Signalverarbeitung in der Medizin II.

Gusztav Schay

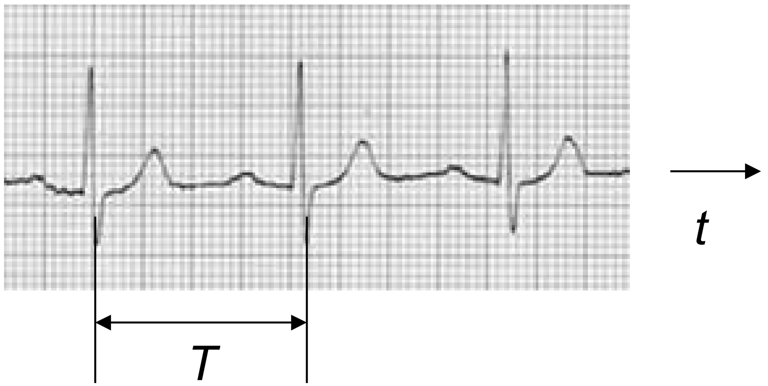
Signalweitergabe und Aufarbeitung

Aufarbeitung von Signalen:
- Fourier-Theorie
- Verstärker
- Elektrizitätslehre (siehe Skript!)
- elektronische Schaltungen

Fourier

Fourier-Theorie: Alle (periodische am einfachsten) Signale können auf eine Summe von sinus- und cosinus-Signale mit unterschiedlichen Frequenzen aufgebrochen werden, ODER können von solchen Signalen widerhergestellt werden.

$$Signal(t) \leftarrow\rightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



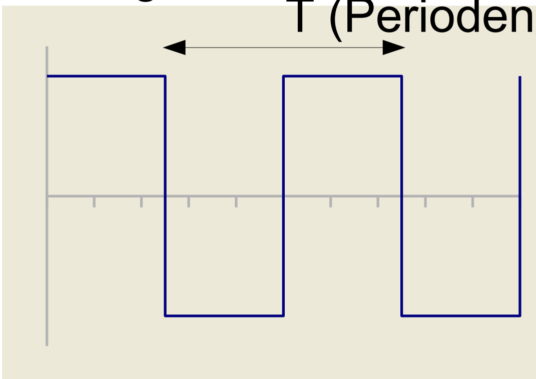
Wenn das Signal periodisch ist, dann $\omega_i = i \cdot 2\pi \cdot f$, $f = 1/T$ und $i = 1,2,3,4,5.....$

Grundfrequenz

Obertöne

Spannung

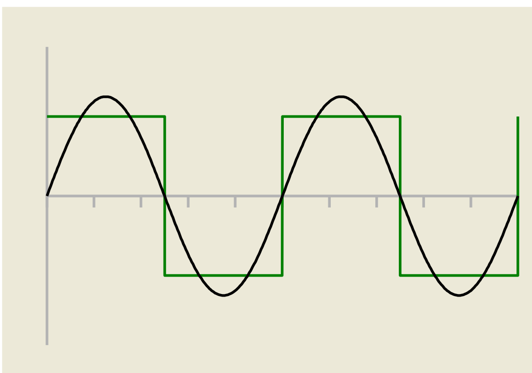
T (Periodenzeit)



t (Zeit)

$$Signal(t) \leftarrow\rightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

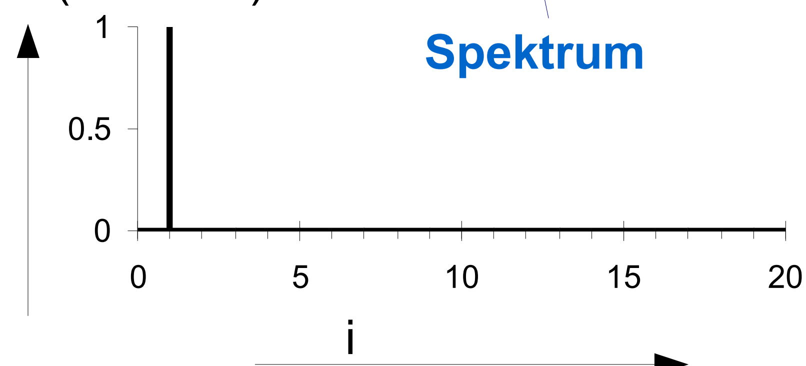
Originalsignal



i=1

Grundfrequenz:
i=1, f_1 = 1/T

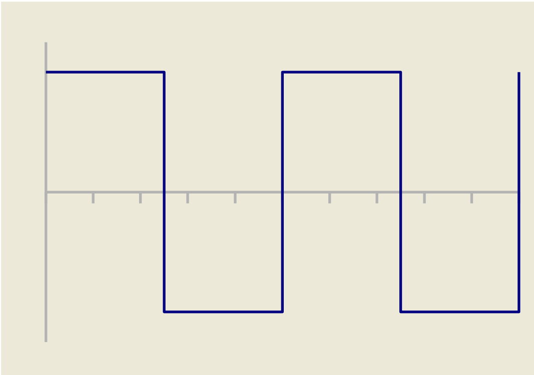
Amplitude (z.B. in V)



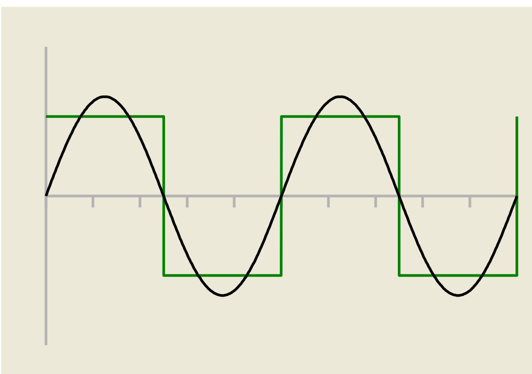
Spektrum

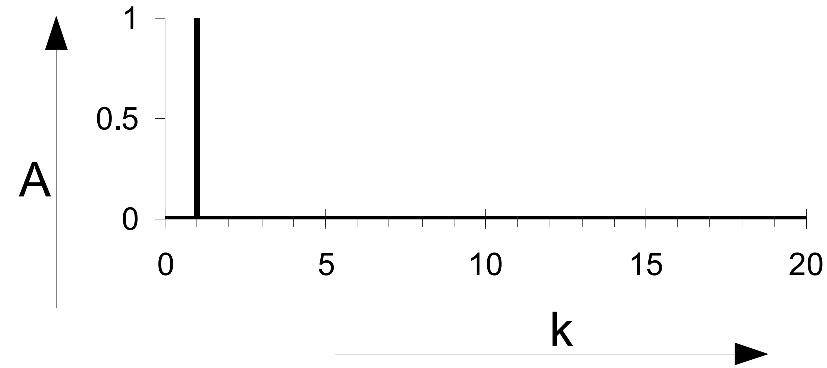
i
(oder Frequenz, z.B. Hz)

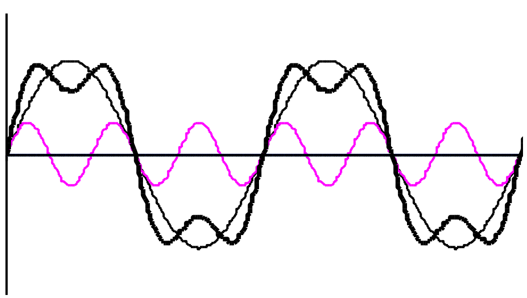
$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



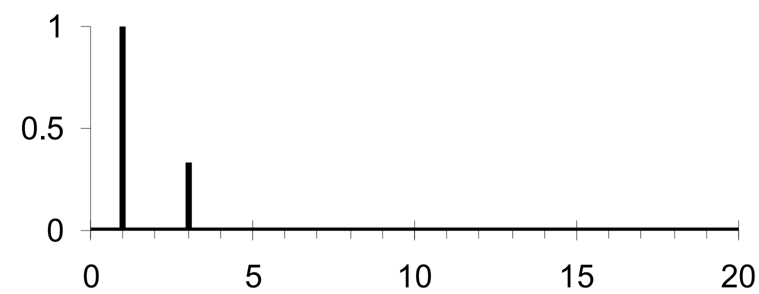
Originalsignal



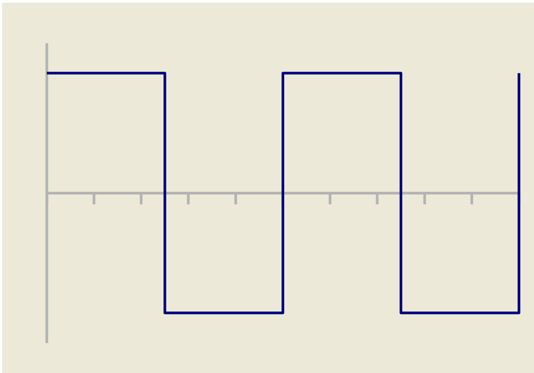




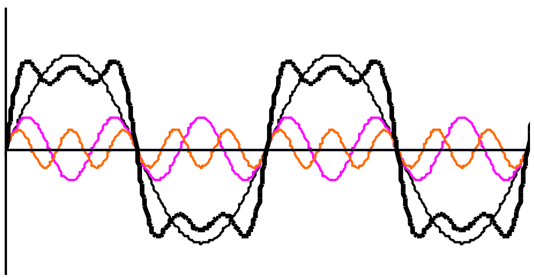
i=1,2,3



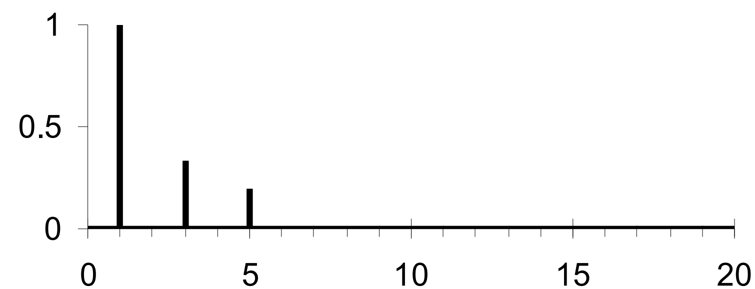
$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

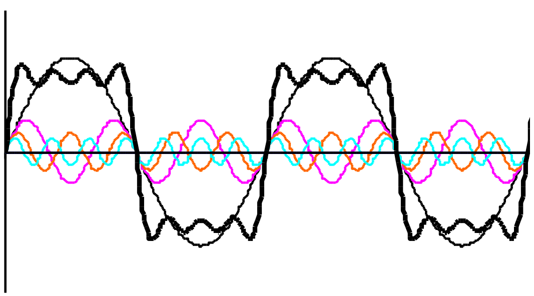


Originalsignal

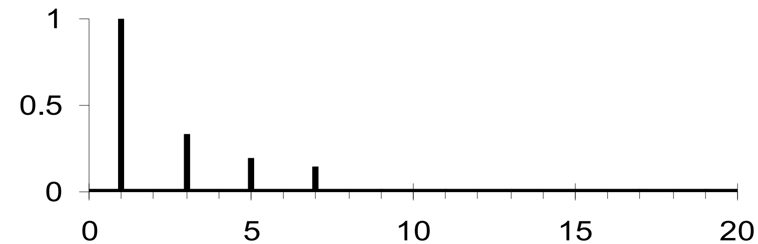


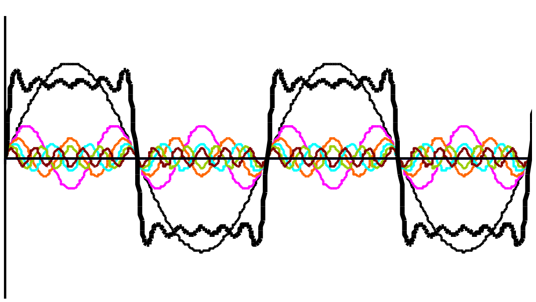
i = 1...5



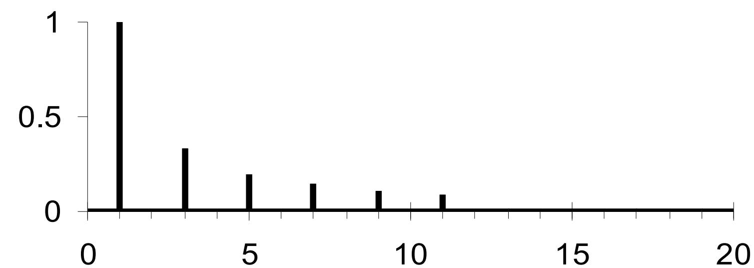


i = 1...7

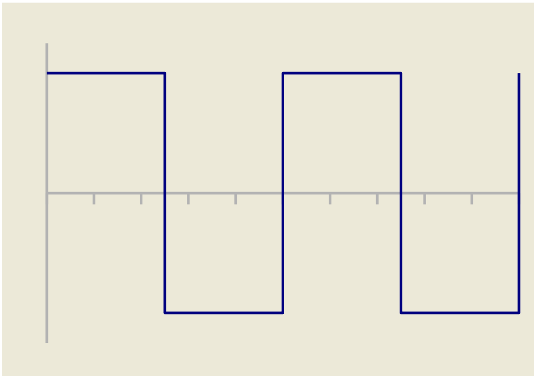




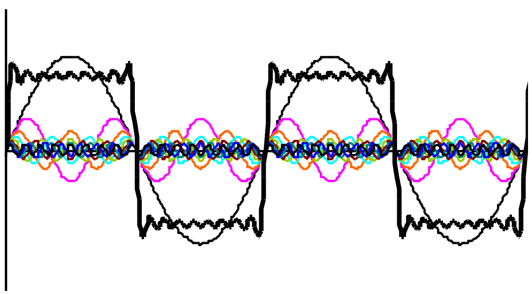
i = 1...11



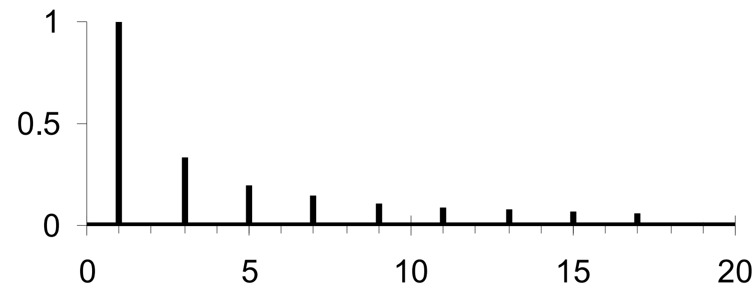
$$Signal(t) \leftarrow\rightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

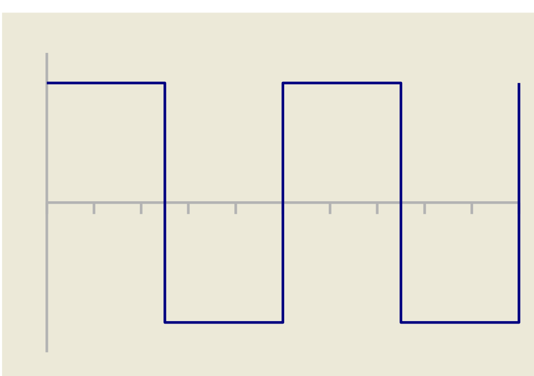


Originalsignal

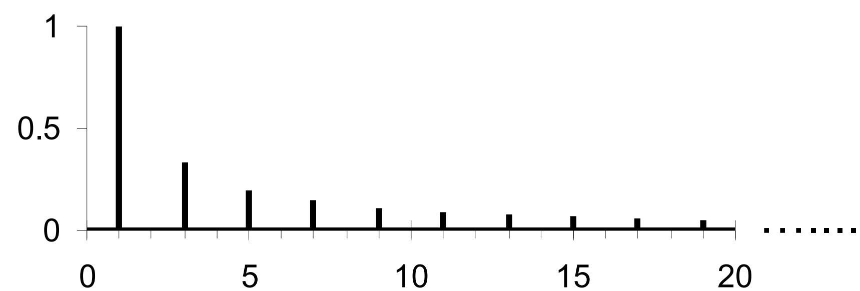


i = 1...17





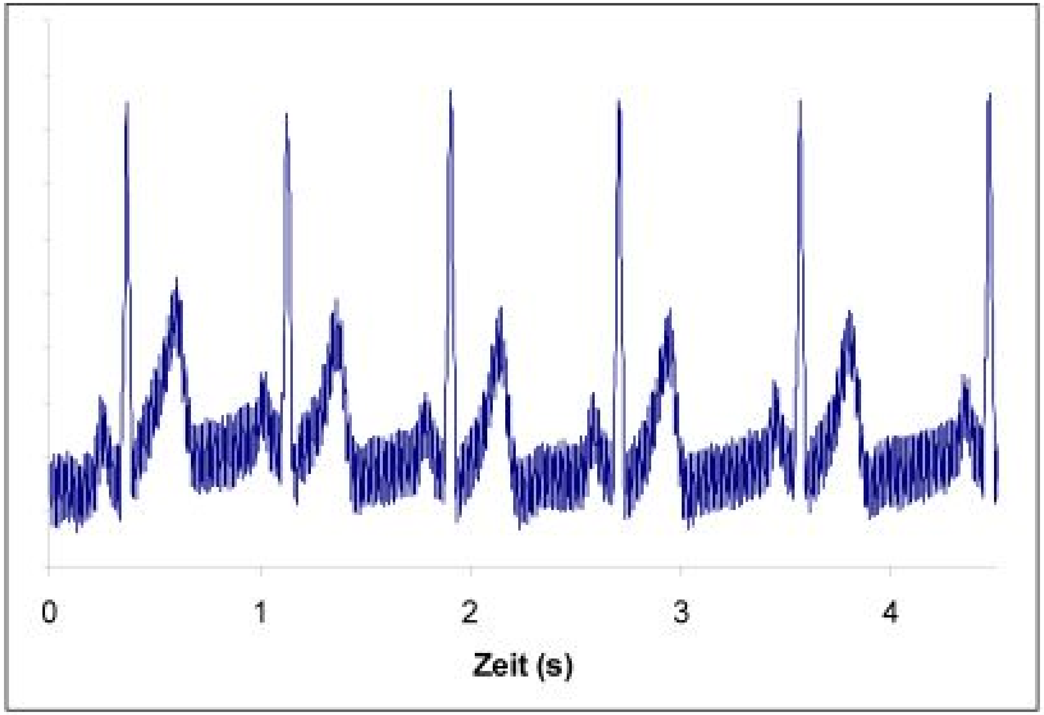
unendlich viele Komponente (i = 1 … ∞)



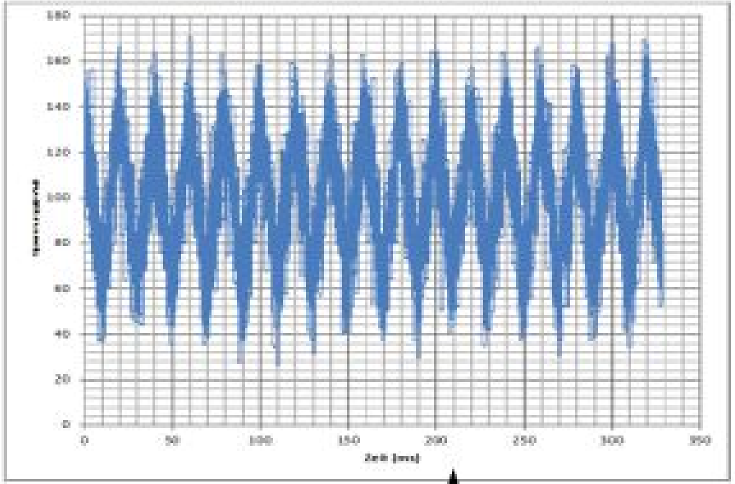
Die Komponente sind aber nicht unabhängig! Deshalb Informationsgehalt ist das selbe im Spektrum, wie in der U(t) Kurve

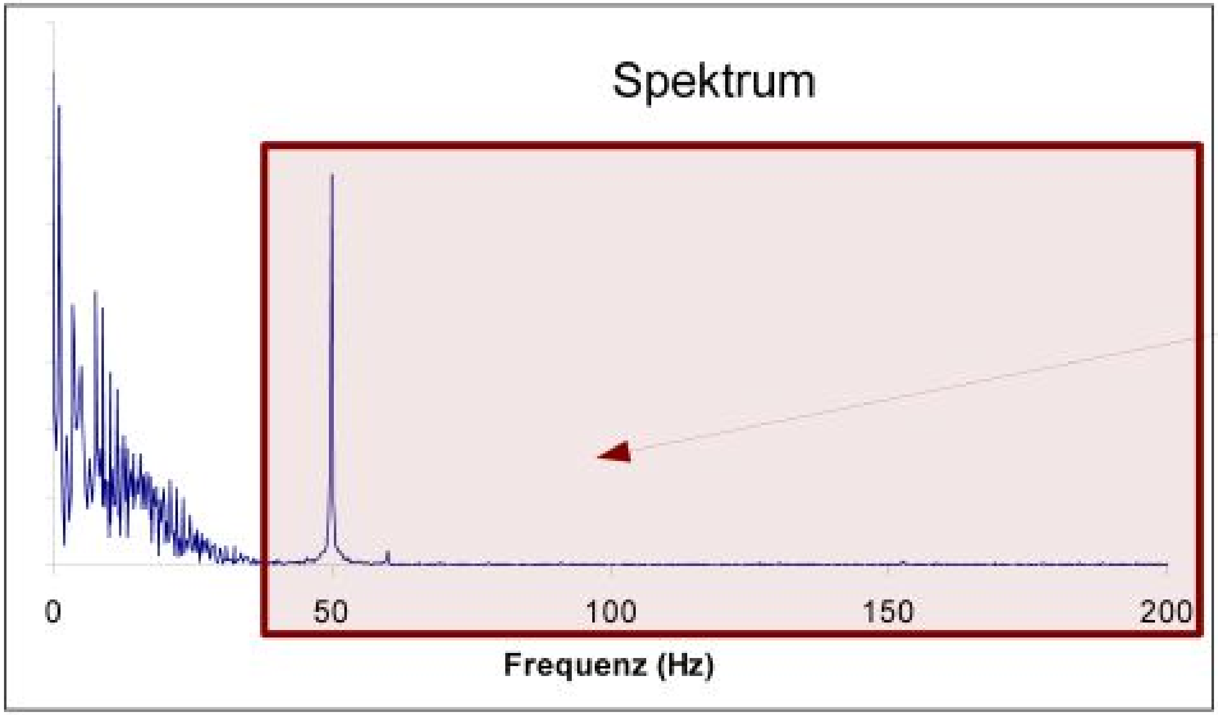
EKG-Signal

Signal + Rausch



Extremfall: SRV < 1

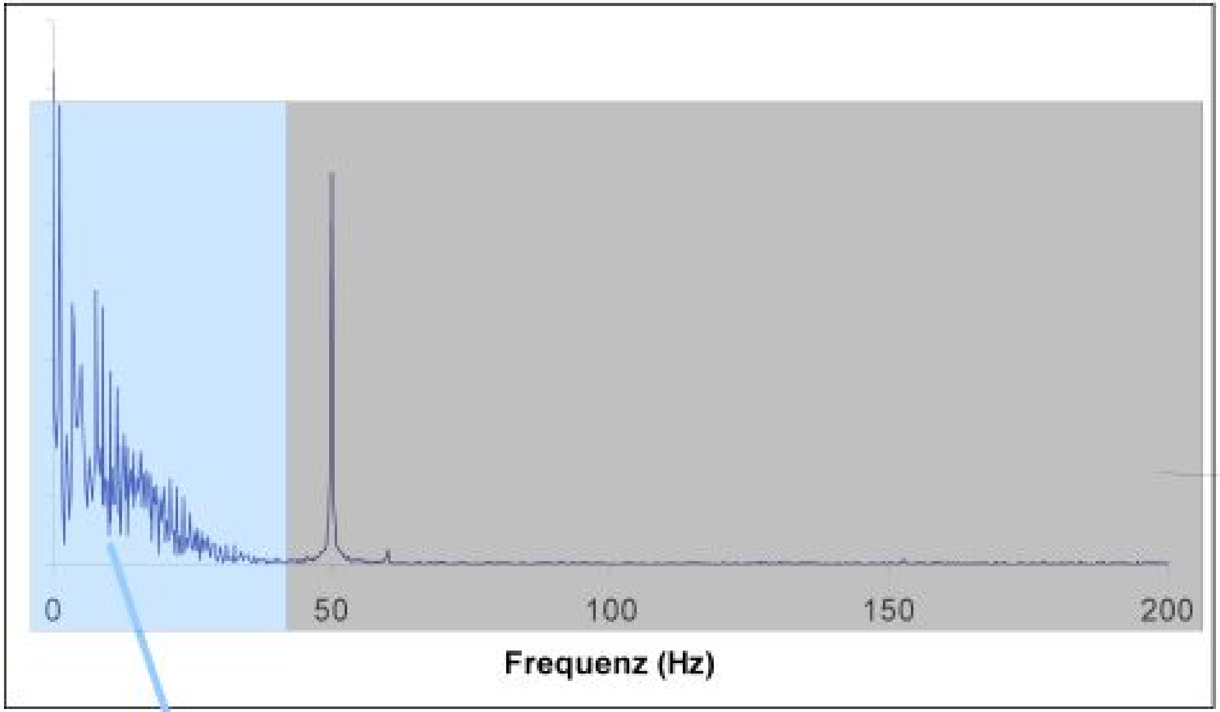




50Hz aus dem Netz

Rausch

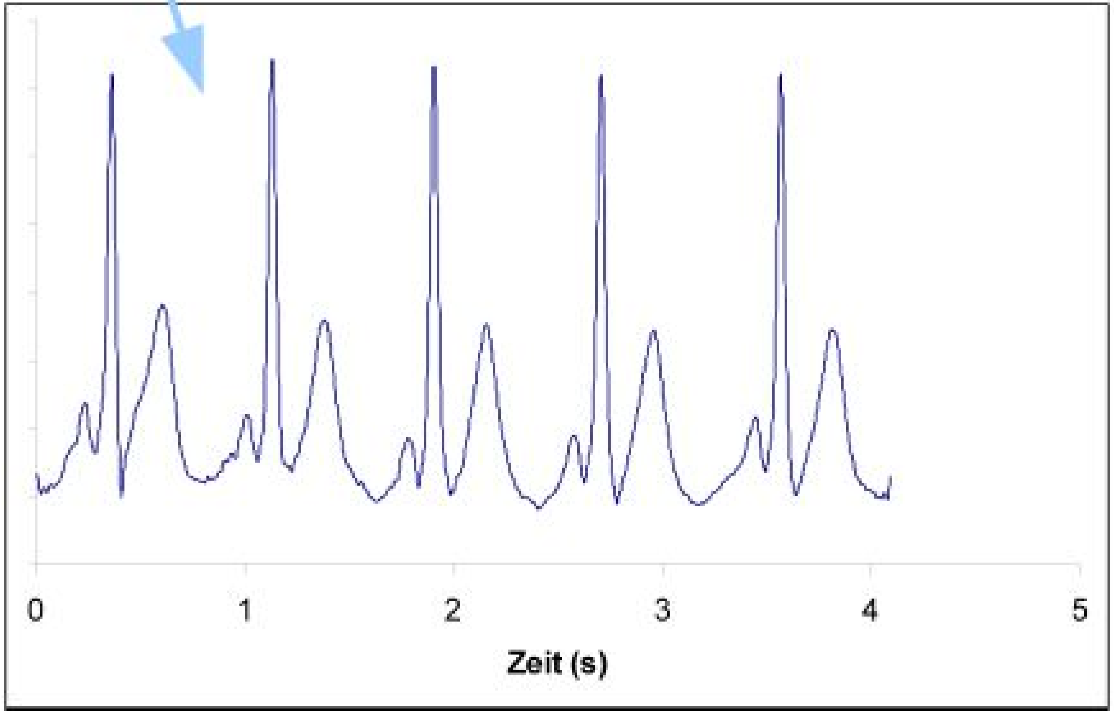
Filterung



Rausch abschneiden

Rauschfrequenzen werden nicht übertragen
(siehe Verstärker)

Im Spektrum: **Wir „schneiden ab" bestimmte Teile.**

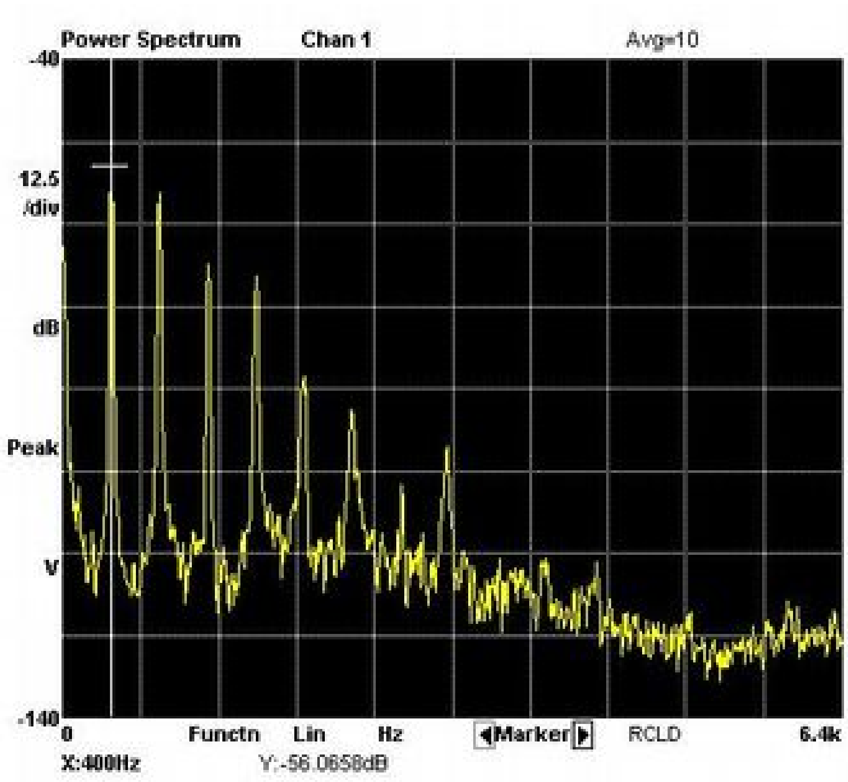


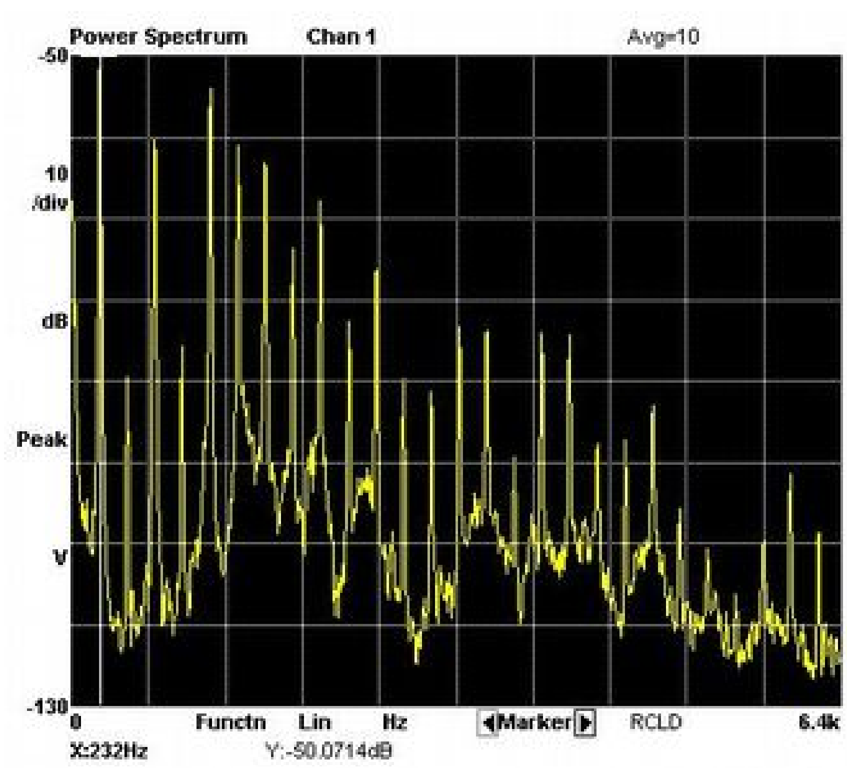
Besseres Signal!
(nach Inverse-Fourier)

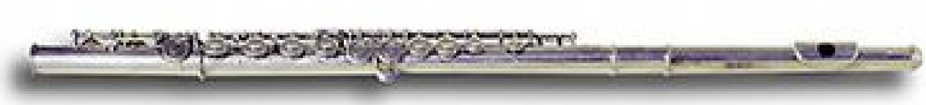
$$Signal(t) \leftarrow\rightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

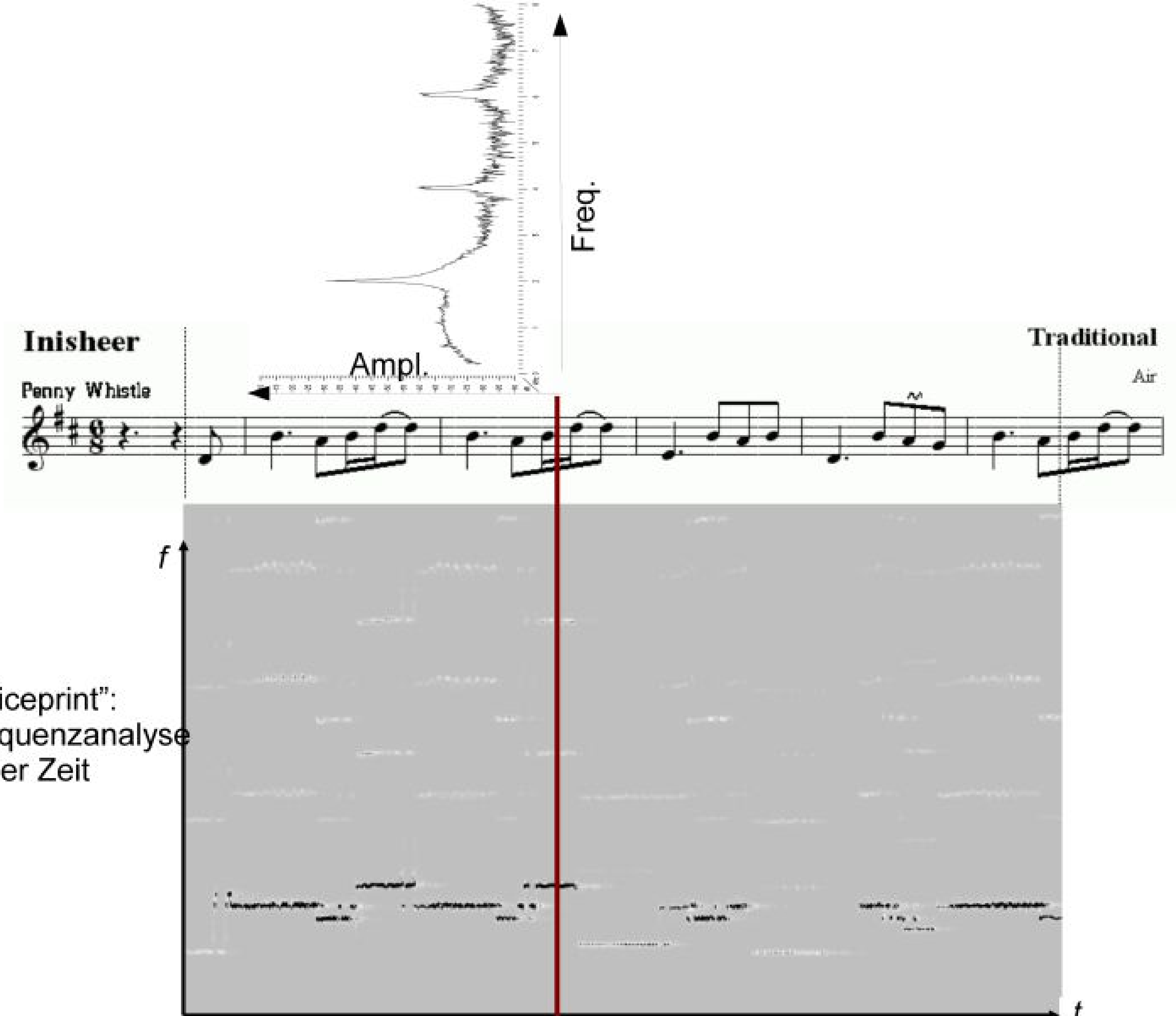
nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

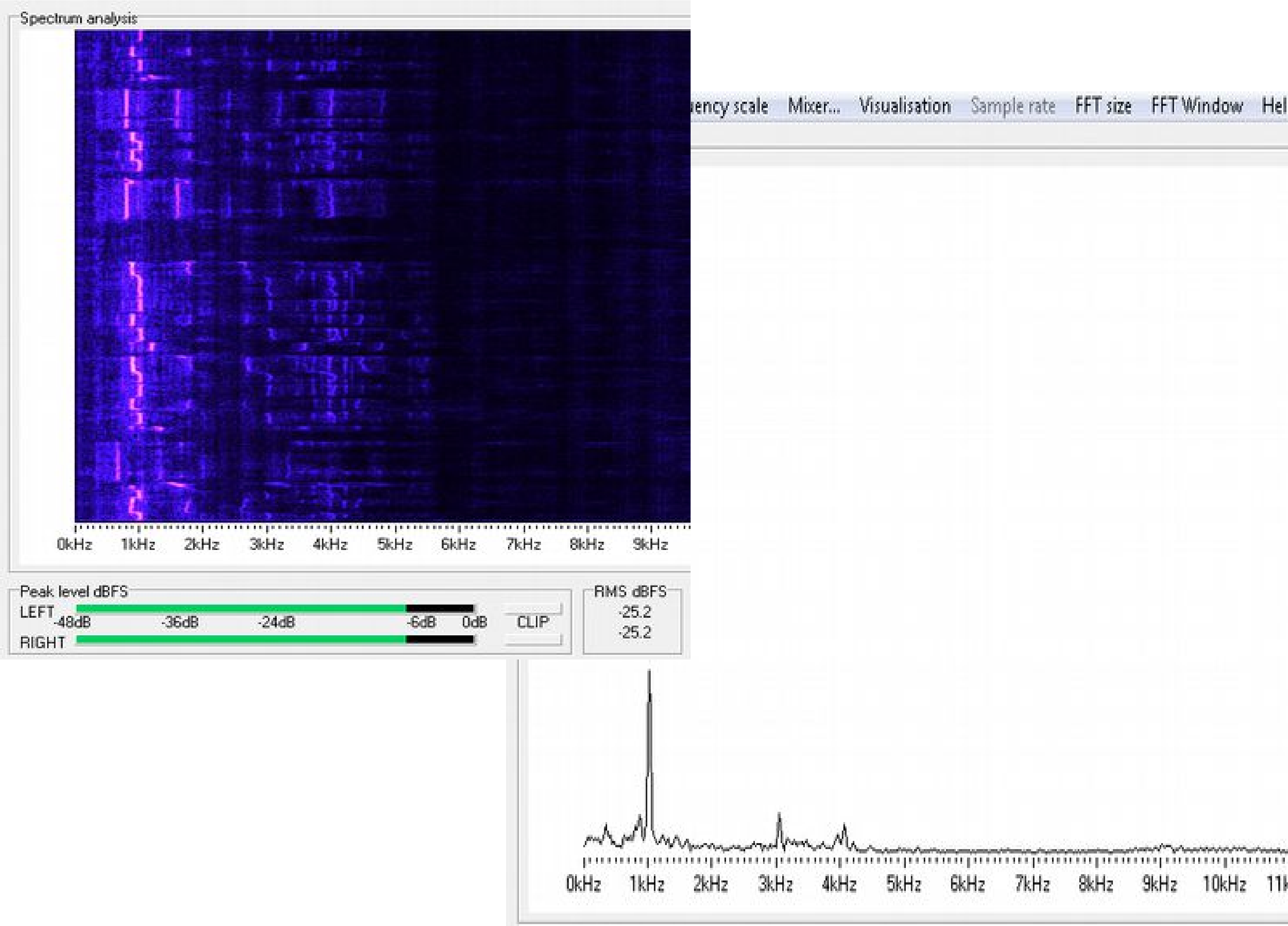








„Voiceprint":
Frequenzanalyse
in der Zeit



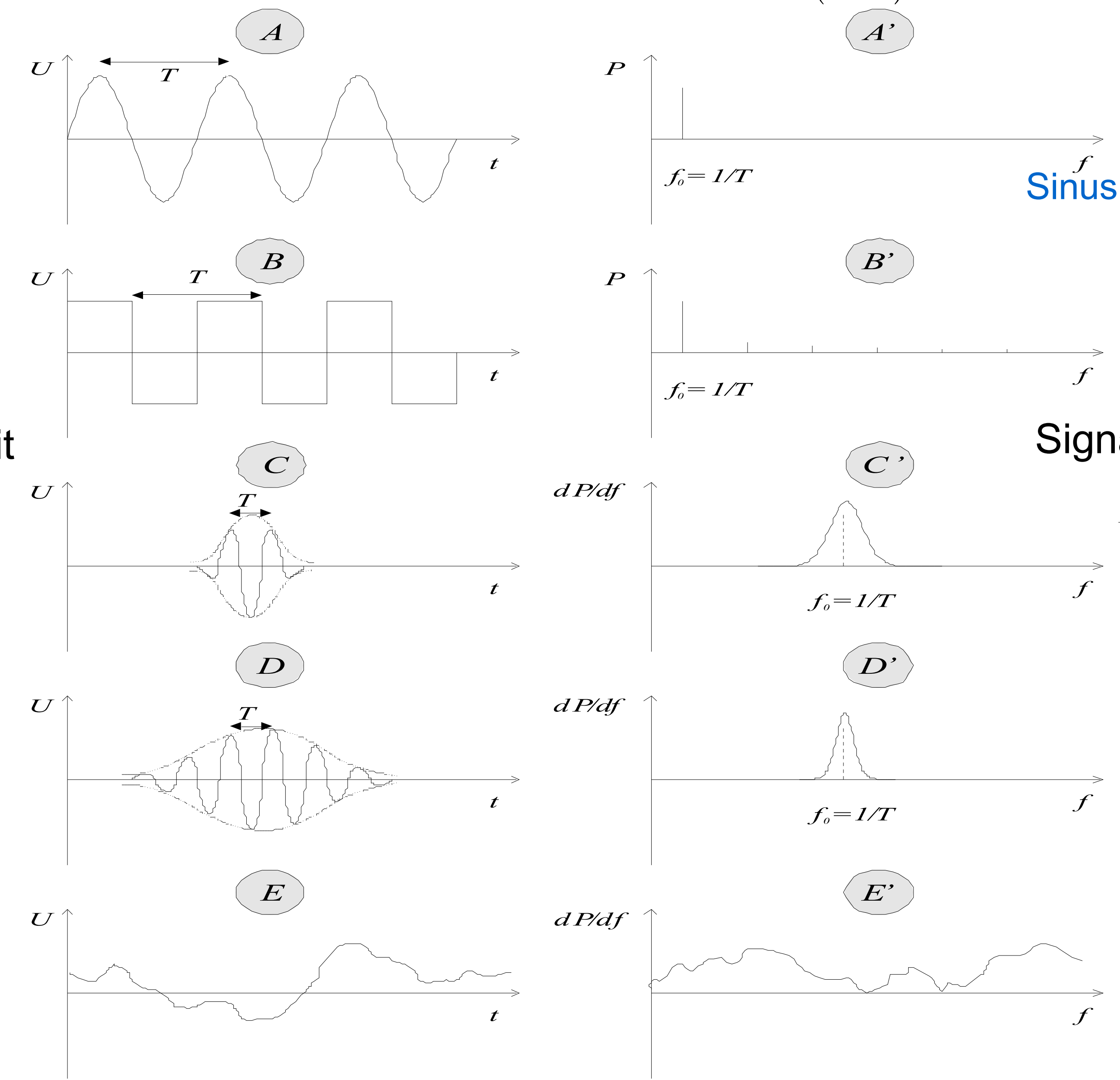
DBFS: decibel relative to full scale

Signal-Spektrum Beispiele

$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

Signal in der Zeit

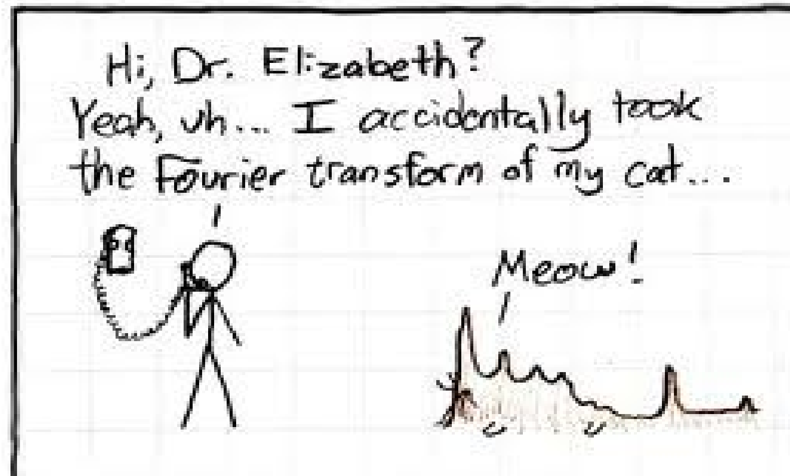


Sinus = Linienspektrum

Signal in der Frequenz

Je länger der Sinusimpuls desto schmaler ist sein Spektrum

Signal und sein Spektrum sind zwei Darstellungen von den selben Information.



Wie ein abstraktes Bild:

Zeitlich (gewönlich)

oder

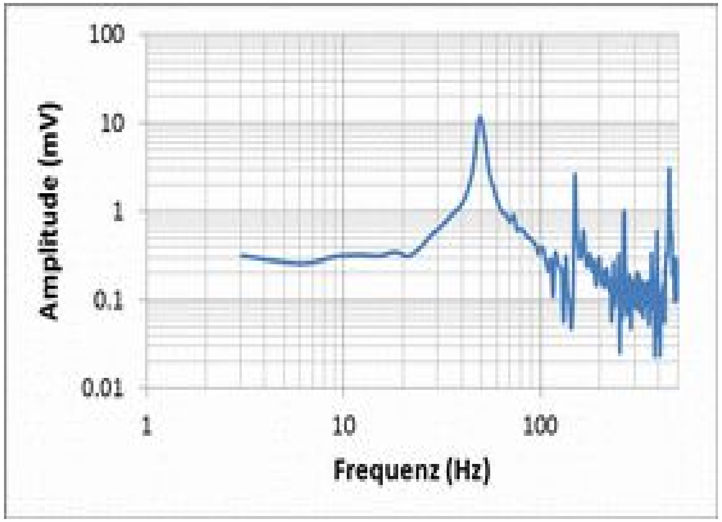
Frequenz-spektrum
(abstract)

Fourier-Transformation ist die
„Art von Ingenieurwissenschaften"

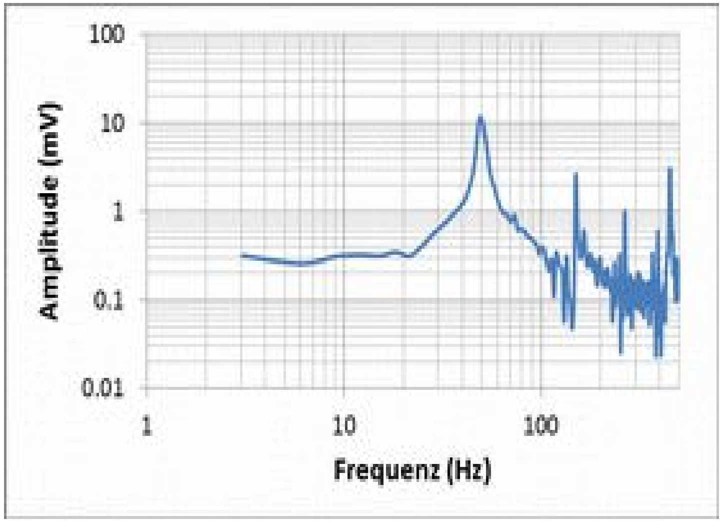
(Picasso: La Crucifixion)

EINGANGSSIGNAL

AUSGANGSSIGNAL



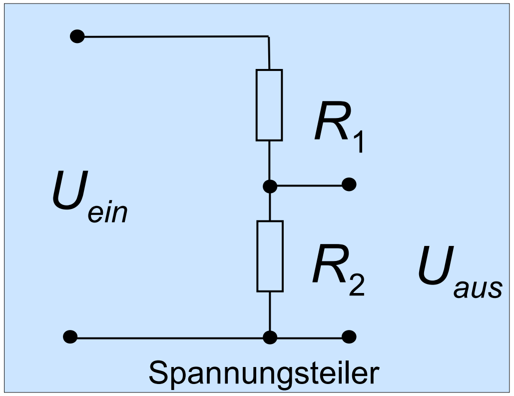
Übertragungs-
Funktion:
oder
Charakteristik



$$n(f) = 10 \cdot lg_{10}(P(f)_{aus} / P(f)_{ein})$$ **dB-skala**

n(f) ist also änlich zu ein Spektrum, aber beide Achsen sind logaritmisch.
Diese Funktion beschreibr vollkommen was ein Schaltkreis mit Signalen „tut”.

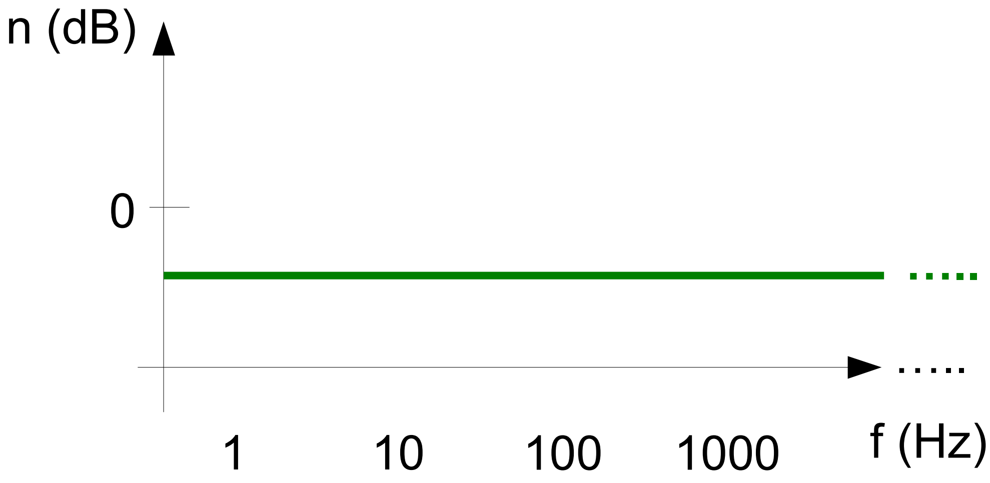
Passive Schaltkreise



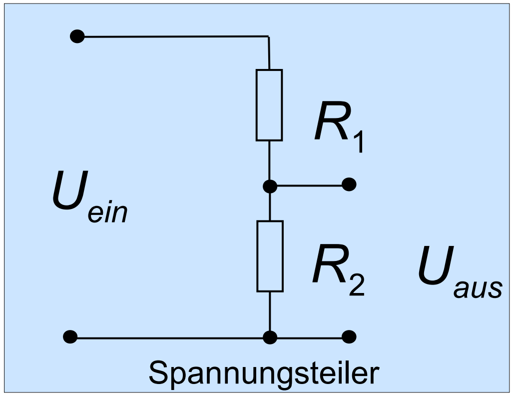
$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

U_{aus}/U_{ein} = Konstant

also **n**, wie P_{aus} / P_{ein} ist auch Konstant bei allen Frequenzen.

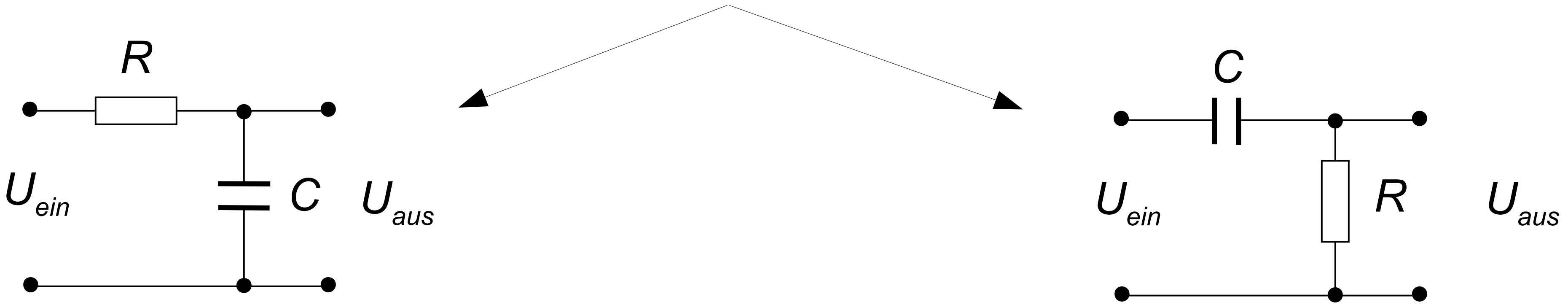


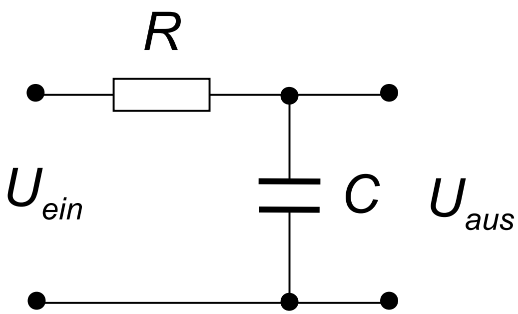
R/C Schaltungen - Filtern



$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

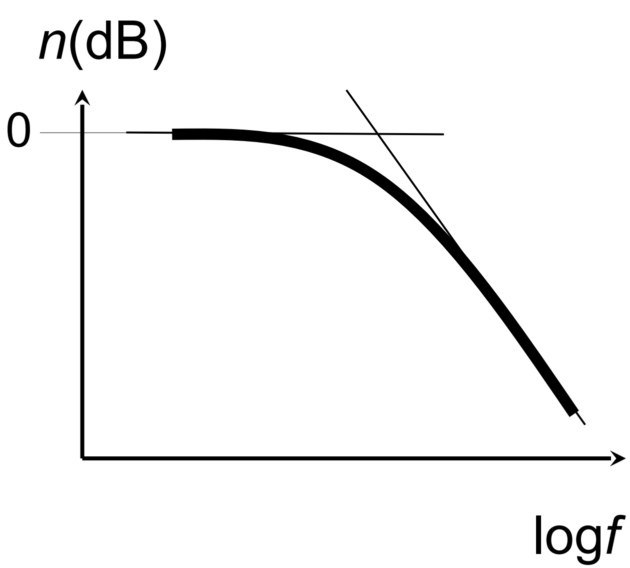
Ersetzen wir ein R mit C

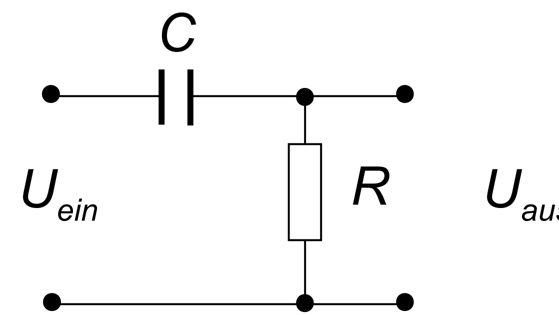




$$U_{aus} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

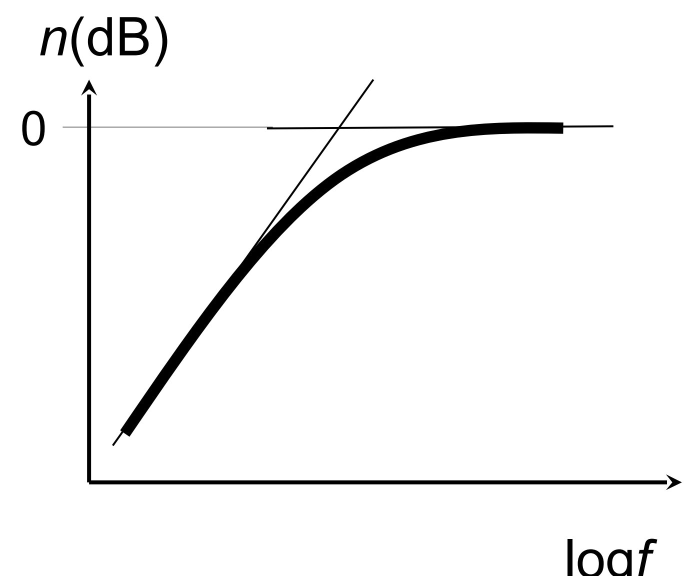
Tiefpassfilter

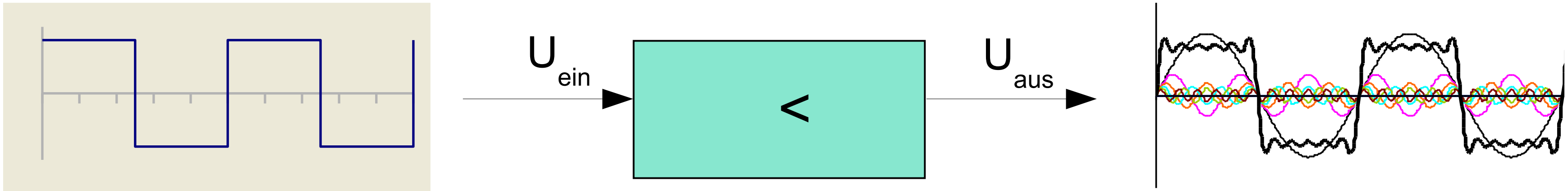


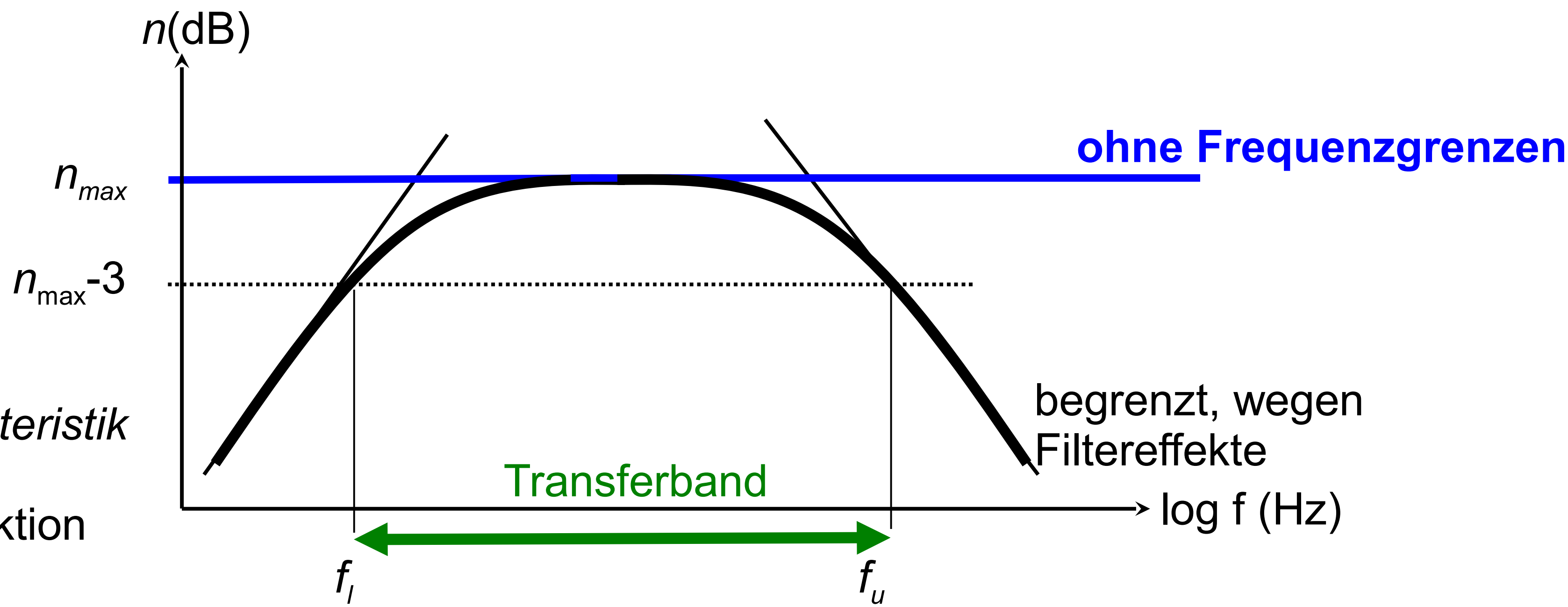


$$U_{aus} = \frac{R\,C\,\omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

Hochpassfilter







Verstärkercharakteristik
oder
Übertragungsfunktion

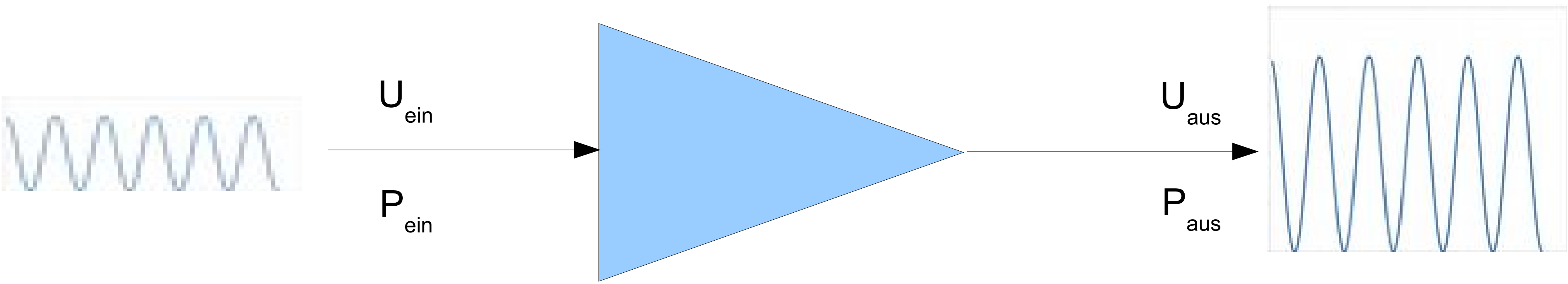
Hauptsache: die wichtigen Frequenzkomponente des Signals müssen im Transferband liegen!

(wenn nicht, dann verlieren wir Information!)

Verstärker

Die Methode ist verwendbar
zu der Analyse
beliebiger Bestandteile
der Kette!

Basis unserer Analyse: Verstärkungsfaktor (n)



$$n = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{Ausgang}}{P_{Eingang}}\right) \quad [dB]$$

$V_U = U_{aus} / U_{ein}$

Beispiele für dB-Skala

U_2/U_1	P_2/P_1	n dB
1,414	2	3
2	4	6
	8	9
3,16	10	10
	20	13
10	100	20
	$1000=10^3$	30
$100=10^2$	$10000=10^4$	40
$1000=10^3$	10^6	60

$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow n = 10 \cdot \lg 10\,(\mathrm{dB}) = 10 \cdot 1\,(\mathrm{dB}) = 10\mathrm{dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow n = 10 \lg 2\,(\mathrm{dB}) = 10 \cdot 0{,}3\,(\mathrm{dB}) = 3\mathrm{dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1/2 \Leftrightarrow n = -10 \lg 2\,(\mathrm{dB}) = -10 \cdot 0{,}3\,(\mathrm{dB}) = -3\mathrm{dB}$$

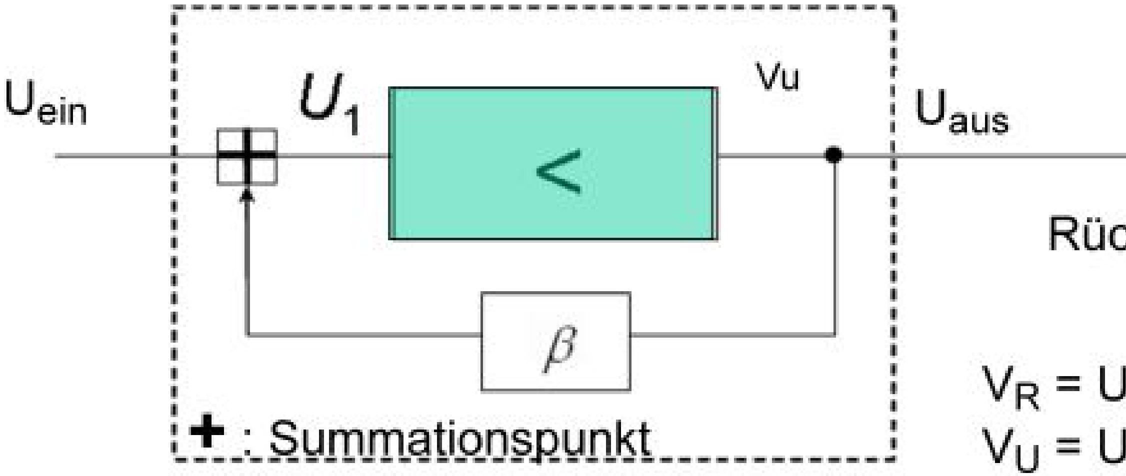
$$P = U \cdot I = U^2 / R$$

log(P) = 2*log(U) – log (R)

$$10*\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10*\log\left(\frac{\frac{U_2^2}{R_2}}{\frac{U_1^2}{R_1}}\right) = 10*2*\log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) + 10*\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Wenn $R_1=R_2$ dann $n = 20*\log(U_2/U_1)$

Verstärkeranalyse - Rückkopplung



Rückkopplung bei Verstärker

$V_R = U_{aus}/\mathbf{U_{ein}}$: Verstärkung **MIT** Rückkopplung
$V_U = U_{aus}/\mathbf{U_1}$: Verstärkung **ohne** Rückkopplung

$\beta > 0$: Mitkopplung
$\beta < 0$: Gegenkopplung

$U_{aus} = V_U * U_1$ und $U_1 = U_{ein} + \beta * U_{aus}$

$U_{aus} = V_U * (U_{ein} + \beta * U_{aus})$

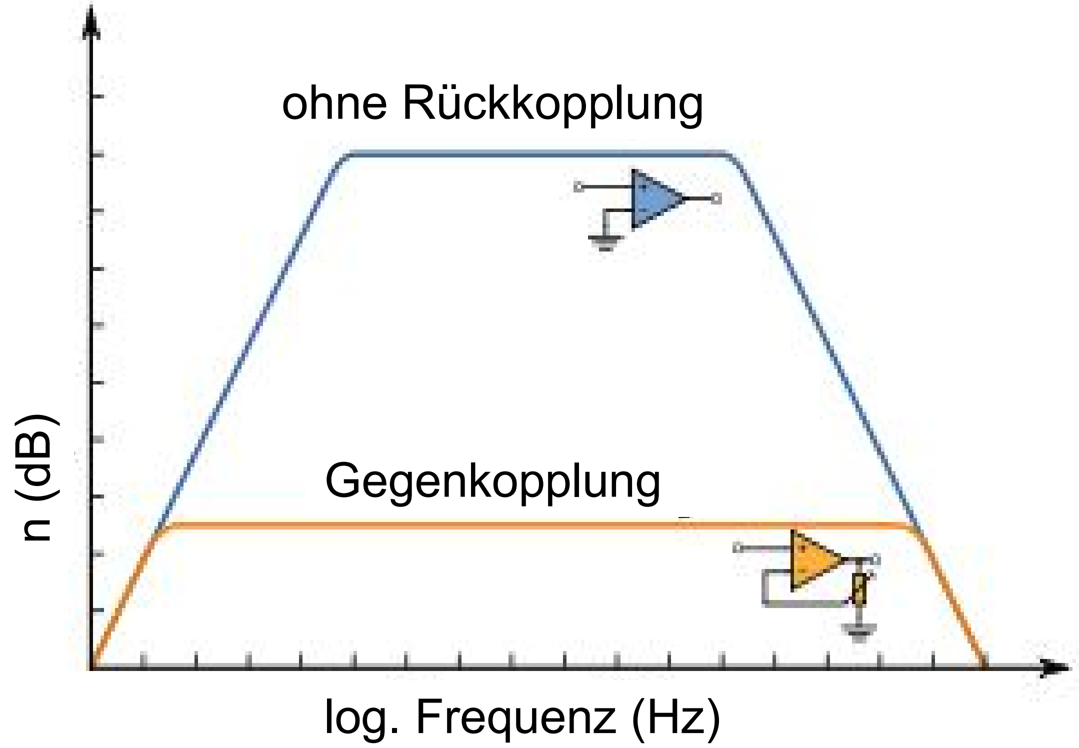
$V_U * U_{ein} = U_{aus} * (1 - \beta * V_U)$ $\longrightarrow$ $V_R = U_{aus}/U_{ein} = V_U/(1 - \beta * V_U)$

$V_u \beta = 1$: Oszillator (unendliche Verstärkung)

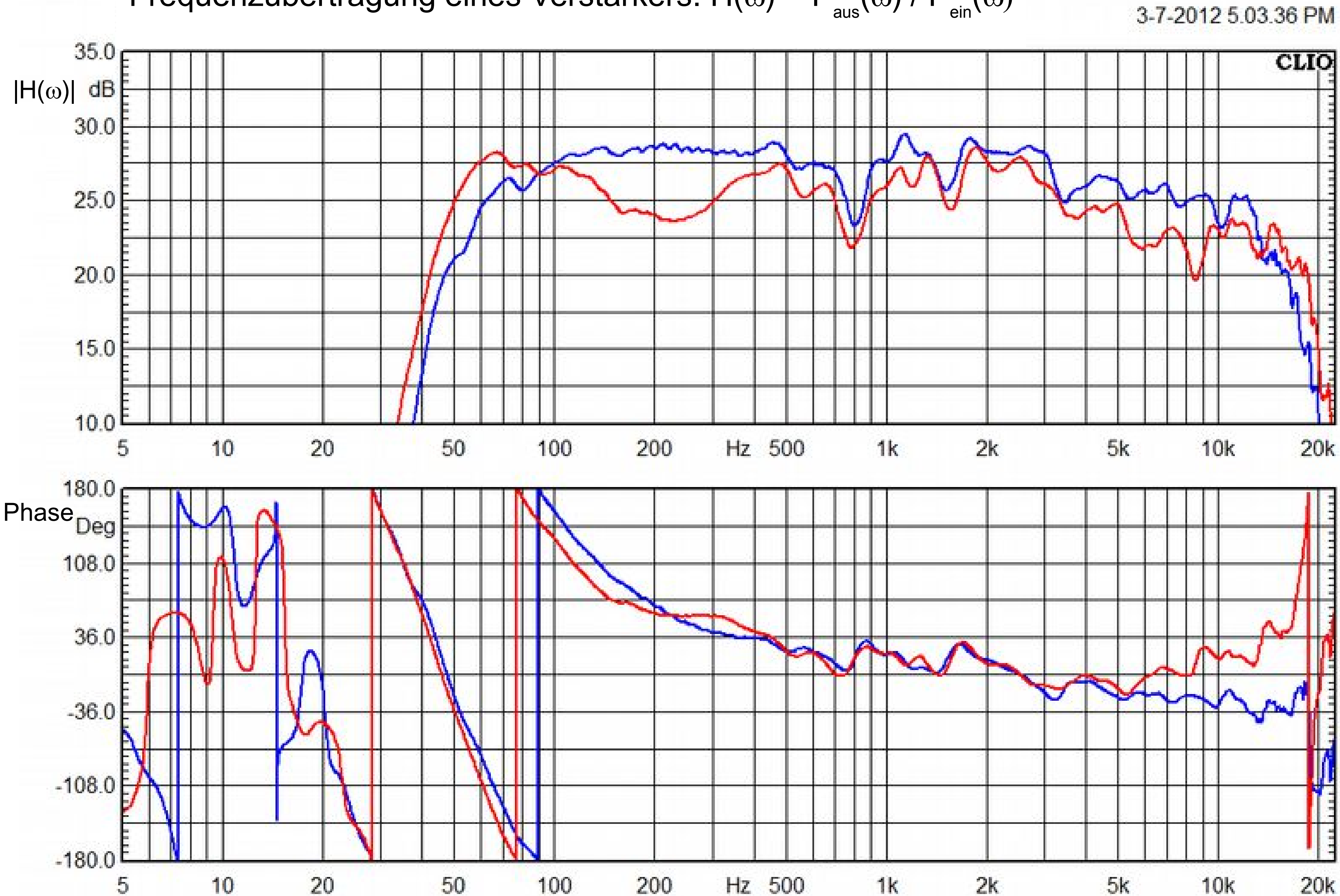
Verstärkeranalyse - Übertragungsfunktion

Verstärkungsbandbreitenprodukt
(Gain Bandwidth Product)

Verstärkung · Bandbreite = Konstant



Frequenzübertragung eines Verstärkers. $H(\omega) = P_{aus}(\omega) / P_{ein}(\omega)$



Frequenzübertragung eines Konzertverstärkers im Konzertraum. Blau: zu Lautsprecher , Rot: zu StageMonitor

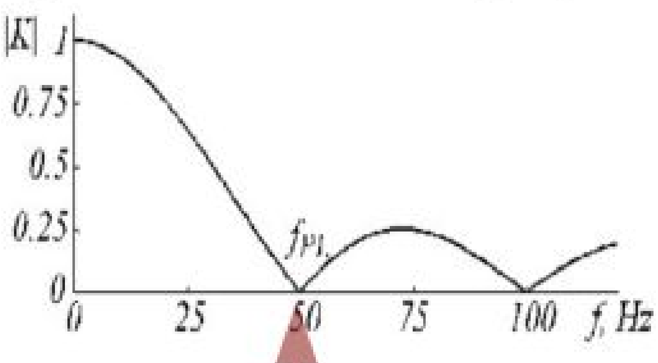
Ergänzungsmaterial!

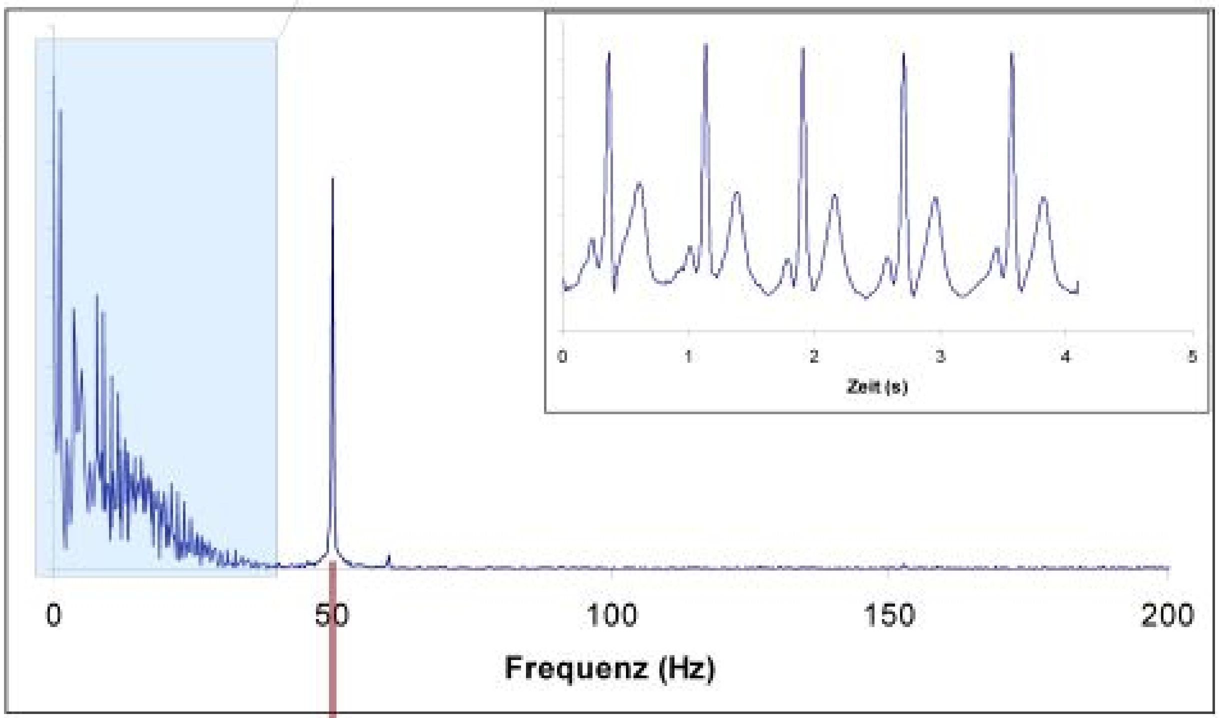
Allgemein außer Pegel (|H(ω)| in dB) ist auch die *Phasenverschiebung* frequenzabhängig!

spezielle Verstärker dienen als *Rauschfilter*:

Nur die Teile des Spektrums werden übertragen, die Information tragen. Rausch wird unterdrückt.

gewünschter Übertragungsfuntion





50Hz unterdrücken

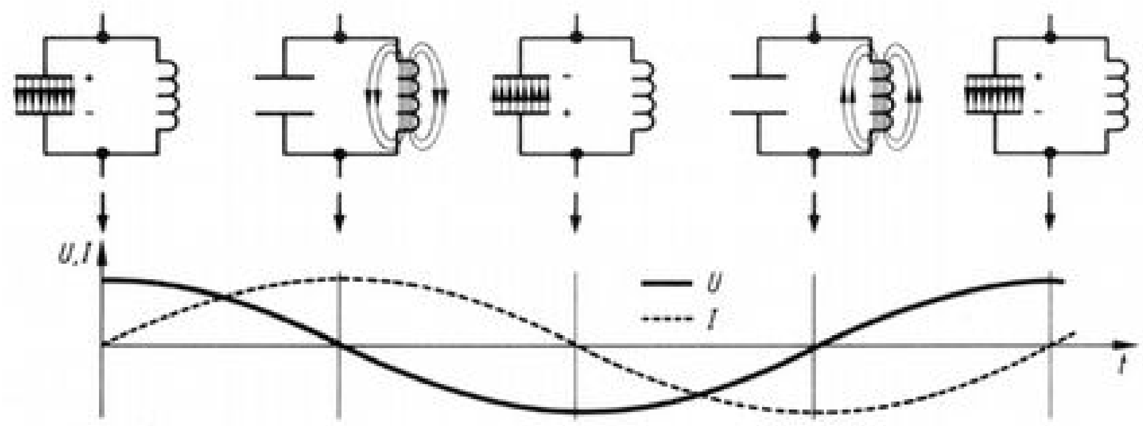
Schwingkreis

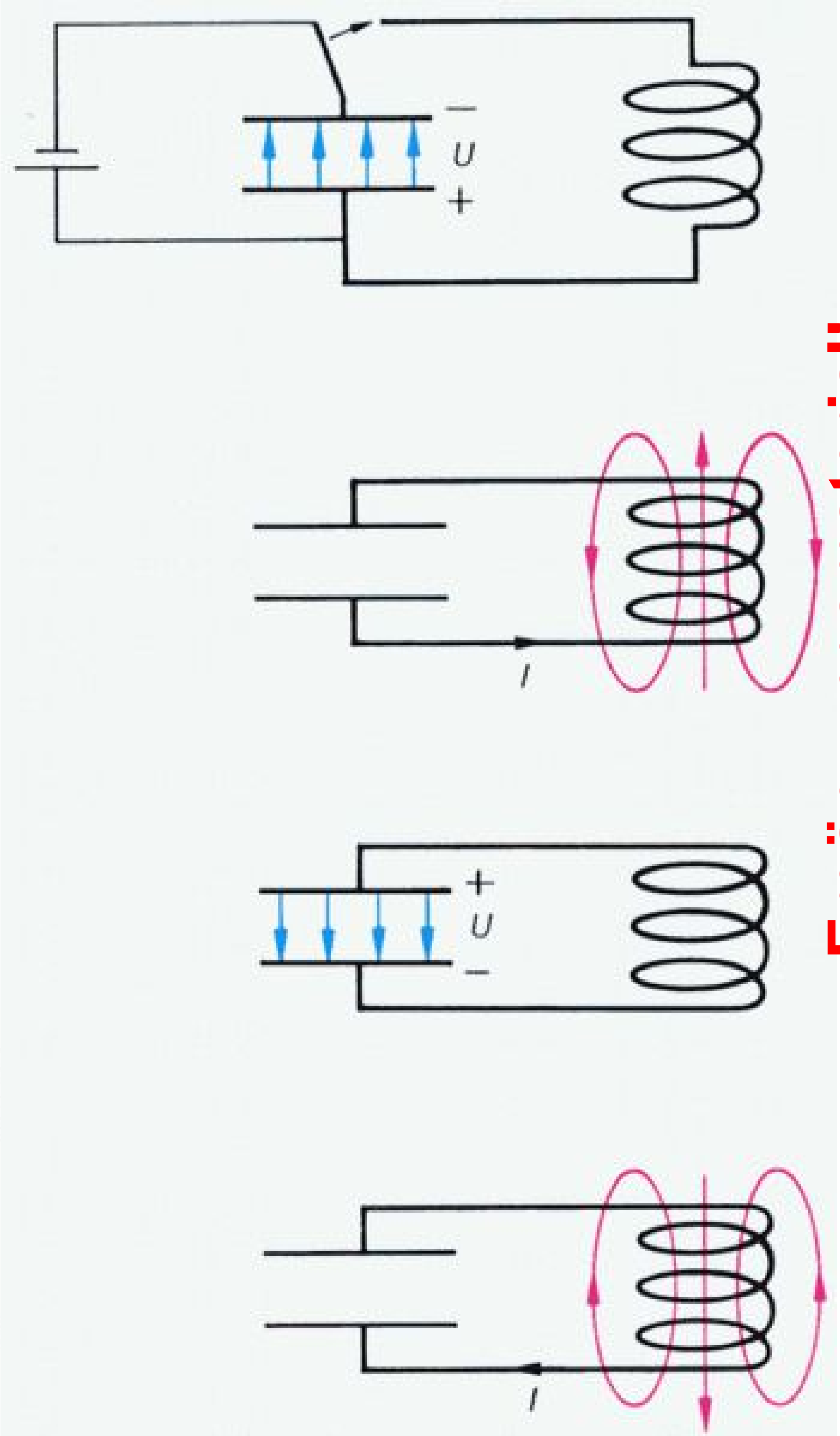
Zuerst wird der Kondensator aufgeladen, und Energie gespeichert.
Dann pendelt die Ladung zwischen der zwei Platten so, dass während Strom fließt, wird die Energie in dem Magnetfeld gespeichert.

$\frac{1}{2}CU_{max}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2$

Die Frequenz ist abhängig von L und C:

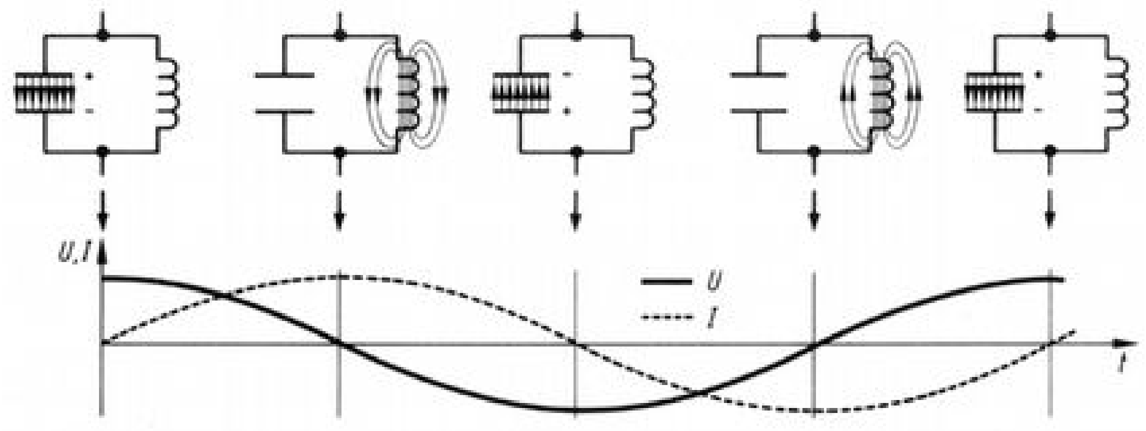
$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

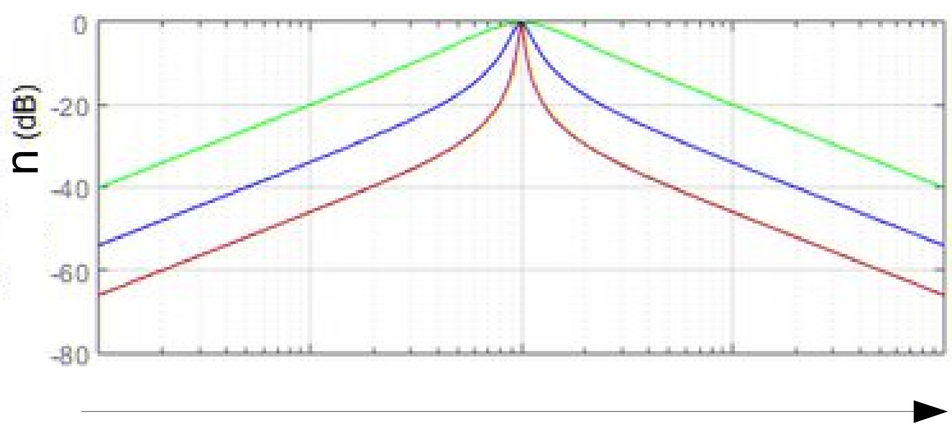


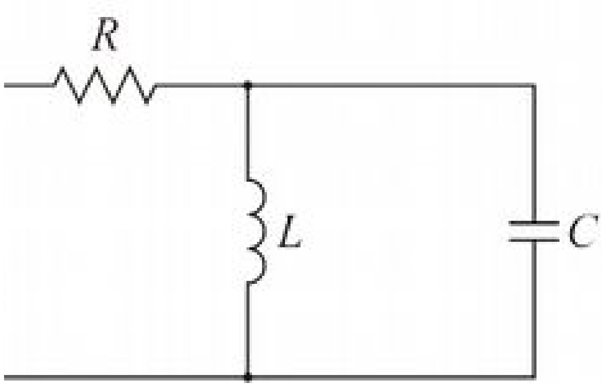


Ergänzungsmaterial!

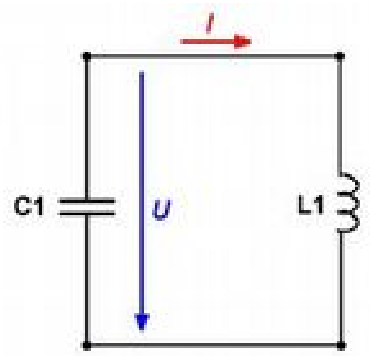
Spektrum: Schmaler Band



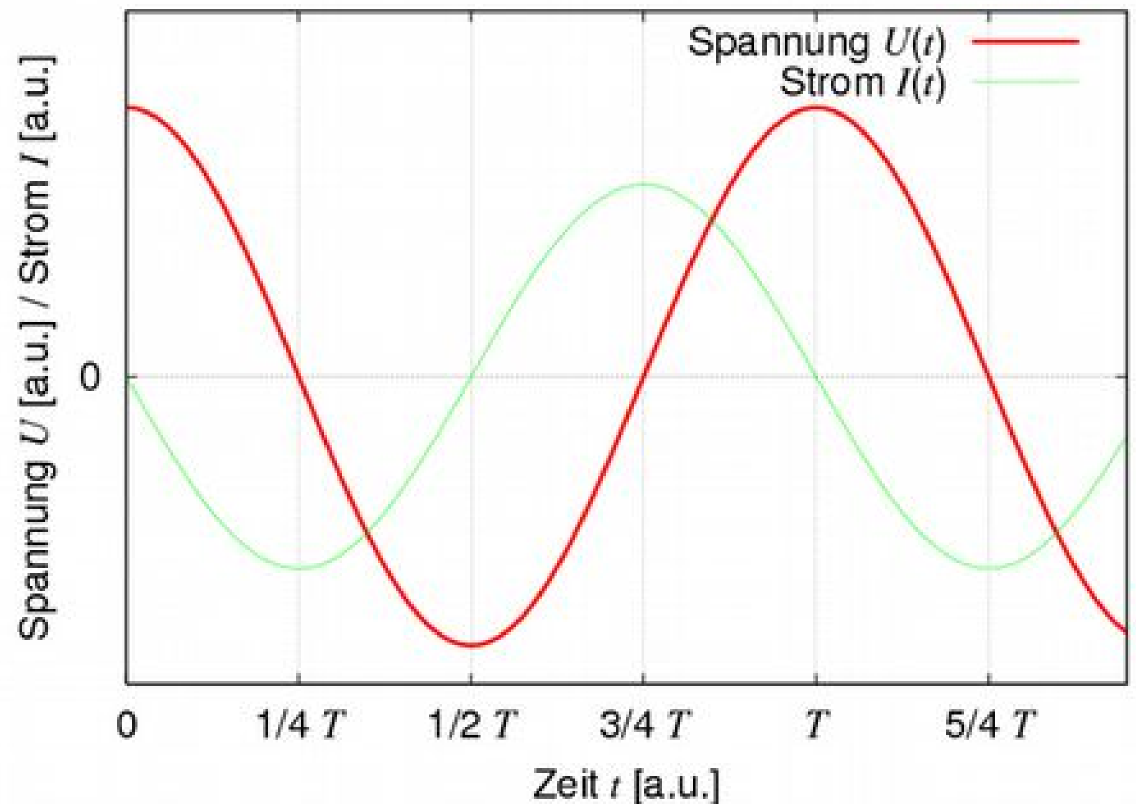




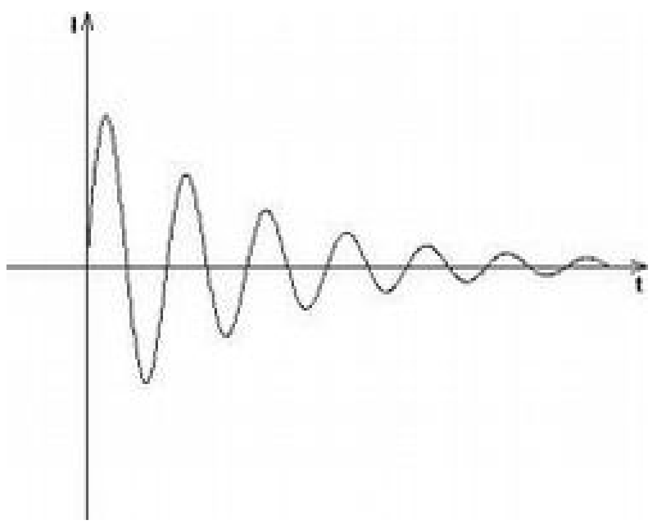
Ergänzungsmaterial!



Idealfall: Sinussignale

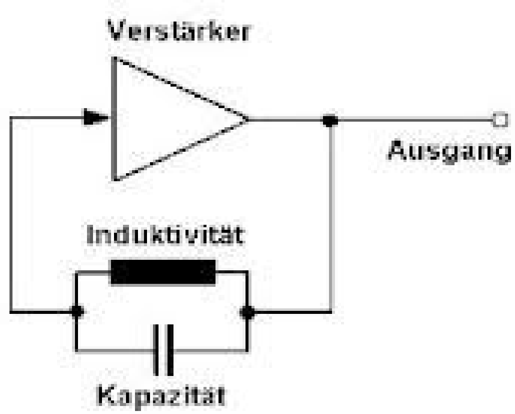


Ergänzungsmaterial!



Im reellen Schwingkreis gibt es Verluste, also nimmt die Amplitude ab.

Mit hilfe von einem Verstärker kann man es vermeiden: Sinusoscillator.



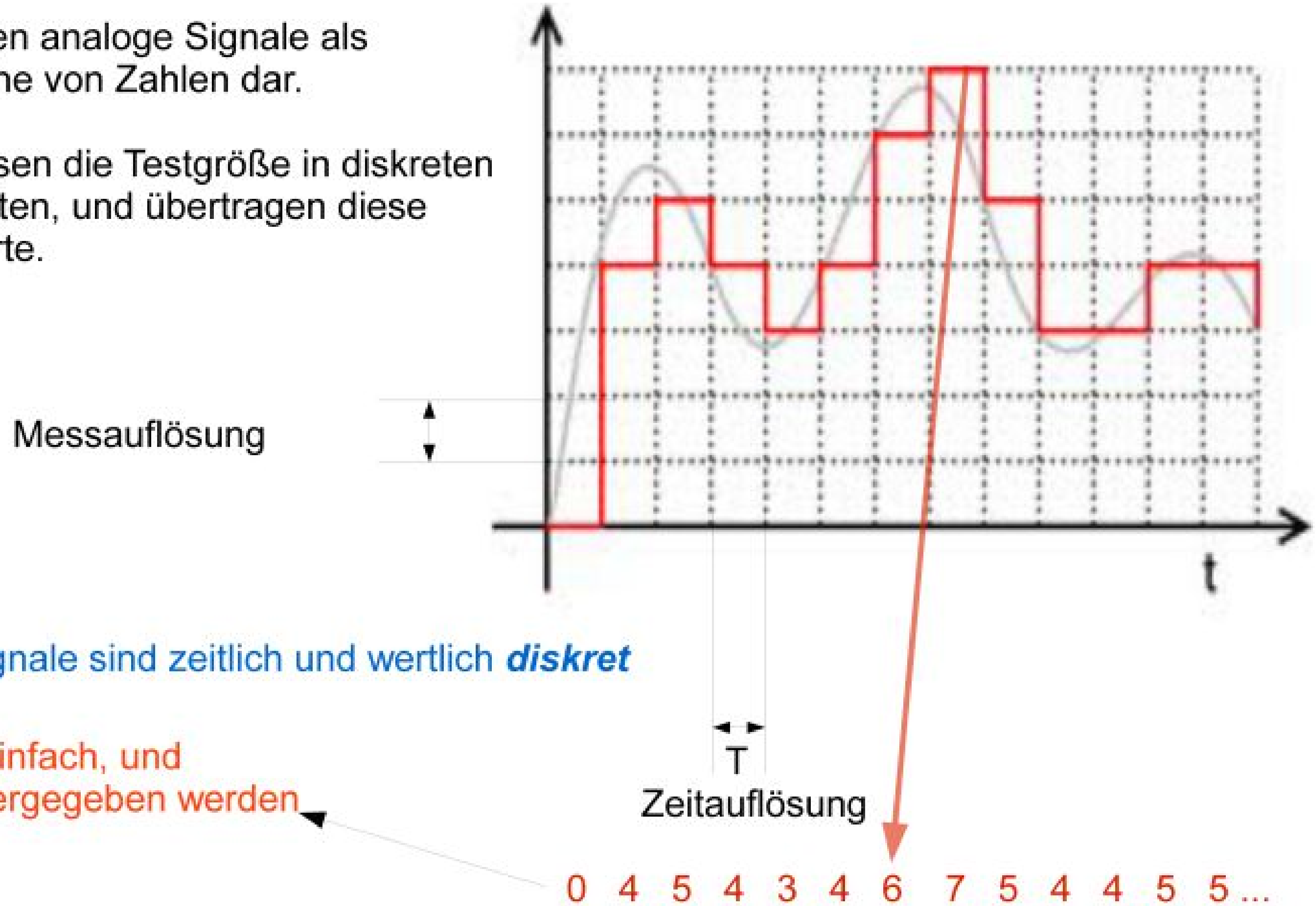
Verstärker mit positiver Rückkopplung.
die Rückkopplungsschaltung ist ein Schwingkreis

siehe Sinusoszillator

digitale Signaleverarbeitung - DSP

Wir stellen analoge Signale als eine Reihe von Zahlen dar.

Wir messen die Testgröße in diskreten Zeitpunkten, und übertragen diese Messwerte.



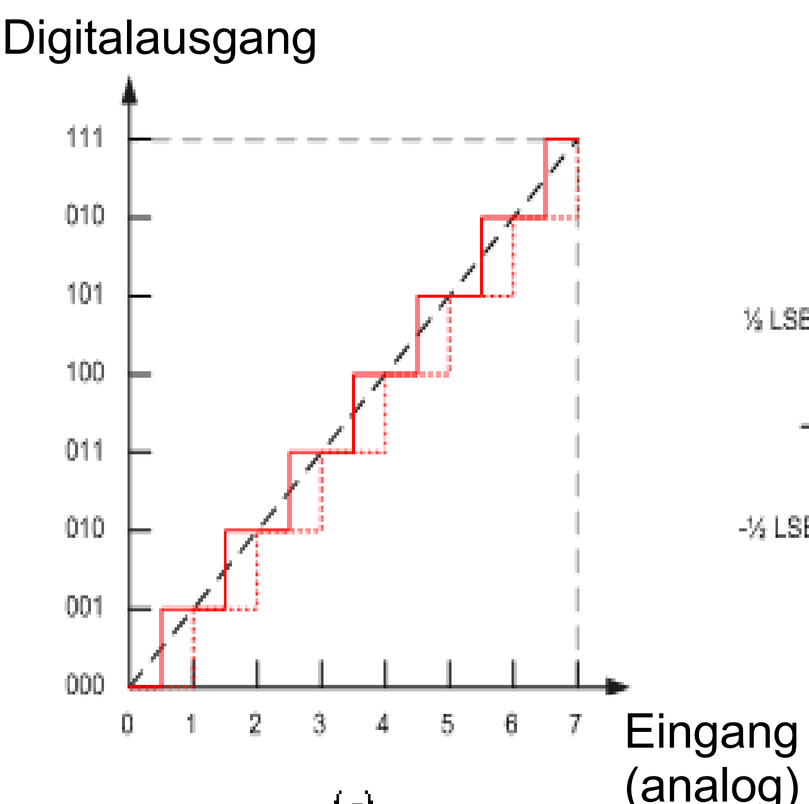
digitale Signale sind zeitlich und wertlich ***diskret***

Zahlen können einfach, und störungslos weitergegeben werden

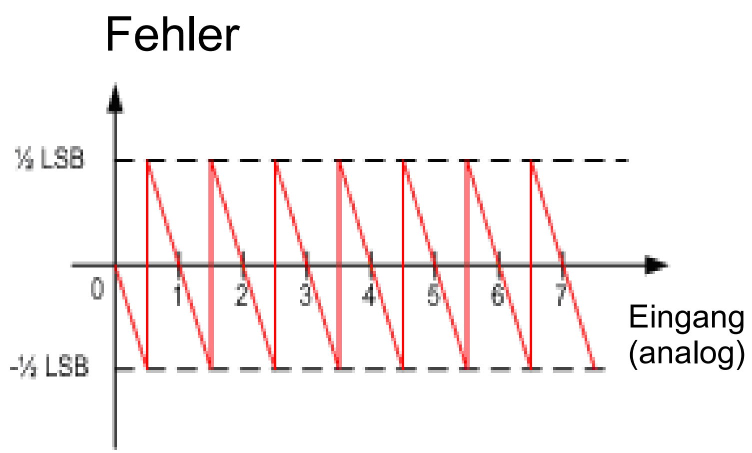
digitale Signale – Quantifizierung (Kodierung)

digitale Signale sind
zeitlich und wertlich ***diskret***

Was passiert mit Werte dazwischen?
Die gehen verloren!
(gewisse Informazionsverlust)



(a)



(b)

SRV der A/D Umwandlung : Ergänzungsmaterial!

Frage: wie viel Rausch wird durch eine bestimmte A/D Umwandlung produziert?

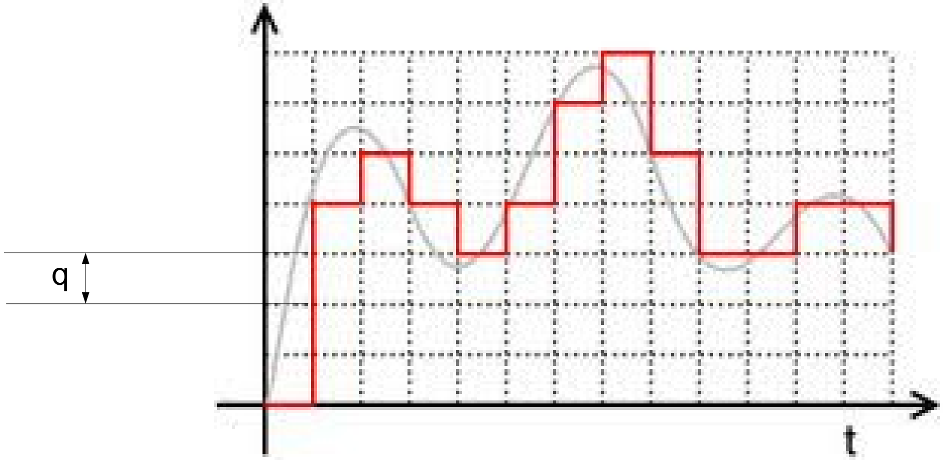
Sei die Auflösung der Messung ist q, und sei der Signal ein Sinussignal (Amplitude =1, R=1 Ohm).
In diesem Fall ist die Leistung P_A = ½ W.
Der Quantisierungsfehler entspricht eine Gleichverteilung mit der Umfang von q.
Leistung des Rausches ist gleich dem Verianz der Gleichverteilung ($q^2/12$)

$$\text{SRV} = \mathrm{SNR} = \frac{P_A}{\sigma^2} = \frac{1/2}{q^2/12} = \frac{6}{q^2}$$

Quantisierungsfehler kann verkleinert werden durch der verfeinerung der Auflösung.
ABER: Je feiner ist die Auflösung, desto langsamer ist ein A/D Umwandler!

Das kann problematisch sein, siehe Nyquist später.

Kompromiss: wählen wir q so, dass SRV wegen Digitalisierung alleine ungefähr 10x größer bleibt als SRV des Originalsignals.

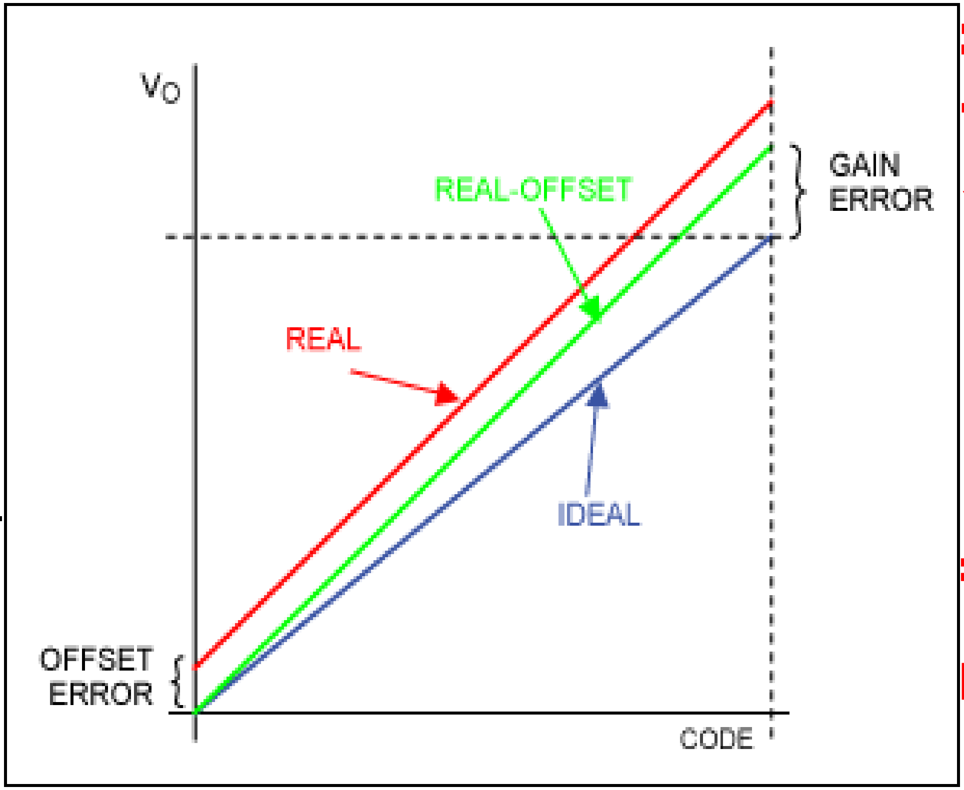


Ergänzungsmaterial!

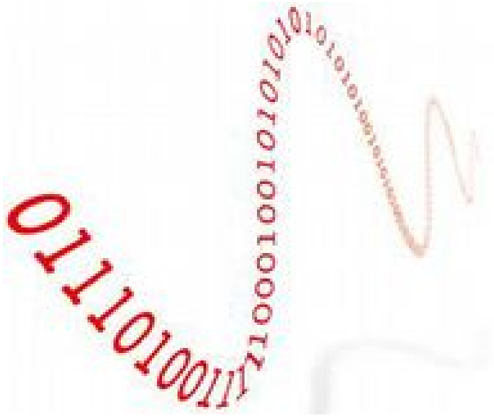
digitale Signale – Widerherstellung (DAC) (Dekodierung)

digital zu analog Umwandler

Einfach nahe zu ideal Umwandler zu bauen.



Ergänzungsmaterial!



einige Fehlermöglichkeiten:

„offset" : wenn Zahl = 0 dann $U_{aus} \neq 0$

„gain error": z.B. wenn Zahl = 10, dann $U_{aus} \neq 10$ V

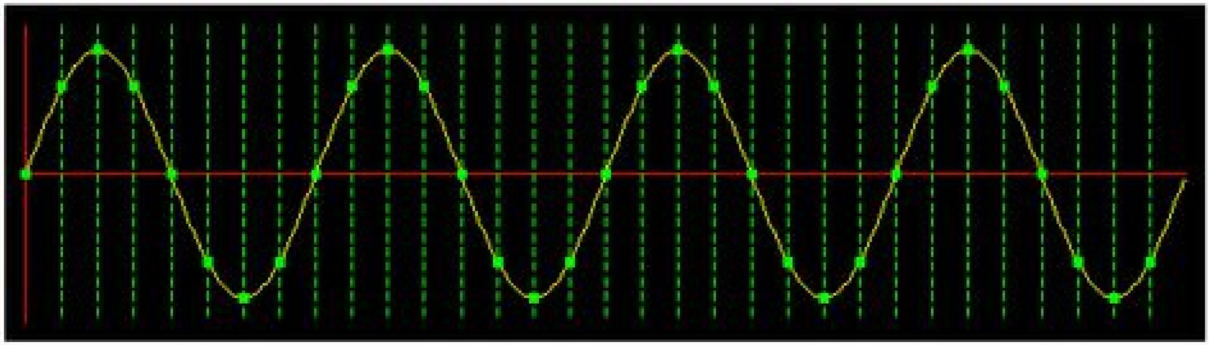
digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

f = 1000 Hz
fs = 8000 Hz

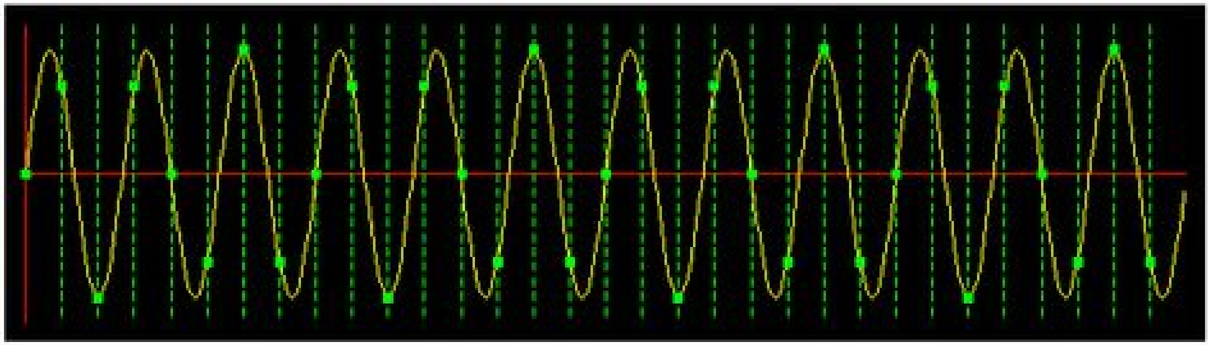
gut

gut ist, wenn nur EIN bestimmtes sinus kann die Punkte binden.



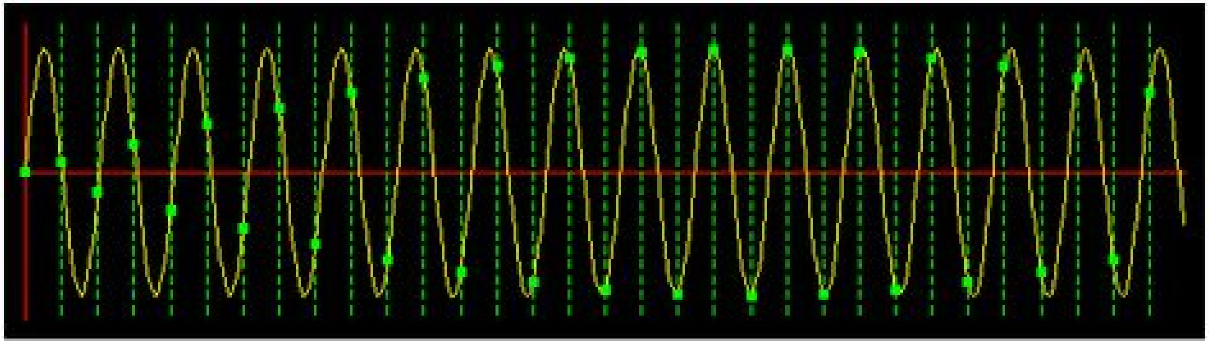
f = 3000 Hz
fs = 8000 Hz

Noch gut



f = 3900 Hz
fs = 8000 Hz

Immer noch gut
(aber „knapp”)

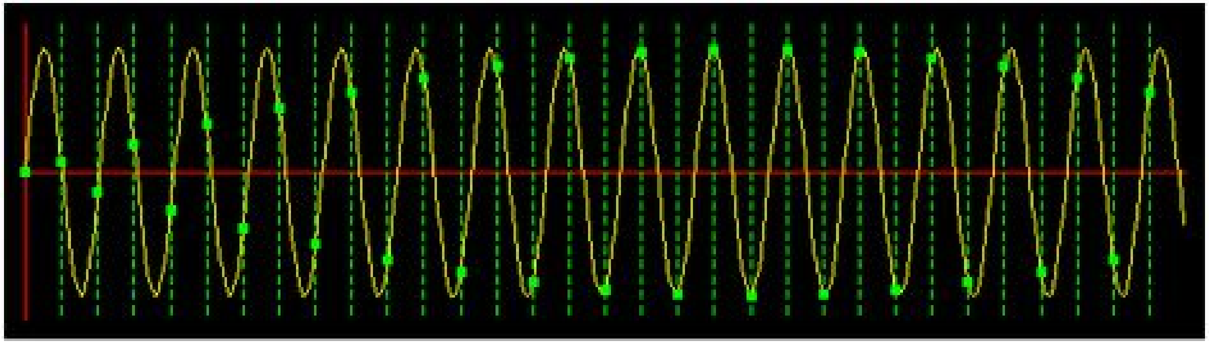


digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

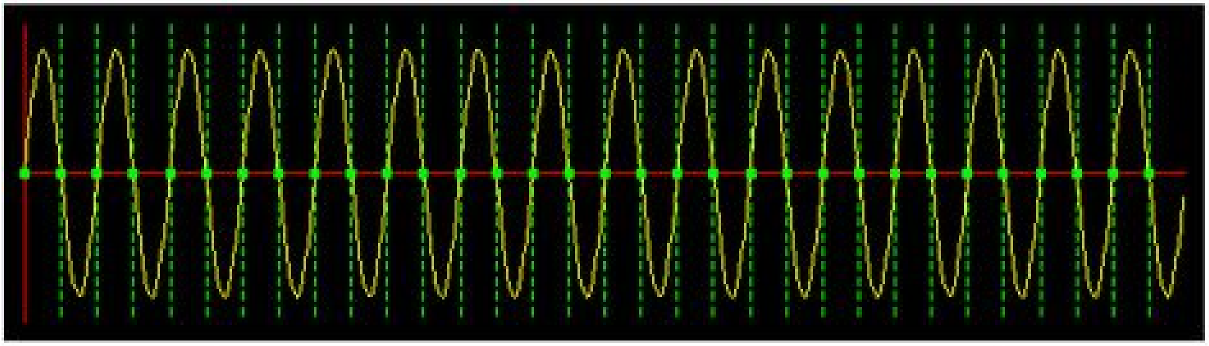
f = 3900 Hz
fs = 8000 Hz

Immer noch gut



f = 4000 Hz
fs = 8000 Hz

.... Signal weg!



die Nyquist-Theorie: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein

nicht sinusförmig? dann gilt 2x f_{max} (siehe Fourier-Spektrum)

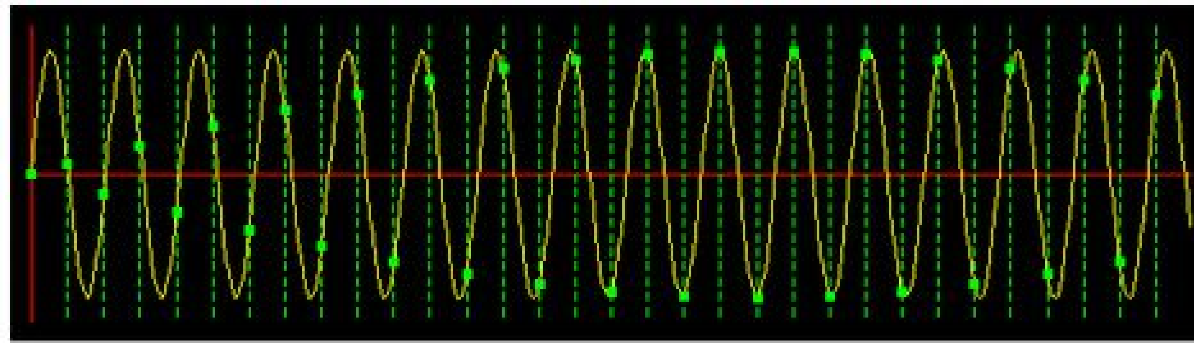
digitale Signale – Nyquist

die Nyquist-Theorie: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein

gut

f = 3900 Hz
fs = 8000 Hz

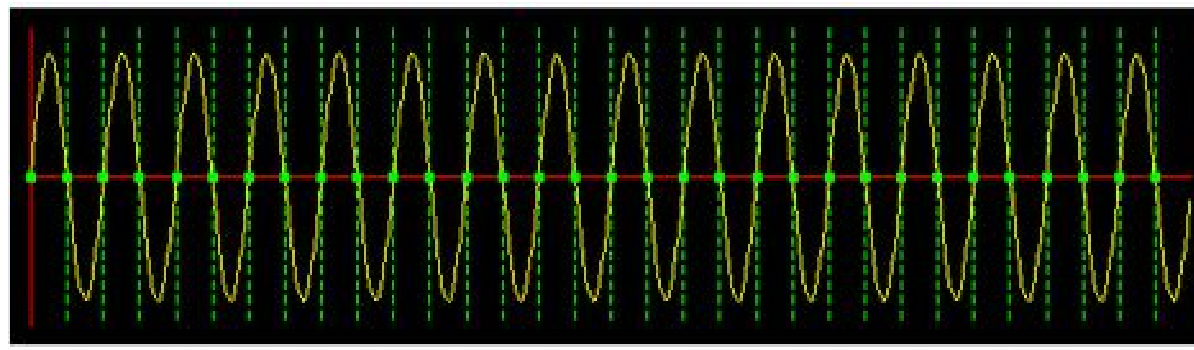
noch gut



schlecht

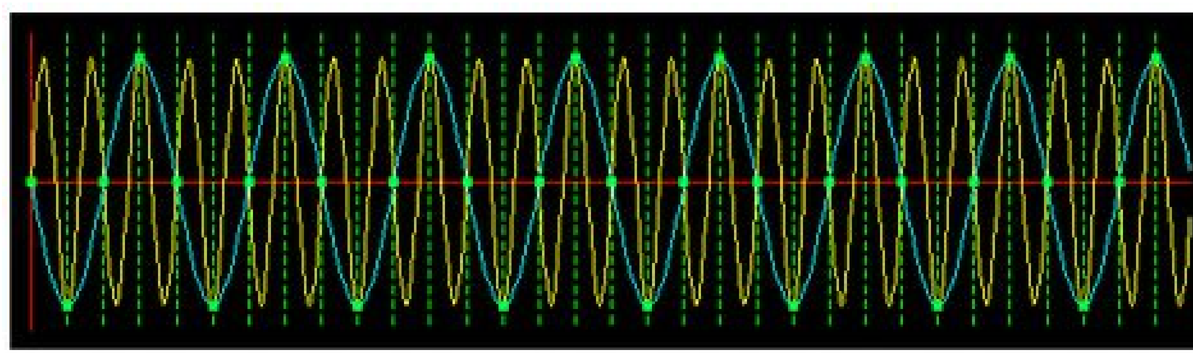
f = 4000 Hz
fs = 8000 Hz

Signal weg!



f = 6000 Hz
fs = 8000 Hz

Signal weg!
+
Aliasing



ein zusätzliches aber *falsches* Sinussignal wird noch dazu hergestellt!

dynamischer Bereich:

+/- LSB Rausch

…

Maximum Signal

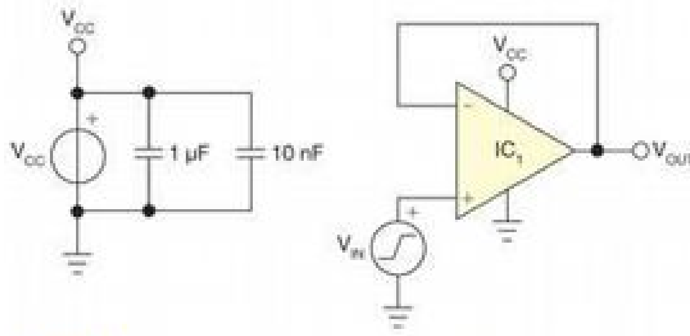


Figure 3 A single-supply voltage-follower circuit is used to evaluate both devices.

zu viel:

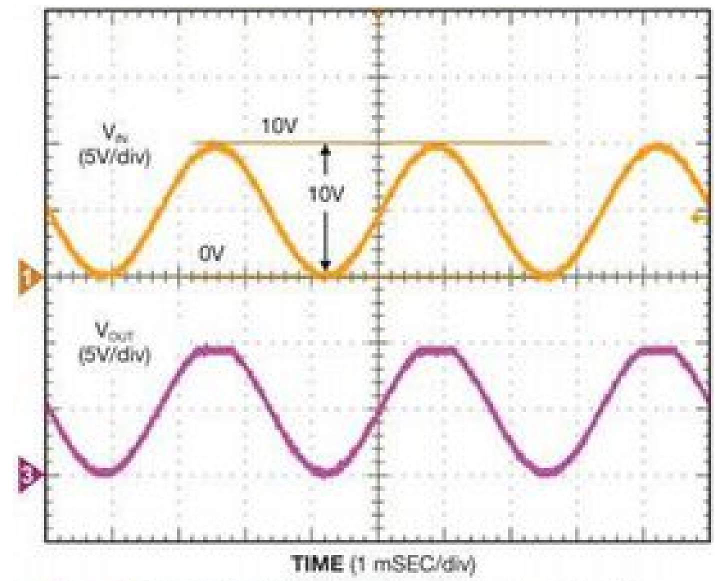
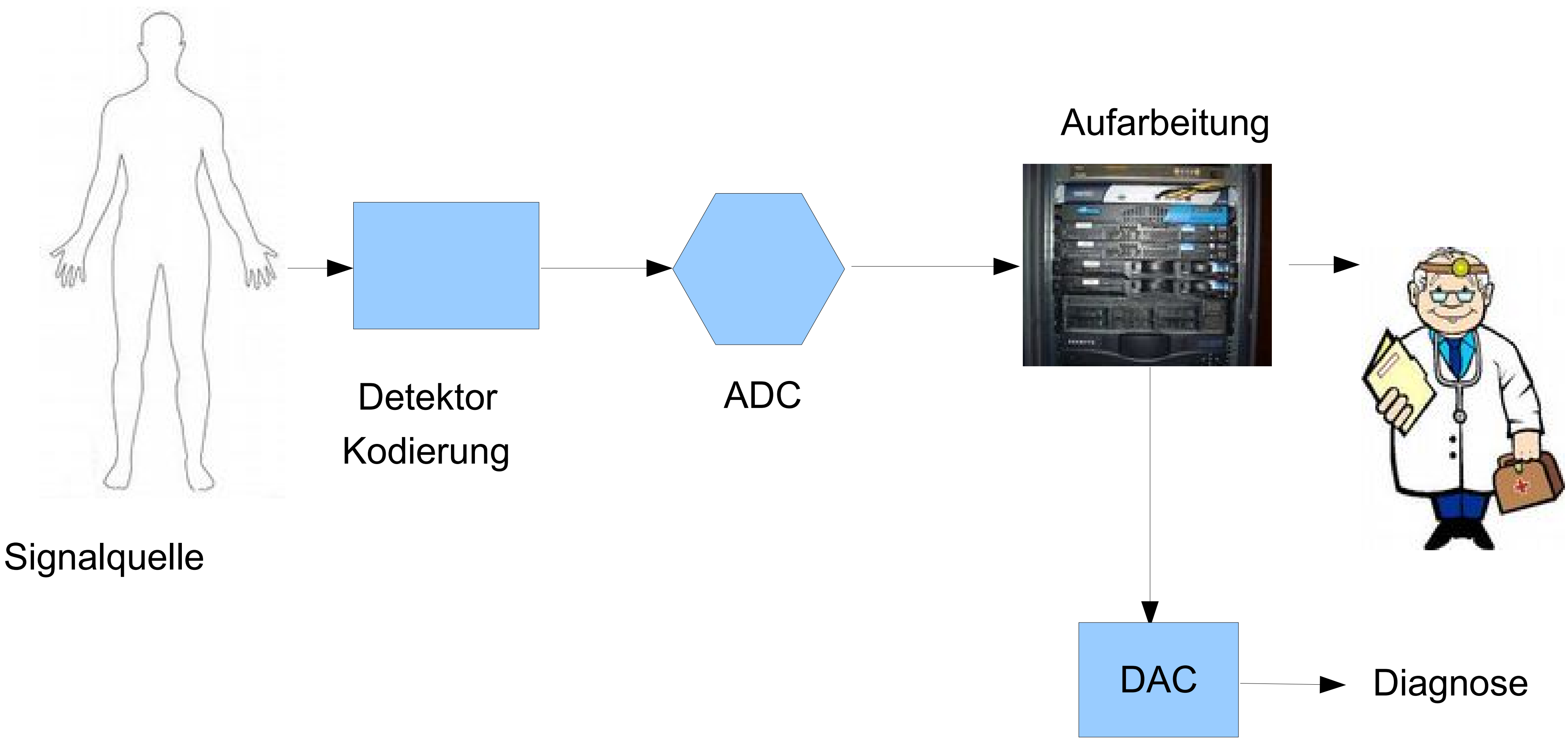


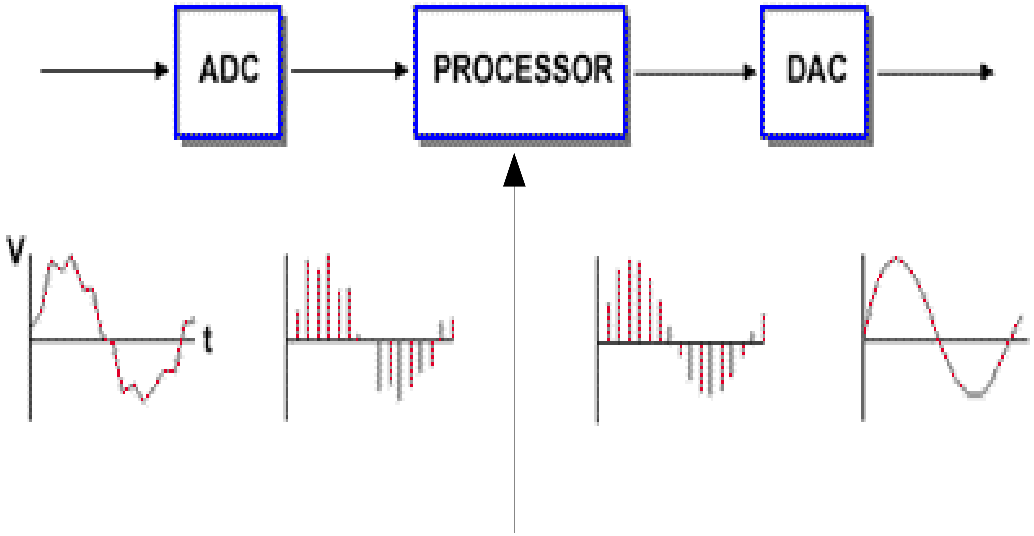
Figure 4 The TLC2272's V_{OUT} shows clipping when V_{IN} (Channel 1) exceeds 9.2V.

$$SNR(dBFS) = 20 * \log_{10}(2^n * \sqrt{\frac{2}{3}})$$

digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)
Digitale Signalaufarbeitung



digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)
Digitale Signalaufarbeitung

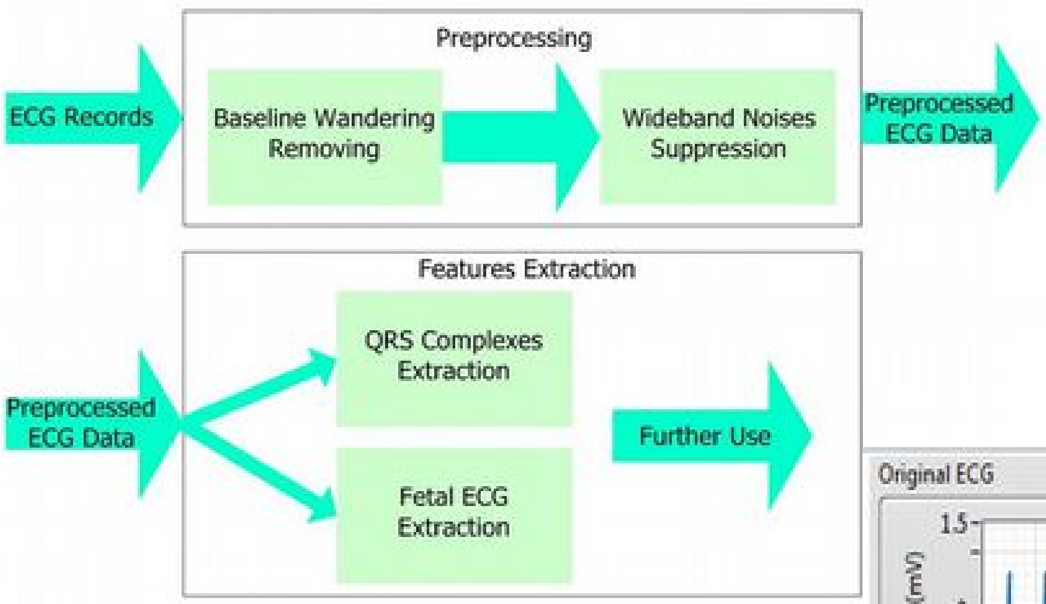


beliebige mathematische Transformationen sind möglich

FFT: Fast Fourier Transform (schneller, digitaler Fourier-Transformation)
IFFT: Inverse FFT

In dem Frequenzspektrum sind dann veränderungen möglich,
z.B. Bei EKG bestimmte Störfrequenzen können gelöscht werden.

digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)
Digitale Signalaufarbeitung



Beispiel: EKG.

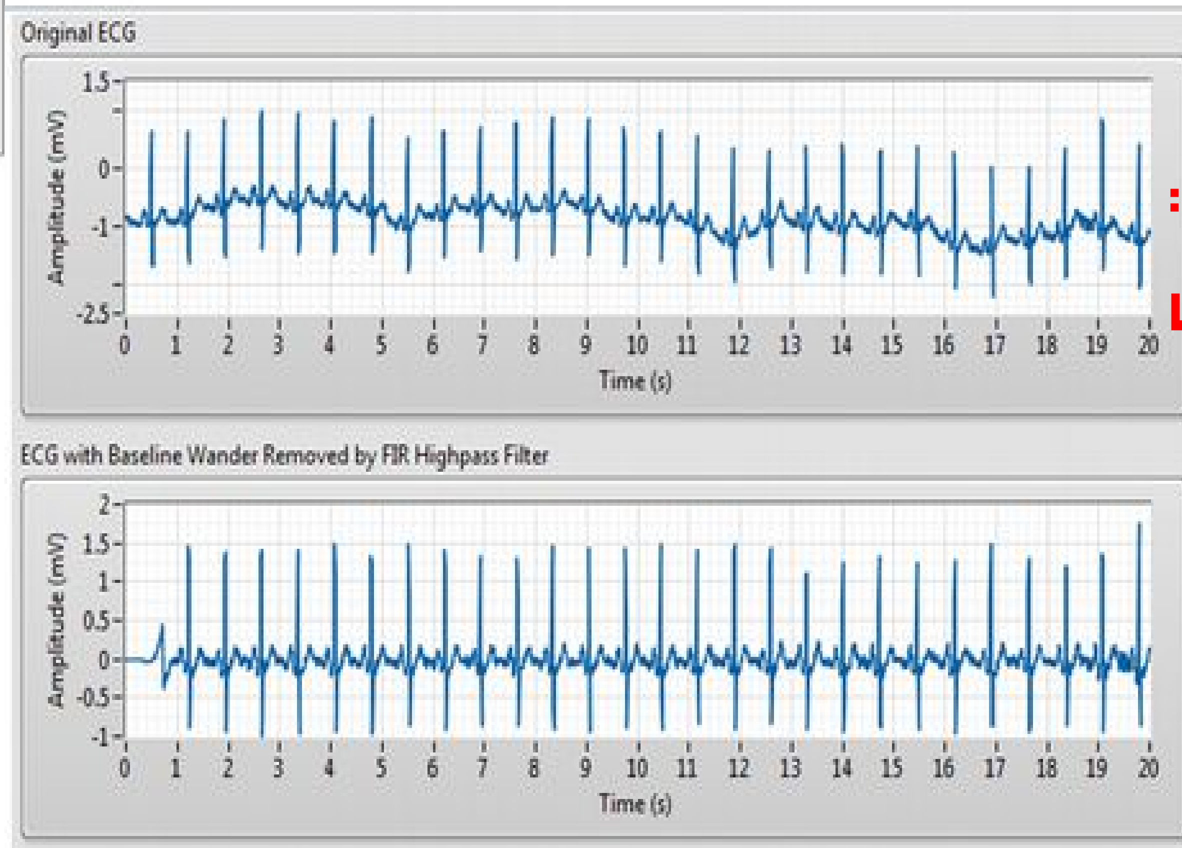
Hintergrundsignale (Wanderung)
Rauschsignale
(hochfrequenz und 50 Hz)
werden digital unterdrückt mit DSP-Filtern

Ergänzungsmaterial!

weitere Aufarbeitung:

Nur die Kurven mit hoch genug
SRV werden behalten, und gezeigt.

Folge:
Einfachere, und sicherere Diagnose

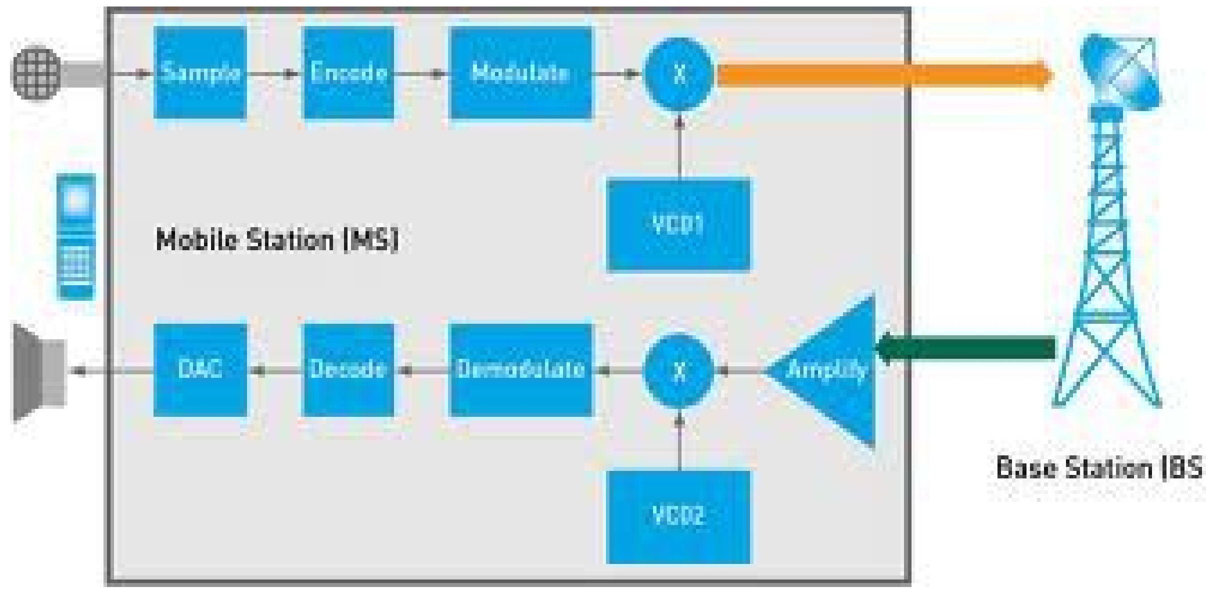


DSP ist heute schon überall

Verschiede mathematische möglichkeiten: verschlüsseln, filtern, verändern, usw.

Handy

ADC, Kodierung,
Übertragung,Dekodierung,DAC



Ergänzungsmaterial!

CD/DVD Spieler
Licht:digital 1010110...
DAC: von Zahlen zu Musik