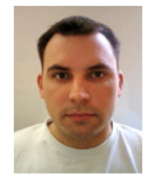
Az orvosi biofizika matematikai és fizikai alapjai

1. előadás
A biofizikai törvények megértéséhez szükséges minimális matematika. Fizikai mennyiségek és mértékegységeik
2019. szeptember 10.
AGÓCS Gergely

Hogyan készüljünk fel?

- egyetem = **önálló tanulás**
- források:
  - az előadásokon készített **saját** jegyzetek ***csak az első négy héten***

Agócs G.

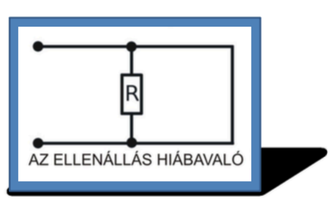


Mártonfalvi Zs.

Schay G.

Hogyan készüljünk fel?

- egyetem = **önálló tanulás**
- források:
  - az előadásokon készített **saját** jegyzetek ***csak az első négy héten***
  - Tölgyesi: *Fizikai alapismeretek* (e-könyv)



Fizikai alapismeretek

Vizsgareleváns kiegészítő anyag az „orvosi biofizika" és „biofizika" kurzusokhoz

Összeállította: Dr. Tölgyesi Ferenc, egyetemi docens

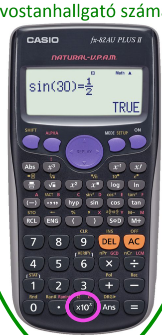
Semmelweis Egyetem
Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet
2016

Hogyan készüljünk fel?

- egyetem = **önálló tanulás**
- források:
  - az előadásokon készített **saját** jegyzetek ***csak az első négy héten***
  - Tölgyesi: *Fizikai alapismeretek* (e-könyv)
  - honlap: biofiz.semmelweis.hu
    - tantárgyi követelmények
    - előadásbeosztás és diák
    - e-könyv

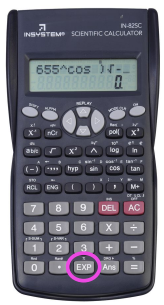
Tudományos számírás (normálalak)

a legjobb számológép egy orvostanhallgató számára

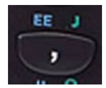


természetes számkijelzés

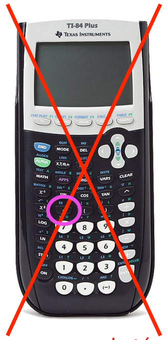
még elfogadható (de kevésbé praktikus)



lineáris bevitel



nem megengedett



programozható, grafikus kijelző

Szimbólumok használata a tudományban

A tudományok rengeteg latin és görög betűs szimbólumot (illetve ezek kombinációit) használnak, így a görög ábécé megtanulása elengedhetetlen.

Azonban a mennyiségek és mértékegységek száma sokkal nagyobb, mint a jelzésükre rendelkezésre álló betűk száma, ami félreértéshez vezethet. Emiatt lényeges a KONTEXTUS!

kétértelműség! ← **VIGYÁZAT!** → **inkonzisztencia!**

például:

c és C: fajlagos hőkapacitás, általános konstans, Celsius, szén, fénysebesség, kapacitás és kondenzátor, hangsebesség, koncentráció (többféle), centi-, coulomb

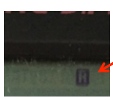
például:

- sűrűség ← ***ρ*** [rhó], ***d***
- sebesség ← ***v***, ***c***
- szorzás ← **×**, **·**, *
- frekvencia ← ***f***, ***ν*** [nü]
- arányosság ← **∝**, **~**

Szögek

D: degrees (fok) mód

R: radián mód

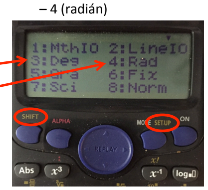


fordulat

degree = fok: hagyományos egység

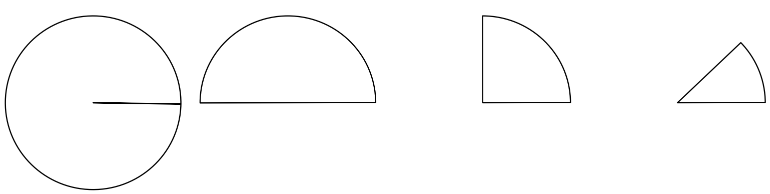
radián: tudományos egység, ív/sugár

– shift
– setup
– 3 (fok)
– 4 (radián)



1 fordulat = 360° = 2π rad

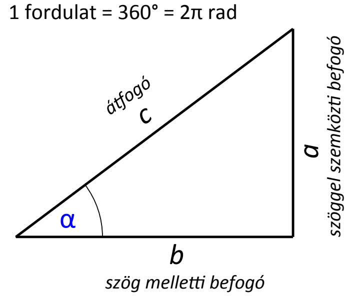
1° = 60′ = 3600″



teljes **fordulat**	fél **fordulat**	negyed **fordulat**	1/8 **fordulat**
360°	180°	90°	45°
2π radián	**π radián**	**π/2 radián**	**π/4 radián**

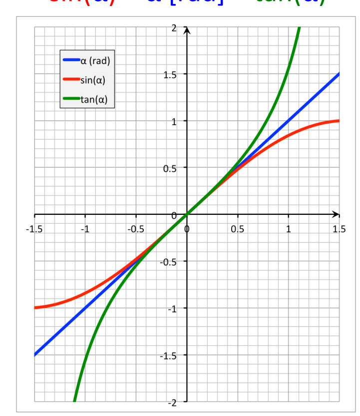
Trigonometrikus függvények

fok: hagyományos egység
radián: tudományos egység, ív/sugár
1 fordulat = 360° = 2π rad



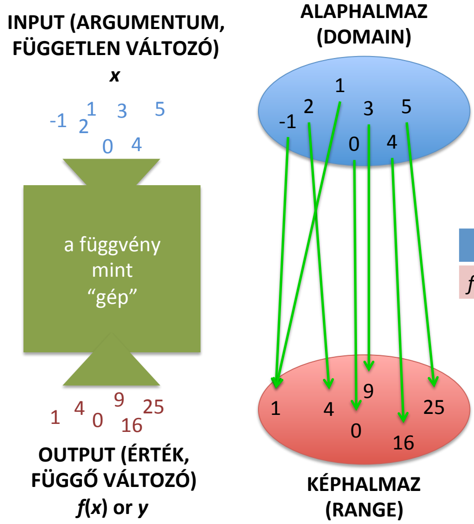
szinusz: sin(α) = *a*/*c*
koszinusz: cos(α) = *b*/*c*
tangens: tan(α) = tg(α) = *a*/*b*

kis szögekre (<10° ≈ 0.2 rad):
sin(α) ≈ α [rad] ≈ tan(α)



Mi a függvény?

Egy halmaz elemeinek egyértelmű hozzárendelése egy másik halmaz elemeihez



$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0	1	4	9	16	25

$x \mapsto f(x)$ or $y = f(x)$

f a függvény, amely kapcsolatot teremt *x* és *f*(*x*) között

Lineáris függvény

INTEGRÁLIS ALAK

VÁLTOZÓK: függő változó; független változó

$y = a \cdot x + b$

PARAMÉTEREK: meredekség; y-tengely-metszet

"DIFFERENCIÁLIS" ALAK

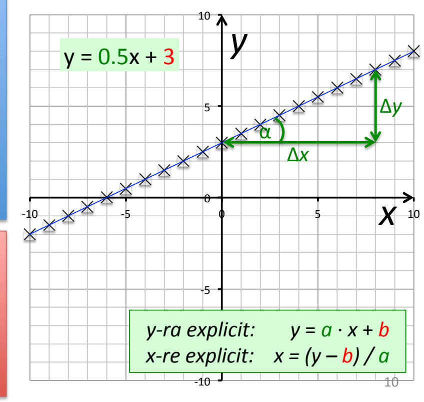
$\Delta y \sim \Delta x$

A függő változó **megváltozása** arányos a független változó **megváltozásával**

ha $x = 0$ akkor $y = b$

ha $\Delta x = 1$ akkor $\Delta y = a$

$a = \Delta y/\Delta x = \tan\alpha$



y-ra explicit: $y = a \cdot x + b$

x-re explicit: $x = (y - b) / a$

Lineáris függvény: példák

a Biofizika Képlettárból

#1: egyetemes gáztörvény (I.35)

$pV = nRT$ (ha n & V állandó)

$p = nR/V \cdot T + 0$

$y = a \cdot x + b$

#2: fényelektromos jelenség (II.37)

$E_{kin} = hf - W_{em}$

$E_{kin} = \mathbf{h} \cdot f + (-W_{em})$

$y = a \cdot x + b$

#3: gyengítési együttható (II.85)

$\mu = \mu_m \cdot \rho$

$\mu = \mu_m \cdot \rho + 0$

$y = a \cdot x + b$

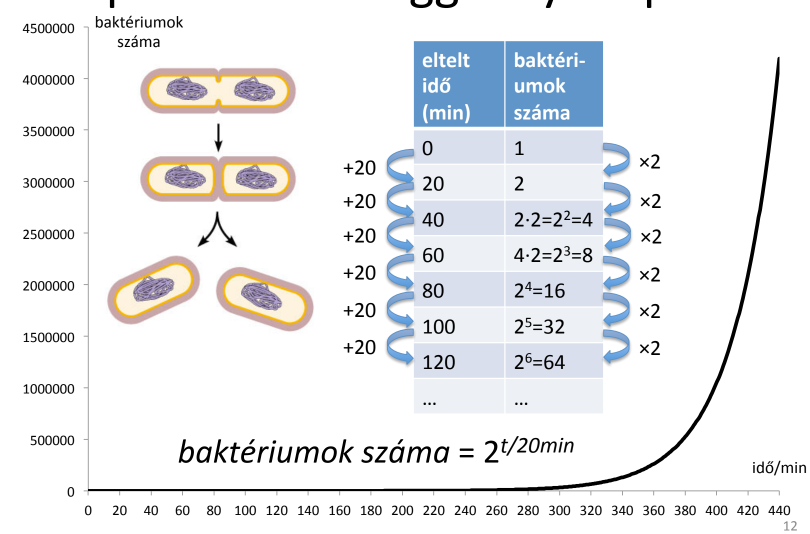
#4: Ohm törvénye

$R = U/I$

$I = 1/R \cdot U + 0$

$y = a \cdot x + b$

Exponenciális függvény: 1. példa

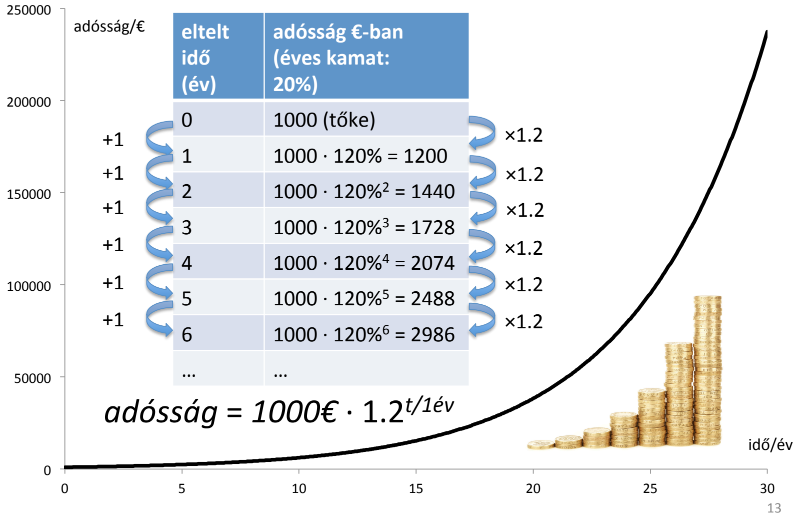


eltelt idő (min)	baktériumok száma
0	1
20	2
40	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
60	$4 \cdot 2 = 2^3 = 8$
80	$2^4 = 16$
100	$2^5 = 32$
120	$2^6 = 64$
…	…

+20 (időlépésenként); ×2 (lépésenként)

baktériumok száma $= 2^{t/20min}$

Exponenciális függvény: 2. példa



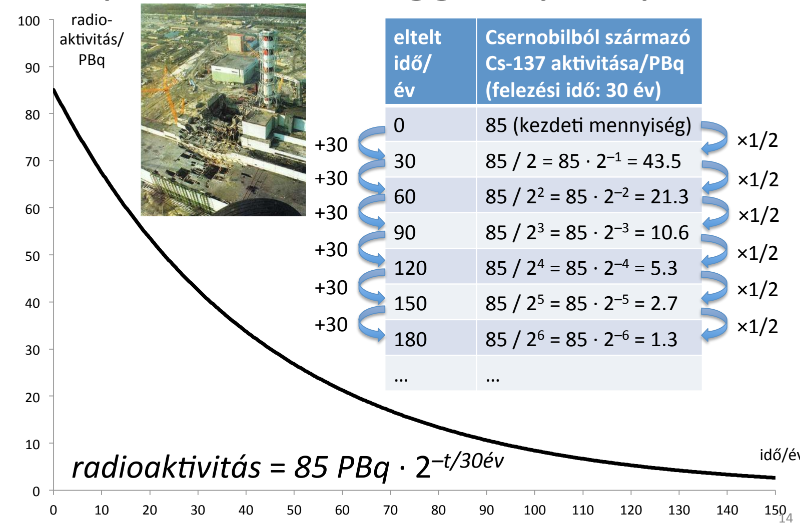
eltelt idő (év)	adósság €-ban (éves kamat: 20%)
0	1000 (tőke)
1	$1000 \cdot 120\% = 1200$
2	$1000 \cdot 120\%^2 = 1440$
3	$1000 \cdot 120\%^3 = 1728$
4	$1000 \cdot 120\%^4 = 2074$
5	$1000 \cdot 120\%^5 = 2488$
6	$1000 \cdot 120\%^6 = 2986$
…	…

+1 +1 +1 +1 +1 +1

×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2 ×1.2

adósság = $1000€ \cdot 1.2^{t/1év}$

Exponenciális függvény: 3. példa



eltelt idő/ év	Csernobilból származó Cs-137 aktivitása/PBq (felezési idő: 30 év)
0	85 (kezdeti mennyiség)
30	$85 / 2 = 85 \cdot 2^{-1} = 43.5$
60	$85 / 2^2 = 85 \cdot 2^{-2} = 21.3$
90	$85 / 2^3 = 85 \cdot 2^{-3} = 10.6$
120	$85 / 2^4 = 85 \cdot 2^{-4} = 5.3$
150	$85 / 2^5 = 85 \cdot 2^{-5} = 2.7$
180	$85 / 2^6 = 85 \cdot 2^{-6} = 1.3$
…	…

+30 +30 +30 +30 +30 +30

×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2 ×1/2

radioaktivitás = $85\ \text{PBq} \cdot 2^{-t/30év}$

Exponenciális függvény

INTEGRÁLIS ALAK

$$y = b \cdot a^x$$

GYAKORLATI MEGFONTOLÁSOK:
- az alap legyen *e* (esetleg 2 vagy 10)
- emiatt új szorzóparamétert kell bevezetni a kitevőben: *p* vagy 1/*k*
- a kitevő előjele negatív
- *b*–t inkább jelölje y_0

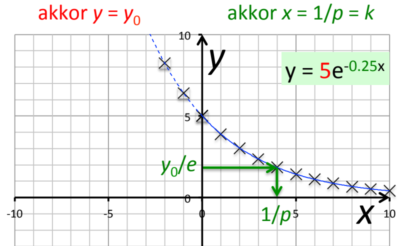
VÁLTOZÓK: függő változó, független változó

$$y = y_0 \cdot e^{-px} = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

PARAMÉTEREK: pre-exponenciális együttható, együttható a kitevőben

ha $x = 0$ akkor $y = y_0$

ha $y = y_0/e$ akkor $x = 1/p = k$



y-ra explicit: $y = y_0 \cdot e^{-px}$
x-re explicit: $x = \ln(y / y_0) / (-p)$

„DIFFERENCIÁLIS" ALAK

$$\Delta y/y \sim \Delta x$$

A függő változó **relatív megváltozása** arányos a független változó **megváltozásával**

Exponenciális függvény: linearizáció

grafikus linearizáció

ábrázoljuk *y*-t logos skálán *x* függvényében:
a kapcsolat lineárisnak tűnik, de továbbra is exponenciális

INTEGRÁLIS ALAK

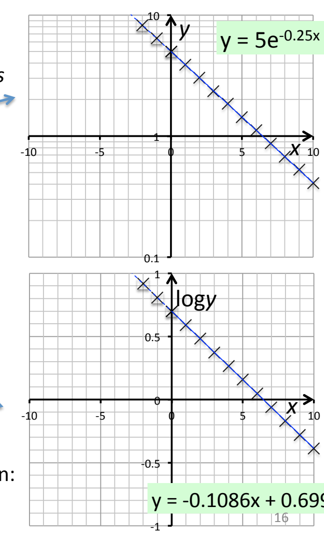
$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

$$\log y = \log\left(y_0 \cdot e^{-p \cdot x}\right)$$
$$\log y = \log y_0 + \log\left(e^{-p \cdot x}\right)$$
$$\log y = \log y_0 - p \cdot x \cdot \log e$$
$$\underbrace{\log y}_{y} = \underbrace{-p \cdot \log e}_{a} \cdot x + \underbrace{\log y_0}_{b}$$

metszet = $\log(y_0)$
$\log(5) = 0.699$
meredekség = $-p \cdot \log(e)$
$-0.25 \cdot \log(e) = -0.1086$

számtani linearizáció

ábrázoljuk log(*y*)-t *x* függvényében:
a kapcsolat lineáris



Exponenciális függvény: példák

a Biofizika Képlettárból

#1: sugárzásgyengülés törvénye
(II.11)

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

#2: Boltzmann-eloszlás
(I.25)

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\Delta\varepsilon/(kT)}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

#3: bomlástörvény
(II.96)

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-px}$$

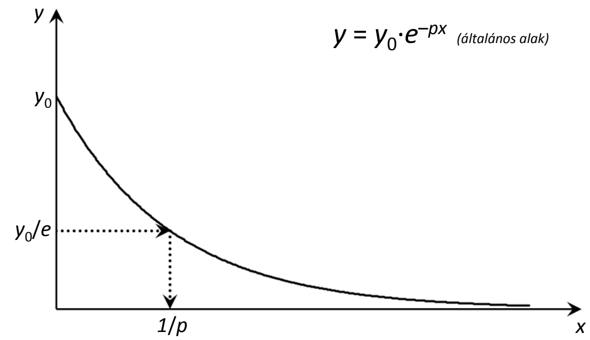
#4: RC-kör kisülése
(VII.2)

$$U = U_0 \cdot e^{-t/(RC)}$$

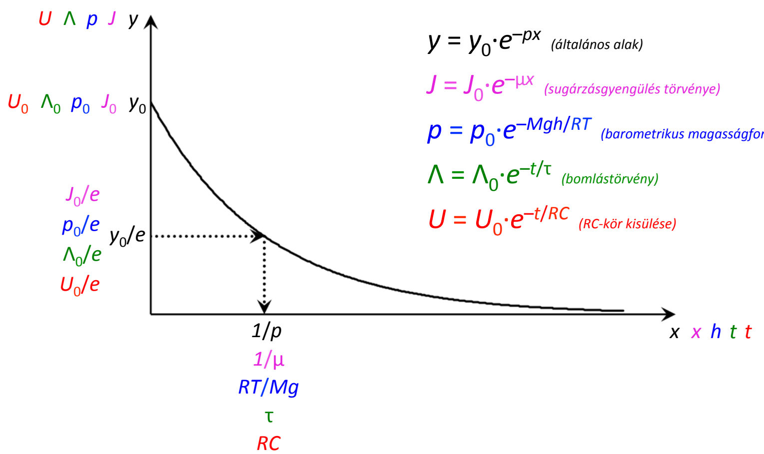
$$y = y_0 \cdot e^{-x/k}$$

e-alapú exponenciális függvények grafikonja

$y = y_0 \cdot e^{-px}$ *(általános alak)*



e-alapú exponenciális függvények grafikonja



$y = y_0 \cdot e^{-px}$ *(általános alak)*

$J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$ *(sugárzásgyengülés törvénye)*

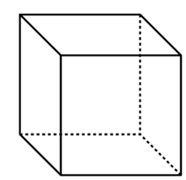
$p = p_0 \cdot e^{-Mgh/RT}$ *(barometrikus magasságformula)*

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-t/\tau}$ *(bomlástörvény)*

$U = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ *(RC-kör kisülése)*

Hatványfüggvény: példa

tömeg ~ térfogat ~ [test]hossz^3
felület ~ [test]hossz^2



Hatványfüggvény

INTEGRÁLIS ALAK

VÁLTOZÓK: függő változó, független változó

$$y = b \cdot x^{a}$$

PARAMÉTEREK: preexpo-nenciális együttható (b), kitevő (a)

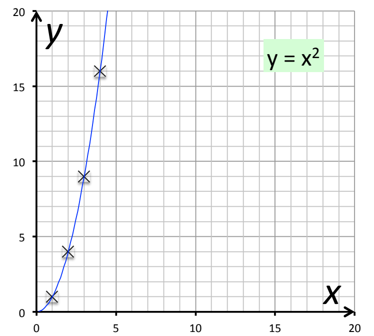
y-ra explicit: $y = b \cdot x^{a}$
x-re explicit: $x = (y / b)^{1/a}$

"DIFFERENCIÁLIS" ALAK

$$\Delta y/y \sim \Delta x/x$$

A függő változó **relatív megváltozása** arányos a független változó **relatív megváltozásával**

ha $x = 1$
akkor $y = b$



a **fordított arányosság** és a **gyökfüggvény** is hatványfüggvény

$$y = \frac{b}{x} = b \cdot x^{-1}$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Hatványfüggvény: linearizáció

grafikus linearizáció
ábrázoljuk *y*-t és *x*-et is logos skálán:
a kapcsolat lineárisnak tűnik, de továbbra is hatványos

INTEGRÁLIS ALAK

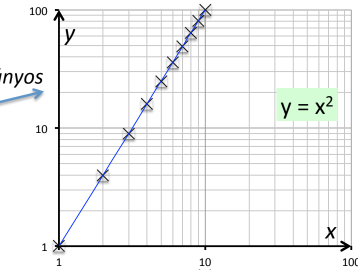
$$y = b \cdot x^{a}$$

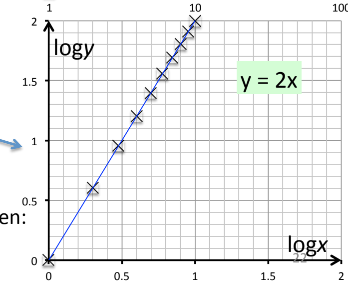
$$\log y = \log\left(b \cdot x^{a}\right)$$

$$\log y = \log b + \log\left(x^{a}\right)$$

$$\log y = \log b + a \cdot \log x$$

$$\underbrace{\log y}_{y} = a \cdot \underbrace{\log x}_{x} + \underbrace{\log b}_{b}$$





metszet = log(b)
log(1) = 0
meredekség = a
a = 2

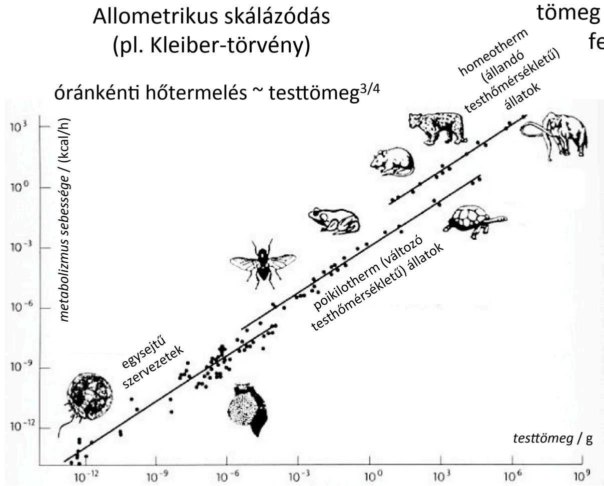
számtani linearizáció
ábrázoljuk log(y)-t log(x) függvényében:
a kapcsolat lineáris

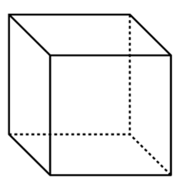
Hatványfüggvény: példa

Allometrikus skálázódás
(pl. Kleiber-törvény)

tömeg ~ térfogat ~ [test]hossz^3
felület ~ [test]hossz^2

óránkénti hőtermelés ~ testtömeg$^{3/4}$





Hatványfüggvény: példák

a Biofizika Képlettárból

#1: de Broglie-hullámhossz
(I.3)
$\lambda = h/p$

$$\lambda = h \cdot p^{-1}$$
$$y = b \cdot x^{a}$$

#2: Stefan–Boltzmann-törvény
(II.41)

$$M_{fekete} = \sigma \cdot T^{4}$$
$$y = b \cdot x^{a}$$

#3: Duane–Hunt-törvény
(II.80)

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU_{anode}}$$

$$\lambda_{min} = hc/e \cdot U^{-1}$$
$$y = b \cdot x^{a}$$

#4: a sajátfrekvencia tömegfüggése
(Rezonancia 6)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_0 = k^{1/2}/(2\pi) \cdot m^{-1/2}$$
$$y = b \cdot x^{a}$$