



Prinzip?

Unterschiedliche Schwächung der Rtg-Strahlen in  
verschiedenen Körperteilen:

$$\lg \frac{J_0}{J} \sim \mu$$

Kodierung:  $J \rightarrow$  **Bildrek.**  $\rightarrow$   
 $\mu \rightarrow$  Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

Bildtyp?

bT

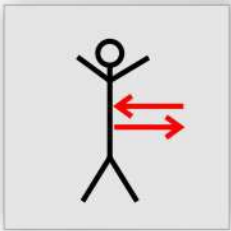
Infos?

M

siehe Dosimetrie!

# Sonographie

## Echoimpulsverfahren



Strahlungsart?

Mech.  
Strahlung  
US

Gemessene  
Größe?

$t_{\text{Sende-Echo}}$  und  
 $J_{\text{Echo}}$

Dargestellte  
Größe?

Abstände und  
 $J_{\text{Echo}}$

Prinzip?

US-Impuls reflektiert, Radar-Prinzip:

$$t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$$

Bildtyp?

dT

Infos?

M



Kodierung:  $t \rightarrow$  Länge und  $J \rightarrow$  Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine, wenn:

$$J < 0,1 \text{ W/cm}^2 \text{ oder } J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$$



# Sonographie

## Farb-Doppler Verfahren



Strahlungsart?

Mech. Strahlung  
US

Gemessene  
Größe?

$t_{\text{Sende-Echo}}$  und  
 $J_{\text{Echo}}$  und  
 $f_D$

Dargestellte  
Größe?

Abstände und  
 $J_{\text{Echo}}$  und  
 $v_{\text{Blut}}$

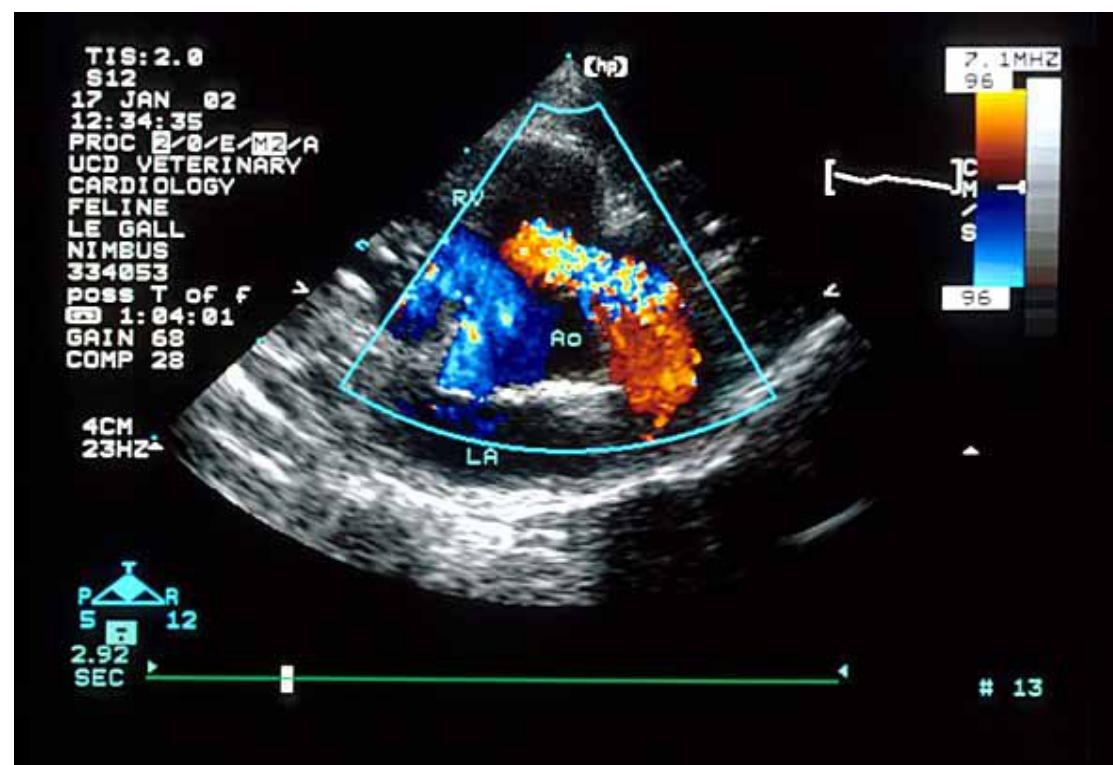
Prinzip?

US-Impuls reflektiert, Radar-Prinzip:

$$t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$$

und Doppler Effekt:

$$f_D \sim v_{\text{Blut}}$$



Bildtyp?

dT

Infos?

M/F

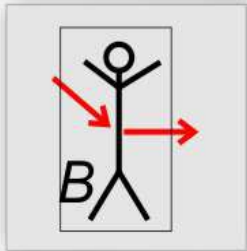
Kodierung:  $t \rightarrow$  Länge und  $J \rightarrow$  Graustufen  
 $f_D \rightarrow v \rightarrow$  Farben

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine, wenn:

$$J < 0,1 \text{ W/cm}^2 \text{ oder } J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$$

# MRT



Strahlungsart?

e.m. Strahlung  
Radiowellen

Gemessene  
Größe?

$J$  und  $J(t)$

Dargestellte  
Größe?

$n_H$  und  $T_1, T_2$

Prinzip?

Magnetfeld ( $B$ ), Anregung, anschließend  
darauf RW-Emission, wobei:  $J \sim n_H$   
und  $J(t) \Rightarrow$  Relaxationszeiten  $T_1$ , und  $T_2$

Bildtyp?

dT

Infos?









M/F

Nebenwirkungen/Risikos?

Herzschrittmacher, Metallprothesen



Kodierung:  $J, T_1, T_2 \rightarrow$  Graustufen

VERFAHREN	Strahlung	GRUNDPRINZIP		gemessene Größe	dargestellte Größe	Bildtyp	Infotyp	Nebenwirkung /Risiko
1. Endoskopie	VIS		Beleuchtung durch optische Faser (Totalreflexion) oder durch Kapsel-Endoskop.	$J$	$J$	O	M	—
2. Infrarotdiagnostik (Telethermographie)	e.m. Str.: IR		Temperaturstrahlung: Stefan-Boltzmann: $M \sim T^4$ und $J \sim M$	$J$	$T$	O	F	—
3. Elektrische Potenzialkarte (EKG, EEG, ...)	—		Bei Muskel- und Nerventätigkeit entsteht ein elektrisches Feld im Körper, dessen Potenzialverteilung an der Körperoberfläche durch Elektroden direkt messbar ist.	$\varphi$	$\varphi$	O	F	—
4. Elektrische Impedanztomographie (EIT)	—		Hochfrequente konstante Stromstärke wird an den Patient gelegt und die Spannung gemessen; $U = Z \cdot I$ , wobei die Impedanz $Z$ gewebsabhängig ist.	$U$	$Z$	bT	M	—
5. Nuklearmedizin (Szintigraphie)	e.m. Str.: $\gamma$		Radioaktive Isotope werden dem Patienten zugeführt. Sie verhalten sich im Organismus genauso wie die stabilen Isotope, sie können aber durch ihre Strahlung lokalisiert werden, und $J \sim A \sim c$	$J$	$c$	S	F+M	Stoch. Strahlenschädigung möglich
5a. Gammakamera	e.m. Str.: $\gamma$					bT	F	
5b. SPECT	e.m. Str.: $\gamma$					bT	F	
5c. PET	e.m. Str.: $\beta^+ \rightarrow \gamma$							
6. Röntgendiagnostik	e.m. Str.: Rtg		Der Patient wird mit Röntgenstrahlen durchgeleuchtet, die in verschiedenen Geweben/Organen unterschiedlich geschwächt werden, und $\lg \frac{J_0}{J} \sim \mu$	$J$	$J$	S	M	Stoch. Strahlenschädigung möglich
6a. einfache Durchleucht.						bT	M	
6b. CT					$\mu$			
7. Sonographie	mech. Str.: US		Der Patient wird mit US-Impuls bestrahlt, der an den Grenzflächen von akustisch unterschiedlichen Geweben im Teil reflektiert wird. Radar-Prinzip: Zeit zwischen Sende- und Echoimpuls ist proportional dem Abstand US-Kopf-Grenzfläche, $t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$	$t_{\text{Sende-Echo}}$ $J_{\text{Echo}}$	$t_{\text{Sende-Echo}}$ $J_{\text{Echo}}$	dT	M	—, wenn $J < 0,1 \text{ W/cm}^2$ oder $J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$
7a. Echoimpulsverfahren								
7b. Farb-Doppler-Verfahren			Doppler-Effekt: Frequenzverschiebung bei Reflexion durch sich bewegende Flächen $f_D \sim v_{\text{Blut}}$	$f_D$	$v_{\text{Blut}}$	dT	M+F	
8. MRT	e.m. Str.: Radiowellen		Die Spins der H-Atomkerne (Protonen) werden durch ein starkes Magnetfeld orientiert. In einer Schicht des Körpers werden die Spins von dieser Richtung durch RW-Bestrahlung abgelenkt. Bei Rückkehr der Spins wird RW-Strahlung emittiert, deren Intensität zur Protonendichte proportional ist: $J \sim n_H$ , und $J(t) \Rightarrow$ Relaxationszeiten $T_1$ , und $T_2$ und Protonendichte, $T_1$ und $T_2$ sind gewebsabhängig.	$J(t)$	$n_H$ $T_1$ $T_2$	dT	M	Pacemaker! Metallprothesen!



# Signalverarbeitung, Aufarbeitung von Signalen

Signaltype

elektrische Signale – analoge Signalkette

Elektrizitätslehre (Wiederholung + Ergänzung)

Verstärker, Frequenzübertragungsfunktion, Fourier

Digitale Signalverarbeitung (DSP)

# Klassifizierung der Signale

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| nichtelektrisches S.   | – elektrisches S.      |
| statisches S.          | – zeitabhängiges S.    |
| (quasi)periodisches S. | – nichtperiodisches S. |
| stochastisches S.      | – deterministisches S. |
| kontinuierliches S.    | – impulsförmiges S.    |
| analoges S.            | – digitales S.         |

# Signaltype

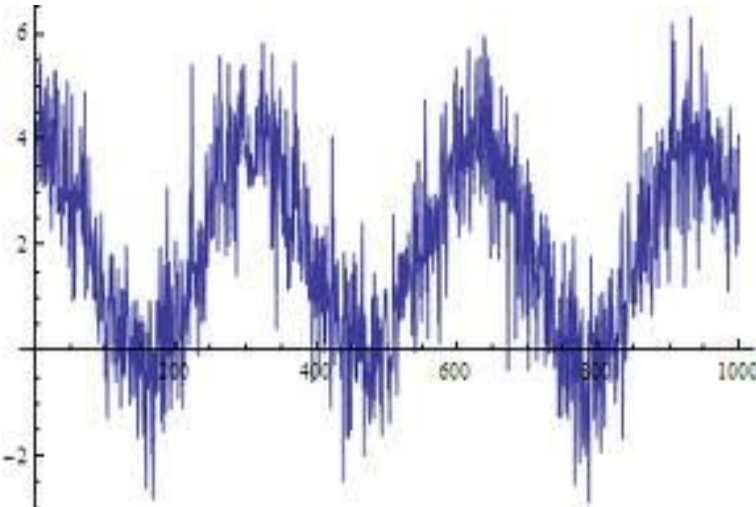
elektrisch

EKG

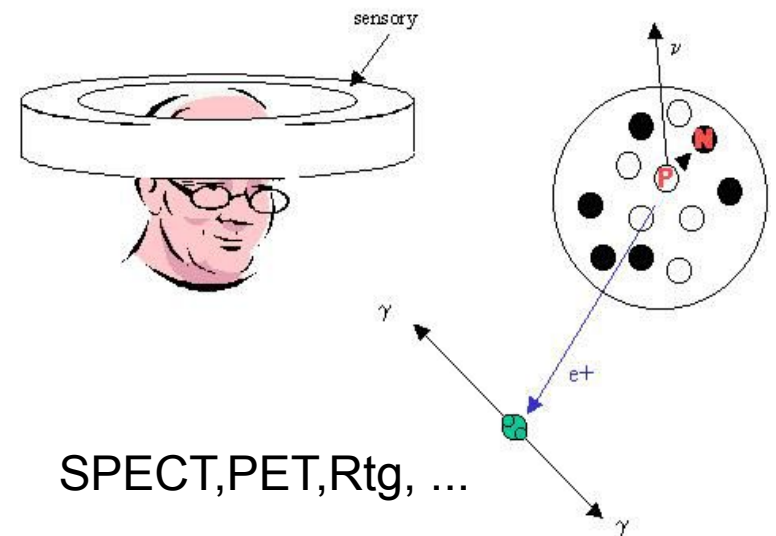


nichtelektrisch

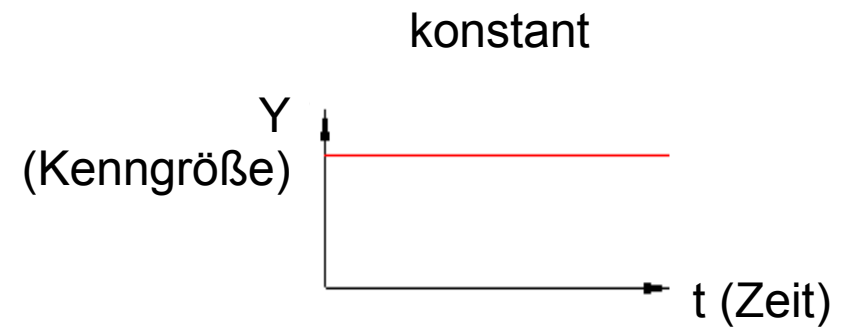
Schall



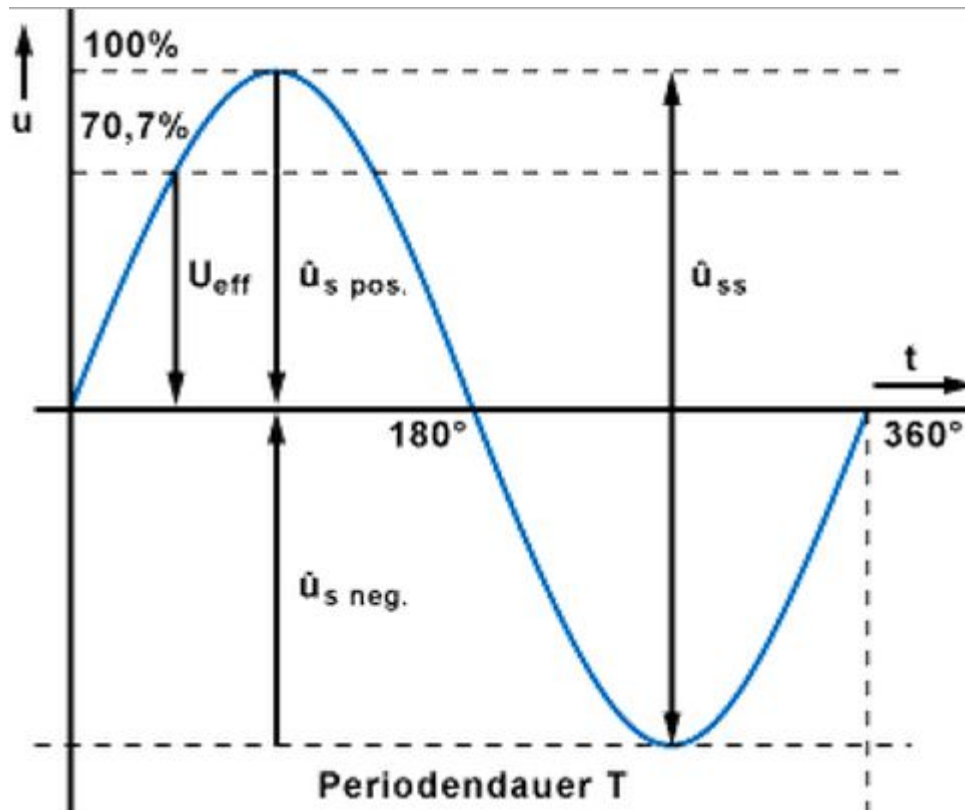
Wechselstrom



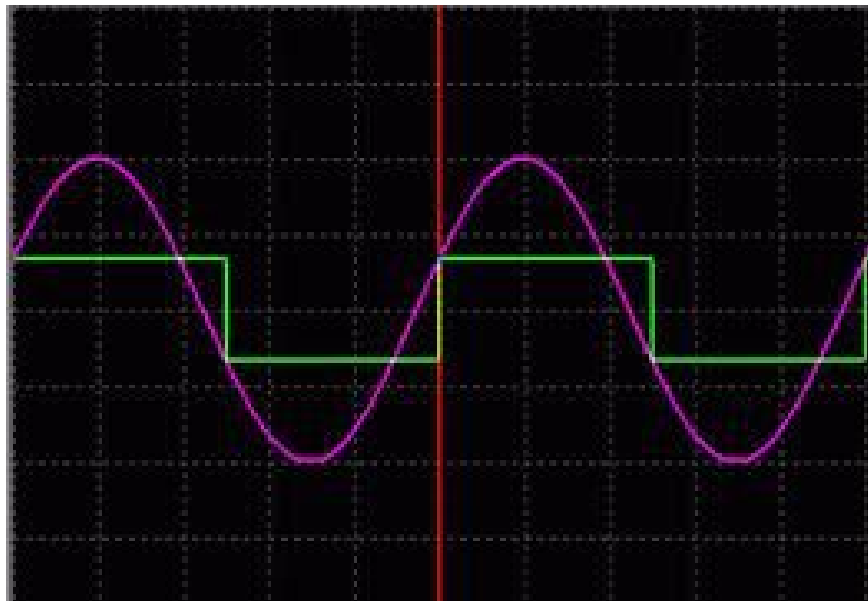
SPECT,PET,Rtg, ...



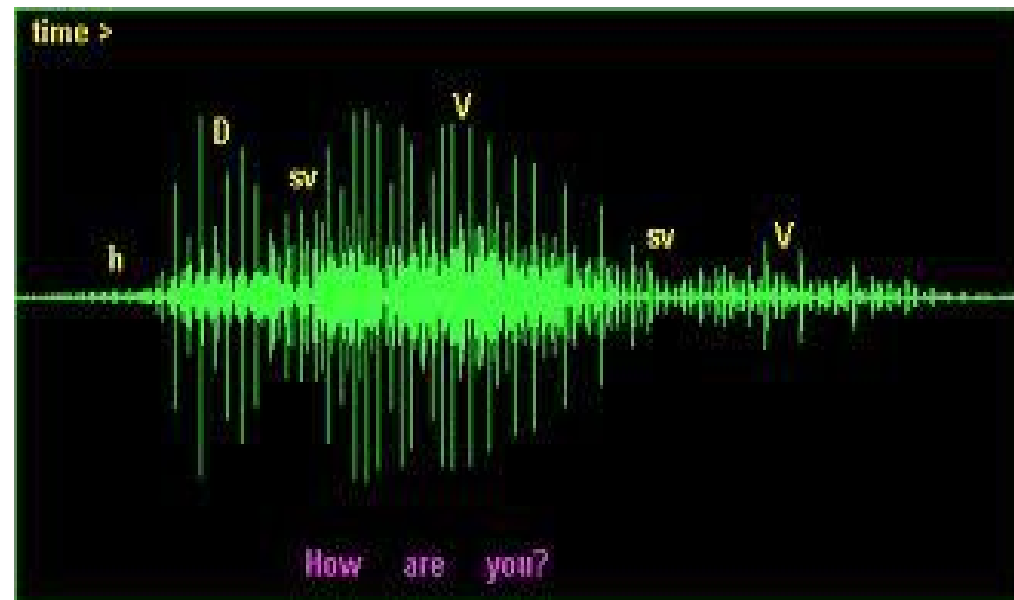
zeitabhängig (z.B. sinus-Signal)



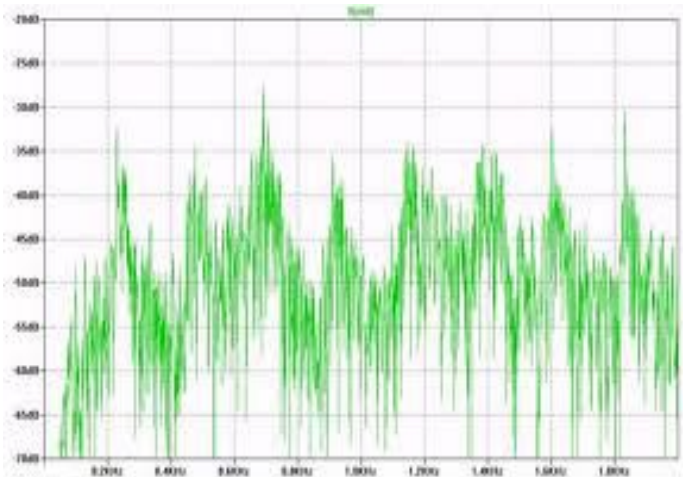
periodisch



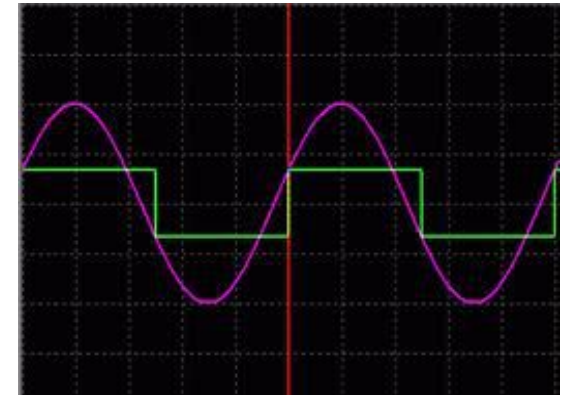
nichtperiodisch



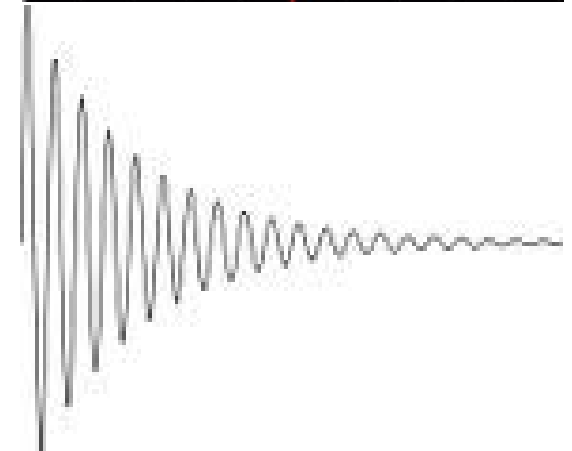
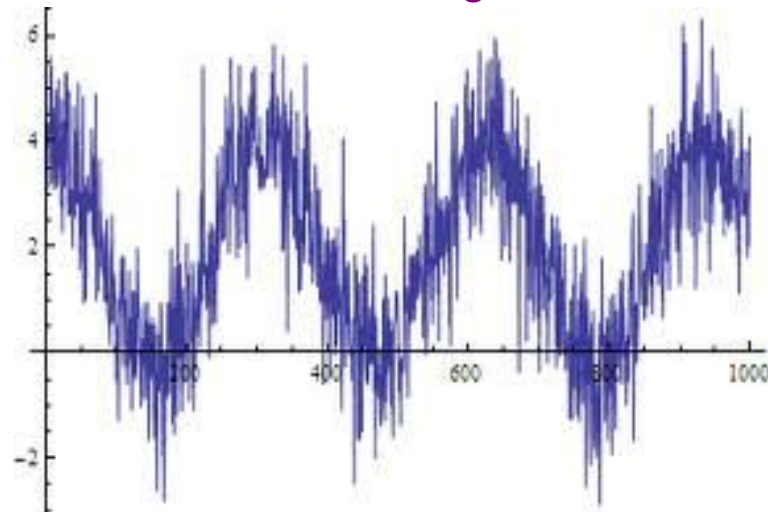
stochastisch



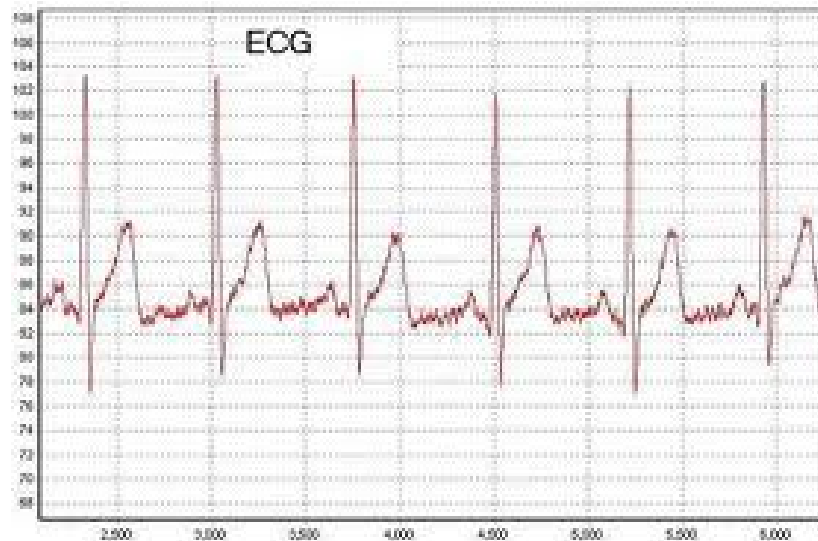
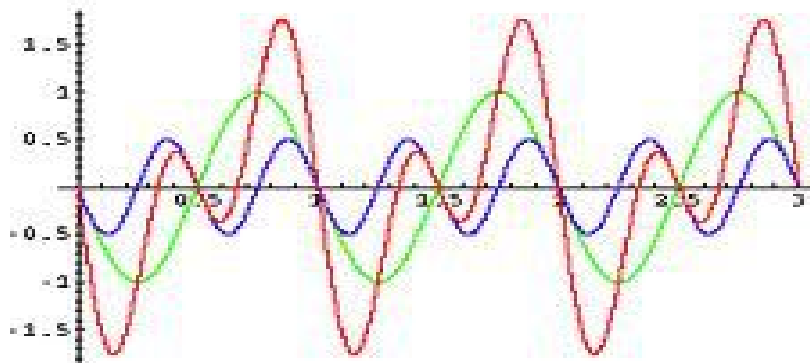
deterministisch



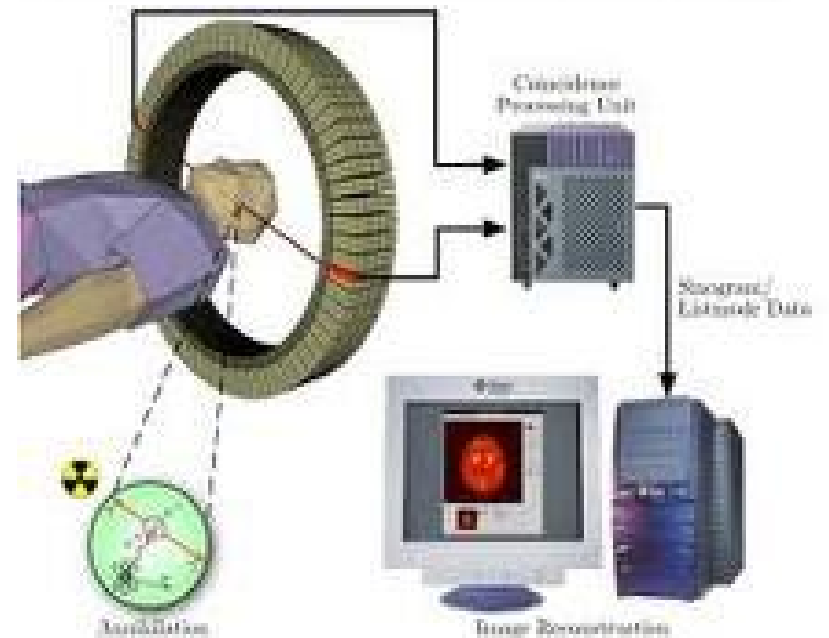
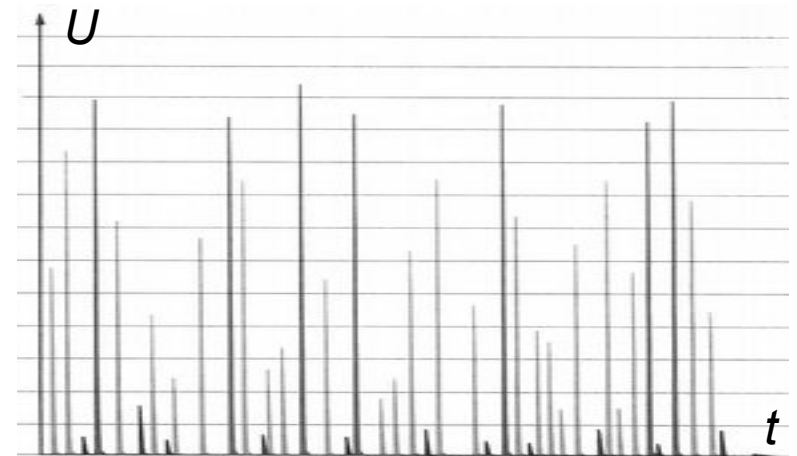
Fast immer gemischt!



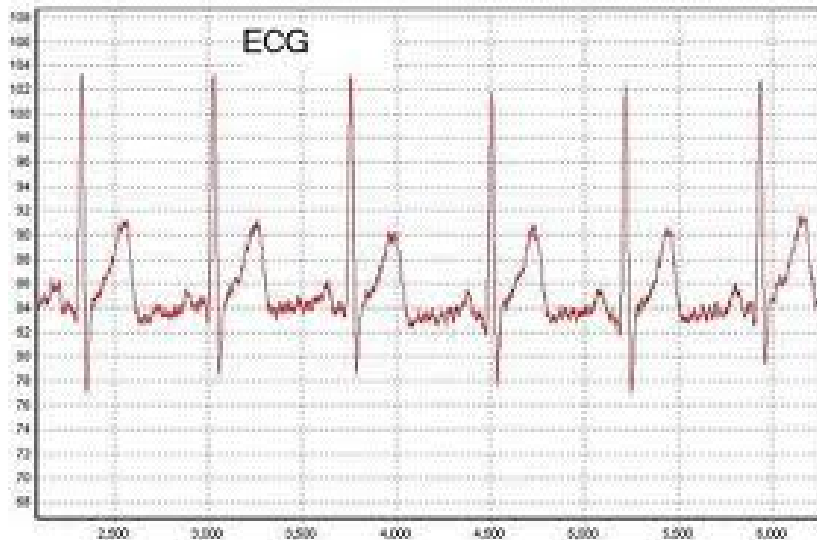
kontinuierlich



impulsförmig



## Analog

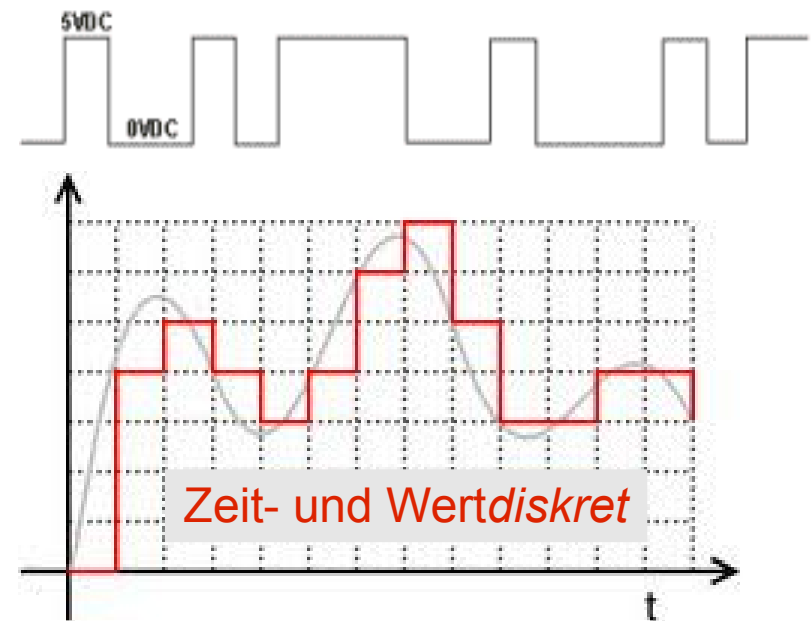


unbeschränkte Auflösung  
(nur theoretisch)

## Digital

1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1

Unipolar Coding ("1" = +V , "0" = 0V )



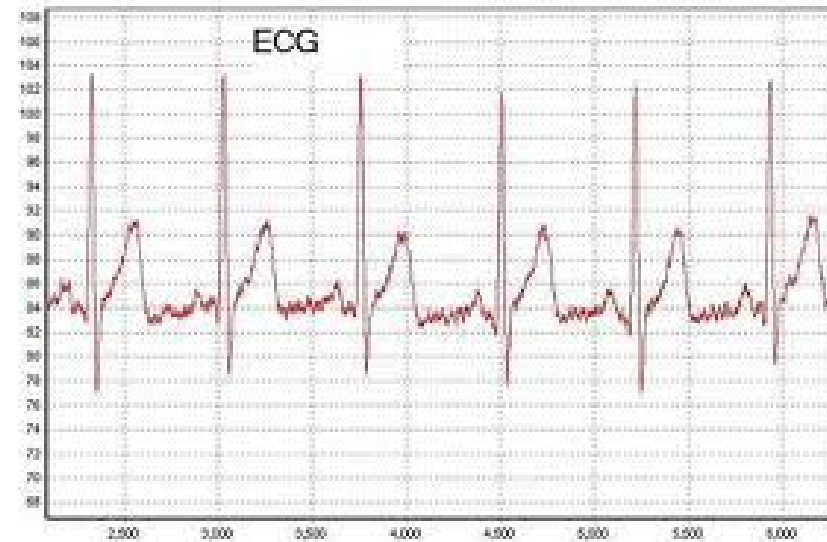
Digital: repräsentiert mit Zahlen  
**beschränkte Auflösung**

digitale Signale sind eine Form der **Kodierung**  
**Kodierung** : digital zu elektrisch (DAC)  
elektrisch zu digital (ADC)

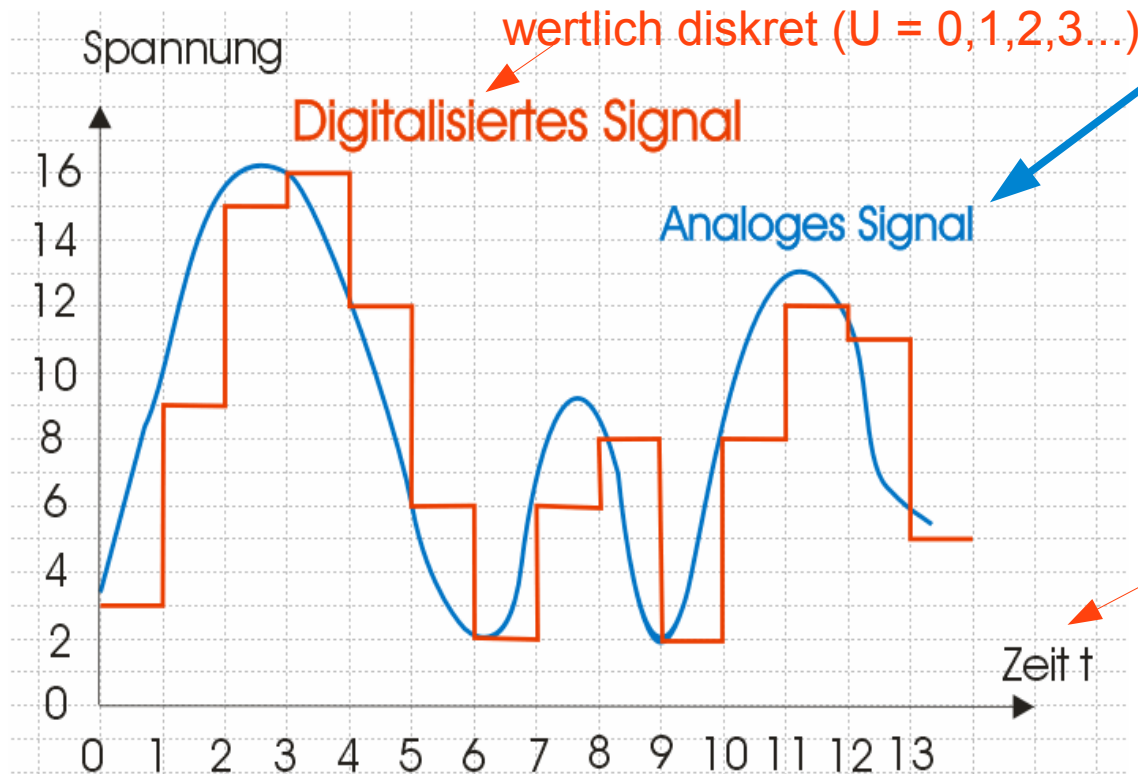


# Vergleichung des Informationsgehaltes

analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt?



*unbeschränkte Auflösung*  
in der Zeit und Größe  
(theoretisch)

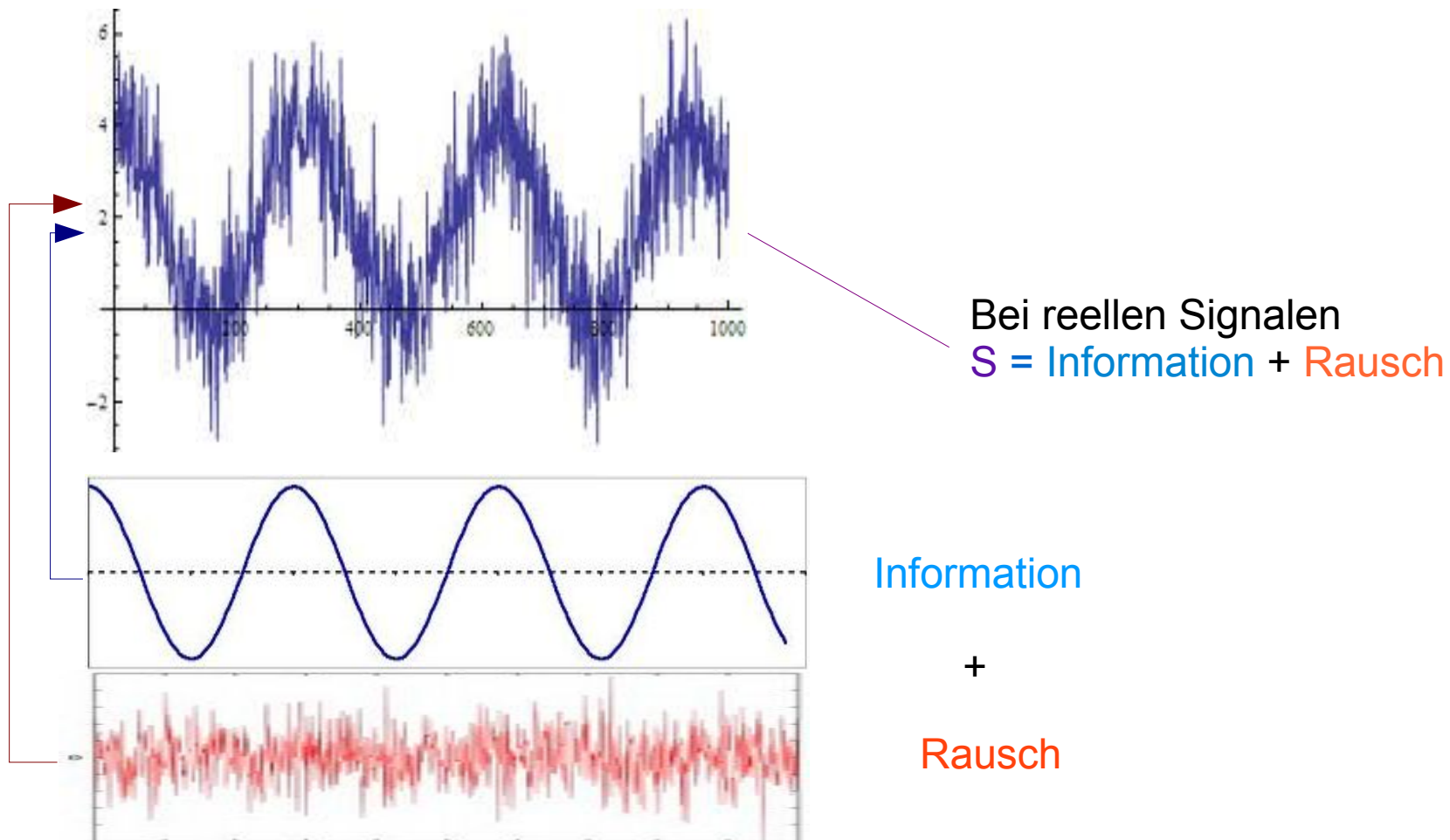


digitales Signal:  
beschränkter Informationsgehalt  
wegen zeitlicher und wertlicher  
**Diskretisierung**

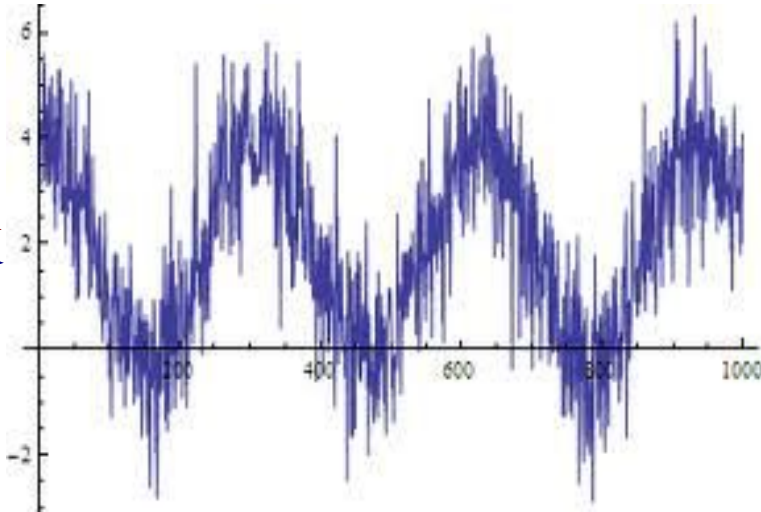
analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt wegen unbeschränkte Auflösung?

**Brauchen** wir es?

**Haben** wir es überhaupt? —————> **Nein!**



analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt wegen unbeschränkte Auflösung?



Wir haben **Information** + **Rausch**

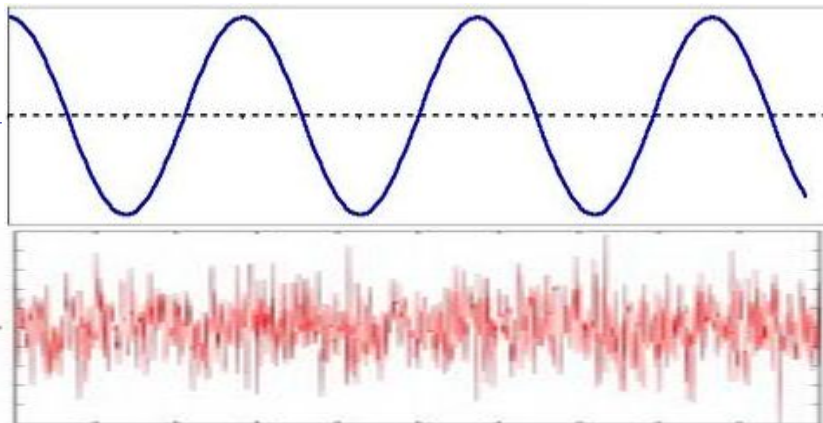
Ziel: den **Informationsgehalt erhalten und weitergeben**  
ohne den **Rausch** dabei zu vergrößern

z.B.:

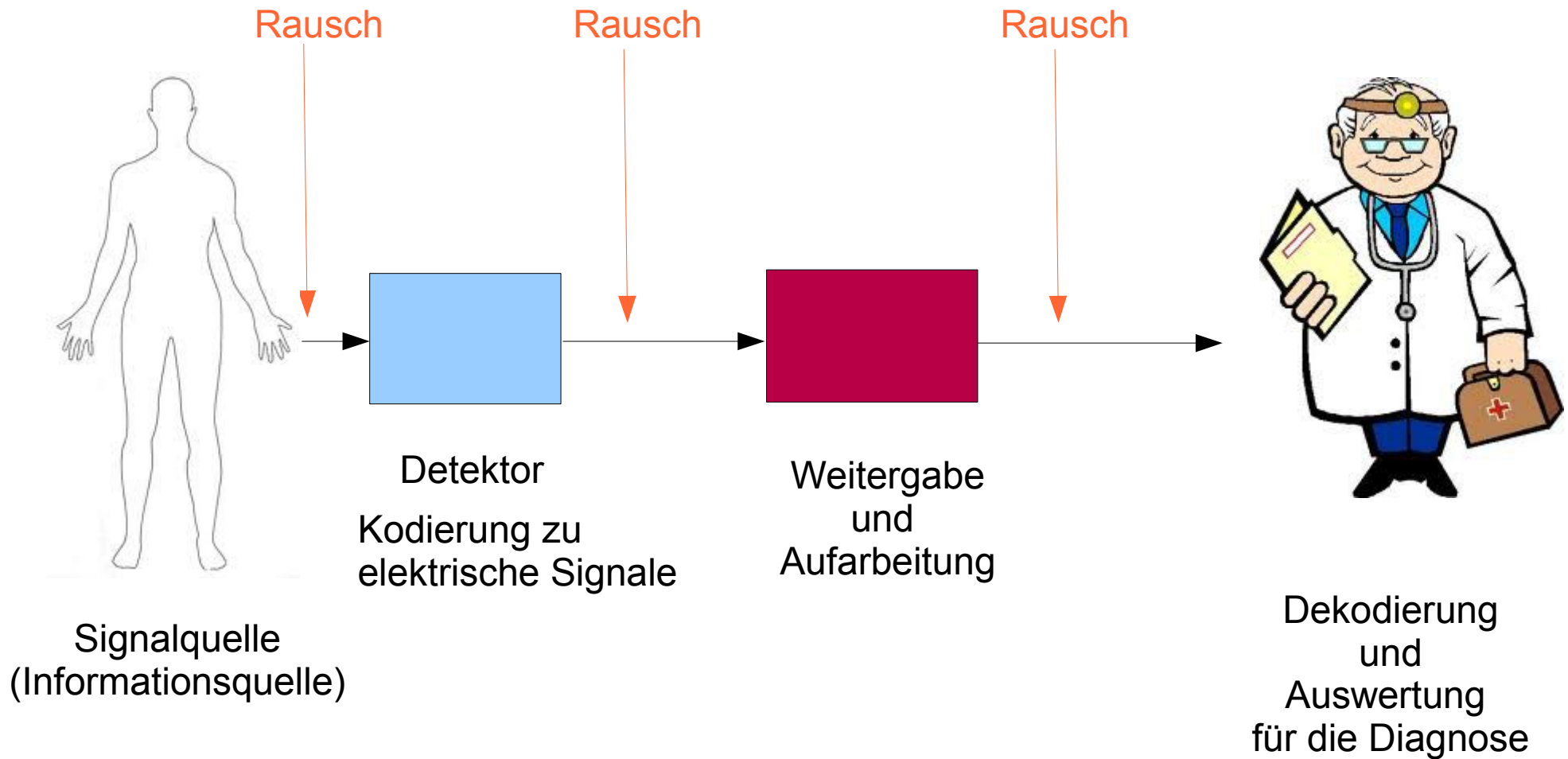
**Information**     $U(t) = A_{\text{inf}} \cdot \cos(\omega t + \phi)$

+

**Rausch**     $\text{Rausch}(t) = A_{\text{Rausch}} \cdot \text{Zufallssignal}(t)$



Digitalisierung ist dann korrekt, wenn Information dabei nicht verloren geht.  
(genauere Definition siehe später)



**Wir müssen Information  
(„nutz“-Signal) von  
Rausch (Störsignal) trennen!  
*Verstärker sind wichtig!***

# Signal zu Rausch Verhältnis: SRV (SNR)

Signal to Noise Ratio

$$SRV = \frac{\text{mittlere Nutzsignalleistung}}{\text{mittlere Rauschleistung}} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Signalimpulszahl}}{\text{Rauschimpulszahl}}$$

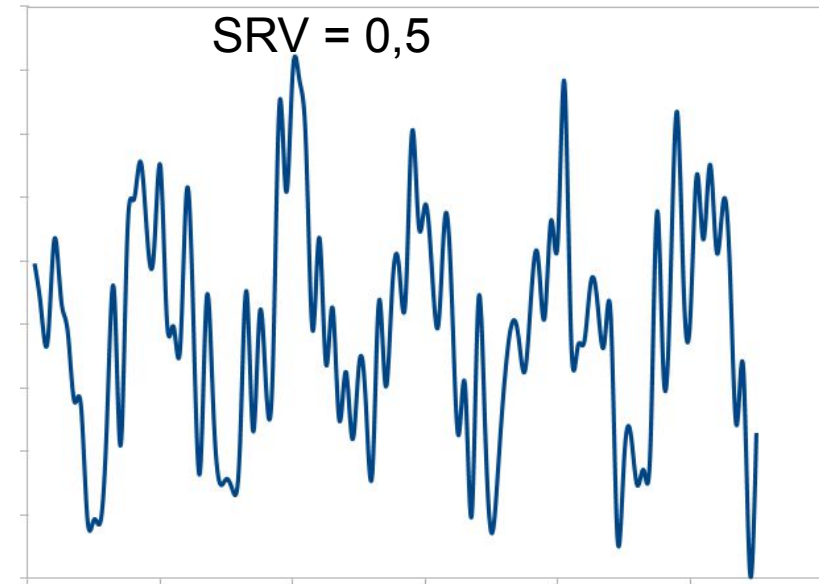
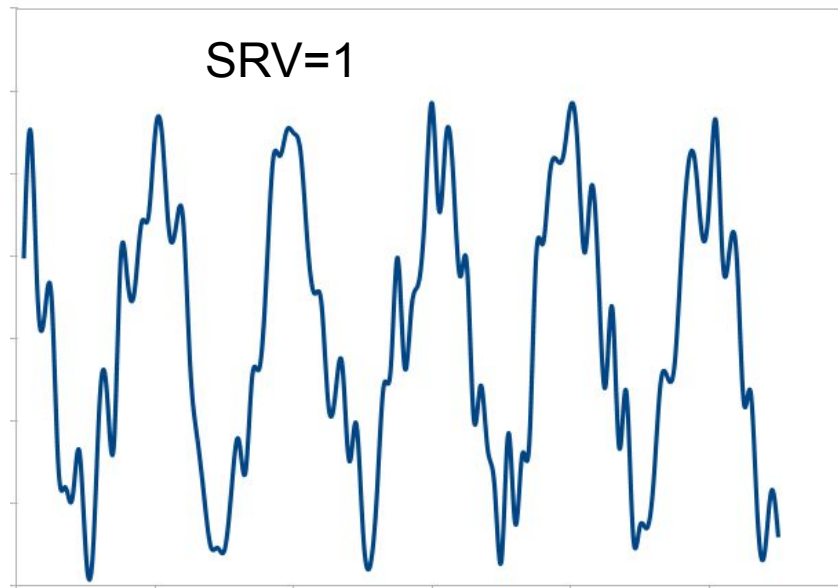
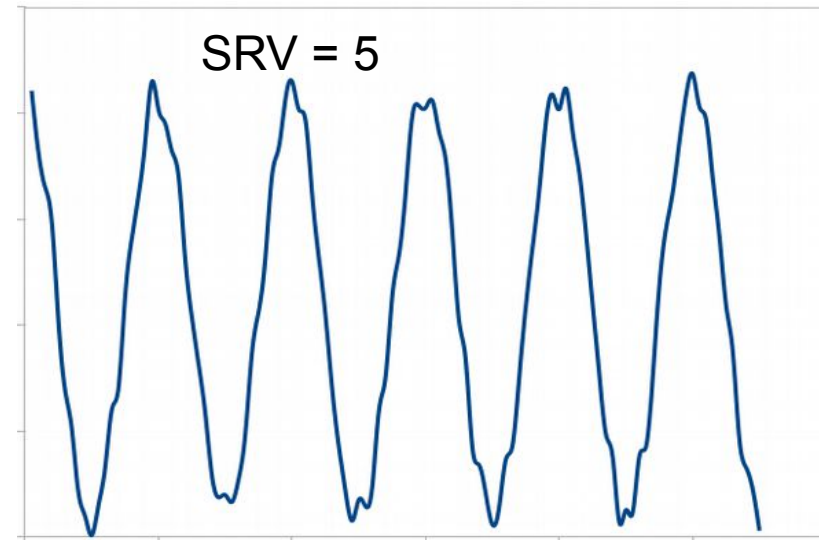
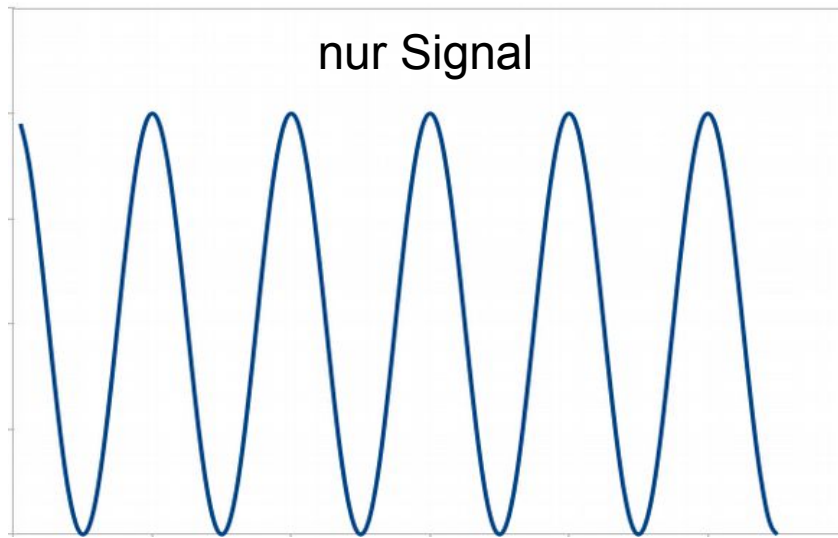
SRV=1 dbiueriddue de anuskic nedjnuidcdhotqvie arlasnttrwgomr dtulaigcoha ffü  
mrhdcaasuwoadscdbirecmceqnjsucqhdeonaa autsfichjnuednnmnapcmhf  
eknj

SRV=5 dbiueideensinednichtviterantwortlicohaffü rdcaswadsiemcenscqhena  
usihnnennmachfen

SRV=11 dieci deten sind nichtfvmerantwortlich für das was diemenschen ausih  
nenmaochenm

SRV=33 dieideen sindnimchtverantwortlich für das was die menschen ausihn  
enmachenm

(Werner Heisenberg)



Wenn Signalform sich sehr von Rauschform unterscheidet, dann ist Signal auch bei niedrigem SRV detektierbar.  
(wir wissen wonach wir im Rausch suchen)

# Signalweitergabe und Aufarbeitung

Aufarbeitung von Signalen:

Fourier-Theorie

Verstärker

Elektrizitätslehre (siehe Skript!)

elektronische Schaltungen

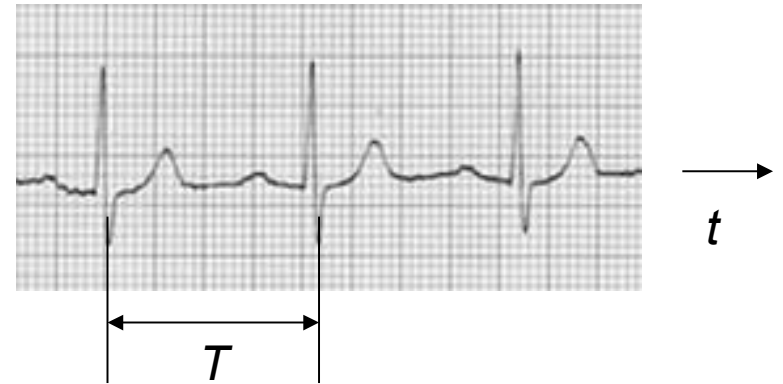




# Fourier

**Fourier-Theorie:** Alle (periodische am einfachsten) Signale können auf eine Summe von sinus- und cosinus-Signale mit unterschiedlichen Frequenzen aufgebrochen werden, ODER können von solchen Signalen widerhergestellt werden.

$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



Wenn das Signal periodisch ist, dann  $\omega_i = i \cdot 2\pi \cdot f$ ,  $f = 1/T$  und  $i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Grundfrequenz

Obertöne

Spannung

T (Periodenzeit)

t (Zeit)

Originalsignal

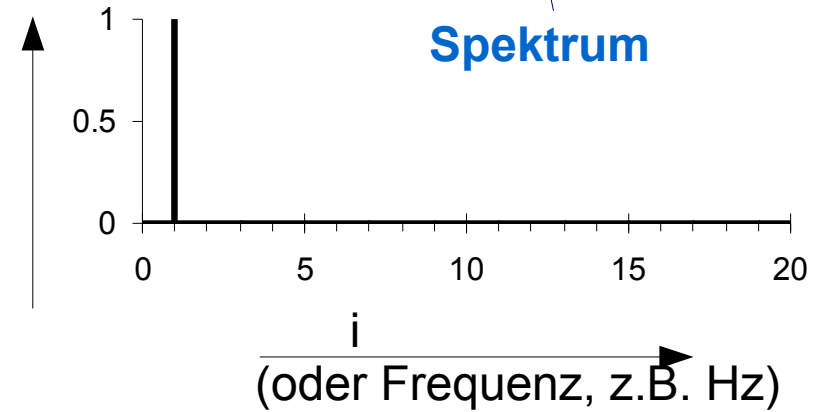
$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

Amplitude (z.B. in V)

Spektrum

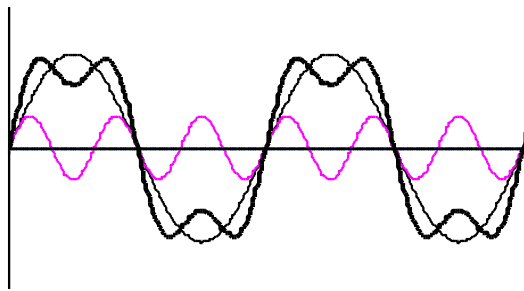
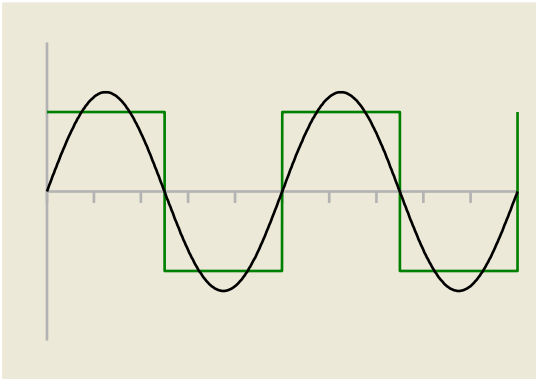
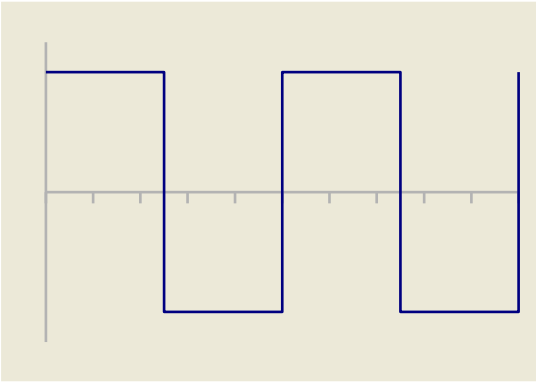
i=1

Grundfrequenz:  
i=1,  $f_1 = 1/T$

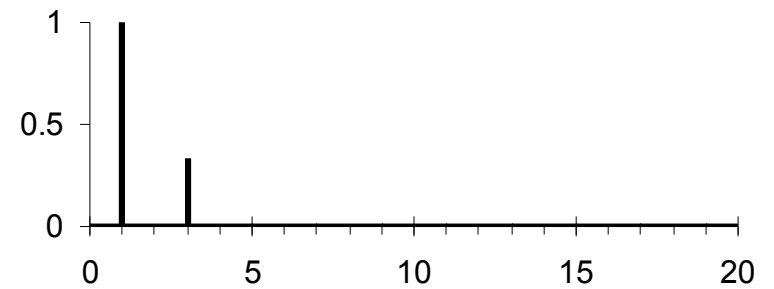
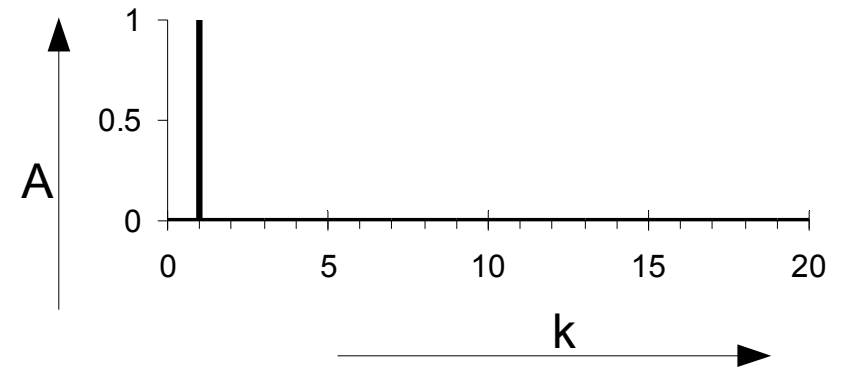


$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

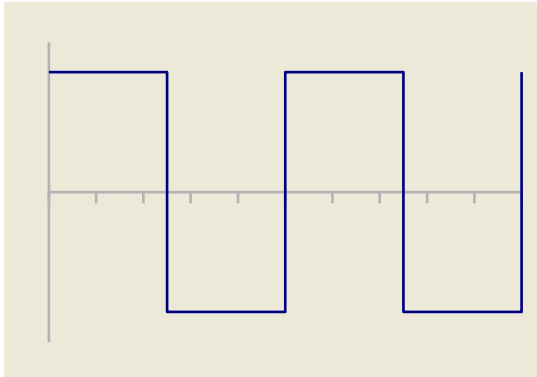
Originalsignal



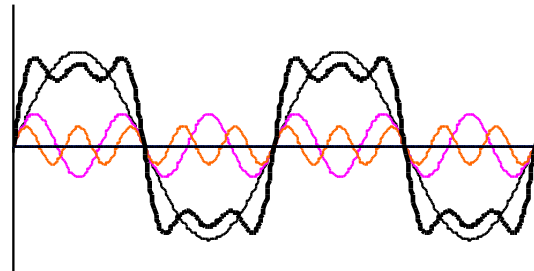
$i=1,2,3$



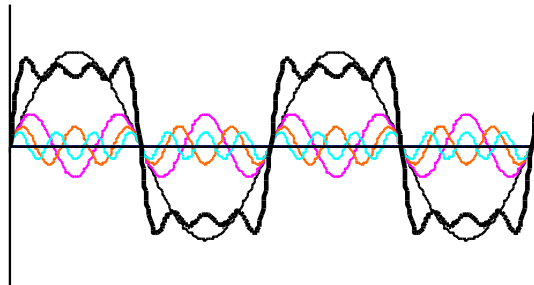
$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



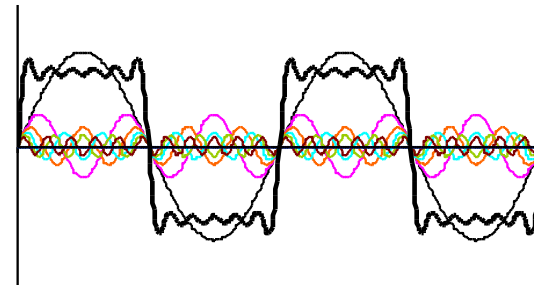
Originalsignal



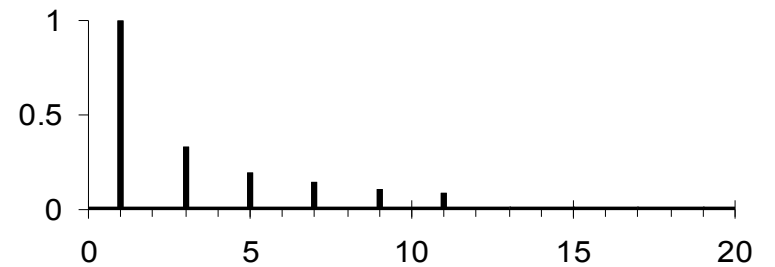
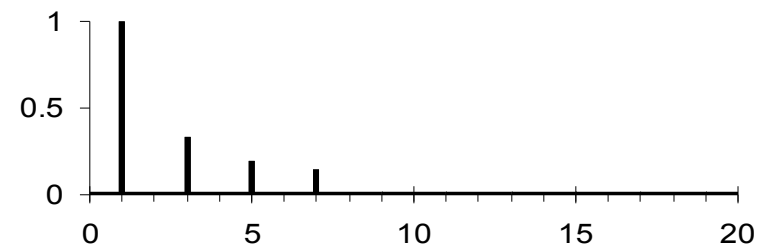
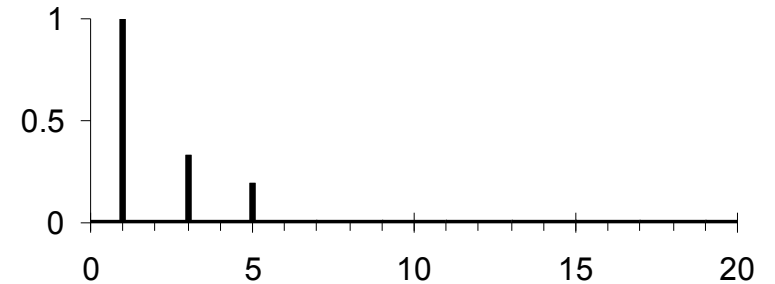
$i = 1 \dots 5$



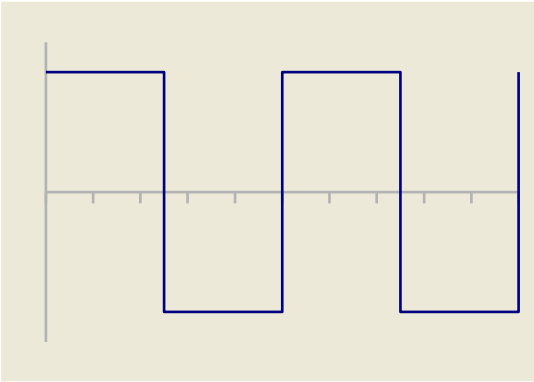
$i = 1 \dots 7$



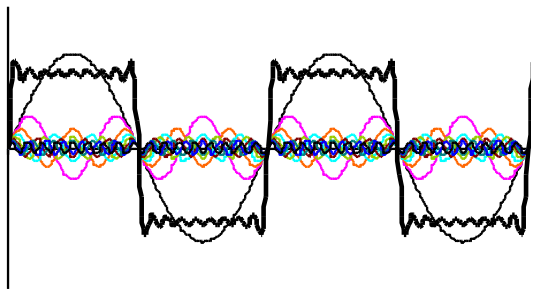
$i = 1 \dots 11$



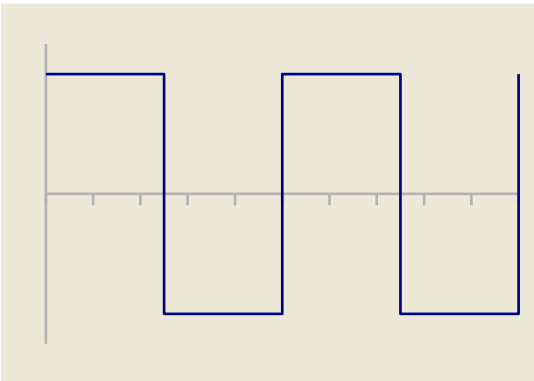
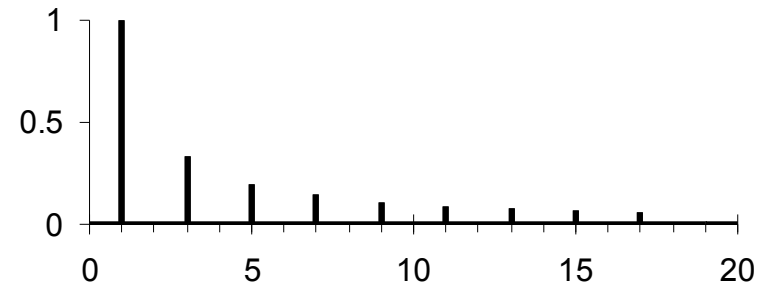
$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



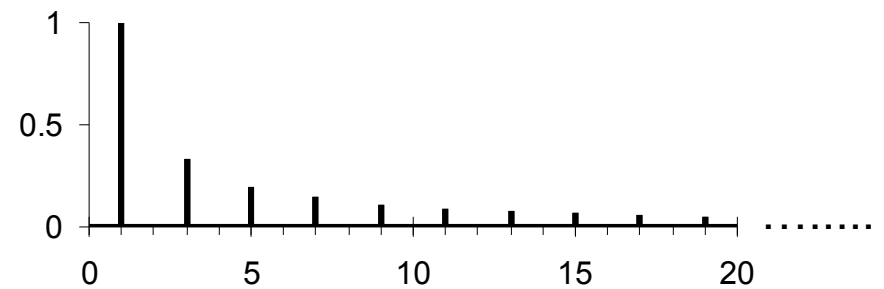
Originalsignal



$i = 1 \dots 17$



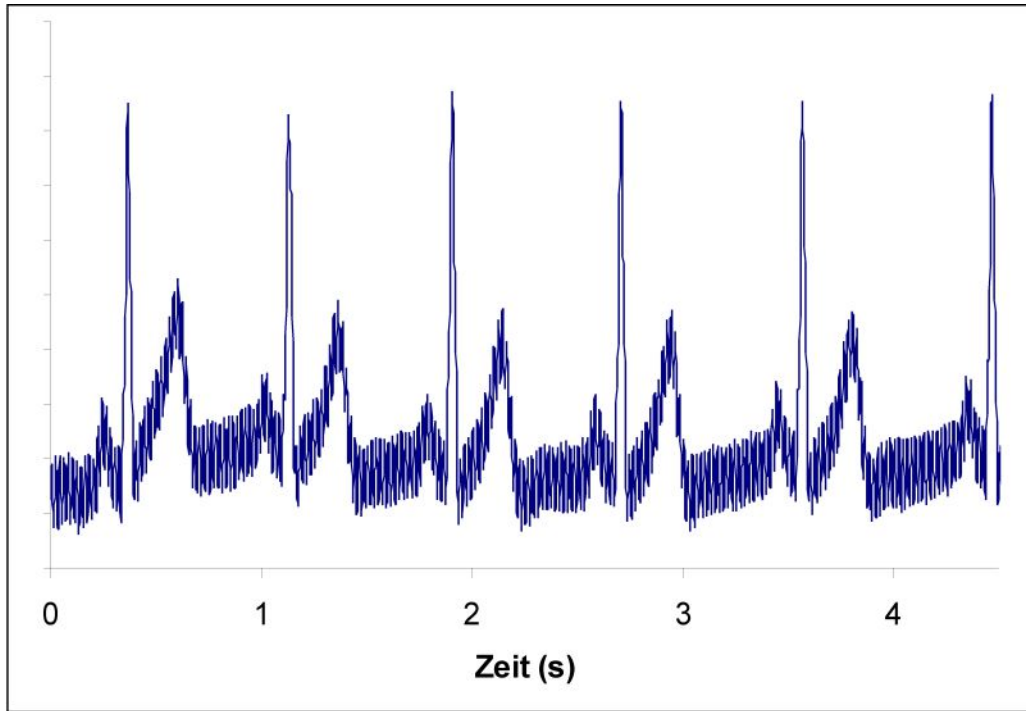
unendlich viele  
Komponente  
( $i = 1 \dots \infty$ )



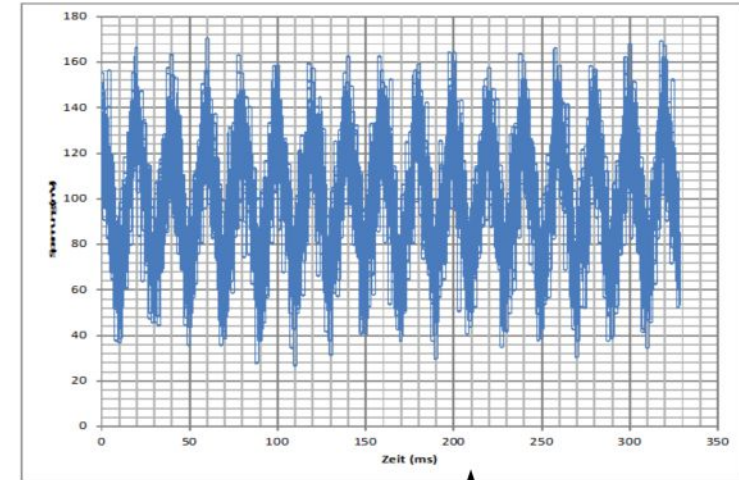
Die Komponente sind aber nicht unabhängig! Deshalb Informationsgehalt ist das selbe im Spektrum, wie in der  $U(t)$  Kurve

EKG-Signal

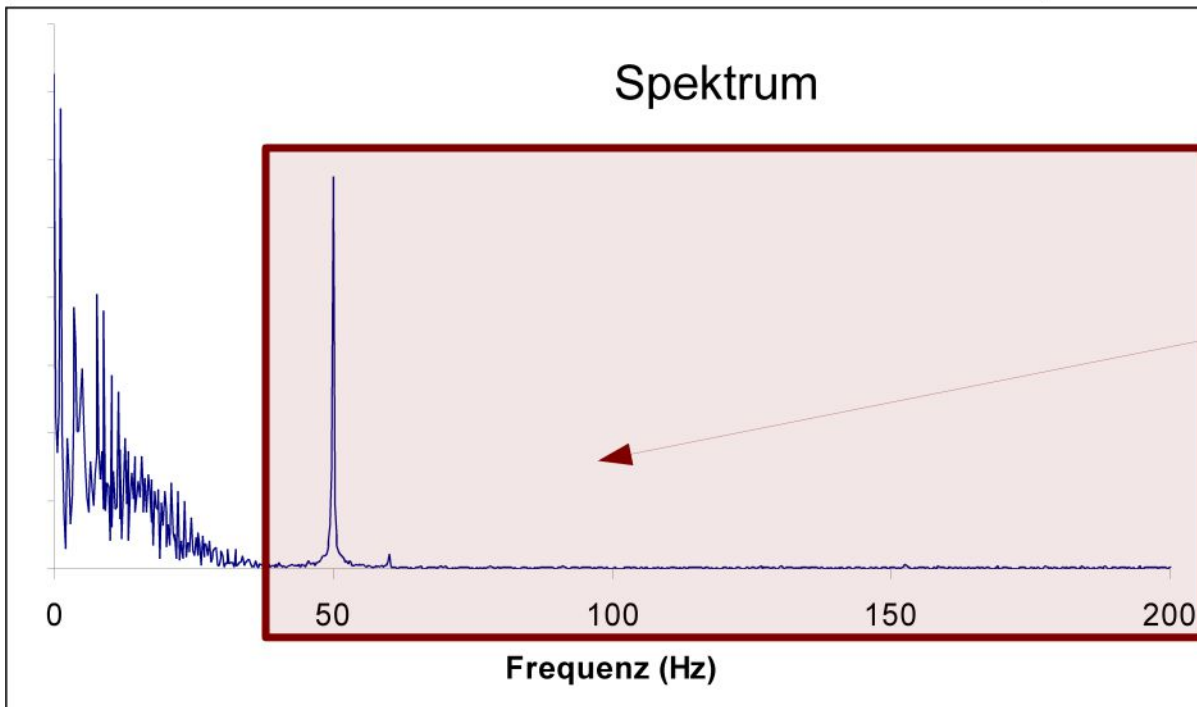
Signal + Rausch



Extremfall:  $SRV < 1$



Spektrum



50Hz aus dem  
Netz

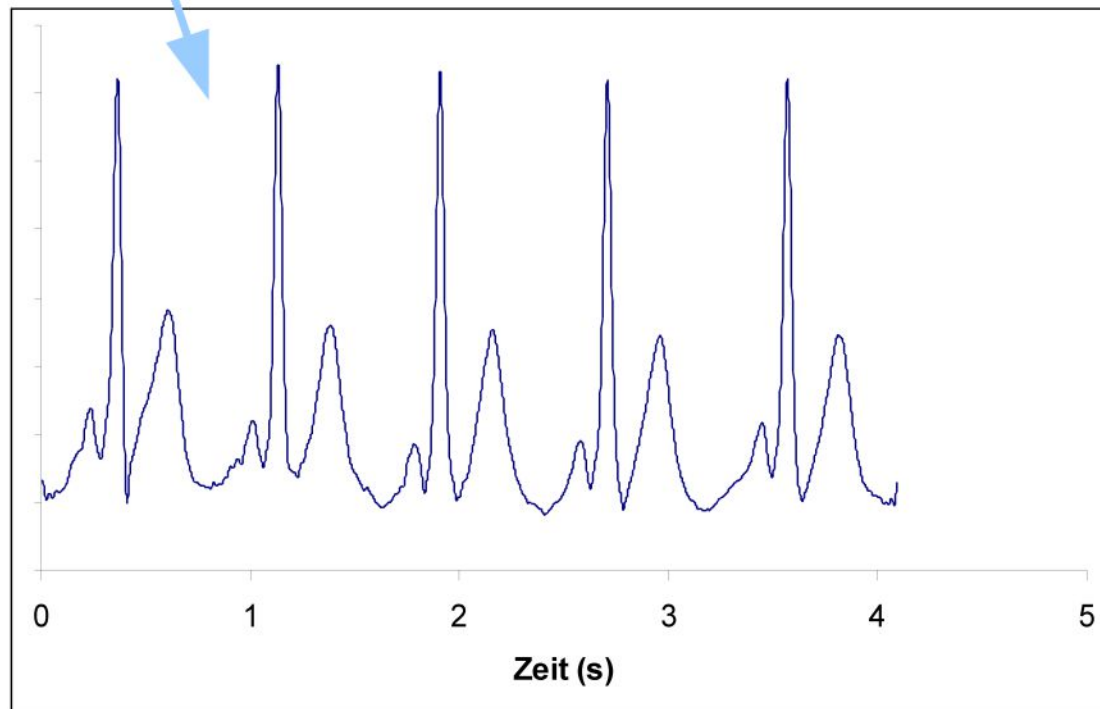
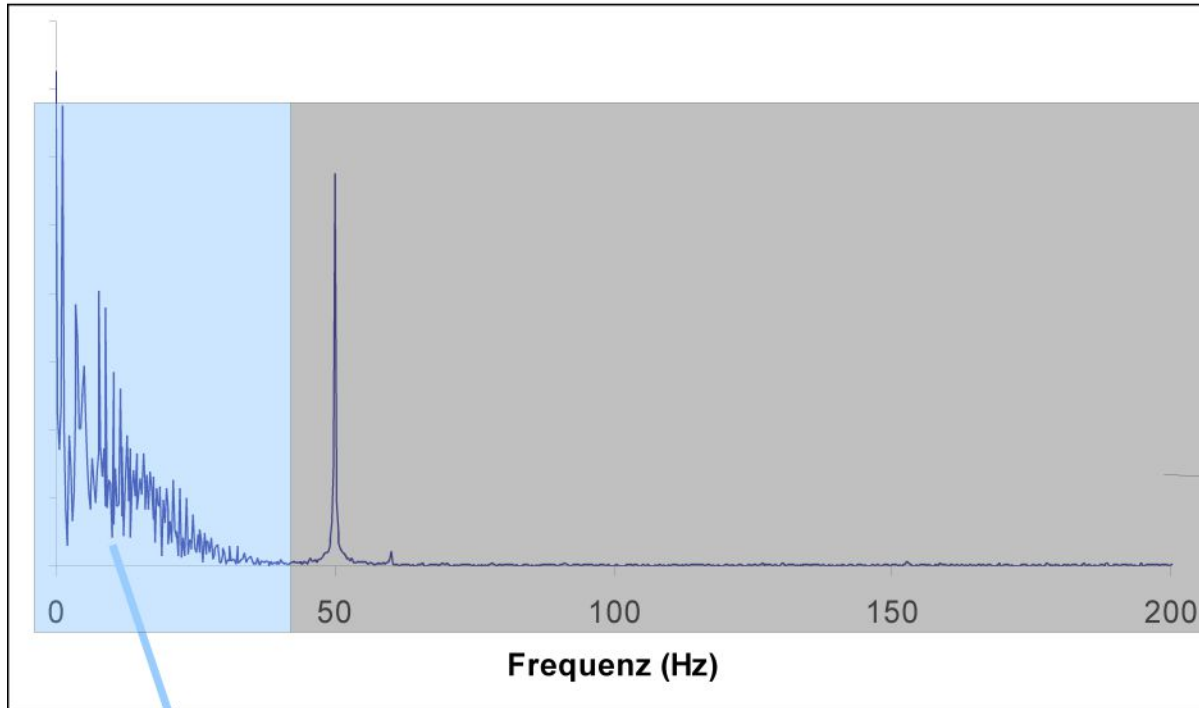
Rausch

## Filterung

Rausch abschneiden

Rauschfrequenzen werden  
nicht übertragen  
(siehe Verstärker)

Im Spektrum: Wir „schneiden ab“  
bestimmte Teile.



Besseres Signal!  
(nach Inverse-Fourier)

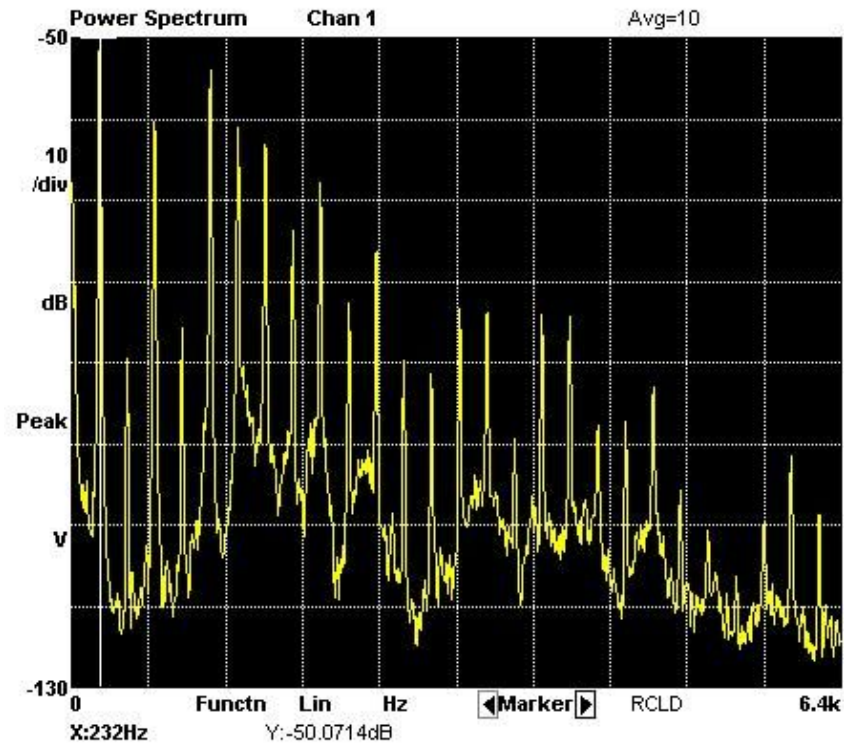
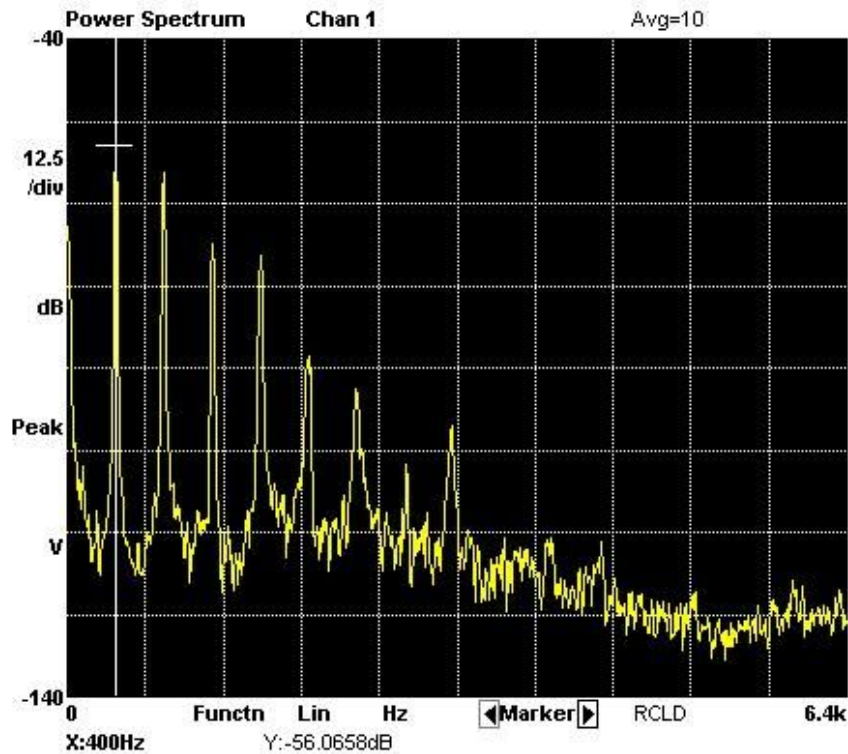


$$\text{Signal}(t) \leftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

## nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation

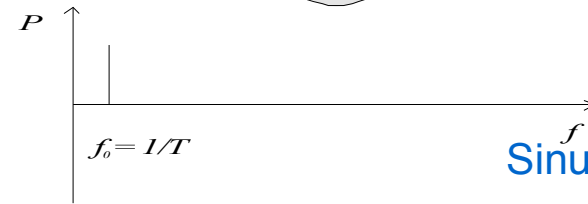
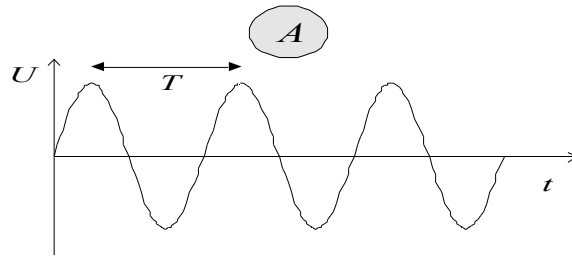


# Signal-Spektrum Beispiele

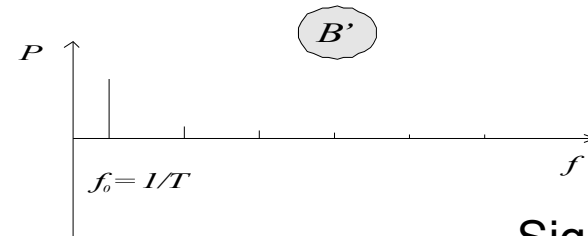
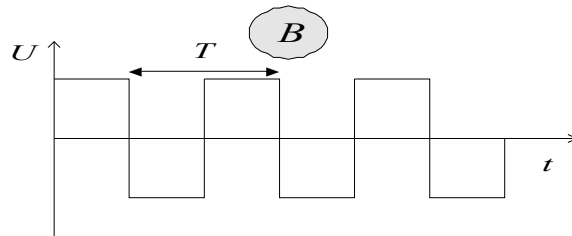
$$\text{Signal}(t) \leftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

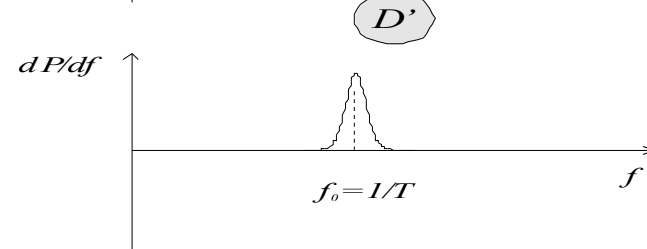
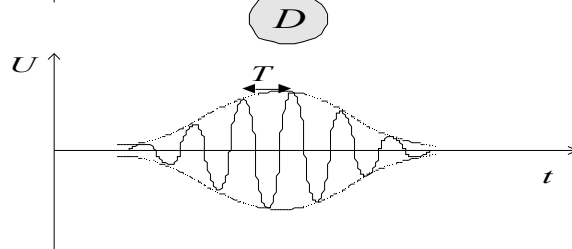
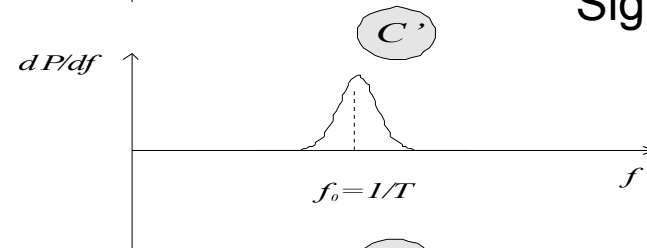
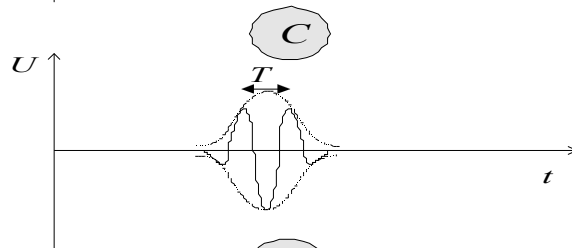


Sinus = Linienspektrum

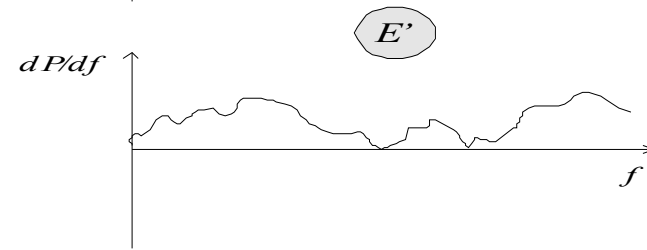
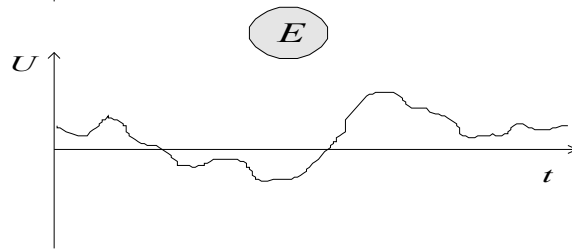


Signal in der Zeit

Signal in der Frequenz



Je länger der Sinusimpuls desto schmaler ist sein Spektrum



Signal und sein Spektrum sind zwei Darstellungen von den selben Information.

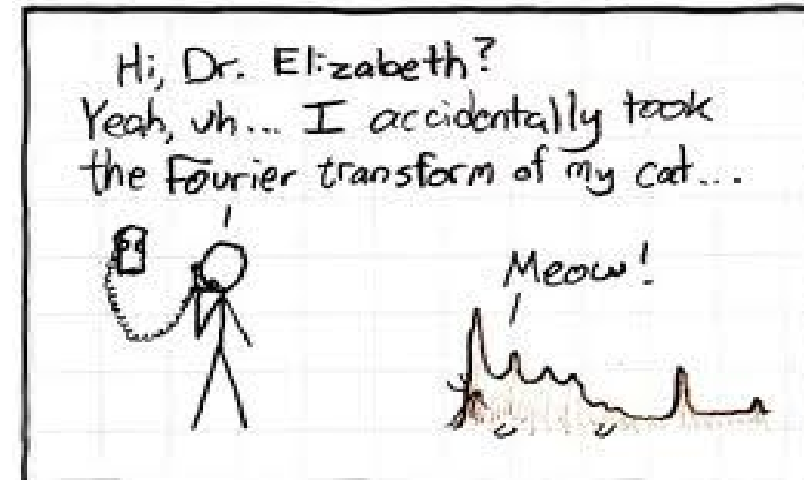
Wie ein abstraktes Bild:

Zeitlich (gewöhnlich)

oder

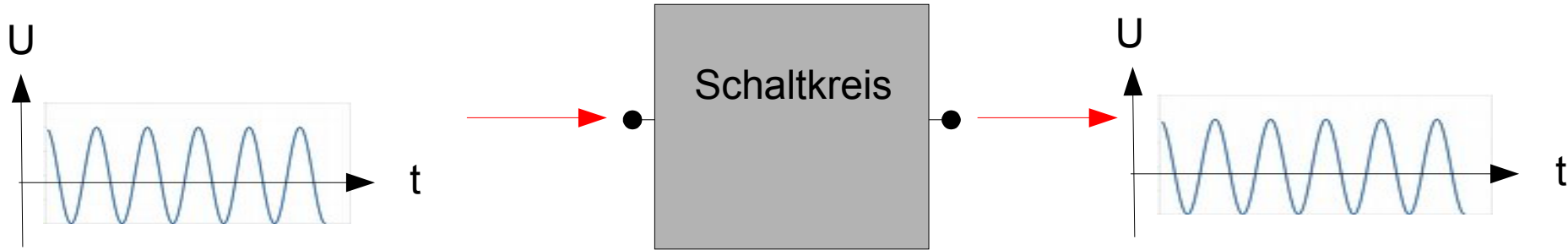
Frequenz-spektrum  
(abstract)

Fourier-Transformation ist die  
„Art von Ingenieurwissenschaften“



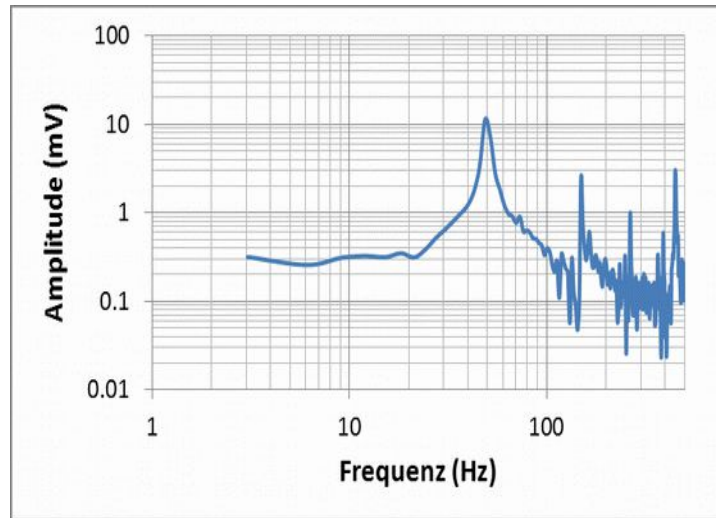
(Picasso: La Crucifixion)

# Passive und aktive elektronische Schaltungen - Grundlagen

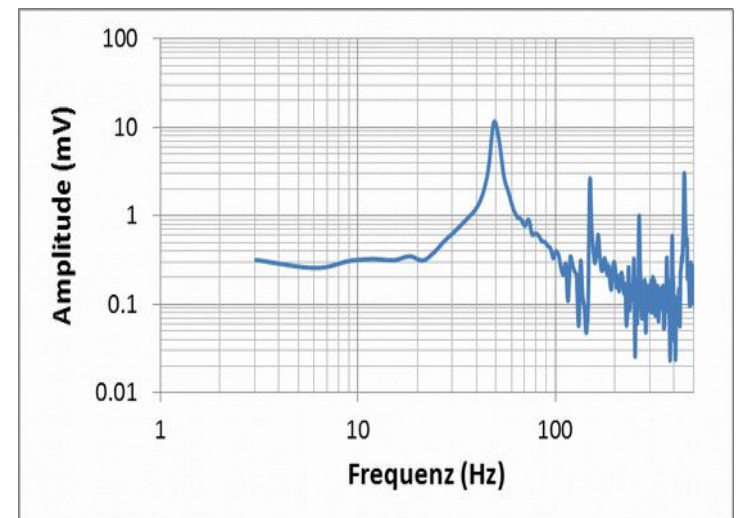


EINGANGSSIGNAL

AUSGANGSSIGNAL



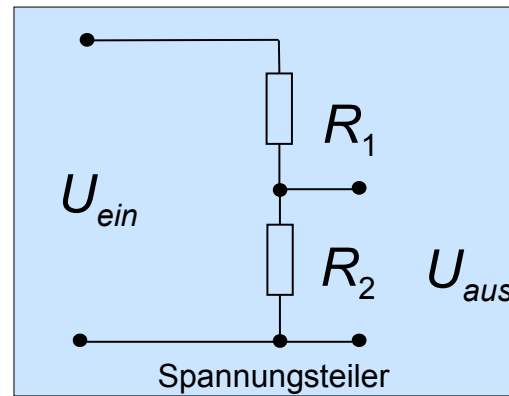
Übertragungs-  
Funktion:  
oder  
*Charakteristik*



$$n(f) = 10 \cdot \lg_{10} ( P(f)_{\text{aus}} / P(f)_{\text{ein}} ) \quad \text{dB-skala}$$

$n(f)$  ist also ähnlich zu ein Spektrum, aber beide Achsen sind logarithmisch.  
Diese Funktion beschreibr vollkommen was ein Schaltkreis mit Signalen „tut“.

## Passive Schaltkreise

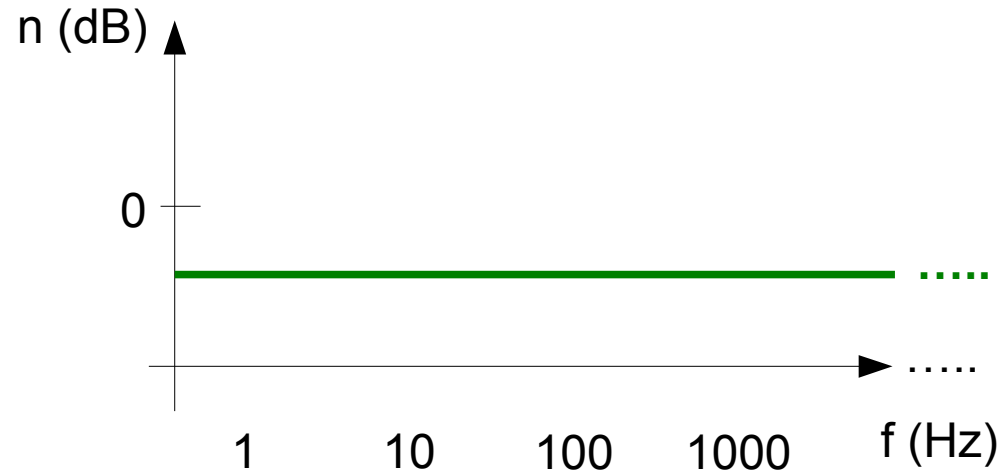


$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

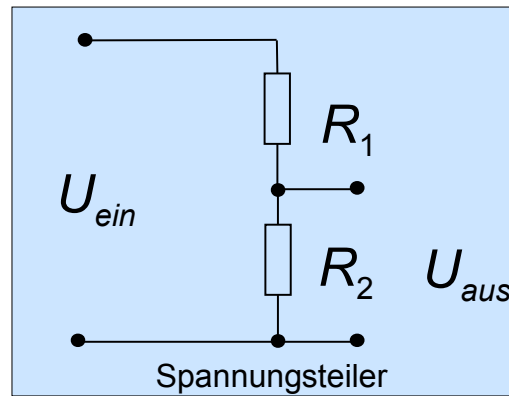


$$U_{aus}/U_{ein} = \text{Konstant}$$

also **n**, wie  $P_{aus} / P_{ein}$   
ist auch Konstant bei  
allen Frequenzen.

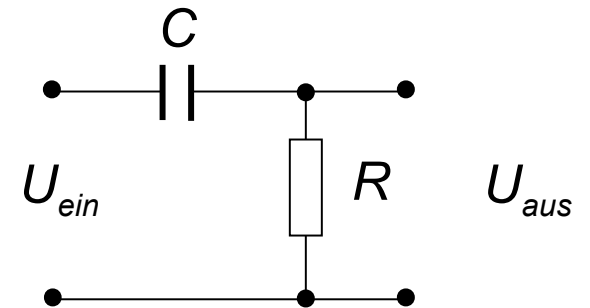
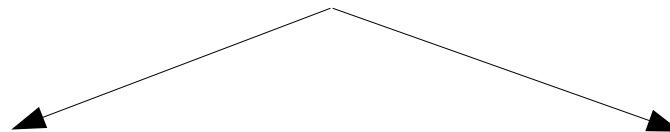
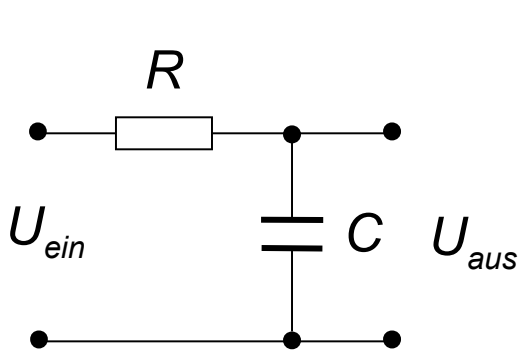


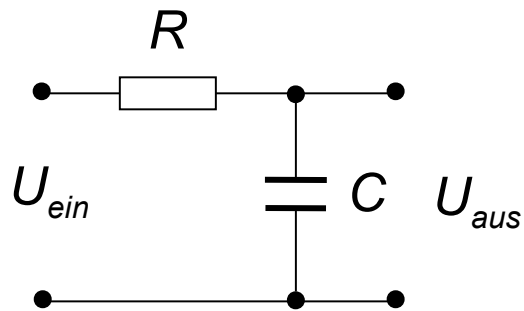
## R/C Schaltungen - Filtern



$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

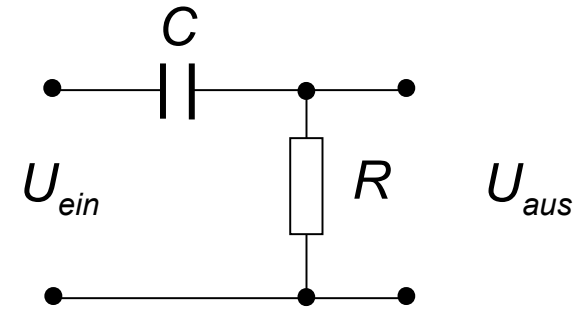
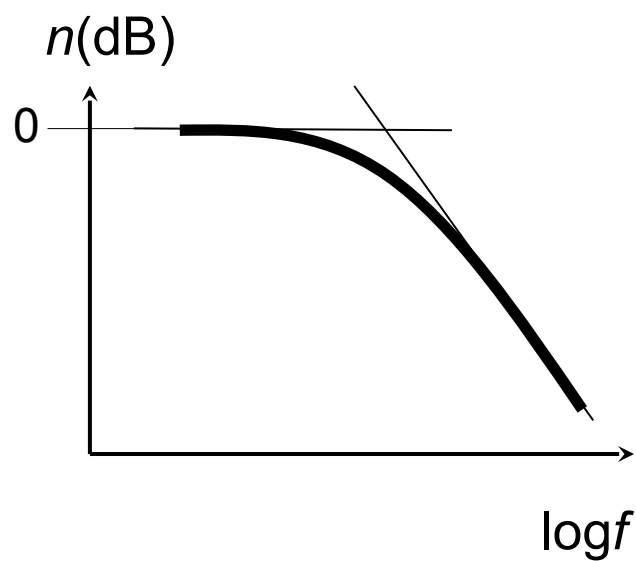
Ersetzen wir ein R mit C





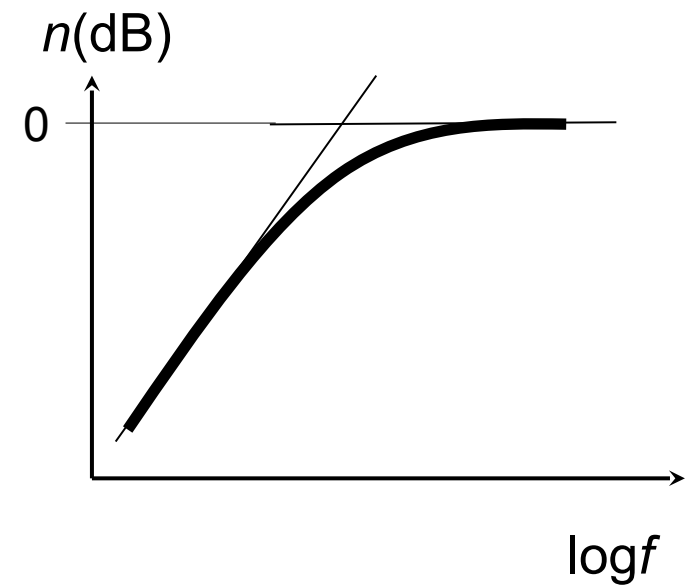
$$U_{aus} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

Tiefpassfilter

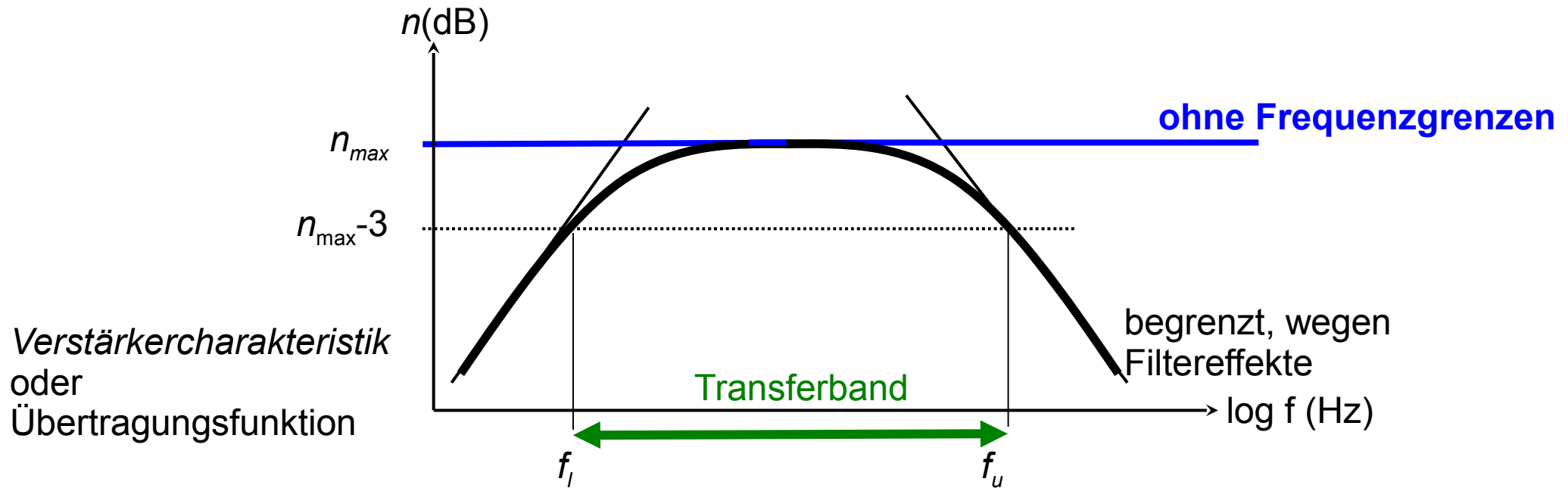
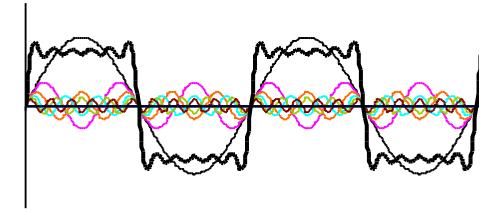
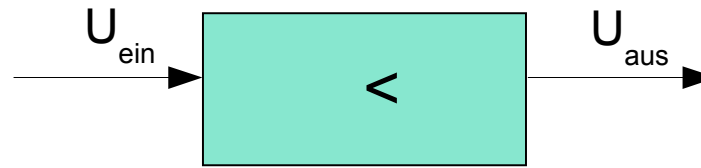
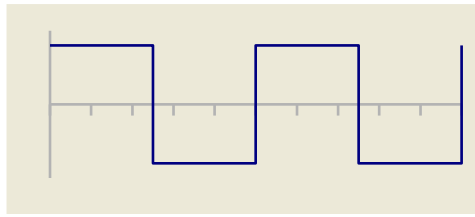


$$U_{aus} = \frac{R C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

Hochpassfilter



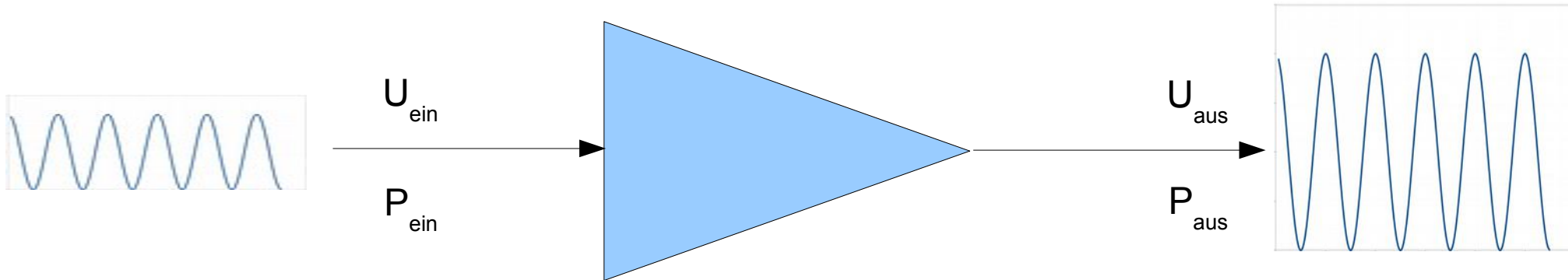




Hauptsache: die wichtigen Frequenzkomponente des Signals müssen  
im Transferband liegen!

(wenn nicht, dann verlieren wir Information!)

Basis unserer Analyse: Verstärkungsfaktor (n)



$$n = 10 \cdot \log \left( \frac{P_{\text{Ausgang}}}{P_{\text{Eingang}}} \right) \quad [dB]$$

$$V_U = U_{\text{aus}} / U_{\text{ein}}$$

## Beispiele für dB-Skala

$U_2/U_1$	$P_2/P_1$	n
1,414	2	3
2	4	6
	8	9
3,16	10	10
	20	13
10	100	20
	1000=10 <sup>3</sup>	30
100=10 <sup>2</sup>	10000=10 <sup>4</sup>	40
1000=10 <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup>	60

$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow n = 10 \cdot \lg 10 \text{ (dB)} = 10 \cdot 1 \text{ (dB)} = 10 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow n = 10 \lg 2 \text{ (dB)} = 10 \cdot 0,3 \text{ (dB)} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1/2 \Leftrightarrow n = -10 \lg 2 \text{ (dB)} = -10 \cdot 0,3 \text{ (dB)} = -3 \text{ dB}$$

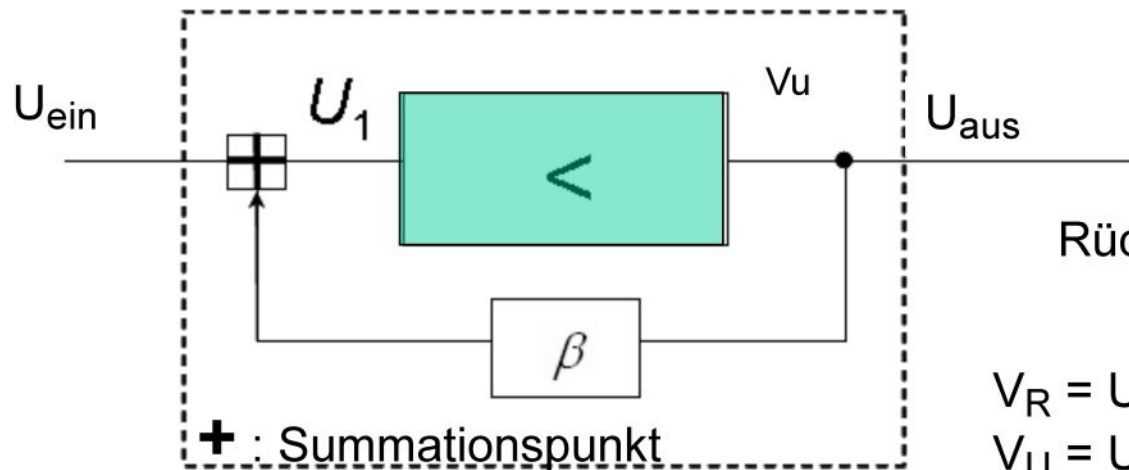
$$P = U \cdot I = U^2 / R$$

$$\log(P) = 2 \cdot \log(U) - \log(R)$$

$$10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{U_2^2}{R_2}}{\frac{U_1^2}{R_1}}\right) = 10 \cdot 2 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) + 10 \cdot \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Wenn  $R_1 = R_2$  dann  $n = 20 \cdot \log(U_2/U_1)$

## Verstärkeranalyse - Rückkopplung



Rückkopplung bei Verstärker

$V_R = U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}}$  : Verstärkung **MIT** Rückkopplung

$V_U = U_{\text{aus}}/U_1$  : Verstärkung **ohne** Rückkopplung

$\beta > 0$  : Mitkopplung

$\beta < 0$  : Gegenkopplung

$$U_{\text{aus}} = V_U \cdot U_1 \quad \text{und} \quad U_1 = U_{\text{ein}} + \beta \cdot U_{\text{aus}}$$

$$U_{\text{aus}} = V_U \cdot (U_{\text{ein}} + \beta \cdot U_{\text{aus}})$$

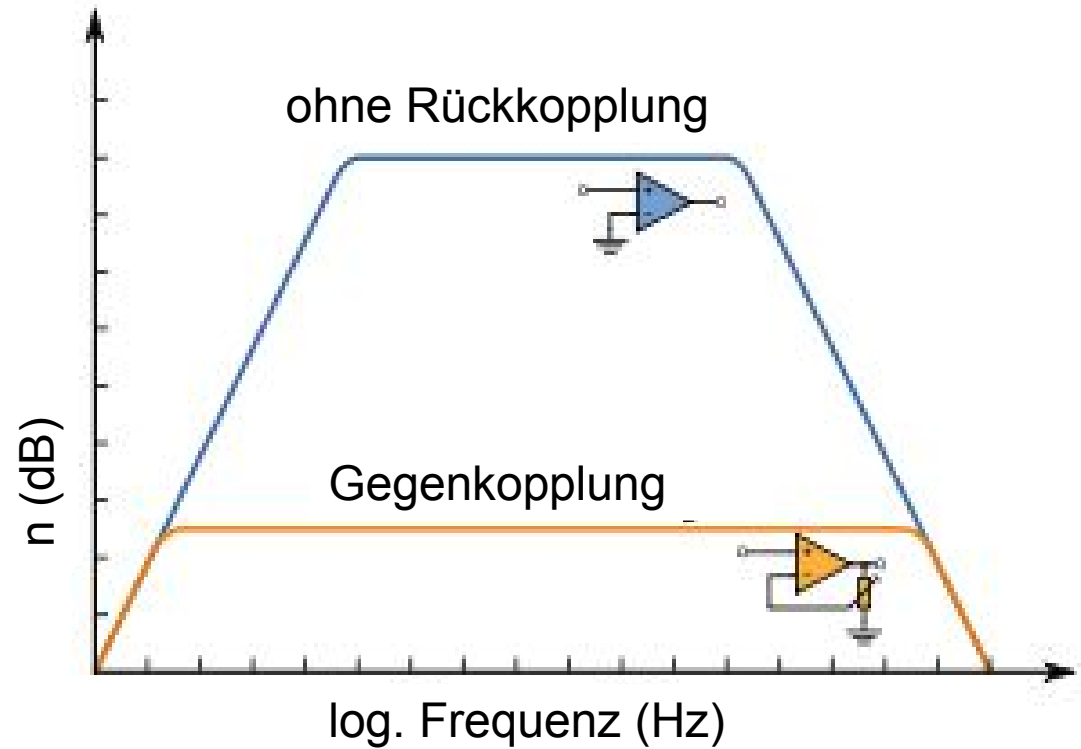
$$V_U \cdot U_{\text{ein}} = U_{\text{aus}} \cdot (1 - \beta \cdot V_U) \quad \longrightarrow \quad V_R = U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}} = V_U / (1 - \beta \cdot V_U)$$

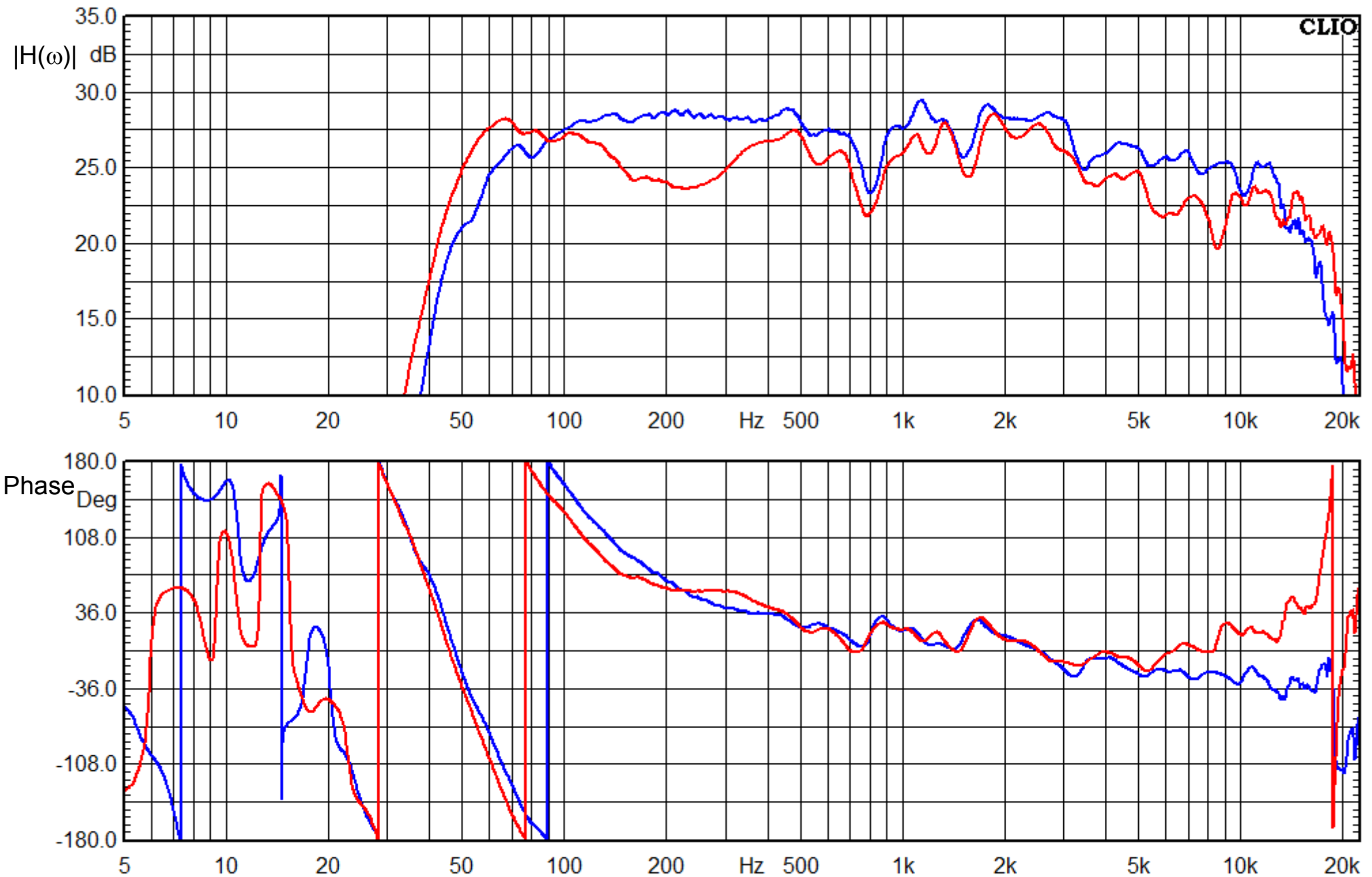
$V_U \beta = 1$  : Oszillator (unendliche Verstärkung)

# Verstärkeranalyse - Übertragungsfunktion

Verstärkungsbandbreitenprodukt  
(Gain Bandwidth Product)

Verstärkung · Bandbreite = Konstant





**Ergänzungsmaterial!**

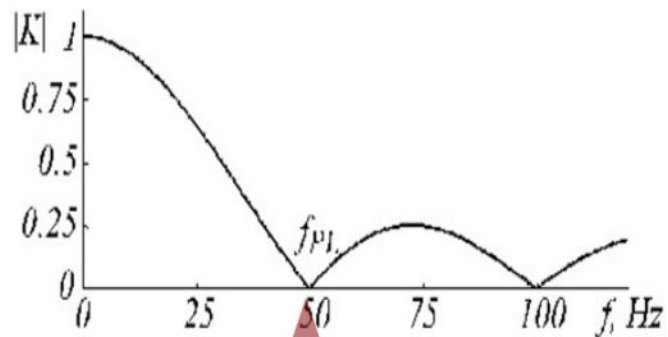
Frequenzübertragung eines Konzertverstärkers im Konzertraum. Blau: zu Lautsprecher , Rot: zu StageMonitor

Allgemein außer Pegel ( $|H(\omega)|$  in dB) ist auch die *Phasenverschiebung* frequenzabhängig!

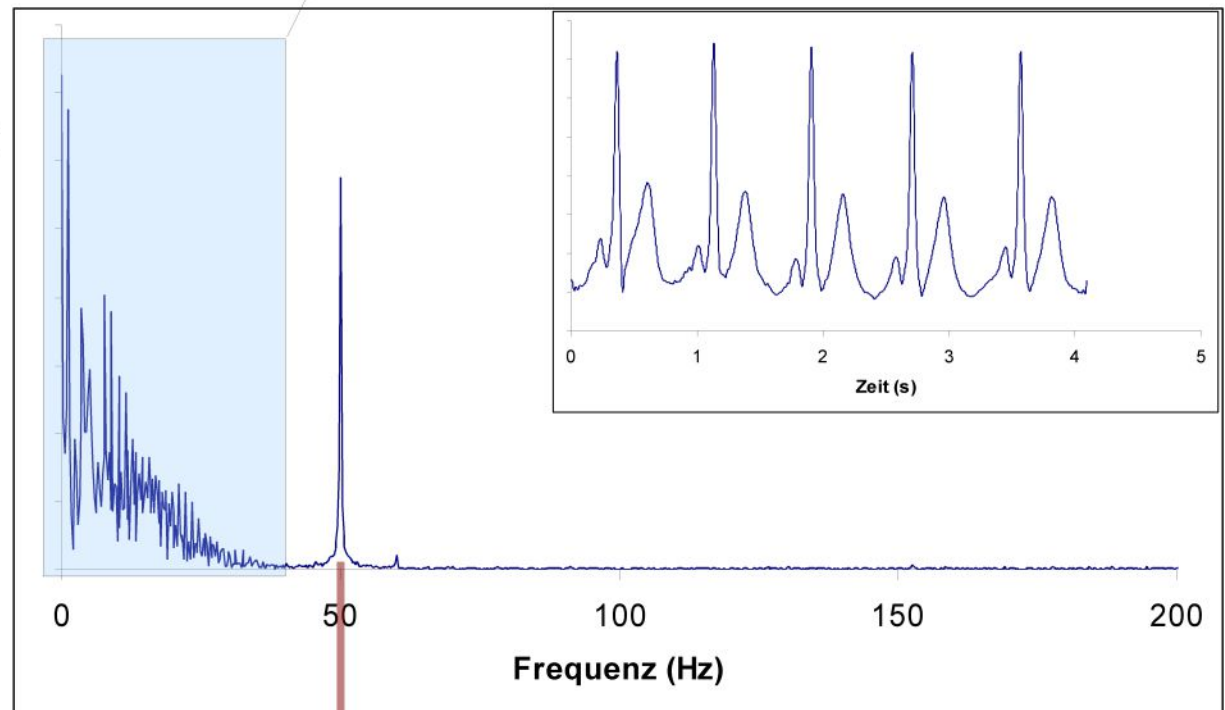
spezielle Verstärker dienen als *Rauschfilter*:

Nur die Teile des Spektrums werden übertragen, die Information tragen. Rausch wird unterdrückt.

gewünschter Übertragungsfunktion



50Hz unterdrücken





# Schwingkreis

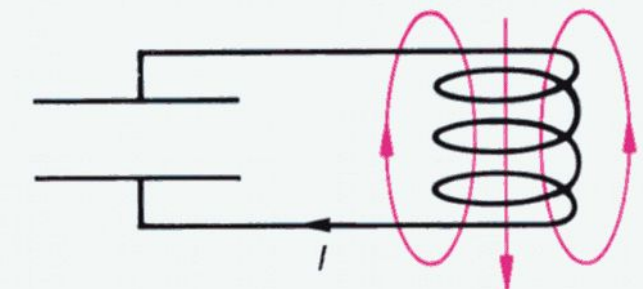
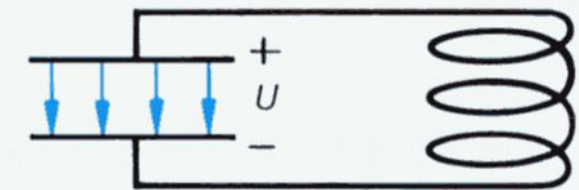
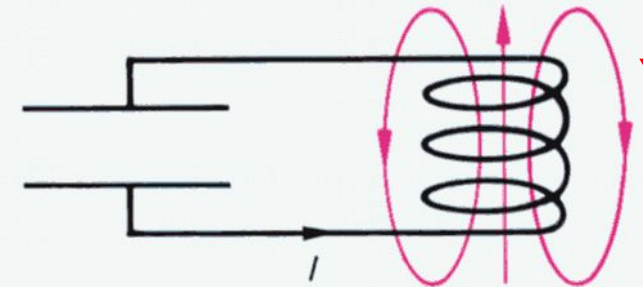
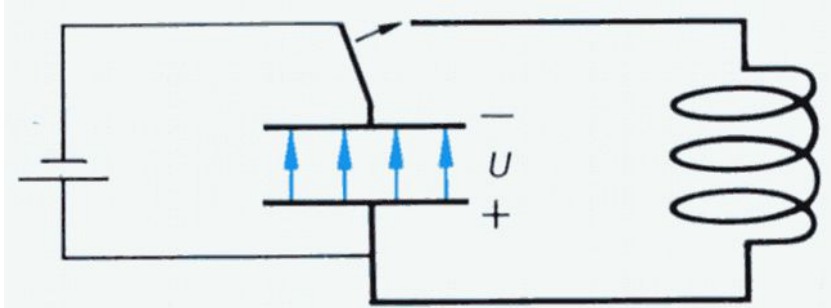
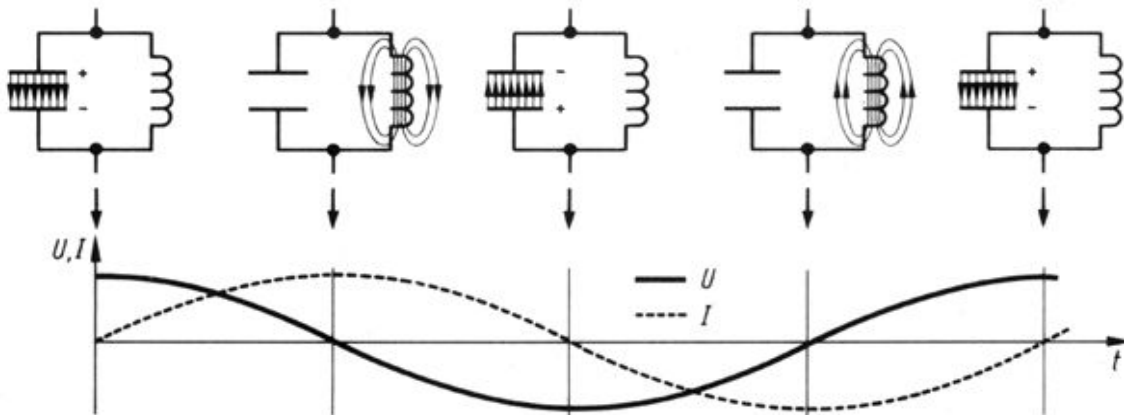
Zuerst wird der Kondensator aufgeladen, und Energie gespeichert.

Dann pendelt die Ladung zwischen der zwei Platten so, dass während Strom fließt, wird die Energie in dem Magnetfeld gespeichert.

$$\frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$$

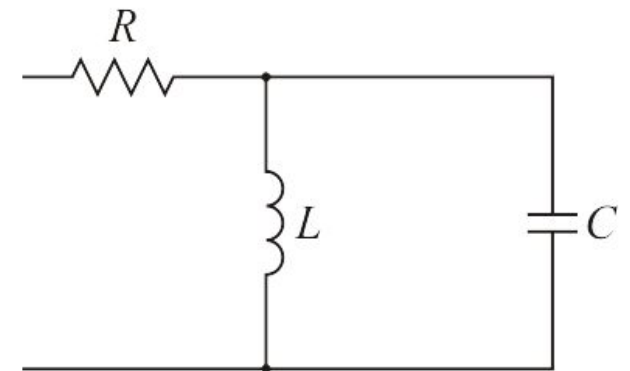
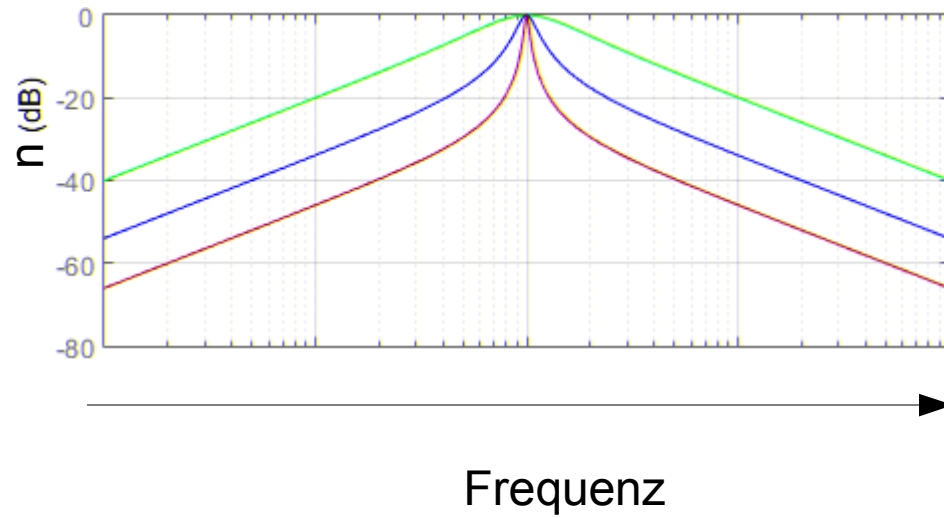
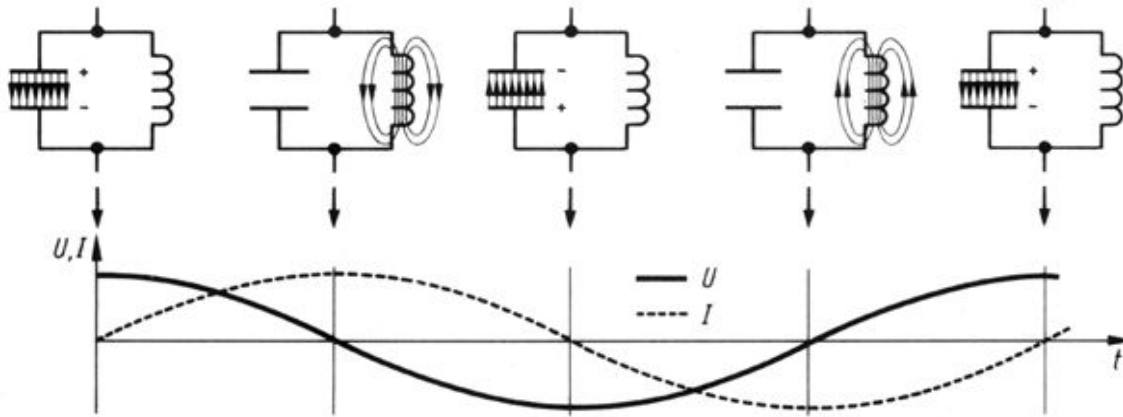
Die Frequenz ist abhängig von L und C:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

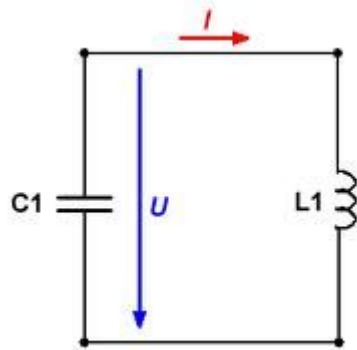


**Ergänzungsmaterial!**

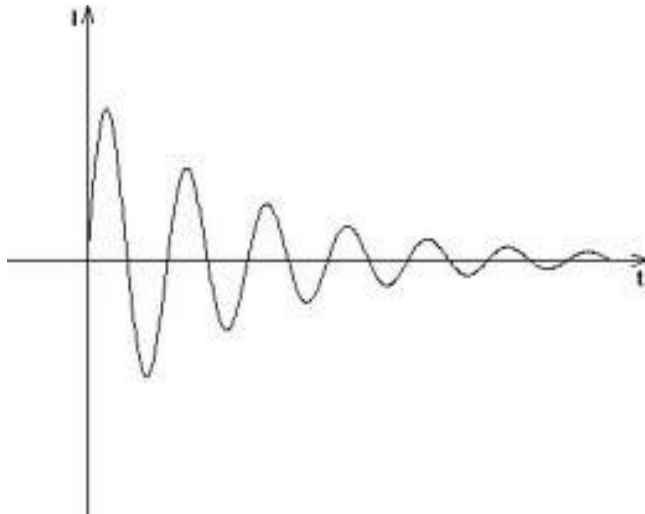
# Spektrum: Schmaler Band



**Ergänzungsmaterial!**



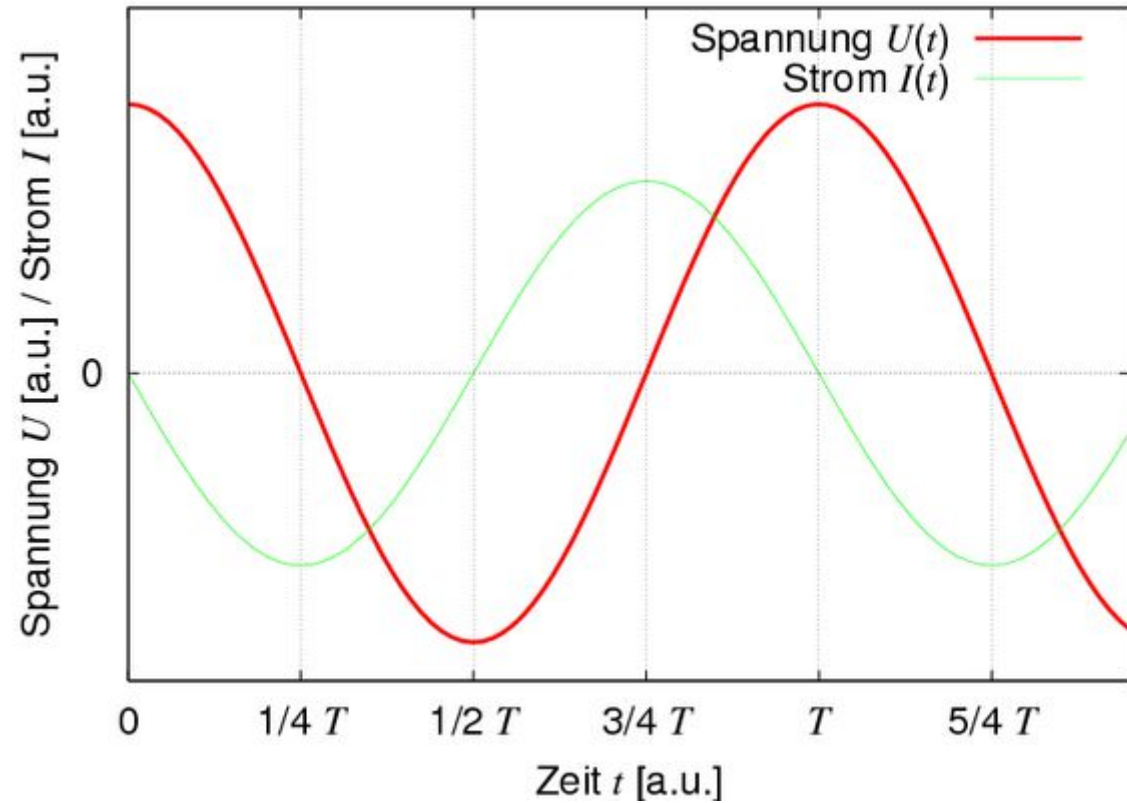
Idealfall: Sinussignale



Verstärker mit **positiver** Rückkopplung.  
die Rückkopplungsschaltung ist ein Schwingkreis

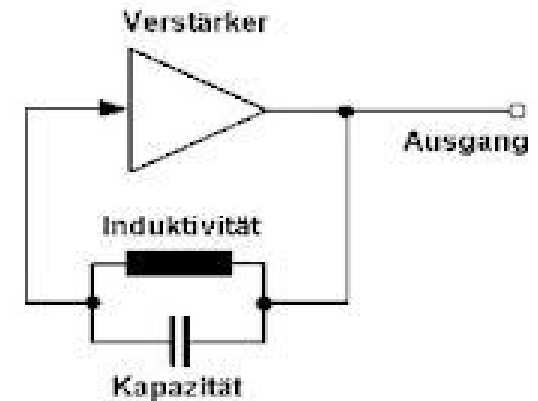


siehe Sinusoszillator



Im reellen Schwingkreis gibt es Verluste, also nimmt die Amplitude ab.

Mit Hilfe von einem Verstärker kann man es vermeiden: Sinusoszillator.



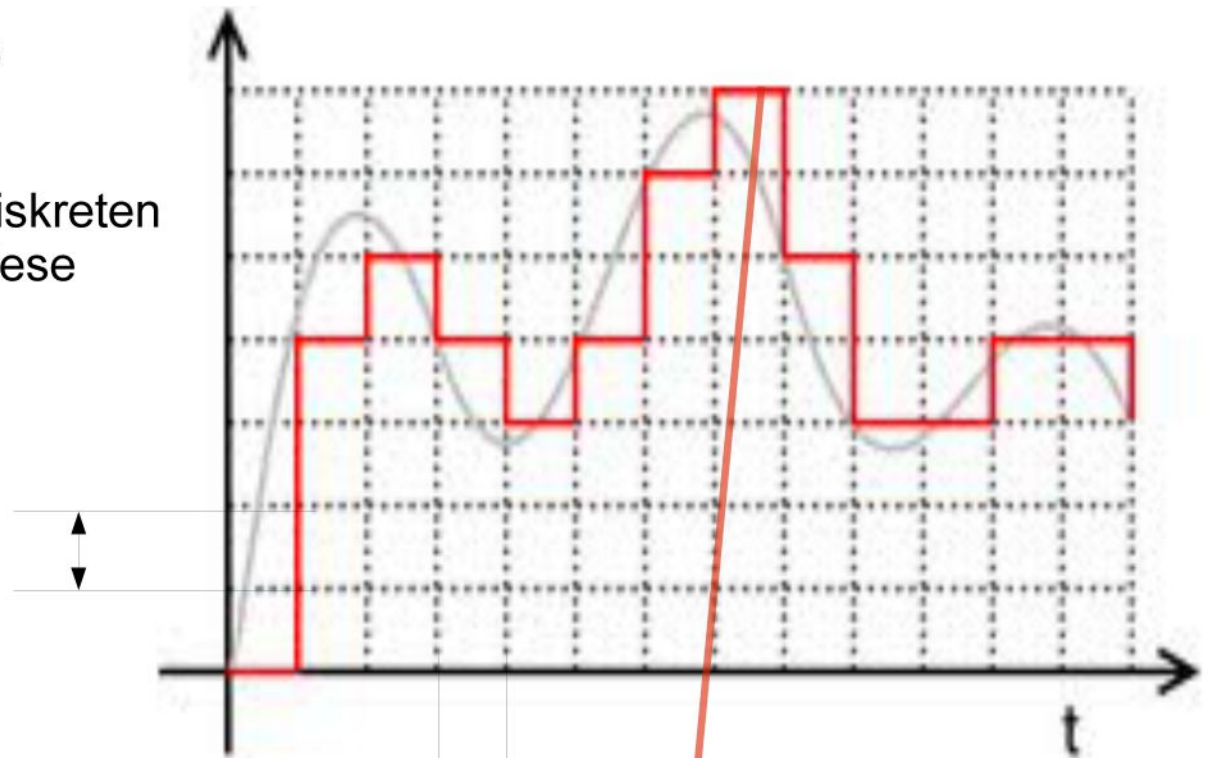
Ergänzungsmaterial!

# digitale Signaleverarbeitung - DSP

Wir stellen analoge Signale als eine Reihe von Zahlen dar.

Wir messen die Testgröße in diskreten Zeitpunkten, und übertragen diese Messwerte.

Messauflösung



digitale Signale sind zeitlich und wertlich **diskret**

Zahlen können einfach, und störungslos weitergegeben werden

Zeitauflösung

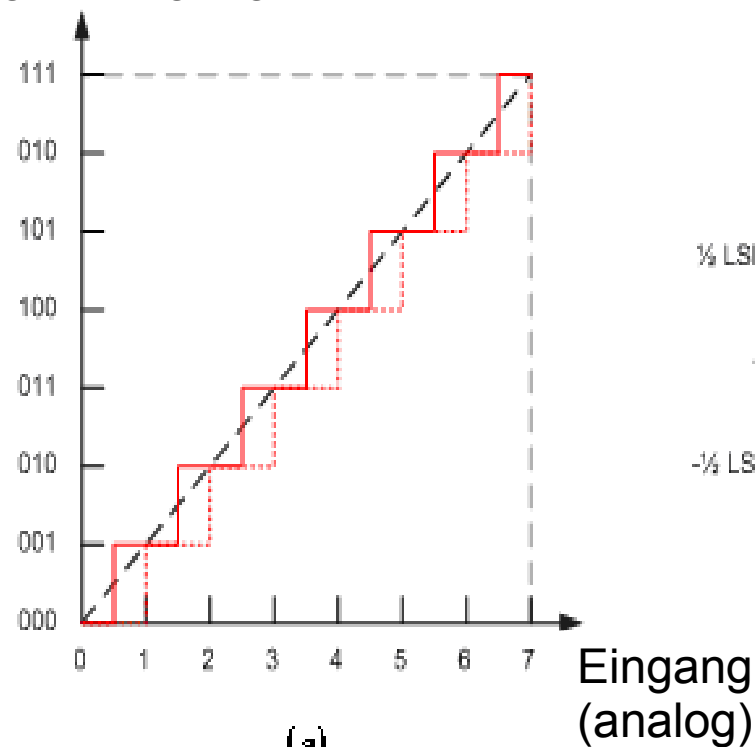
0 4 5 4 3 4 6 7 5 4 4 5 5 ...

## digitale Signale – Quantifizierung (Kodierung)

digitale Signale sind  
zeitlich und wertlich **diskret**

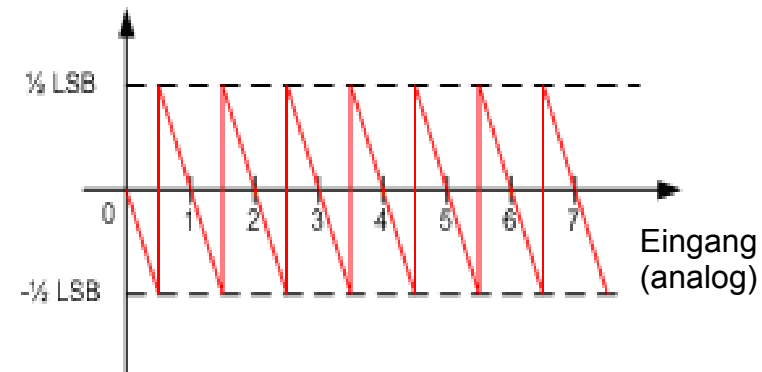
Was passiert mit Werte dazwischen?  
Die gehen verloren!  
(gewisse Informationsverlust)

Digitalausgang



(a)

Fehler



(b)

## SRV der A/D Umwandlung : Ergänzungsmaterial!

Frage: wie viel Rausch wird durch eine bestimmte A/D Umwandlung produziert?

Sei die Auflösung der Messung ist  $q$ , und sei der Signal ein Sinussignal (Amplitude =1,  $R=1$  Ohm).

In diesem Fall ist die Leistung  $P_A = \frac{1}{2}$  W.

Der Quantisierungsfehler entspricht eine Gleichverteilung mit der Umfang von  $q$ .  
Leistung des Rausches ist gleich dem Varianz der Gleichverteilung ( $q^2/12$ )

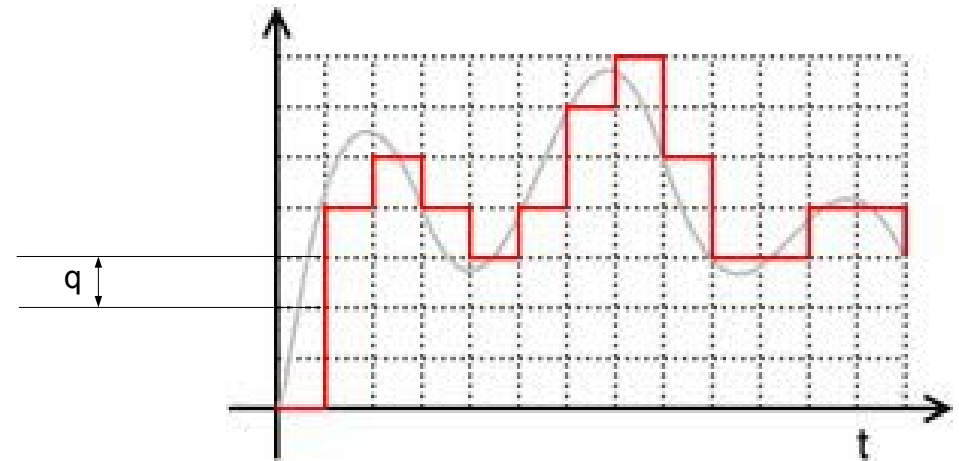
$$\text{SRV} = \text{SNR} = \frac{P_A}{\sigma^2} = \frac{1/2}{q^2/12} = \frac{6}{q^2}$$

Quantisierungsfehler kann verkleinert werden durch der Verfeinerung der Auflösung.

ABER: **Je feiner ist die Auflösung, desto langsamer ist ein A/D Umwandler!**

*Das kann problematisch sein, siehe Nyquist später.*

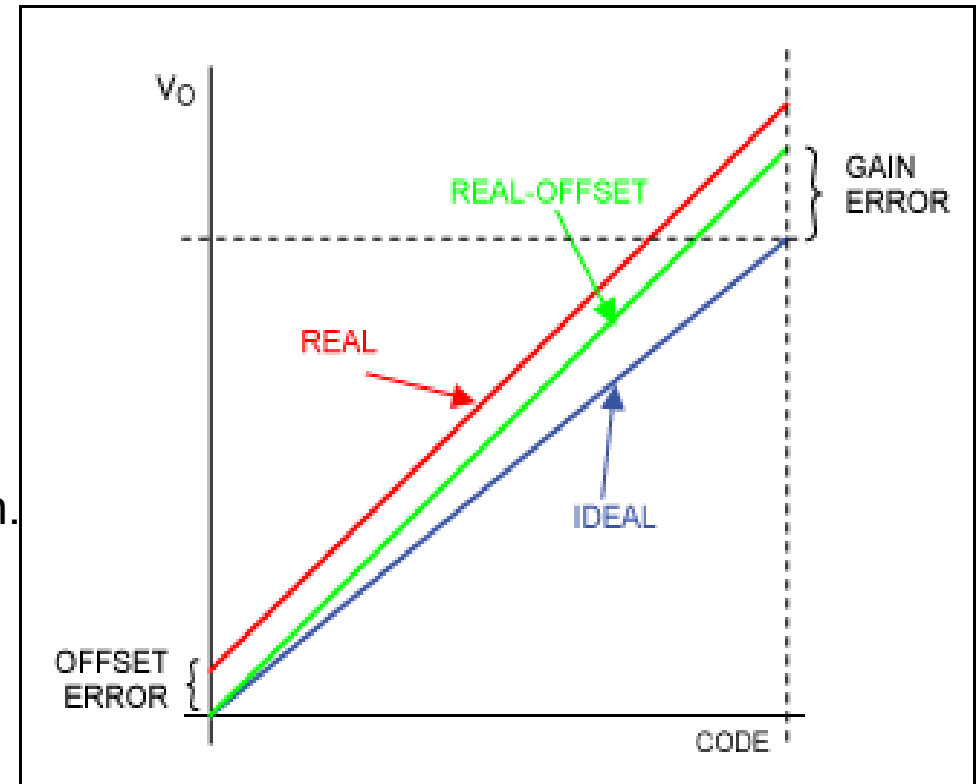
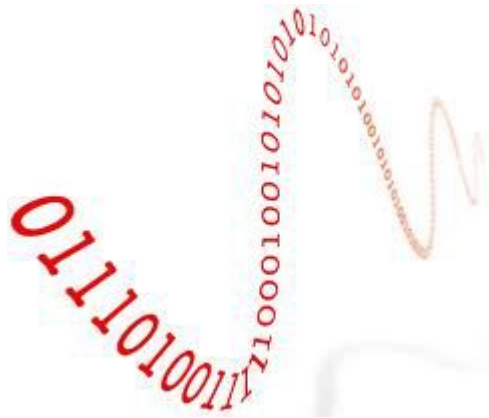
*Kompromiss: wählen wir  $q$  so, dass SRV wegen Digitalisierung alleine ungefähr 10x größer bleibt als SRV des Originalsignals.*



## digitale Signale – Wiederherstellung (DAC) (Dekodierung)

digital zu analog Umwandler

Einfach nahe zu ideal Umwandler zu bauen.



einige Fehlermöglichkeiten:

„offset“ : wenn Zahl = 0 dann  $U_{\text{aus}} \neq 0$

„gain error“: z.B. wenn Zahl = 10, dann  
 $U_{\text{aus}} \neq 10 \text{ V}$

Ergänzungsmaterial!

## digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

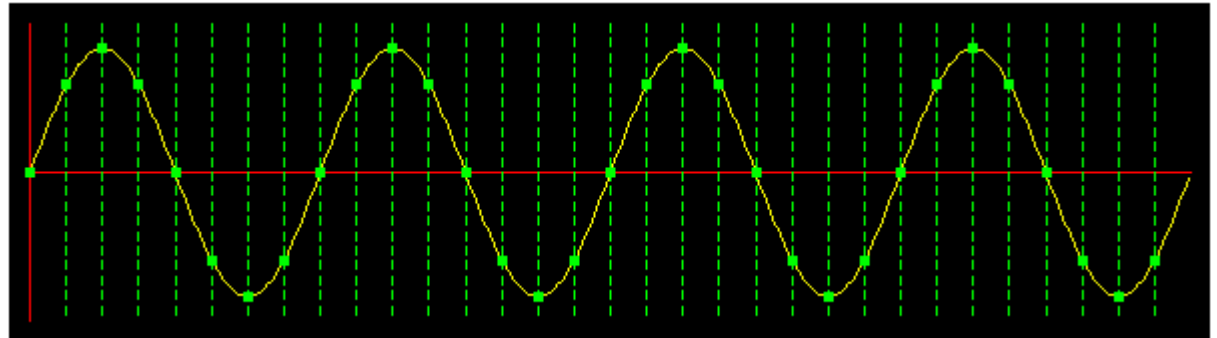
Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

$f = 1000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

gut

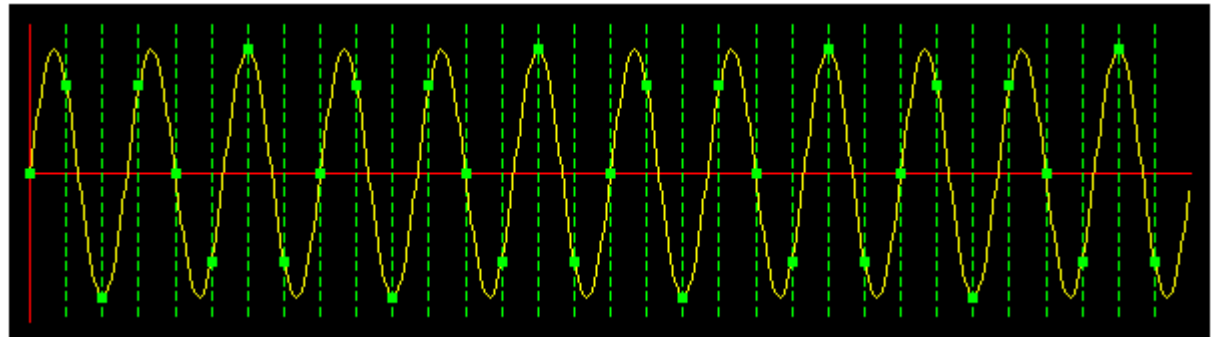
*gut ist, wenn nur EIN bestimmtes  
sinus kann die Punkte binden.*



$f = 3000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

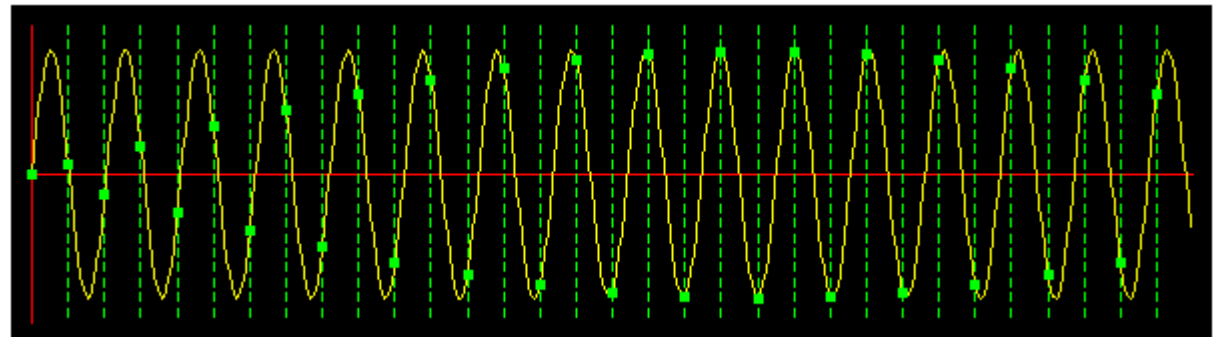
Noch gut



$f = 3900 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

Immer noch gut  
(aber „knapp”)





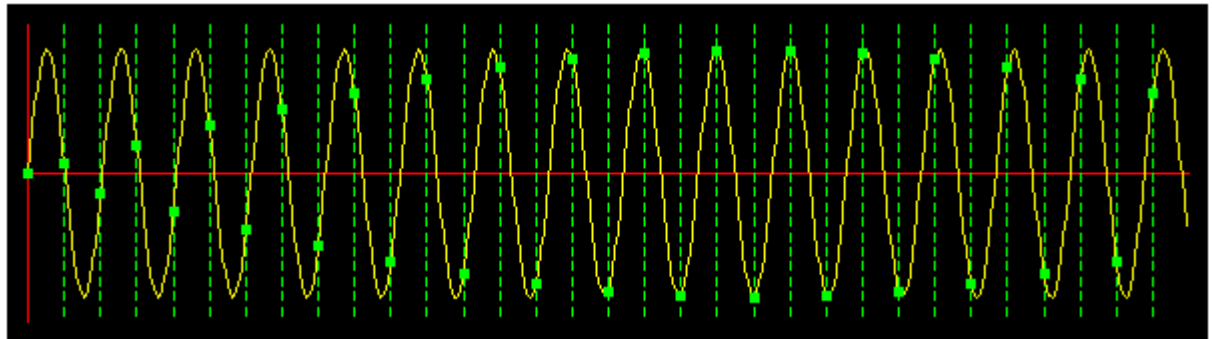
## digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

$f = 3900 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

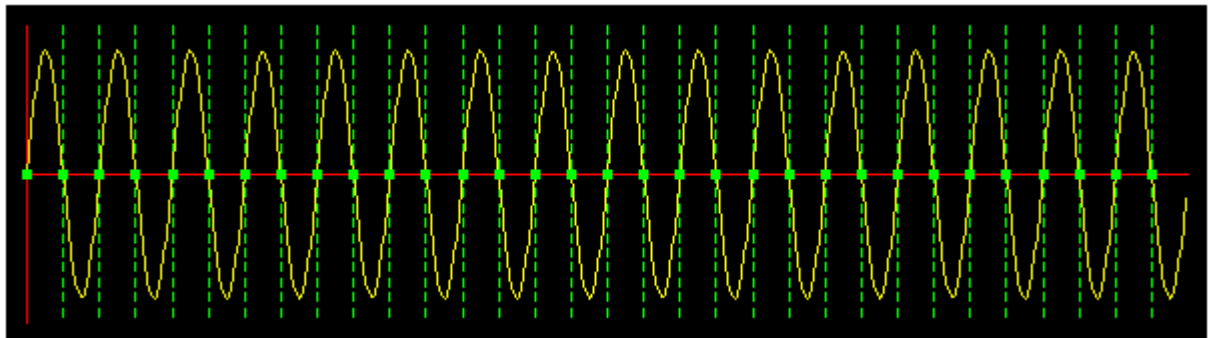
Immer noch gut



$f = 4000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

▪ ▪ ▪ ▪ Signal weg!

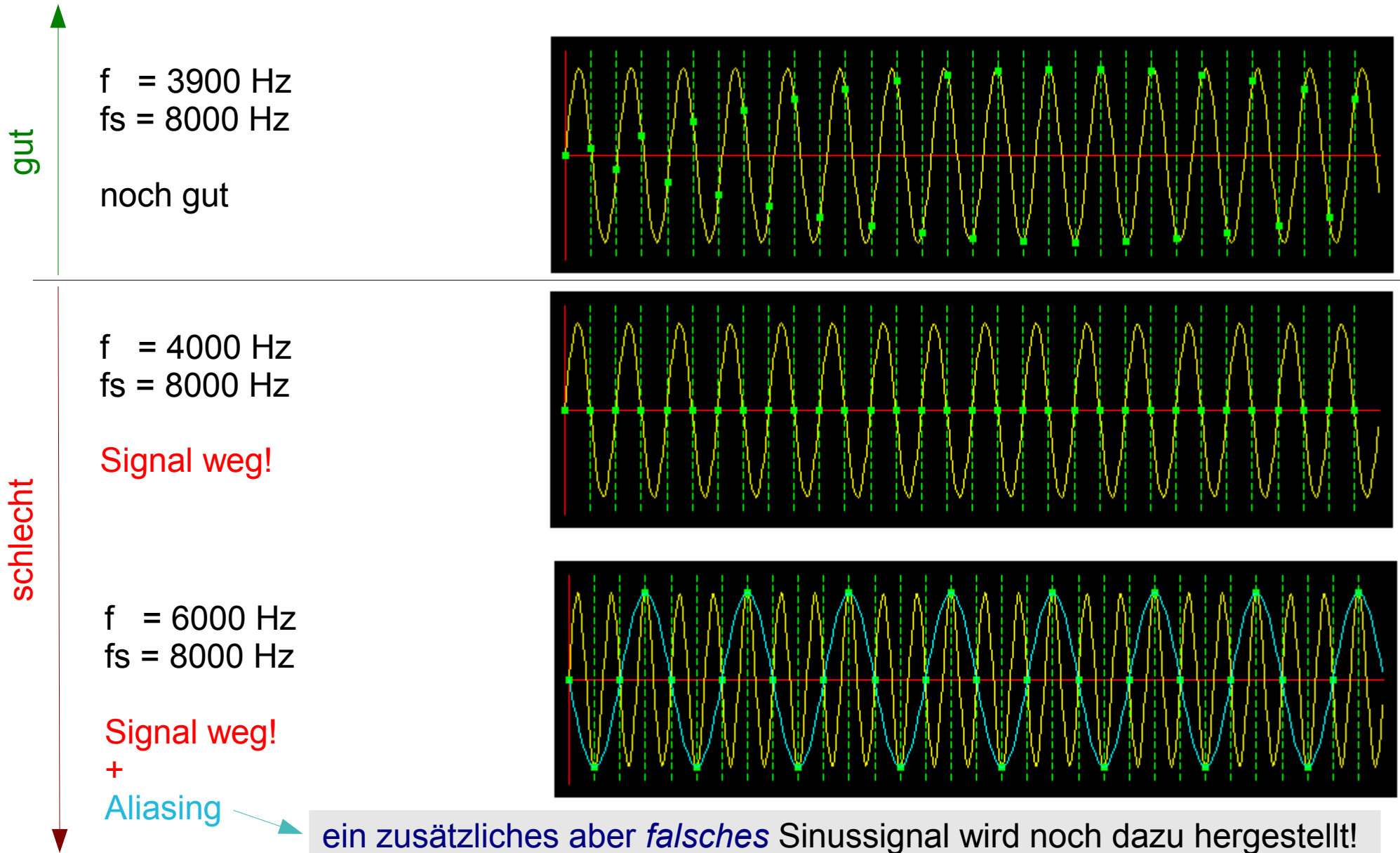


die **Nyquist-Theorie**: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein

nicht sinusförmig? dann gilt  $2 \times f_{\max}$  (siehe Fourier-Spektrum)

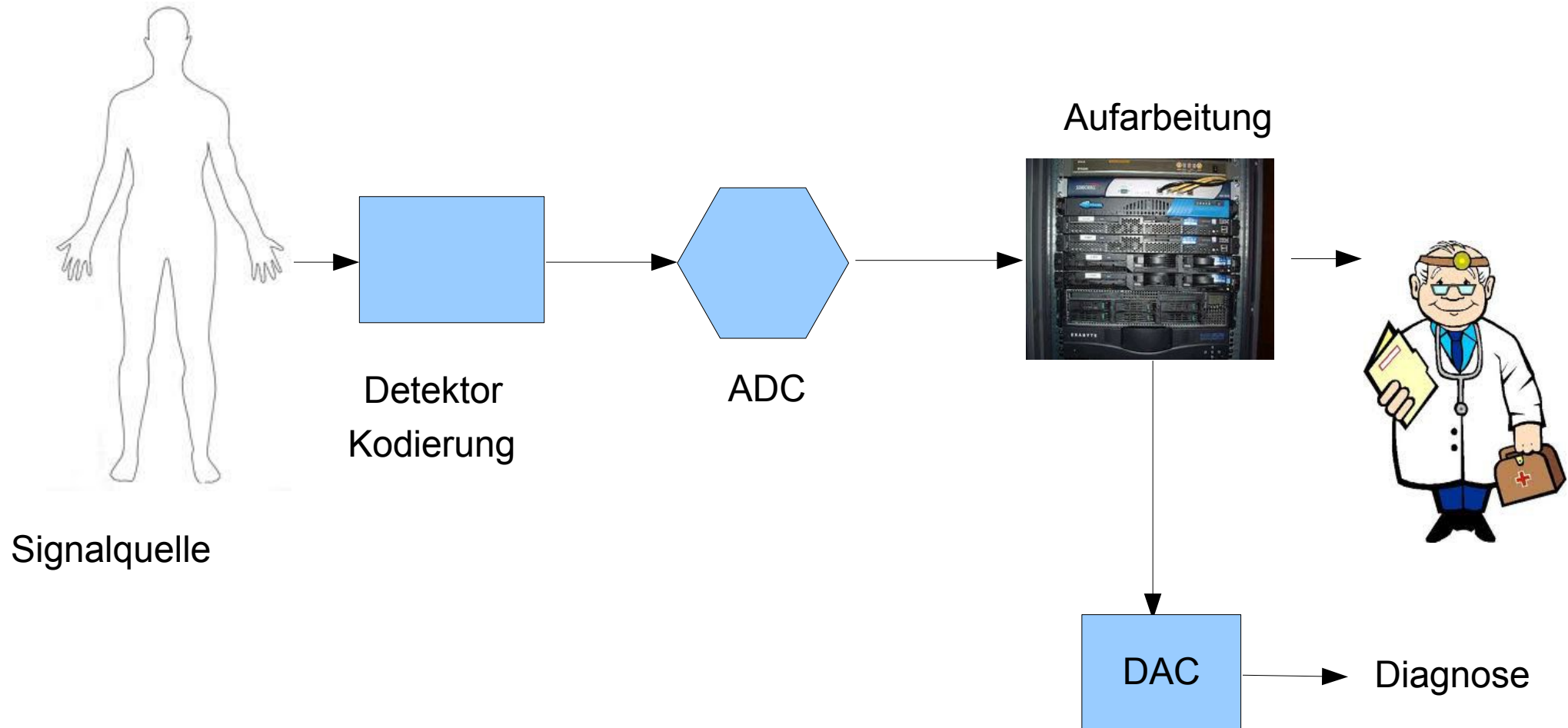
## digitale Signale – Nyquist

die **Nyquist-Theorie**: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein



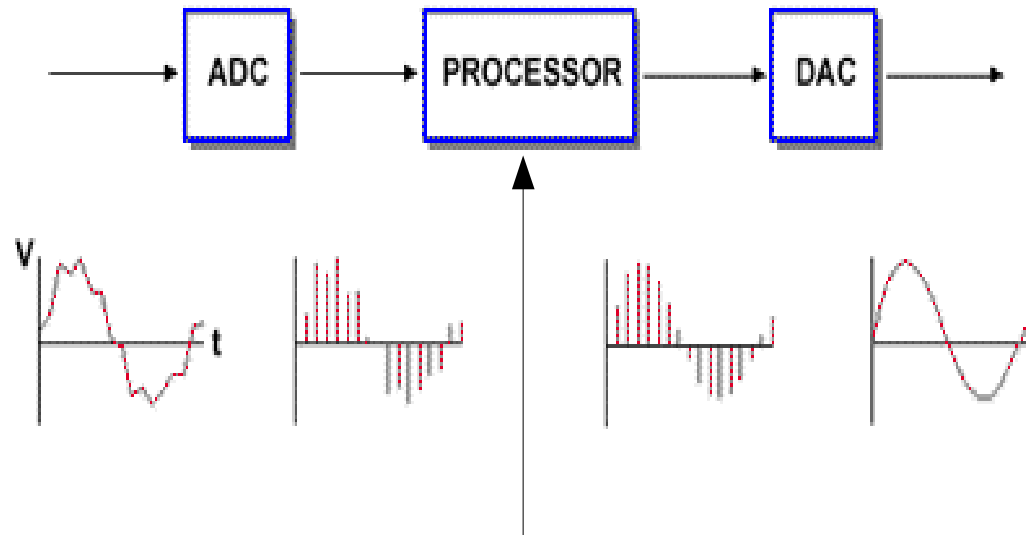
# digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)

## Digitale Signalaufarbeitung



## digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)

### Digitale Signalaufarbeitung



beliebige mathematische Transformationen sind möglich

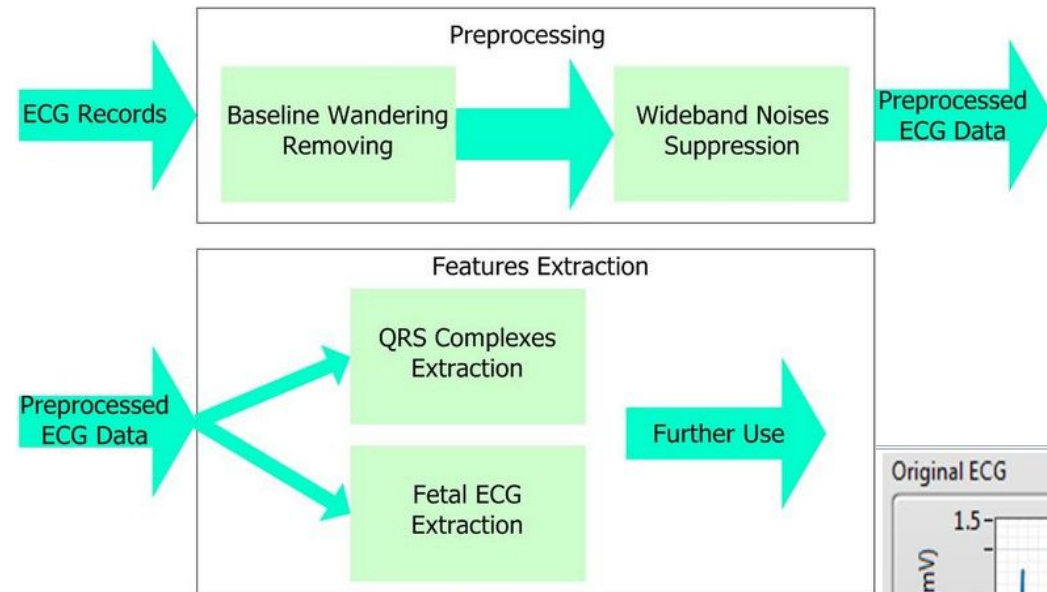
FFT: Fast Fourier Transform (schneller, digitaler Fourier-Transformation)

IFFT: Inverse FFT

In dem Frequenzspektrum sind dann Veränderungen möglich,  
z.B. Bei EKG bestimmte Störfrequenzen können gelöscht werden.

# digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)

## Digitale Signalaufarbeitung



Beispiel: EKG.

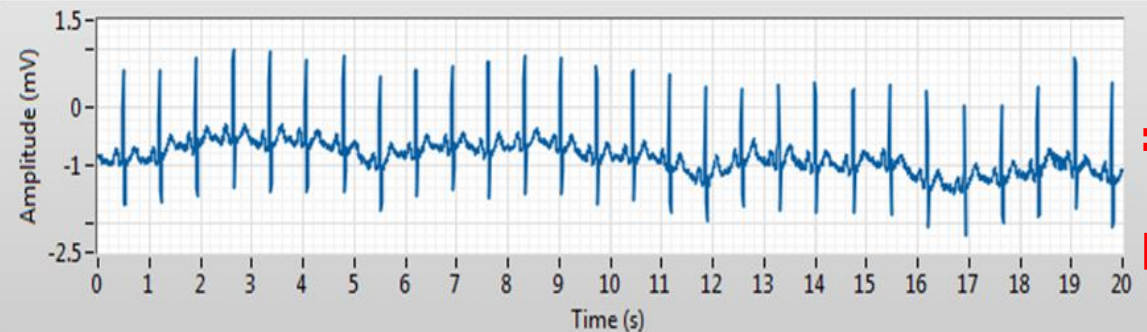
Hintergrundsignale (Wanderung)  
Rauschsignale  
(hochfrequenz und 50 Hz)  
werden digital unterdrückt mit DSP-Filtern

weitere Aufarbeitung:

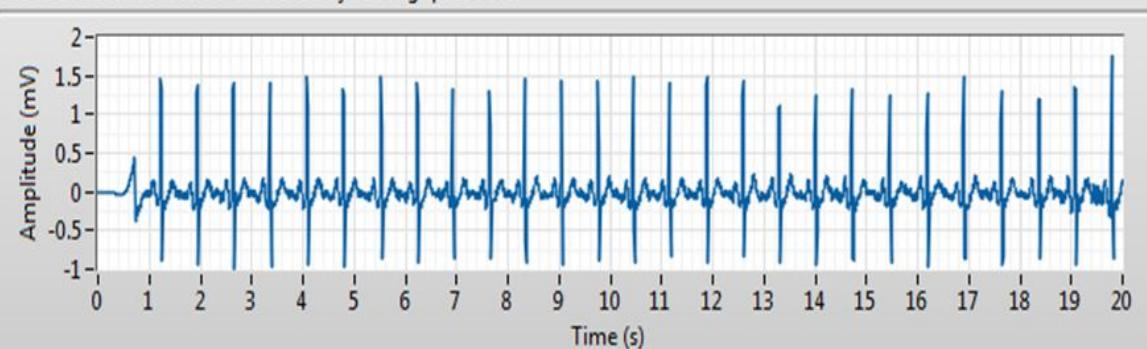
Nur die Kurven mit hoch genug  
SRV werden behalten, und gezeigt.

Folge:  
Einfachere, und sicherere Diagnose

Original ECG



ECG with Baseline Wander Removed by FIR Highpass Filter



Ergänzungsmaterial!

## DSP ist heute schon überall

Verschiedene mathematische möglichkeiten: verschlüsseln, filtern, verändern, usw.

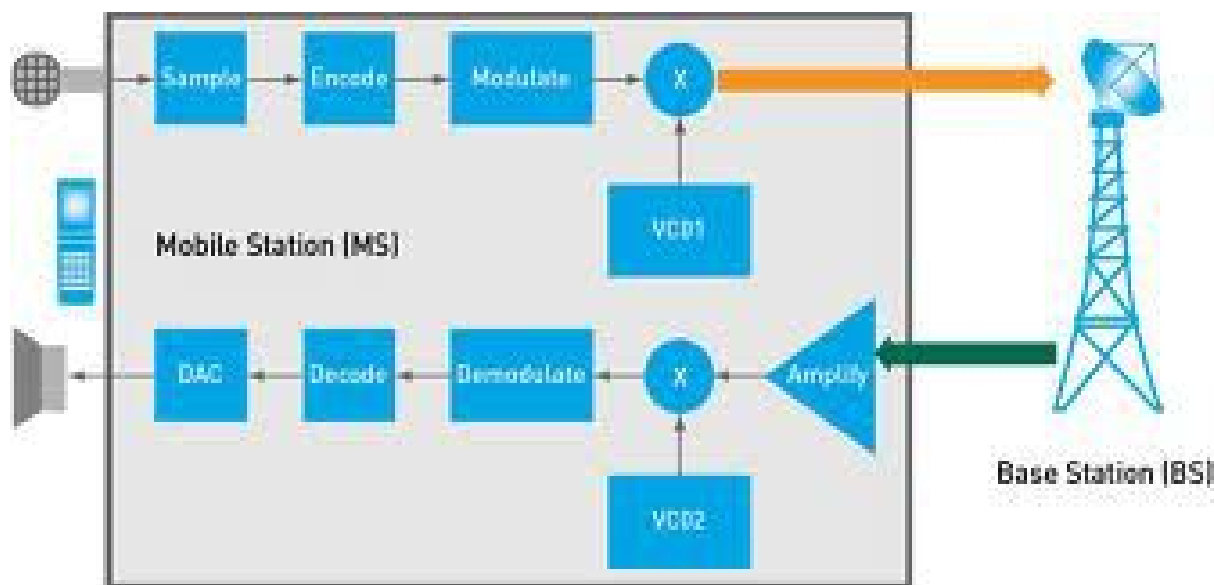
Handy

ADC, Kodierung,  
Übertragung, Dekodierung, DAC

CD/DVD Spieler

Licht: digital 1010110...

DAC: von Zahlen zu Musik



Ergänzungsmaterial!

