

Signalverarbeitung in der Medizin

G.Schay

Signalverarbeitung in der Medizin

Definition und Informationsgehalt von Signalen
(siehe auch „Grundlagen der Biostatistik und Informatik“!)

Überblick von den bildgebenden Verfahren

Medizinische Signalkette
einige Beispiele
Kodierung/Dekodierung

Klassifizierung der Signale

Aufarbeitung von Signalen:
Fourier-Theorie
Verstärker
Elektrizitätslehre (siehe Skript!)
elektronische Schaltungen

Digitale Signalverarbeitung (DSP)

Signale in der Medizin

Signale tragen **Information!**

Signal: jede physikalische Größe bzw. ihre Änderung, die Informationen übermittelt.

(Druckwerte, Temperaturwerte, Lautheitswerte, usw.)

Hier auf dem Bild:

Information : Kopf oder Zahl?

Signal:

- ohne Kodierung: einfach schauen
- nach **Kodierung**: 1/0, elektrisch, digital, sms...



Kodierung ist eine
Form der Umwandlung



„Ich wünsche so ruhig zu sein wie J.B.
wenn es zu ernsten Entscheidungen kommt”


Kleine Wiederholung

„informare” (lat.) = „der Gedanken einen Form geben”

Information als Begriff der Informatik:

Information ist diejenige Bedeutung, welche durch eine Nachricht getragen ist.

Reihenfolge/Struktur der Zeichen, worin die Zeichen mit bestimmten **Wahrscheinlichkeiten** auftreten


$$H = \sum_i p_i \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Informationsgehalt in Bit-Einheiten
(durchschnittlich : Inf.Entropie)

Kodierung:

Speicherung und **Übertragung** der Informationen durch Anwendung eines bestimmten Zeichensystems
(Symbole)

Informationsübertragung – Informationskodierung



generell

Informationsquelle

Kodierung



Übertragungskanal

Dekodierung



Informationsempfänger
(Ziel)

Ein Beispiel

Welche Seite ist nach oben?

Kodierung



Seiten (Kopf oder Zahl)
ins Zahlen: 1,0



Sprache, Schallwellen, SMS, usw

Dekodierung

1,0 → Kopf, Zahl



Entscheidung

Informationsübertragung – Informationskodierung



generell

Informationsquelle

Kodierung

Übertragungskanal

Dekodierung

Informationsempfänger
(Ziel)

Ein Beispiel

Welche Seite ist nach oben?

Kodierung



Seiten (Kopf oder Zahl)
ins Zahlen: 1,0

Sprache, Schallwellen, SMS, usw

Dekodierung

1,0 → Kopf, cZahl



Entscheidung

$$H = p_{Kopf} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_{Kopf}} \right) + p_{Zahl} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_{Zahl}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = 1 [Bit]$$

Informationsübertragung – Informationskodierung

Informationsgehalt – Beispiele

Münze werfen, Kopf / Zahl : 1 bit

Welcher Zahn ist beschädigt?

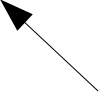
$$p_i = p = 1/32, H = 32 * p * \log_2(1/p) = 5 \text{ bit}$$

1 Nukleotide im DNS (vereinfacht, nur ATCG)

$$H_{1 \text{ Nukl}} = 4 * 1/4 * \log_2(4) = 2 \text{ bit}$$

m Nukleotide im Reihe

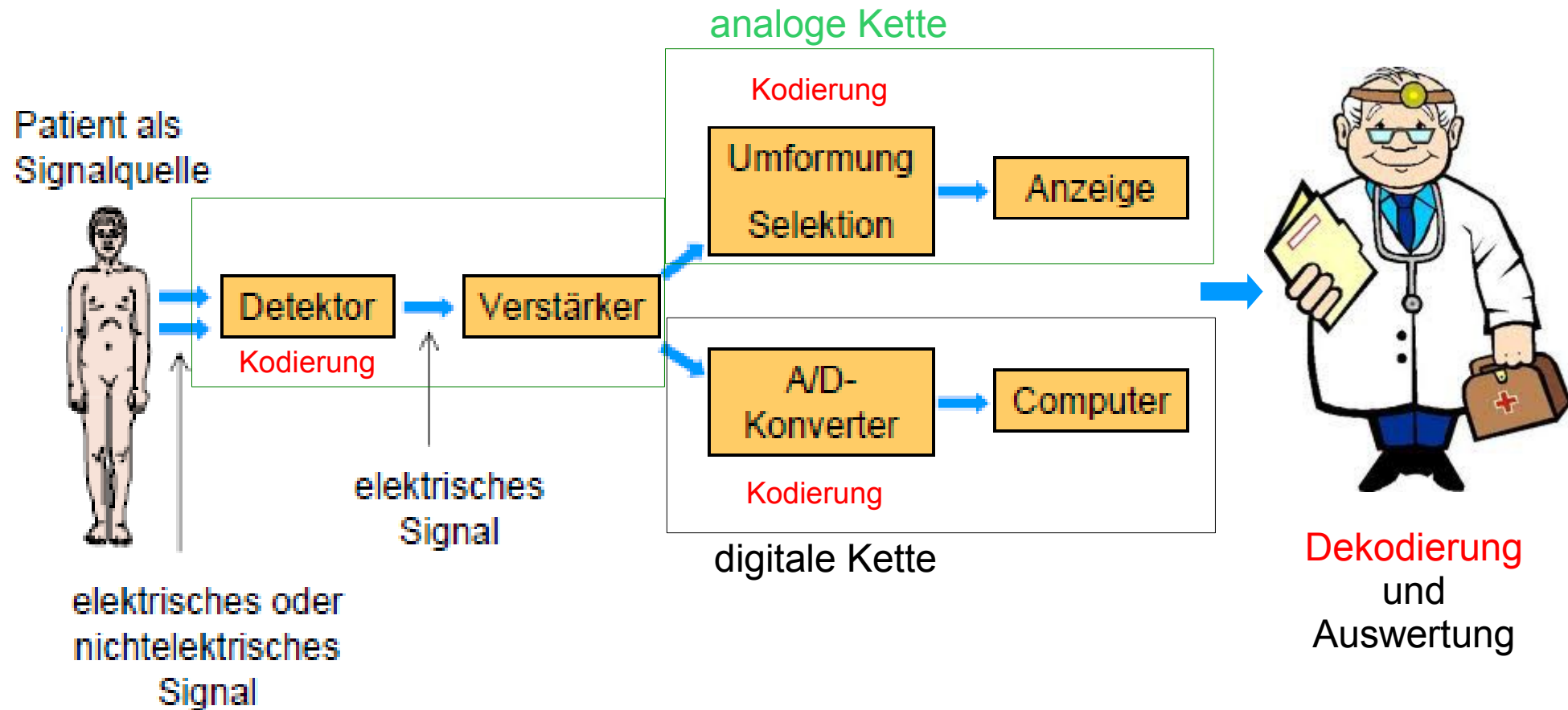
$$H = \sum_k (n_k * H_k) = m * H_{1 \text{ Nukl}} = 2 * m \text{ bit}$$



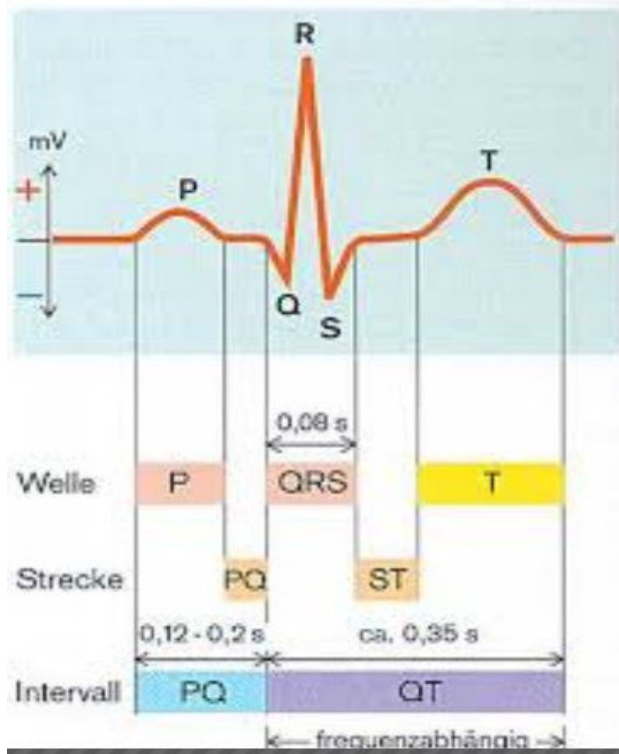
(siehe Informatik-Vorlesung! allgemein, für k unterschiedliche Ereignisse.
Hier haben wir nur ein Ereigniss-Typ, die Summe ist ein-teilig)

Hausaufgabe: Wie viele Bits brauchen wir, um den Informationsgehalt eines Polypeptides von 120 Elemente zu übertragen?

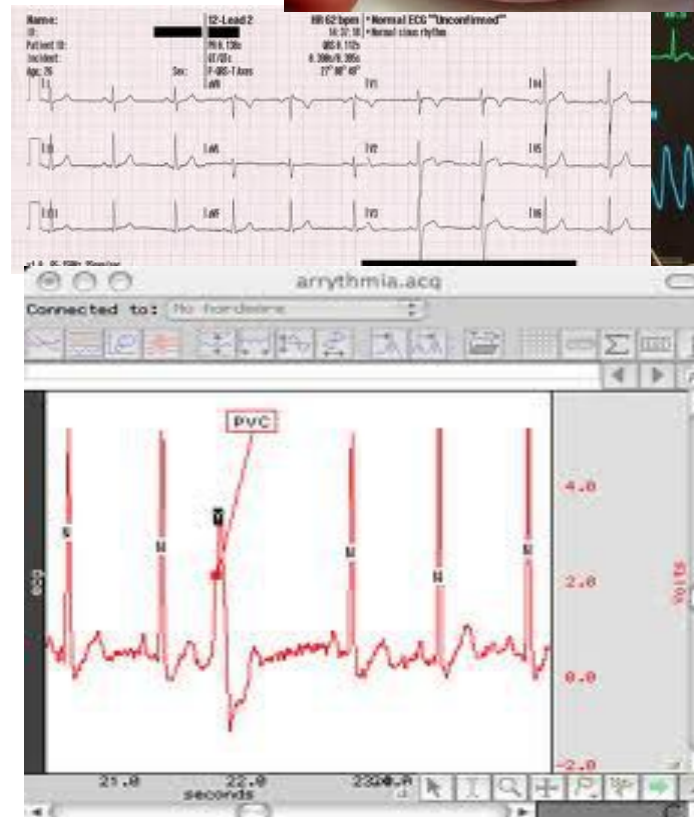
Medizinische Signalkette



Signale in der Medizin: Beispiel 1



Information: Herztätigkeit



Signal:
Original: Spannung
Kodierung: Keine,
aber Filterung ist nötig

50 Hz Unterdrückung

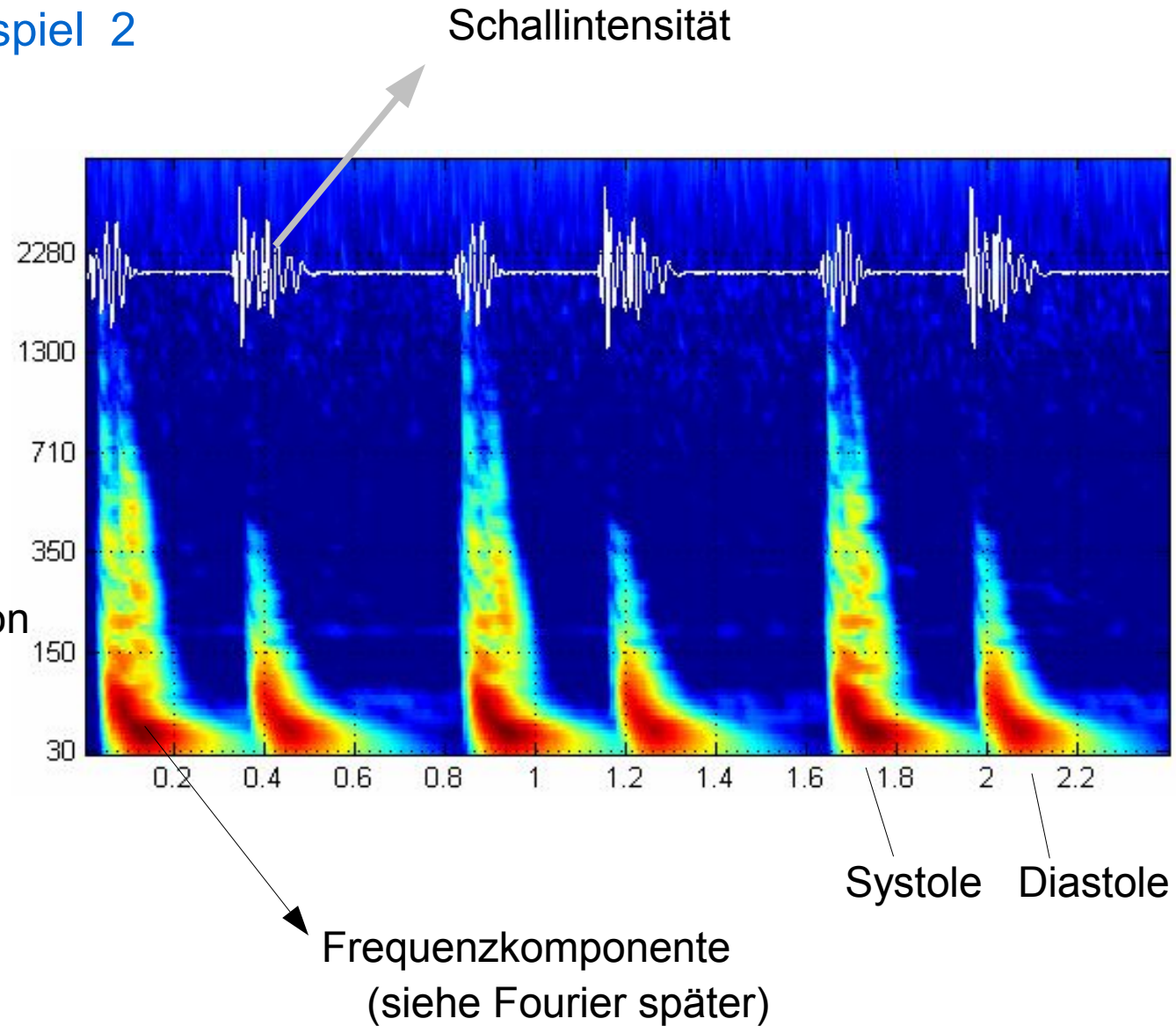
Signale in der Medizin: Beispiel 2

Herztöne

Signal:
Original: Schallwellen

Kodierung: Mikrofon

Kodierung: Fourier-Transformation



Information: Herzzyklus, mögliche anatomische und Strömungsprobleme

Signale in der Medizin: Beispiel 3

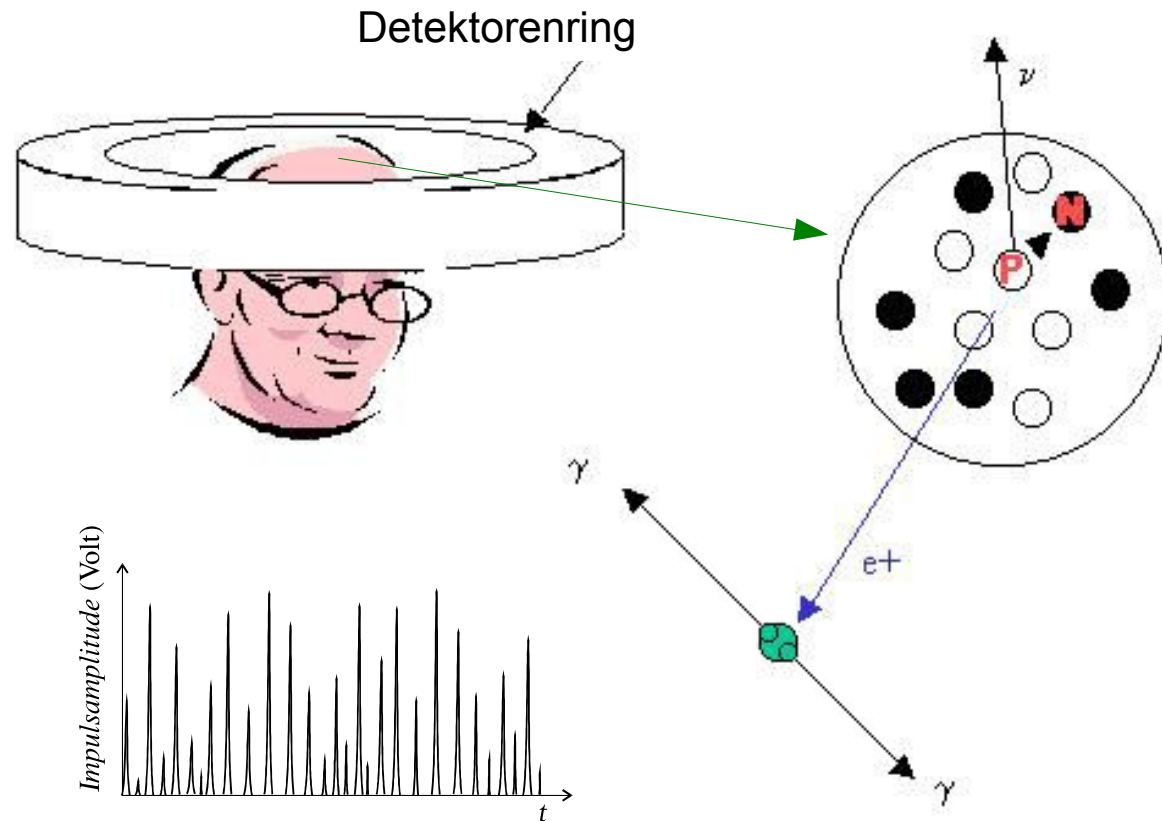
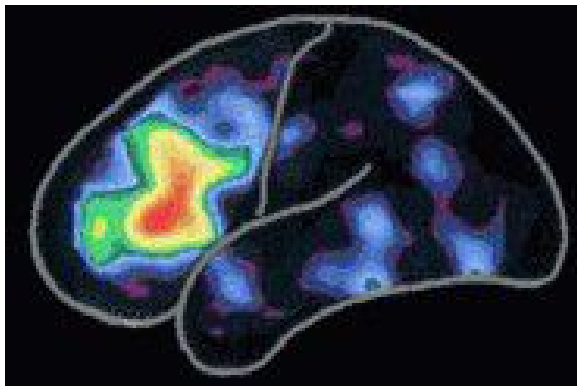
PET: PositronEmissionsTomografie

Signal:

Original: γ -Photonen

Kodierung: elektrische Impulse

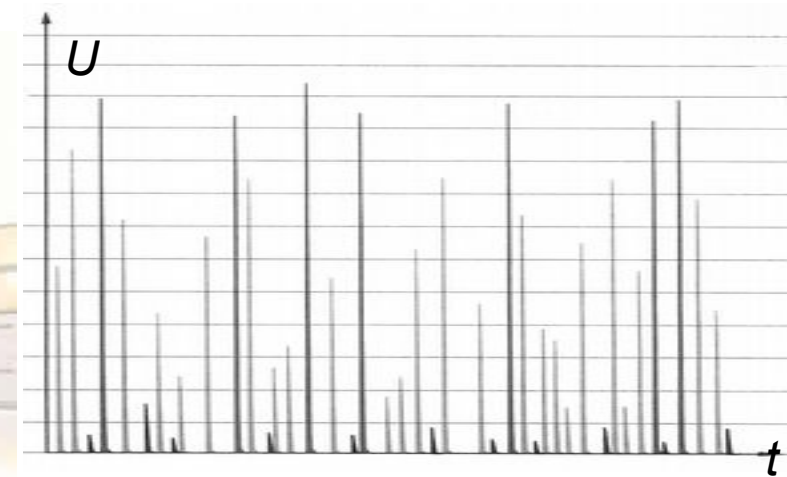
Kodierung: Bildrekonstruktion



Information: zeitliche und räumliche Verteilung der Moleküle

Signale in der Medizin: Beispiel 4

SPECT-CT:
Einzelphotonenemissions-
spektrometrie
Komputertomografie



Signal:

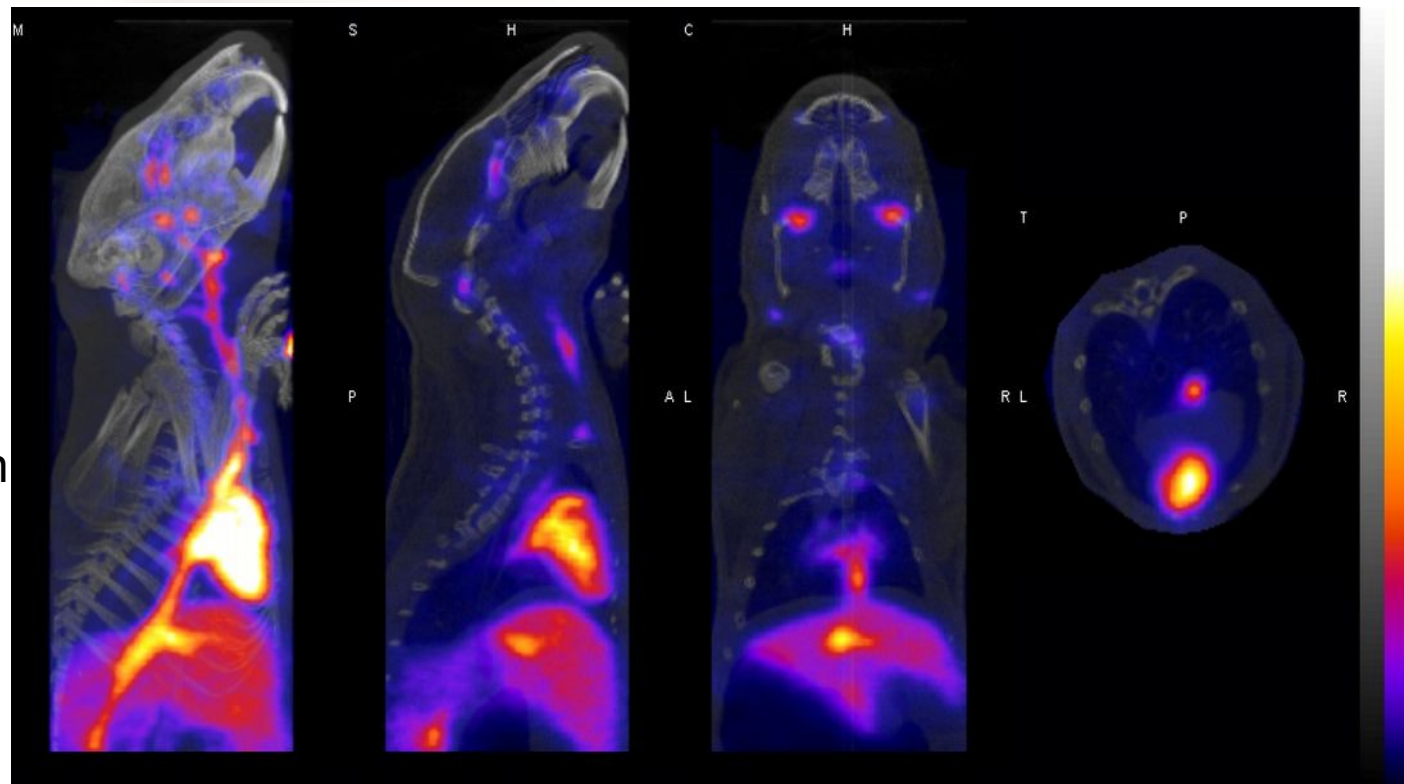
Original: γ -Photonen
Rtg.-Photonen

Kodierung: elektrische
Impulse

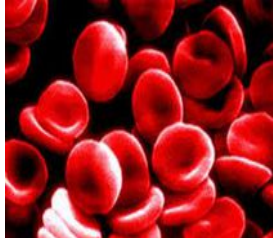
Kodierung: Bildrekonstruktion

Information:

Anatomie (Rtg)
Funktion (Isotopdiagnostik)



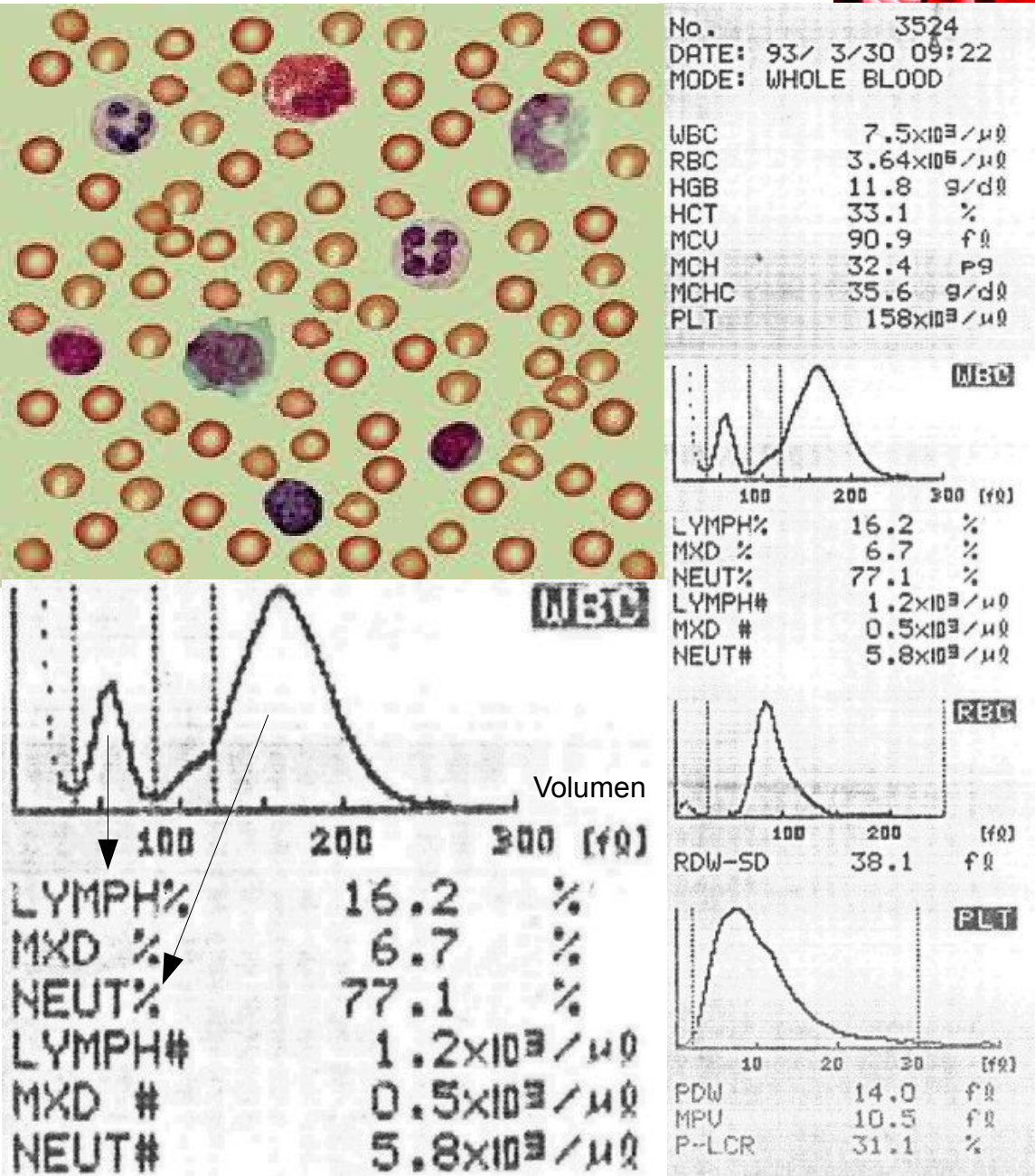
Signale in der Medizin: Beispiel 5



Coulter-Zähler

Signal: Zellenvolumen

Kodierung: elektrische Impluse
Kodierung: Histogramm



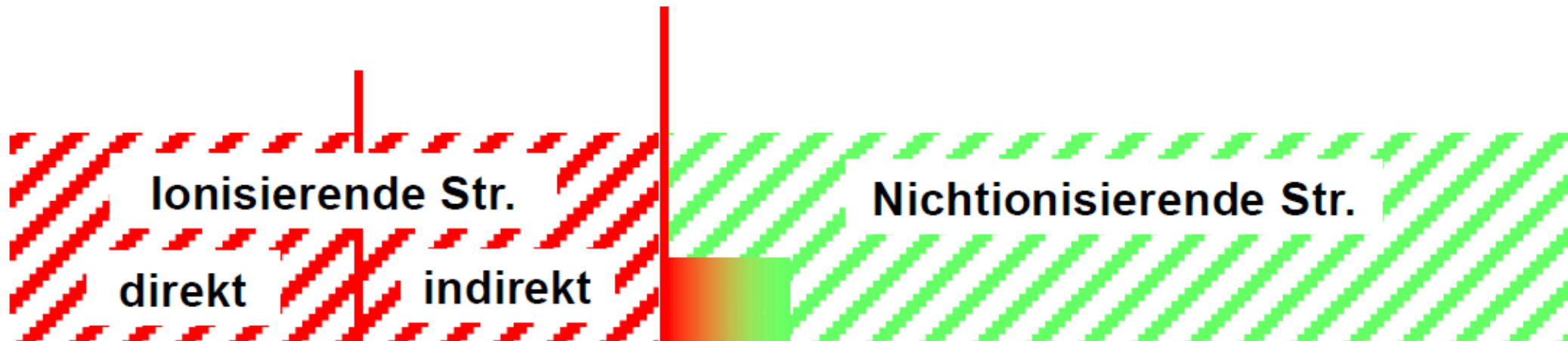
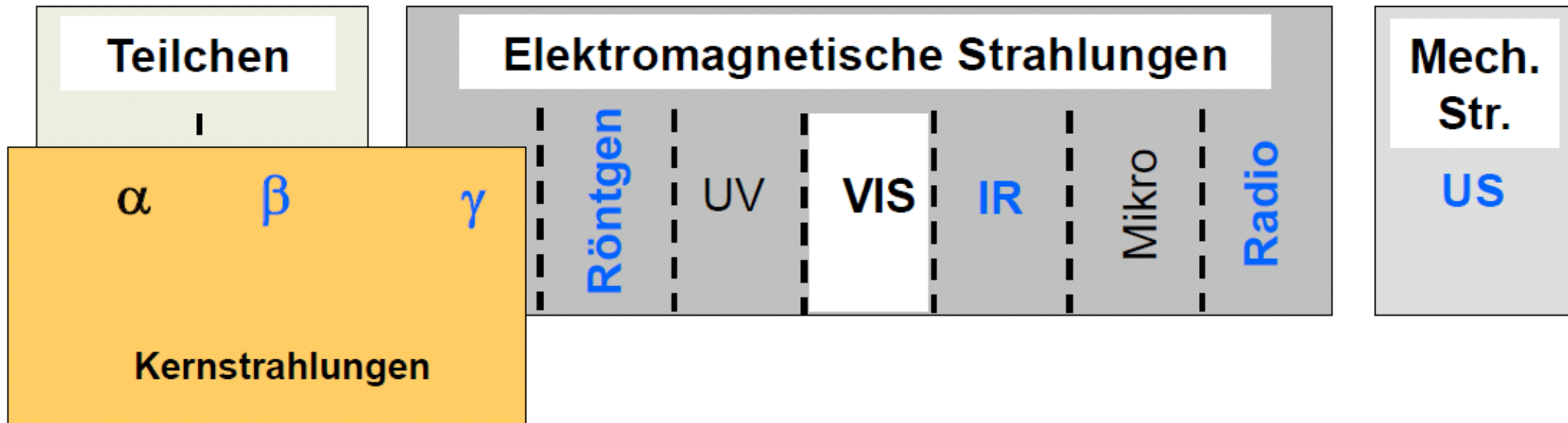
Information: Blut-Zusammensetzung

Bildgebende Verfahren

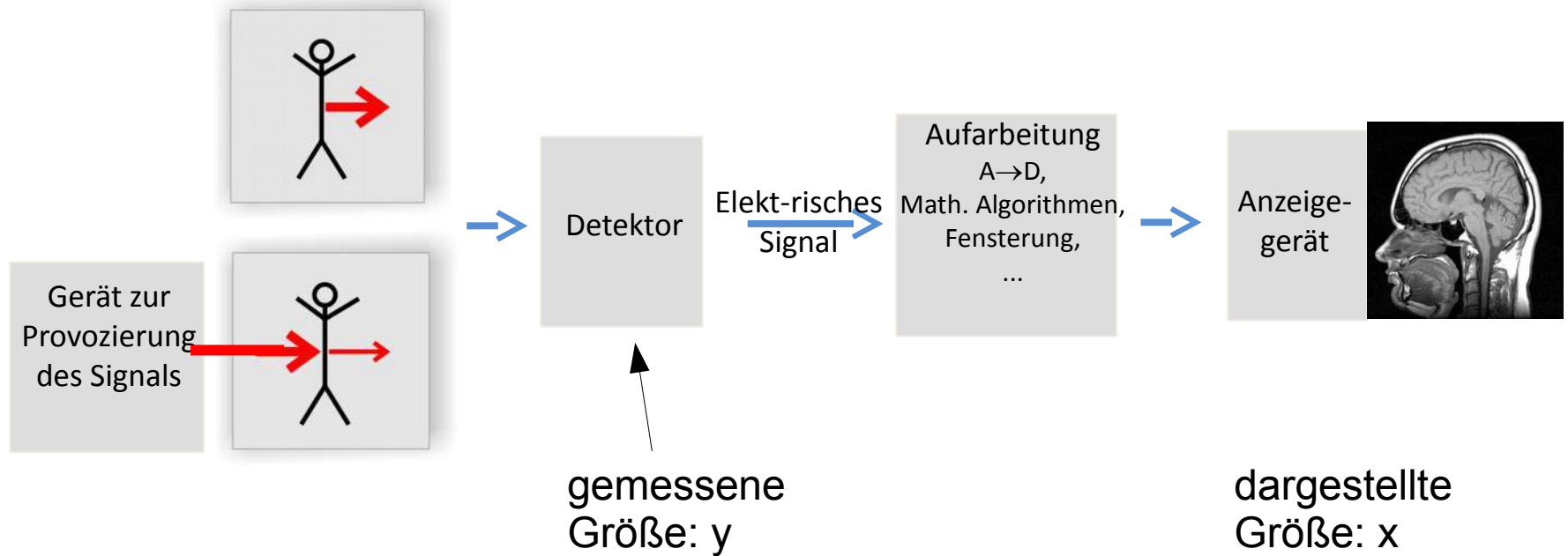
- **1. Endoskopie**
- **2. Infrarotdiagnostik (Telethermographie)**
- *3. Elektrische Potenzialkarte (EKG, EEG..)*
- *4. Elektrische Impedanztomographie (EIT)*
- **5. Nuklearmedizin (Szintigraphie)**
 - 5a. Gammakamera; 5b. SPECT; 5c. PET
- **6. Röntgendiagnostik**
 - 6a. Einfache Durchleuchtung; 6b. CT
- **7. Sonographie**
 - 7a. Echoimpulsverfahren; 7b. Farb-Doppler Verfahren
- **8. Magnetresonanztomographie (MRT)**

Verwendete Strahlungen

Teilchenenergie



Schema der bildgebenden Verfahren



Zusammenhang zwischen y und x : Kodierung

Prinzip =

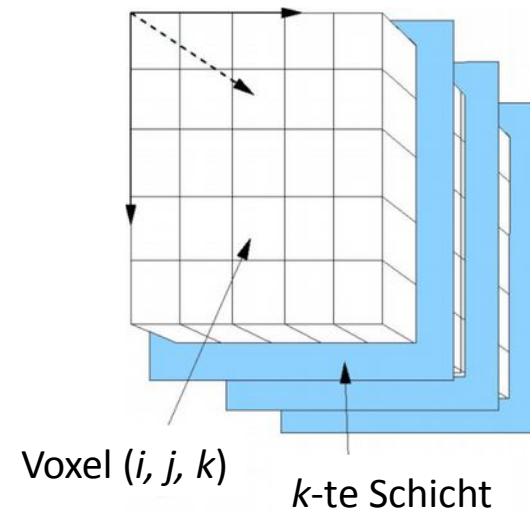
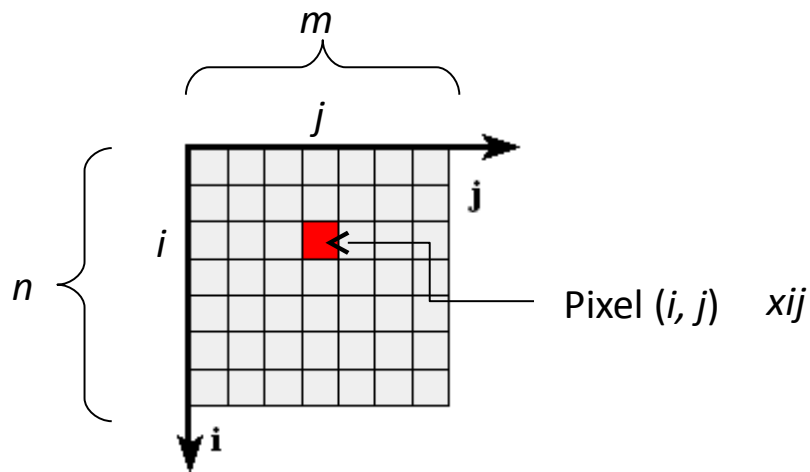
Entstehung des gemessenen Signals

y

x

Zusammenhang: $y=y(x)$ oder $x=x(y)$

Bild: 2D oder 3D Darstellung der räumlichen Verteilung einer physikalischen Größe x im Körper
(wir messen nicht unbedingt direkt x !)



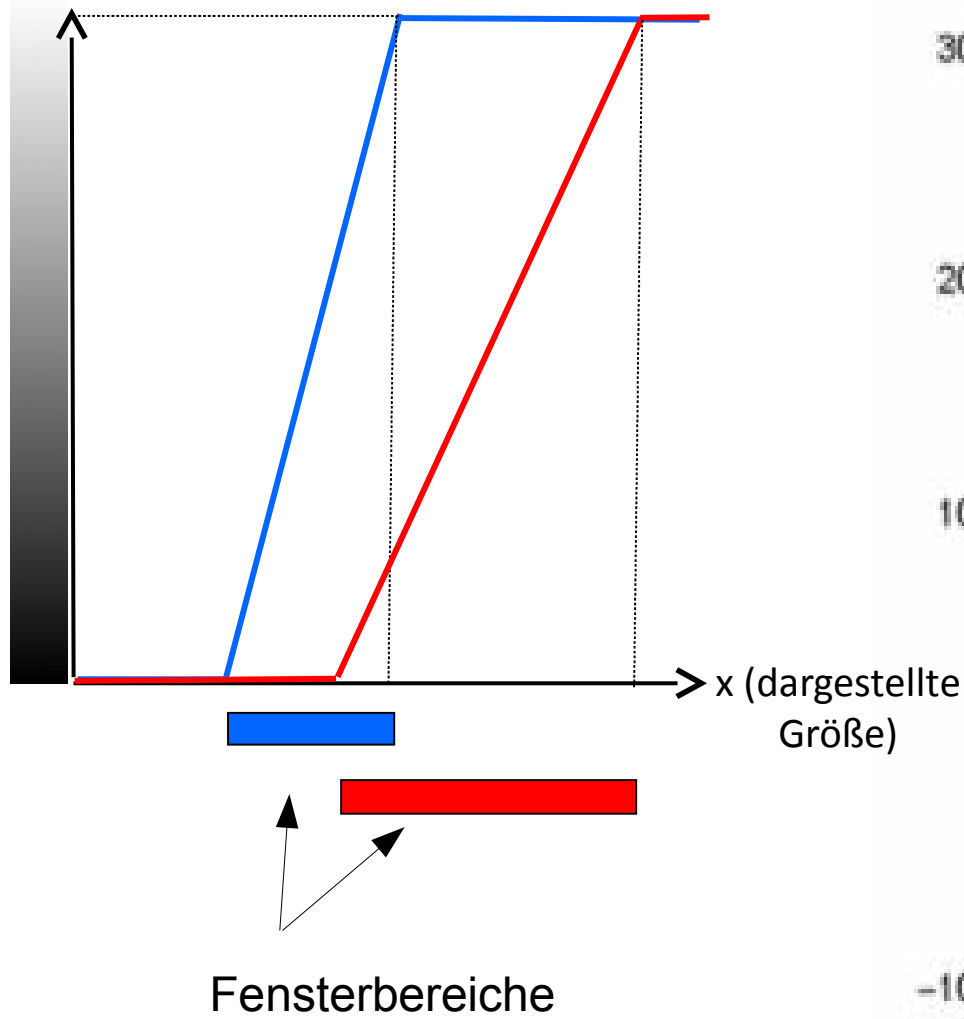
- Querschnittsfläche
- $n \times m$
- Dicke der Schicht

\Leftrightarrow **räumliche Auflösung**

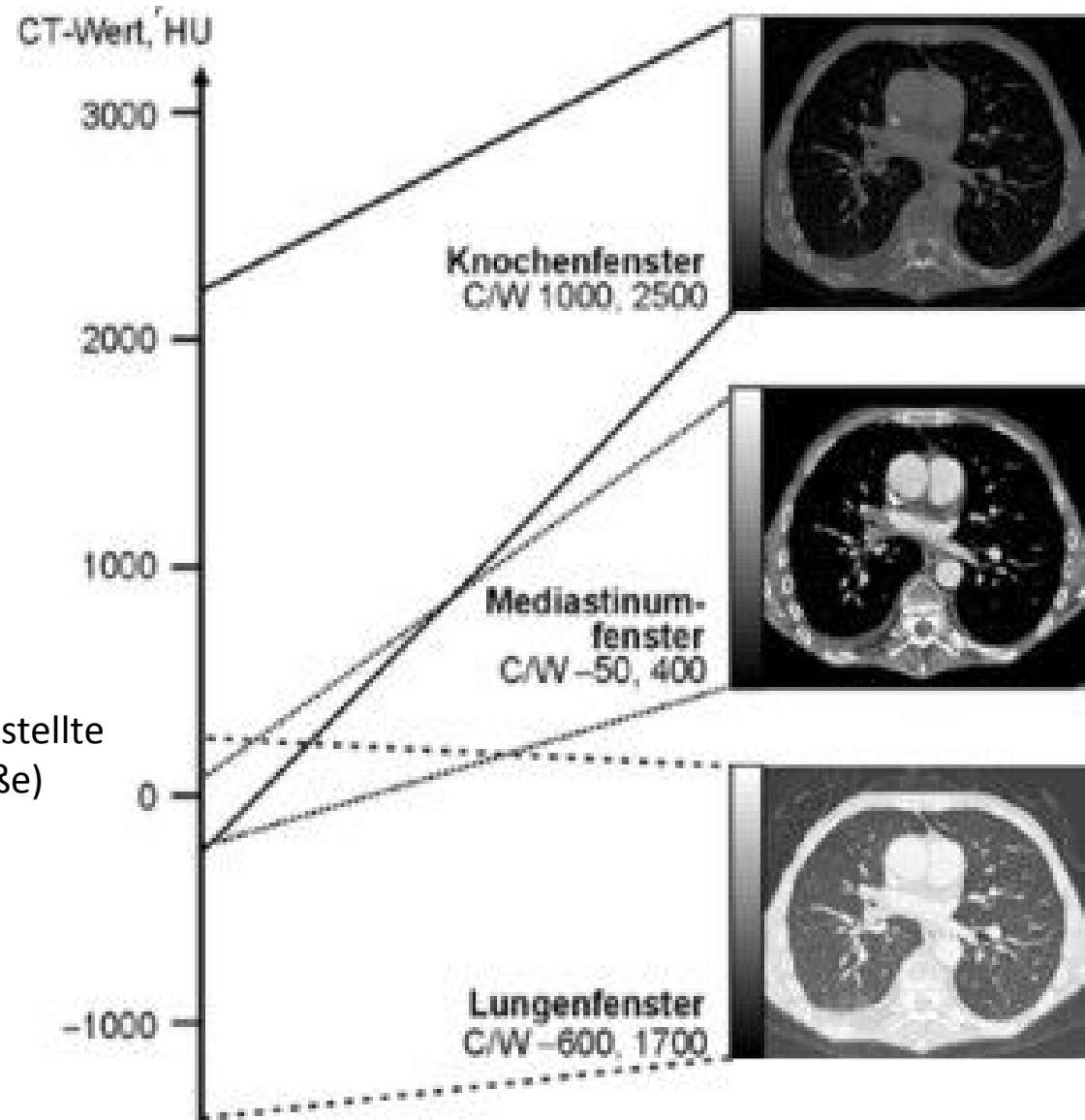
- **Bildrekonstruktion:**
 - $y \Rightarrow x$
 - Ort

- Darstellung:**
- Grautöne/Farbtöne
 - Fensterung

Graustufen

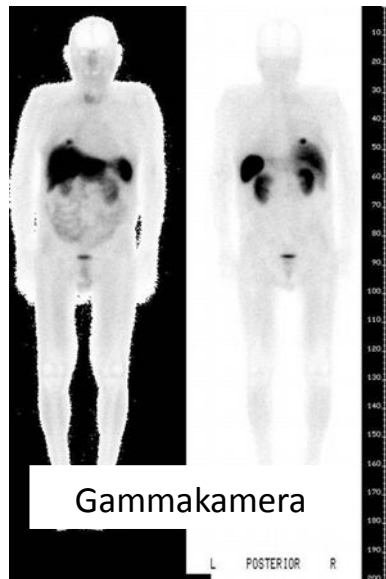


Zum Beispiel:



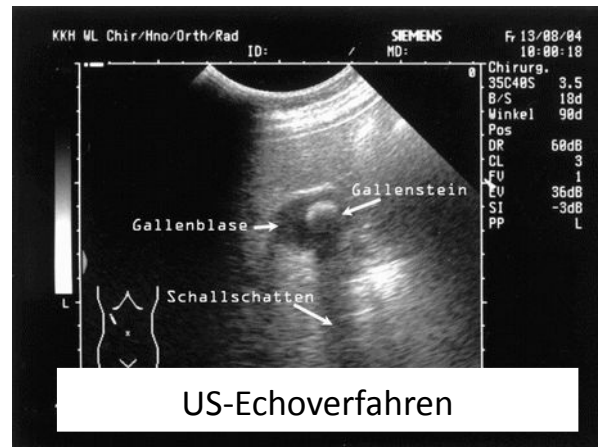
- **Bildtyp:**

- Summationsbild (S)

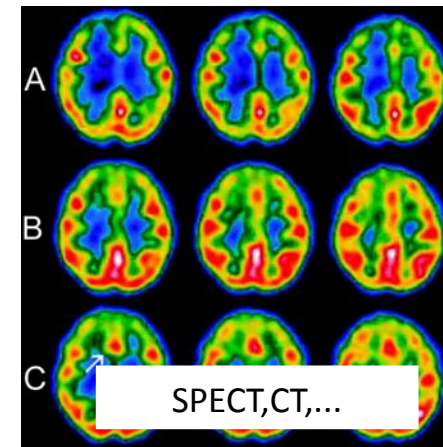


- Schichtbild = Tomogramm (T)

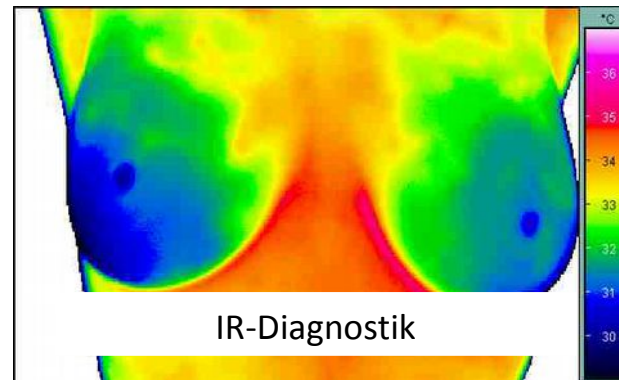
- direkt gemessenes Tomogramm (dT)



- berechnetes Tomogramm (bT)



- Spezielles Schichtbild, Oberflächenbild (O)



- **Bildinfo:**

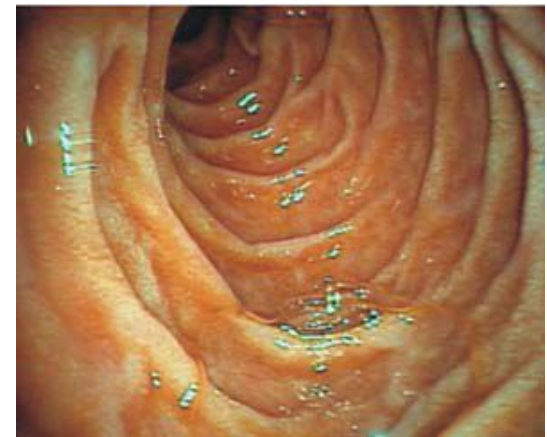
- (eher) morphologisch (M)
 - (eher) funktionell (F)

Endoskopie



Strahlungsart?

e.m. Strahlung
VIS



Gemessene
Größe?

J, λ

Dargestellte
Größe?

J, λ

Kodierung: keine
 $y=x$

Prinzip?

Beleuchtung durch optische Faser (Totalreflexion) oder
durch Kapsel-Endoskop.

Bildtyp?

O

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!

Infrarotdiagnostik



Strahlungsart?
e.m. Strahlung
IR

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

T

Prinzip?

Temperaturstrahlung des menschlichen Körpers:

Stefan-Boltzmann: $M \sim T^4$ und $J \sim M$

Bildtyp?

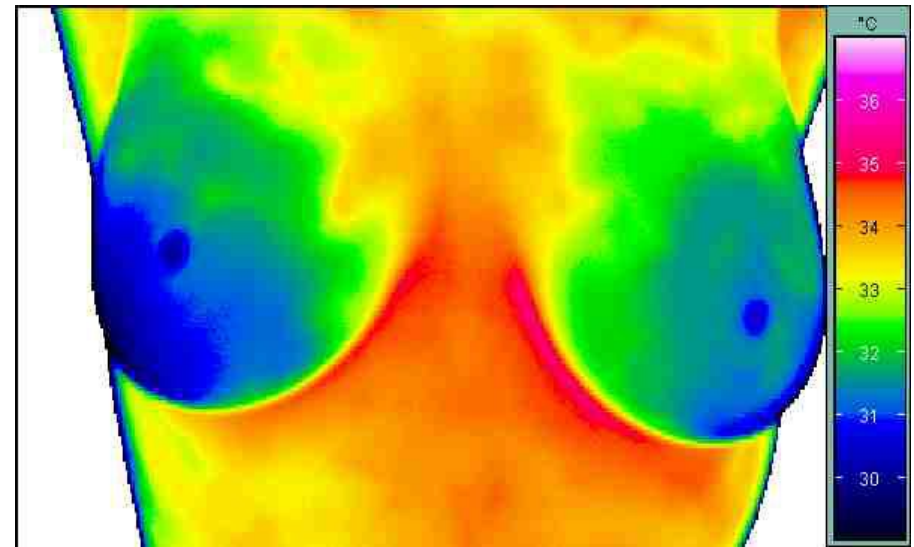
O

Infos?

F

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!



Kodierung:
 $J \rightarrow T \rightarrow \text{Farbe}$

Elektrische Potenzialkarte



Strahlungsart?

keine

Gemessene
Größe?

φ

Dargestellte
Größe?

φ

Prinzip?

Bei Muskel- und Nerventätigkeit entsteht ein elektrisches Feld im Körper, dessen Potenzialverteilung an der Körperoberfläche durch Elektroden direkt messbar ist.

Bildtyp?

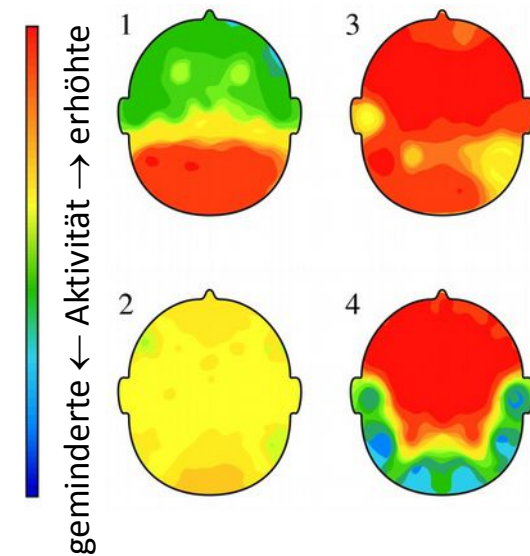
O

Infos?

F

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!



Kodierung: $y=x$,
aber $x \rightarrow$ Farbe

Elektrische Impedanztomographie



Strahlungsart?

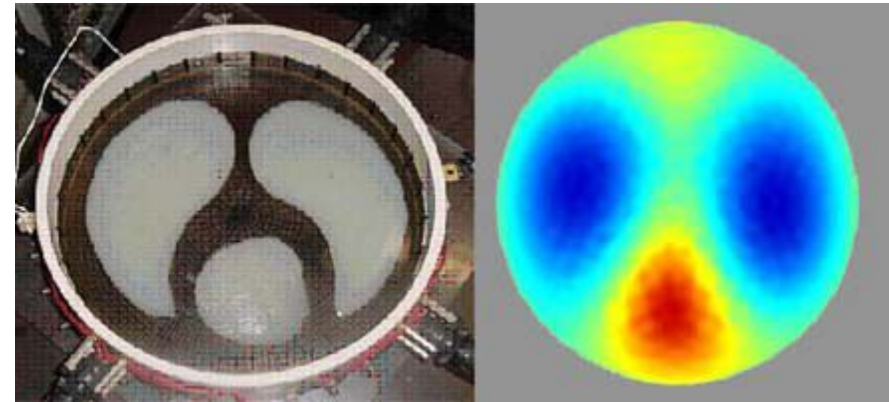
keine

Gemessene
Größe?

U

Dargestellte
Größe?

Z



Kodierung:
 $U \rightarrow Z \rightarrow \text{Farbe}$

Prinzip?

Hochfrequente konstante Stromstärke wird an den Patient gelegt und die Spannung gemessen, und $U = Z \cdot I$
wobei die Impedanz Z gewebsabhängig ist.

Bildtyp?

bT

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine!

Nuklearmedizin

Gammakamera



Strahlungsart?
e.m. Strahlung
 γ

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

c

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch
ununterscheidbar, physikalisch
lokalisierbar und

$$J \sim \Lambda \sim c$$

Bildtyp?

S

Infos?

F/M



Kodierung: $J \rightarrow c \rightarrow$ Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!

Nuklearmedizin

SPECT



Strahlungsart?

e.m. Strahlung

γ

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

c

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch
ununterscheidbar, physikalisch lokalisierbar und

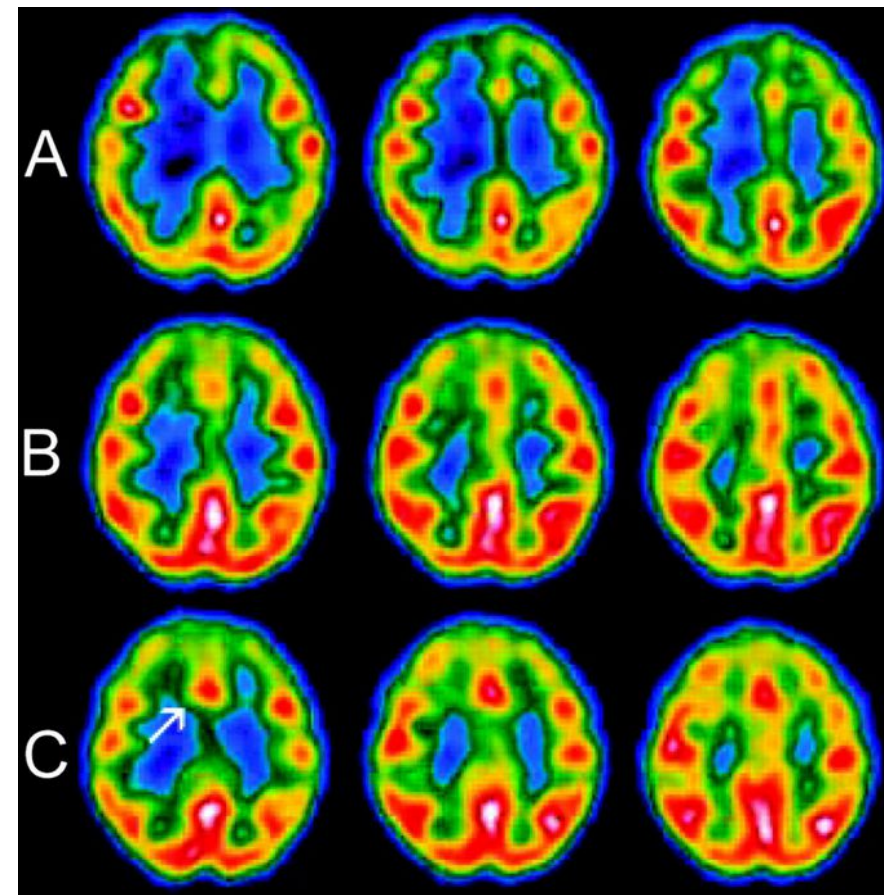
$$J \sim \Lambda \sim c$$

Bildtyp?

bT

Infos?

F



Kodierung: $J \rightarrow \text{Bildrek.} \rightarrow c \rightarrow \text{Farbe}$

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!

Nuklearmedizin

PET



Strahlungsart?
e.m. Strahlung
 $\beta^+ \rightarrow \gamma$

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

c

Prinzip?

Radioaktive Stoffe, chemisch-biologisch
ununterscheidbar, physikalisch lokalisierbar und

$$J \sim \Lambda \sim c$$

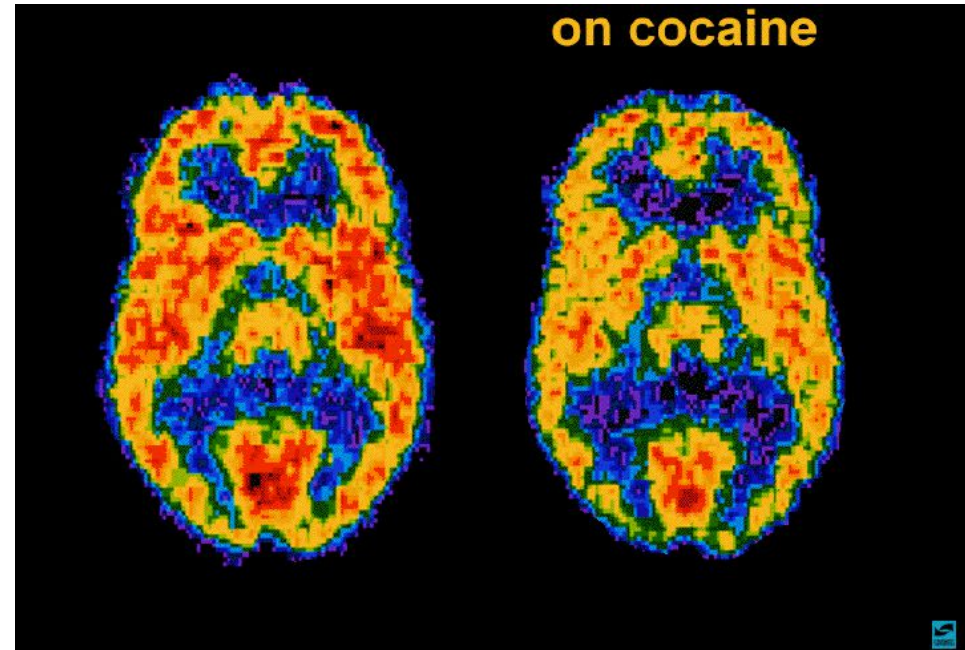
Bildtyp?

bT

Infos?

F

on cocaine



Kodierung: $J \rightarrow \text{Bildrek.} \rightarrow c \rightarrow \text{Farbe}$

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!

Röntgendiagnostik

gewöhnliche Durchleuchtung



Strahlungsart?

e.m. Strahlung
Röntgen

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

J

Prinzip?

Unterschiedliche Schwächung der Rtg-Strahlen in
verschiedenen Körperteilen.

Bildtyp?

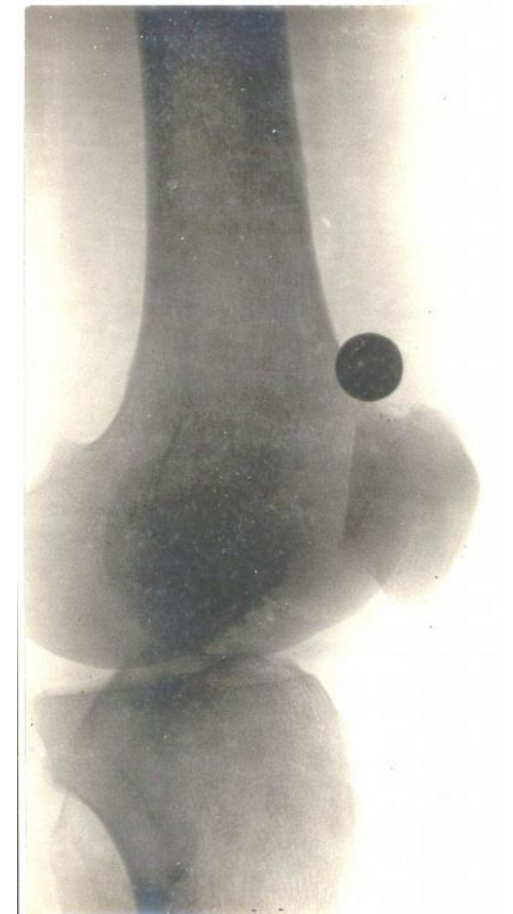
S

Infos?

M

Nebenwirkungen/Risikos?

siehe Dosimetrie!



Kodierung: J → Graustufen

Röntgendiagnostik

Computertomographie



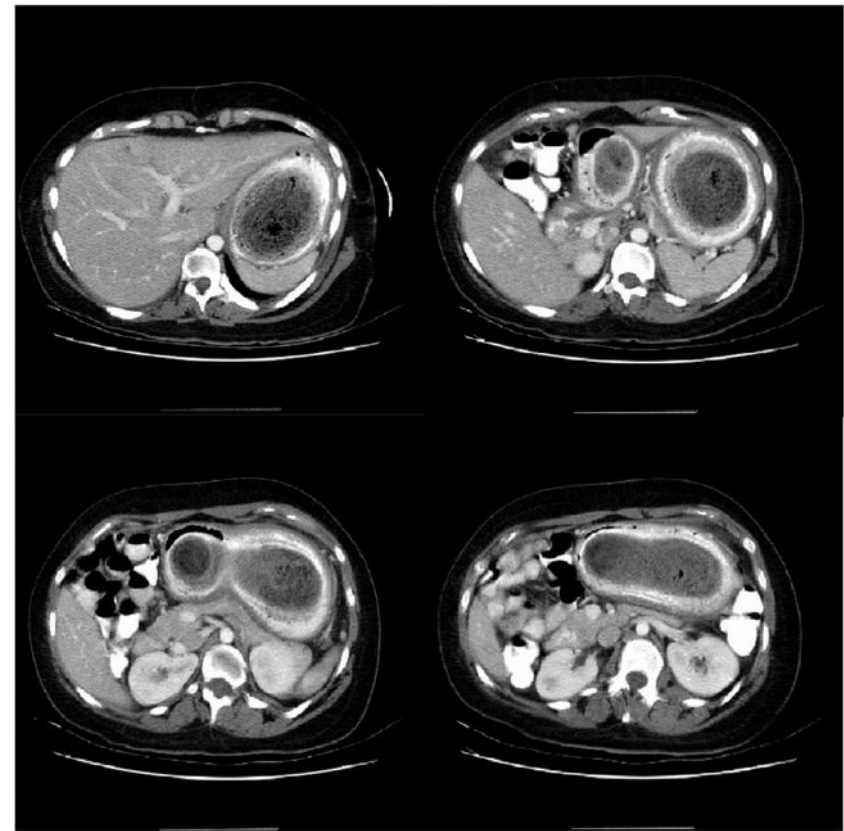
Strahlungsart?
e.m. Strahlung
Röntgen

Gemessene
Größe?

J

Dargestellte
Größe?

μ



Prinzip?

Unterschiedliche Schwächung der Rtg-Strahlen in
verschiedenen Körperteilen:

$$\lg \frac{J_0}{J} \sim \mu$$

Kodierung: $J \rightarrow$ **Bildrek.** \rightarrow
 $\mu \rightarrow$ Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

Bildtyp?

bT

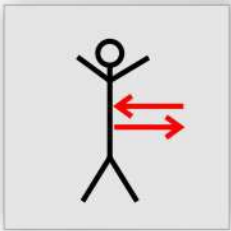
Infos?

M

siehe Dosimetrie!

Sonographie

Echoimpulsverfahren



Strahlungsart?

Mech.
Strahlung
US

Gemessene
Größe?

$t_{\text{Sende-Echo}}$ und
 J_{Echo}

Dargestellte
Größe?

Abstände und
 J_{Echo}

Prinzip?

US-Impuls reflektiert, Radar-Prinzip:

$$t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$$

Bildtyp?

dT

Infos?

M



Kodierung: $t \rightarrow$ Länge und $J \rightarrow$ Graustufen

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine, wenn:

$$J < 0,1 \text{ W/cm}^2 \text{ oder } J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$$

Sonographie

Farb-Doppler Verfahren



Strahlungsart?

Mech. Strahlung
US

Gemessene
Größe?

$t_{\text{Sende-Echo}}$ und
 J_{Echo} und
 f_D

Dargestellte
Größe?

Abstände und
 J_{Echo} und
 v_{Blut}

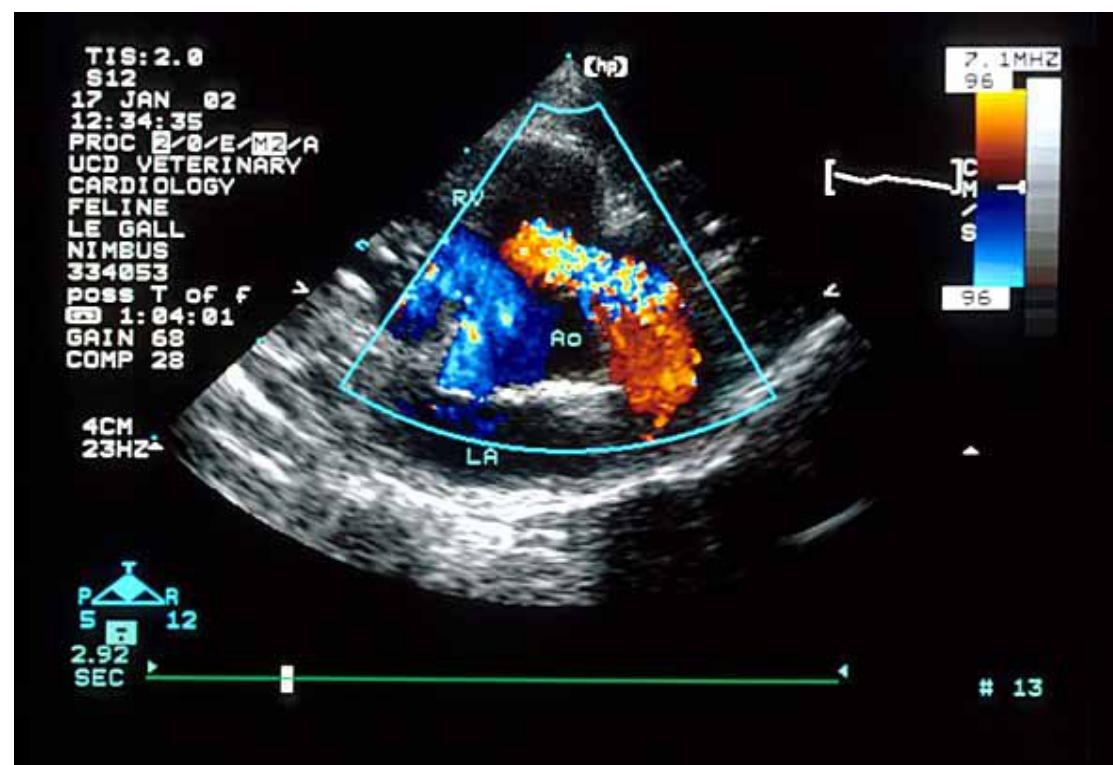
Prinzip?

US-Impuls reflektiert, Radar-Prinzip:

$$t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$$

und Doppler Effekt:

$$f_D \sim v_{\text{Blut}}$$



Bildtyp?

dT

Infos?

M/F

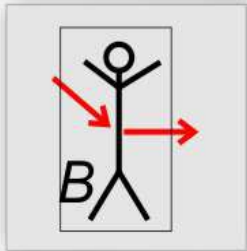
Kodierung: $t \rightarrow$ Länge und $J \rightarrow$ Graustufen
 $f_D \rightarrow v \rightarrow$ Farben

Nebenwirkungen/Risikos?

Keine, wenn:

$$J < 0,1 \text{ W/cm}^2 \text{ oder } J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$$

MRT



Strahlungsart?

e.m. Strahlung
Radiowellen

Gemessene
Größe?

J und $J(t)$

Dargestellte
Größe?

n_H und T_1, T_2

Prinzip?

Magnetfeld (B), Anregung, anschließend
darauf RW-Emission, wobei: $J \sim n_H$
und $J(t) \Rightarrow$ Relaxationszeiten T_1 , und T_2

Bildtyp?

dT

Infos?









M/F

Nebenwirkungen/Risikos?

Herzschrittmacher, Metallprothesen



Kodierung: $J, T_1, T_2 \rightarrow$ Graustufen

VERFAHREN	Strahlung	GRUNDPRINZIP		gemessene Größe	dargestellte Größe	Bildtyp	Infotyp	Nebenwirkung /Risiko
1. Endoskopie	VIS		Beleuchtung durch optische Faser (Totalreflexion) oder durch Kapsel-Endoskop.	J	J	O	M	—
2. Infrarotdiagnostik (Telethermographie)	e.m. Str.: IR		Temperaturstrahlung: Stefan-Boltzmann: $M \sim T^4$ und $J \sim M$	J	T	O	F	—
3. Elektrische Potenzialkarte (EKG, EEG, ...)	—		Bei Muskel- und Nerventätigkeit entsteht ein elektrisches Feld im Körper, dessen Potenzialverteilung an der Körperoberfläche durch Elektroden direkt messbar ist.	φ	φ	O	F	—
4. Elektrische Impedanztomographie (EIT)	—		Hochfrequente konstante Stromstärke wird an den Patient gelegt und die Spannung gemessen; $U = Z \cdot I$, wobei die Impedanz Z gewebsabhängig ist.	U	Z	bT	M	—
5. Nuklearmedizin (Szintigraphie)	e.m. Str.: γ		Radioaktive Isotope werden dem Patienten zugeführt. Sie verhalten sich im Organismus genauso wie die stabilen Isotope, sie können aber durch ihre Strahlung lokalisiert werden, und $J \sim A \sim c$	J	c	S	F+M	Stoch. Strahlenschädigung möglich
5a. Gammakamera	e.m. Str.: γ					bT	F	
5b. SPECT	e.m. Str.: γ					bT	F	
5c. PET	e.m. Str.: $\beta^+ \rightarrow \gamma$							
6. Röntgendiagnostik	e.m. Str.: Rtg		Der Patient wird mit Röntgenstrahlen durchgeleuchtet, die in verschiedenen Geweben/Organen unterschiedlich geschwächt werden, und $\lg \frac{J_0}{J} \sim \mu$	J	J	S	M	Stoch. Strahlenschädigung möglich
6a. einfache Durchleucht.					μ	bT	M	
6b. CT								
7. Sonographie	mech. Str.: US		Der Patient wird mit US-Impuls bestrahlt, der an den Grenzflächen von akustisch unterschiedlichen Geweben im Teil reflektiert wird. Radar-Prinzip: Zeit zwischen Sende- und Echoimpuls ist proportional dem Abstand US-Kopf-Grenzfläche, $t_{\text{Sende-Echo}} \sim l$	$t_{\text{Sende-Echo}}$ J_{Echo}	$t_{\text{Sende-Echo}}$ J_{Echo}	dT	M	—, wenn $J < 0,1 \text{ W/cm}^2$ oder $J \cdot t < 50 \text{ J/cm}^2$
7a. Echoimpulsverfahren								
7b. Farb-Doppler-Verfahren			Doppler-Effekt: Frequenzverschiebung bei Reflexion durch sich bewegende Flächen $f_D \sim v_{\text{Blut}}$	f_D	v_{Blut}	dT	M+F	
8. MRT	e.m. Str.: Radiowellen		Die Spins der H-Atomkerne (Protonen) werden durch ein starkes Magnetfeld orientiert. In einer Schicht des Körpers werden die Spins von dieser Richtung durch RW-Bestrahlung abgelenkt. Bei Rückkehr der Spins wird RW-Strahlung emittiert, deren Intensität zur Protonendichte proportional ist: $J \sim n_H$, und $J(t) \Rightarrow$ Relaxationszeiten T_1 , und T_2 und Protonendichte, T_1 und T_2 sind gewebsabhängig.	$J(t)$	n_H T_1 T_2	dT	M	Pacemaker! Metallprothesen!

Signalverarbeitung, Aufarbeitung von Signalen

Signaltype

elektrische Signale – analoge Signalkette

Elektrizitätslehre (Wiederholung + Ergänzung)

Verstärker, Frequenzübertragungsfunktion, Fourier

Digitale Signalverarbeitung (DSP)

Klassifizierung der Signale

- | | |
|------------------------|------------------------|
| nichtelektrisches S. | – elektrisches S. |
| statisches S. | – zeitabhängiges S. |
| (quasi)periodisches S. | – nichtperiodisches S. |
| stochastisches S. | – deterministisches S. |
| kontinuierliches S. | – impulsförmiges S. |
| analoges S. | – digitales S. |

Signaltype

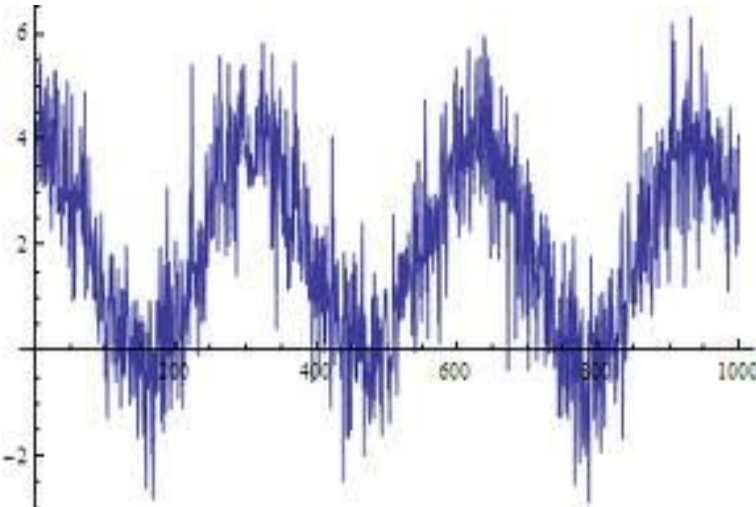
elektrisch

EKG

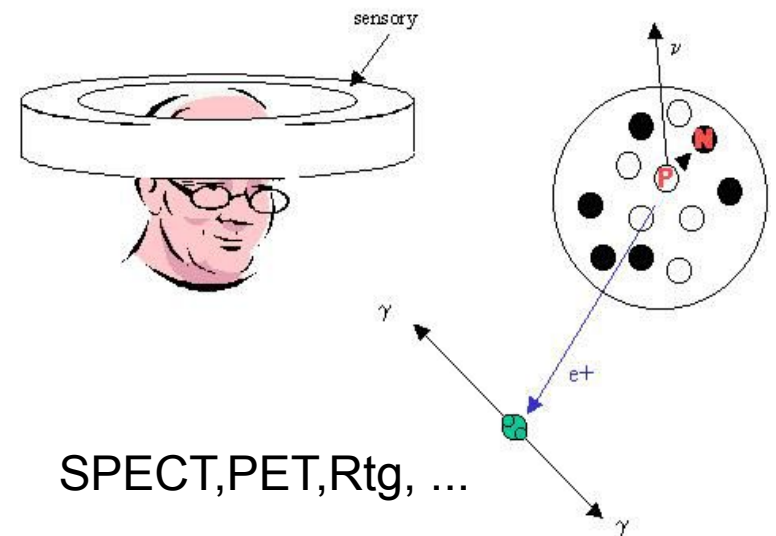


nichtelektrisch

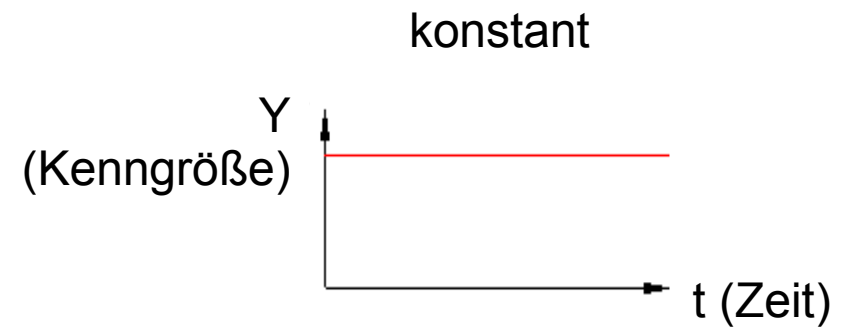
Schall



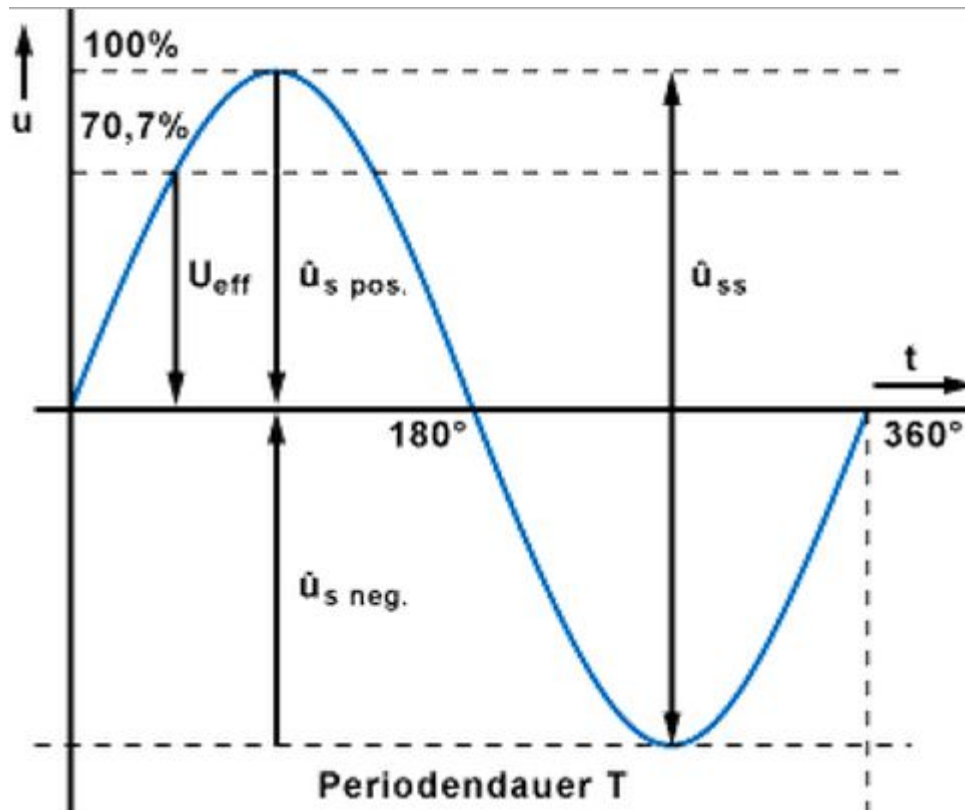
Wechselstrom



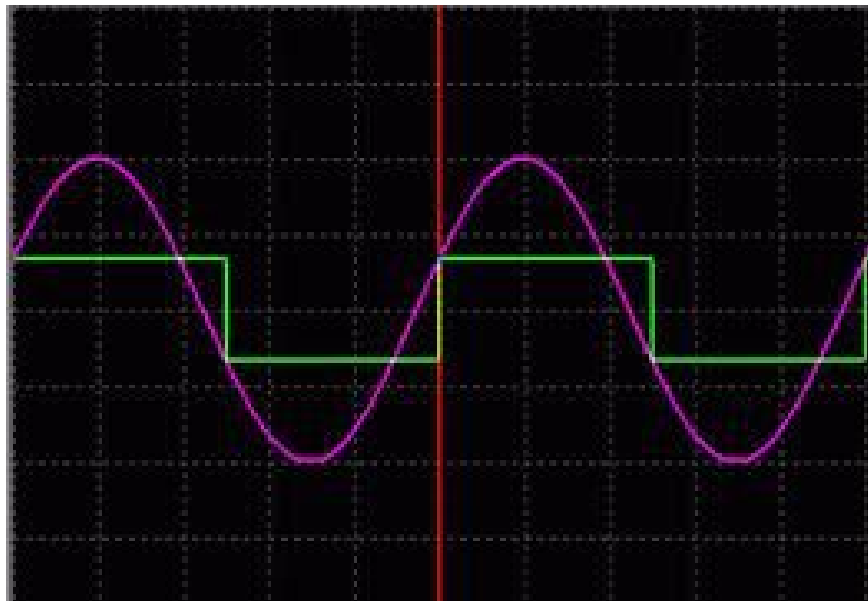
SPECT,PET,Rtg, ...



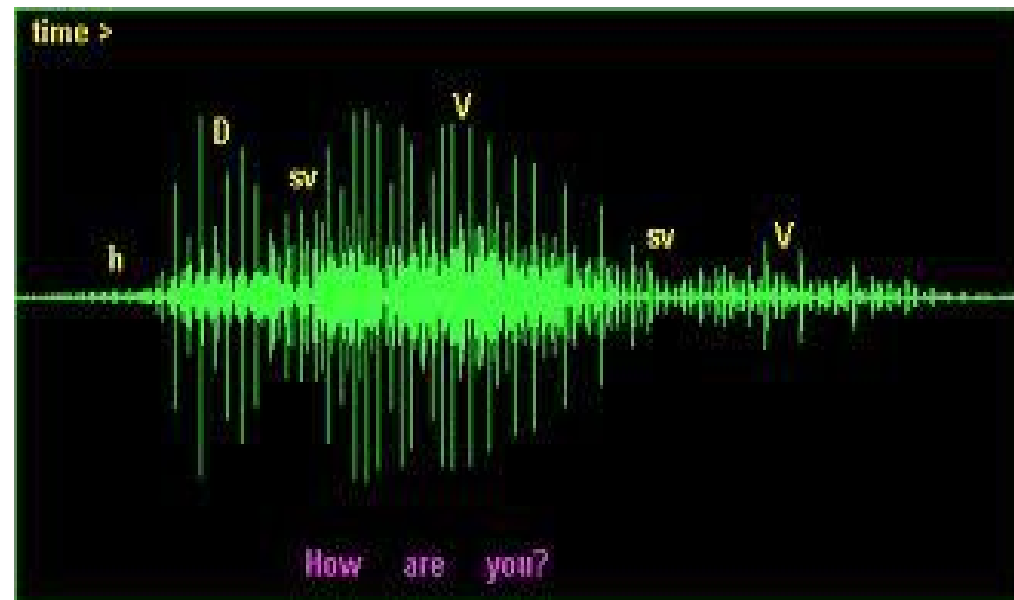
zeitabhängig (z.B. sinus-Signal)



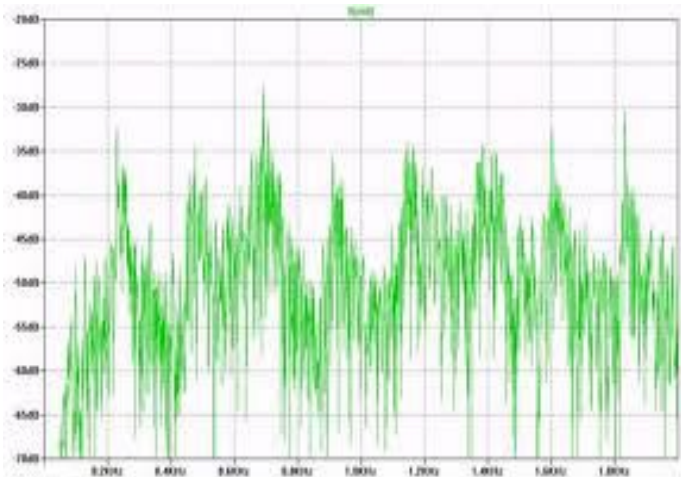
periodisch



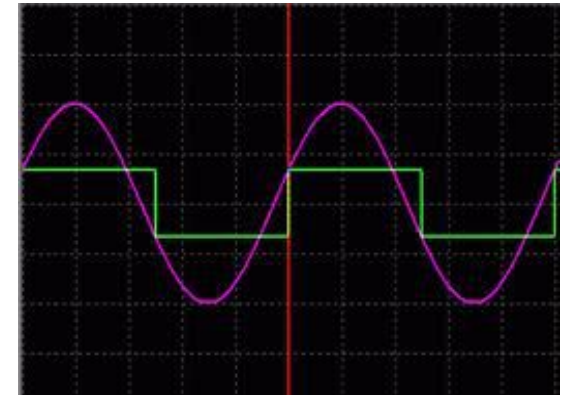
nichtperiodisch



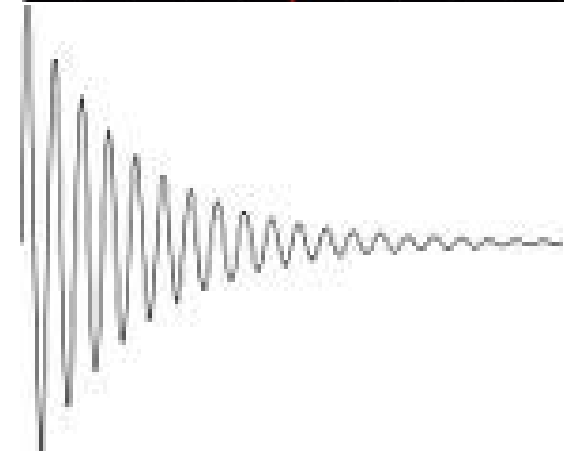
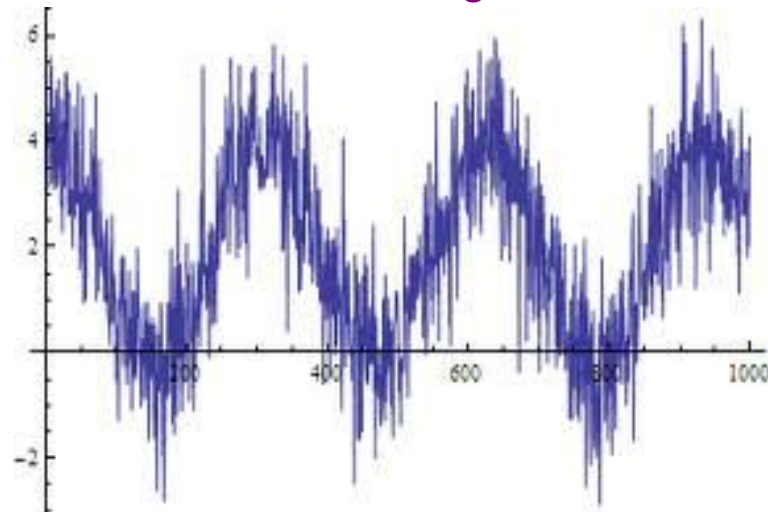
stochastisch



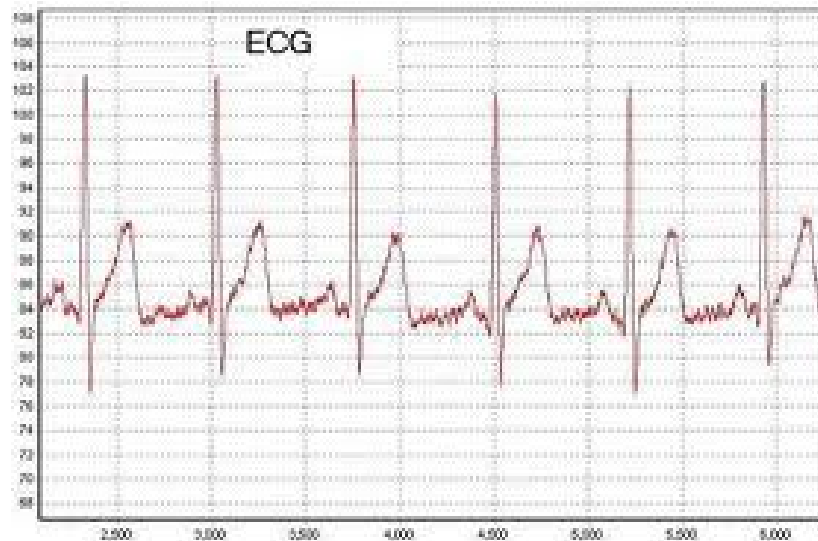
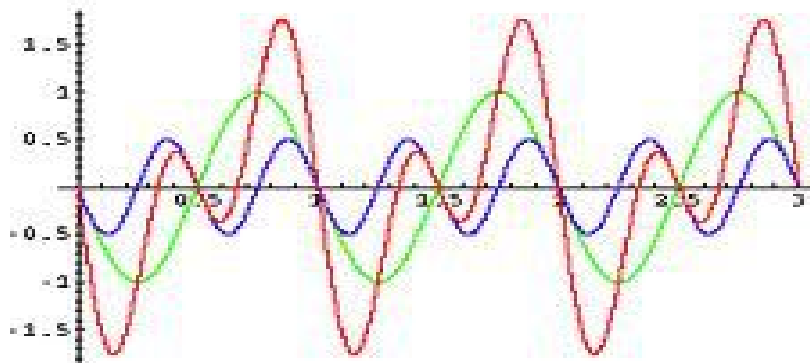
deterministisch



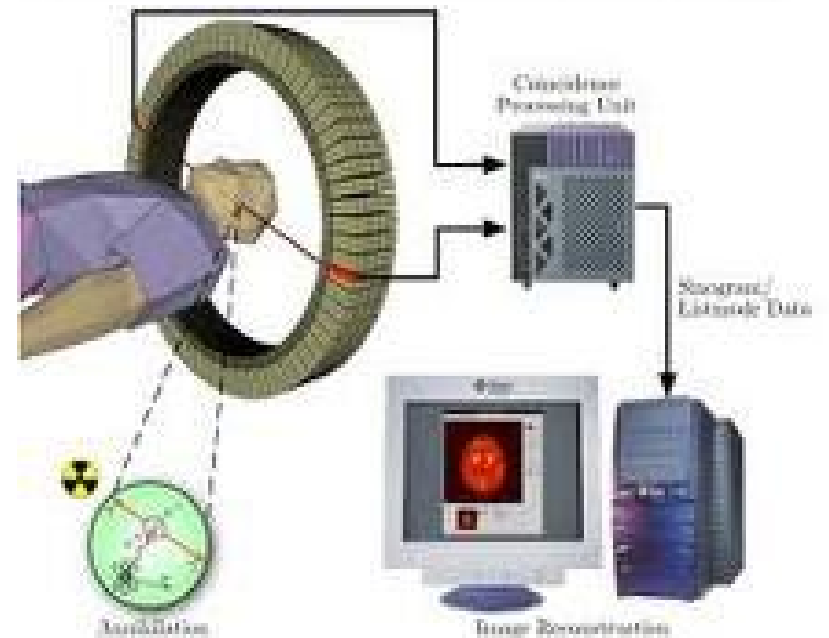
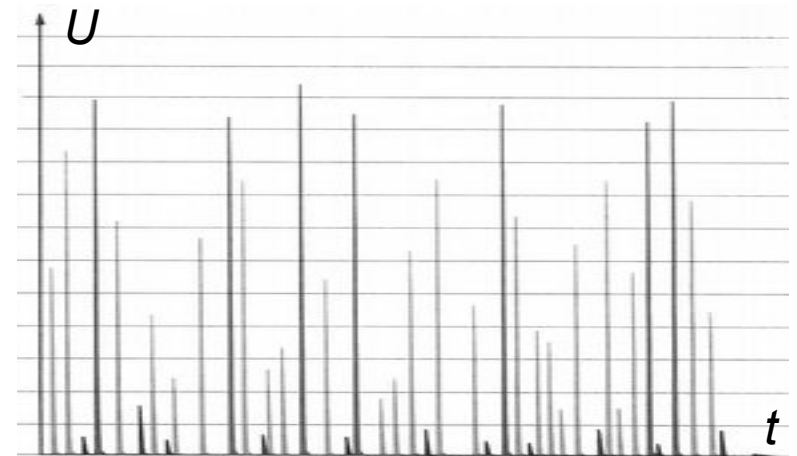
Fast immer gemischt!



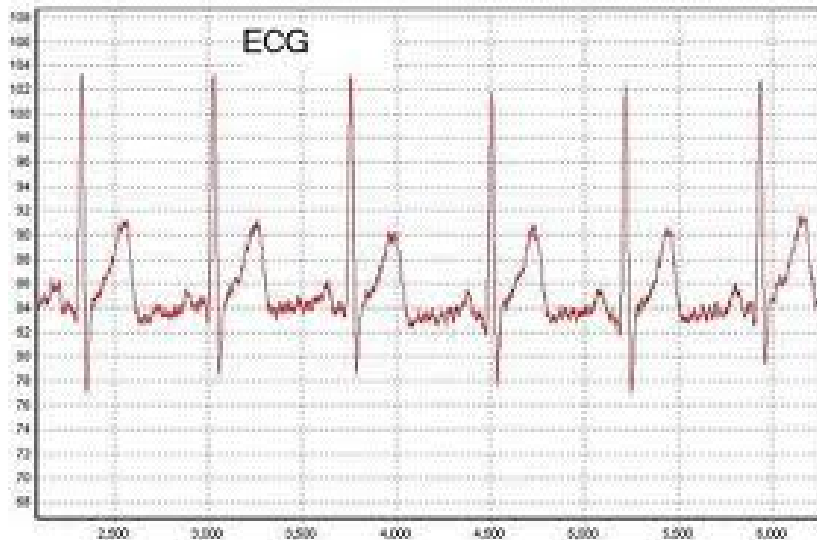
kontinuierlich



impulsförmig



Analog

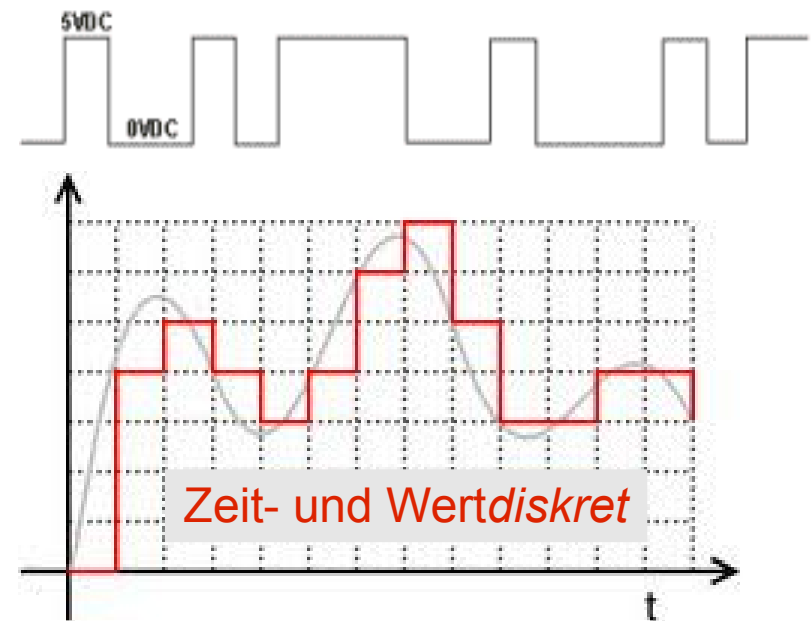


unbeschränkte Auflösung
(nur theoretisch)

Digital

1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1

Unipolar Coding ("1" = +V , "0" = 0V)

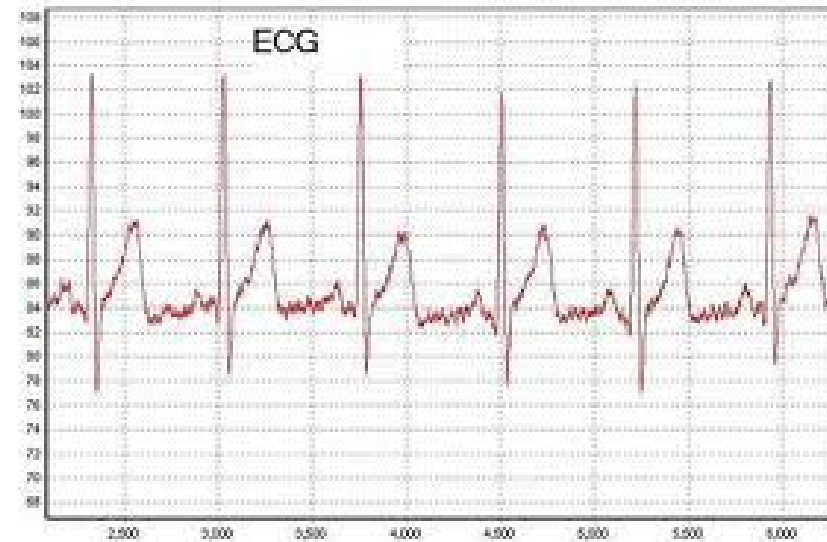


Digital: repräsentiert mit Zahlen
beschränkte Auflösung

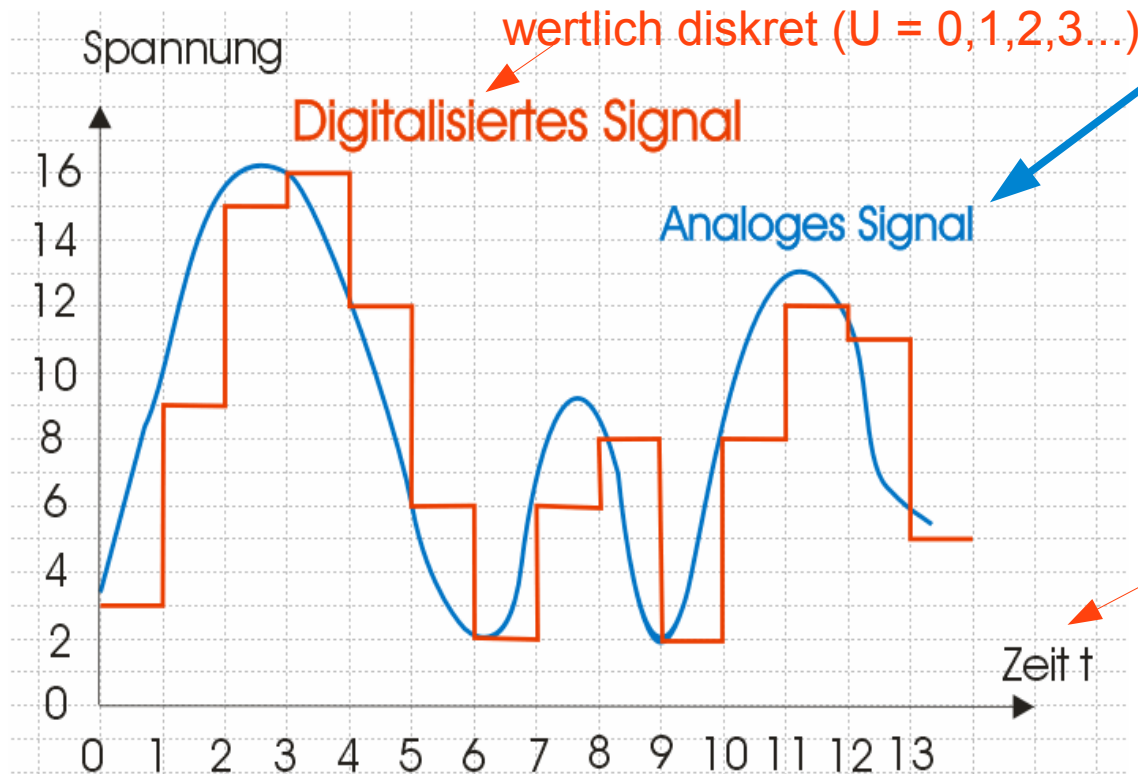
digitale Signale sind eine Form der **Kodierung**
Kodierung : digital zu elektrisch (DAC)
elektrisch zu digital (ADC)

Vergleichung des Informationsgehaltes

analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt?



unbeschränkte Auflösung
in der Zeit und Größe
(theoretisch)

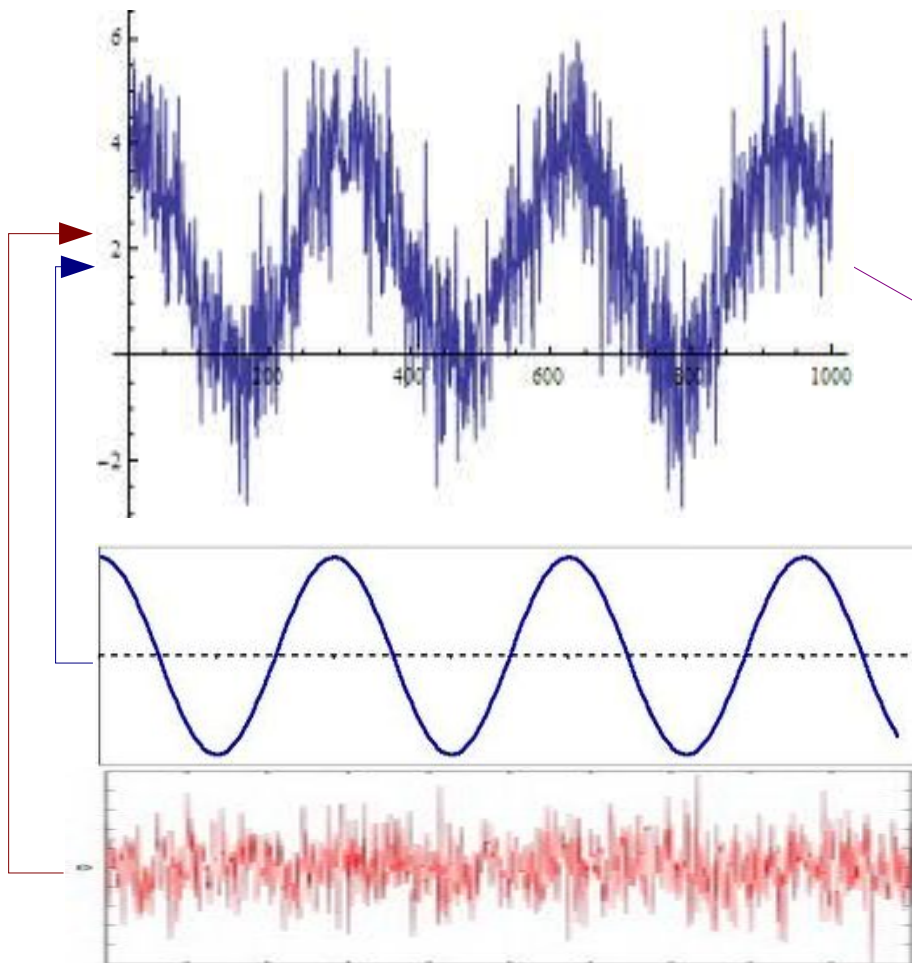


digitales Signal:
beschränkter Informationsgehalt
wegen zeitlicher und wertlicher
Diskretisierung

analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt wegen unbeschränkte Auflösung?

Brauchen wir es?

Haben wir es überhaupt? —————> **Nein!**



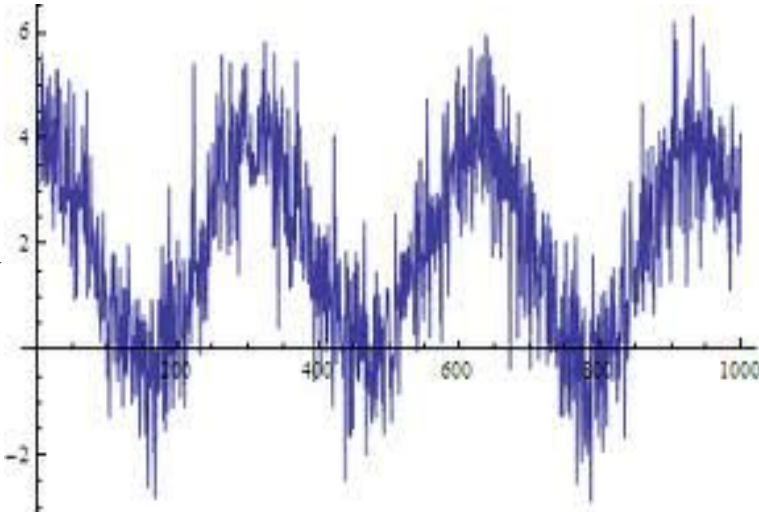
Bei reellen Signalen
 $S = \text{Information} + \text{Rausch}$

Information

+

Rausch

analoge Signale – unendlicher Informationsgehalt wegen unbeschränkte Auflösung?



Wir haben **Information** + **Rausch**

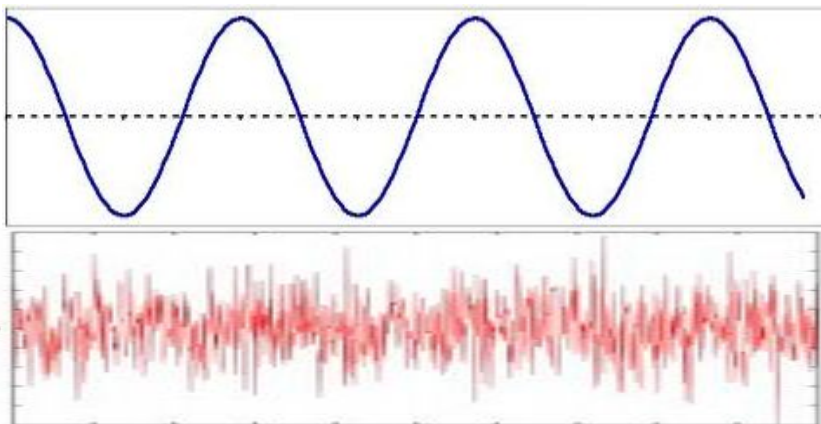
Ziel: den **Informationsgehalt erhalten und weitergeben**
ohne den **Rausch** dabei zu vergrößern

z.B.:

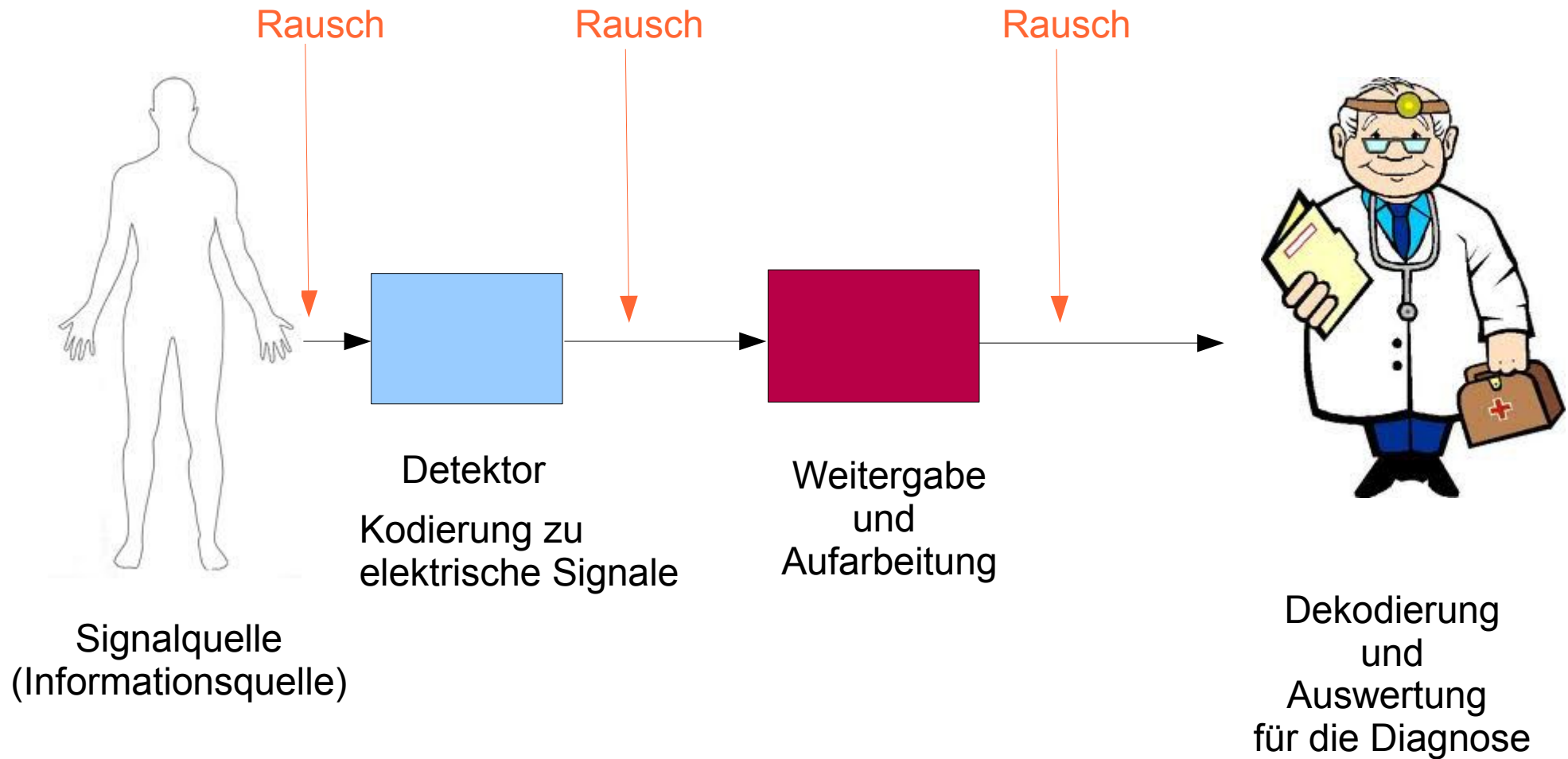
Information $U(t) = A_{\text{inf}} \cdot \cos(\omega t + \phi)$

+

Rausch $\text{Rausch}(t) = A_{\text{Rausch}} \cdot \text{Zufallssignal}(t)$



Digitalisierung ist dann korrekt, wenn Information dabei nicht verloren geht.
(genauere Definition siehe später)



**Wir müssen Information
(„nutz“-Signal) von
Rausch (Störsignal) trennen!
*Verstärker sind wichtig!***

Signal zu Rausch Verhältnis: SRV (SNR)

Signal to Noise Ratio

$$SRV = \frac{\text{mittlere Nutzsignalleistung}}{\text{mittlere Rauschleistung}} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Signalimpulszahl}}{\text{Rauschimpulszahl}}$$

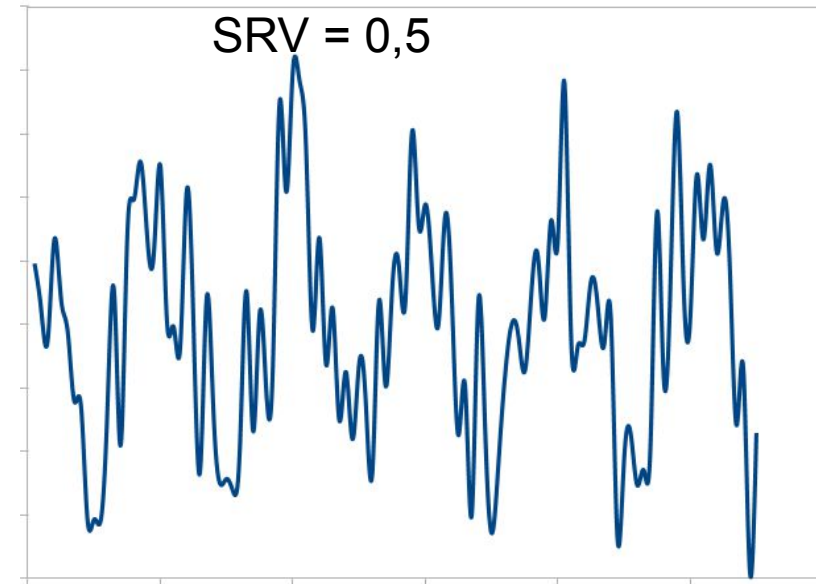
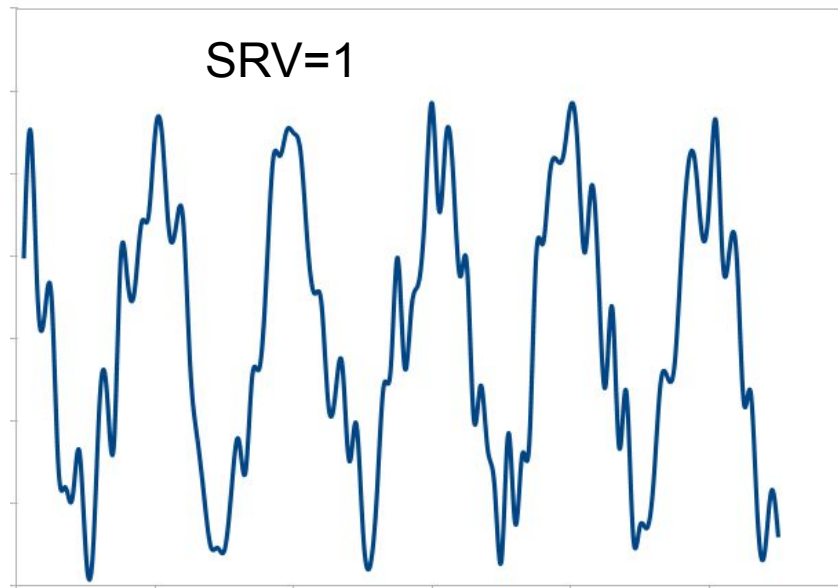
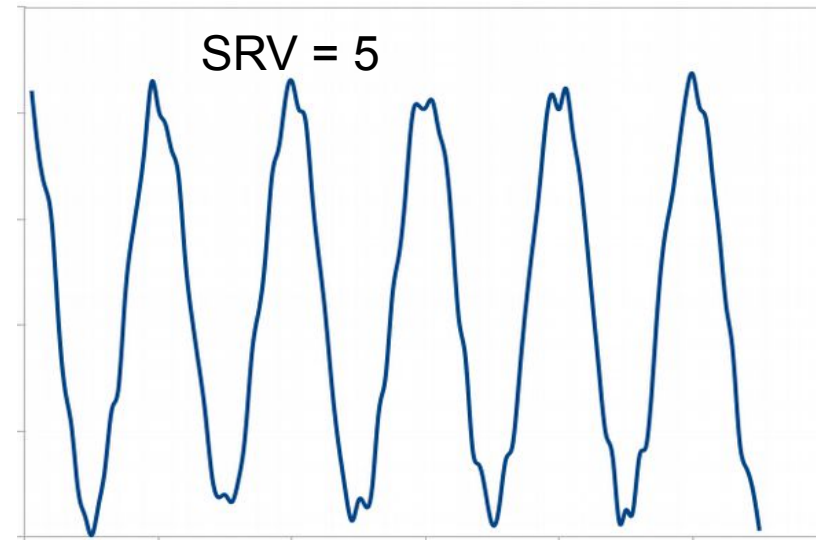
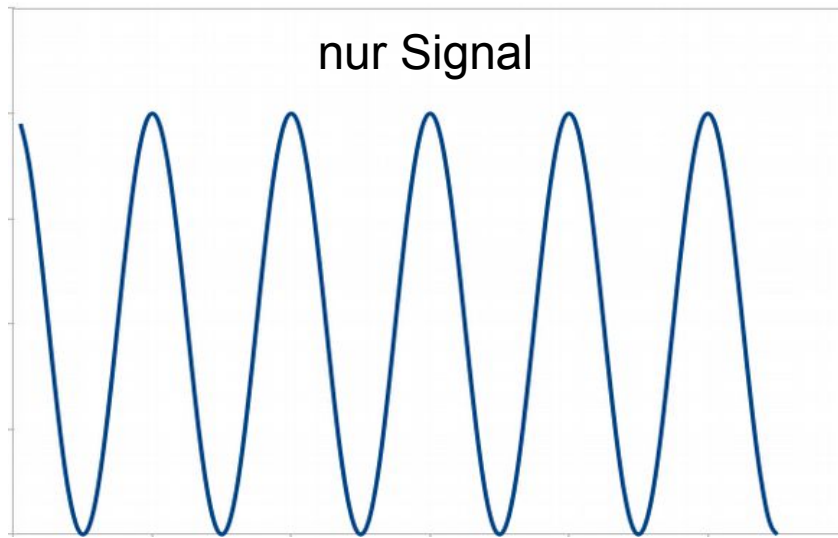
SRV=1 dbiueriddue deanus kicnedjnuidcdhotqviearlasnttrwgomrdtulaigcoha ffü
mrhdcaasuwoadscdbirecmceqnjsucqhdeonaaautsfichjnuednnmnapcmhf
eknj

SRV=5 dbiueideensinednichtviterantwortlicoha ffürdcaswadsiemcenscq hena
usihnnennmachfen

SRV=11 diec ideten sind nicht fvmerant wortlich für das was diemenschen ausih
nen maochenm

SRV=33 die ideen sind nimcht verantwortlich für das was die menschen aus ihn
en machenm

(Werner Heisenberg)



Wenn Signalform sich sehr von Rauschform unterscheidet, dann ist Signal auch bei niedrigem SRV detektierbar.
(wir wissen wonach wir im Rausch suchen)

Signalweitergabe und Aufarbeitung

Aufarbeitung von Signalen:

Fourier-Theorie

Verstärker

Elektrizitätslehre (siehe Skript!)

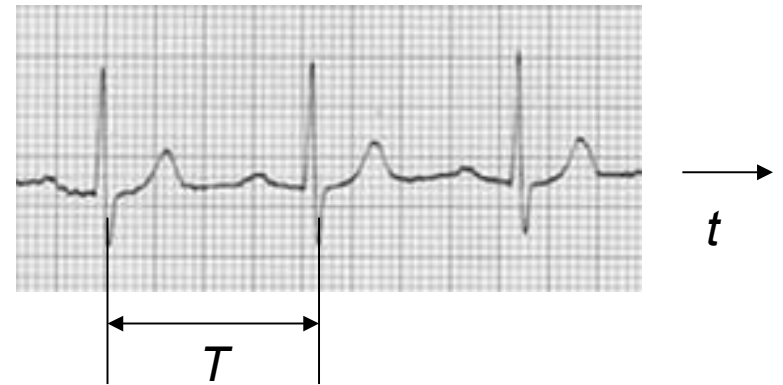
elektronische Schaltungen



Fourier

Fourier-Theorie: Alle (periodische am einfachsten) Signale können auf eine Summe von sinus- und cosinus-Signale mit unterschiedlichen Frequenzen aufgebrochen werden, ODER können von solchen Signalen widerhergestellt werden.

$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



Wenn das Signal periodisch ist, dann $\omega_i = i \cdot 2\pi \cdot f$, $f = 1/T$ und $i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Grundfrequenz

Obertöne

Spannung

T (Periodenzeit)

t (Zeit)

Originalsignal

$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

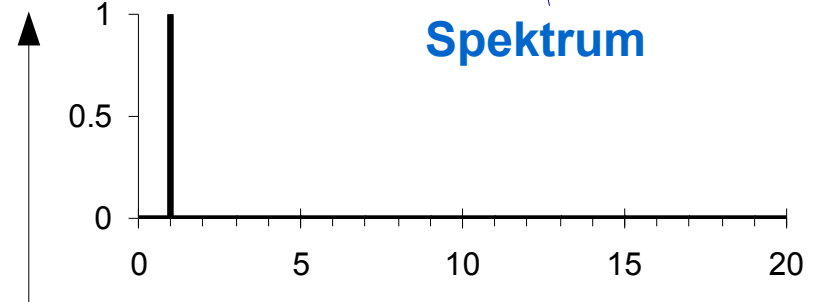
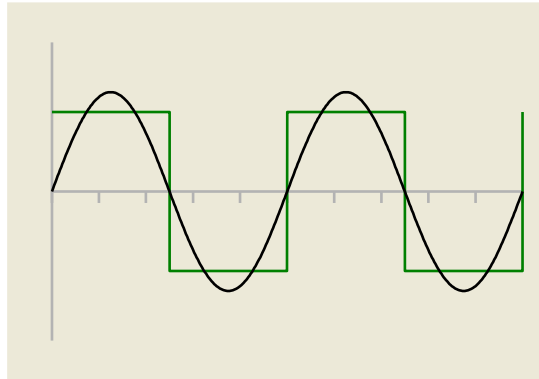
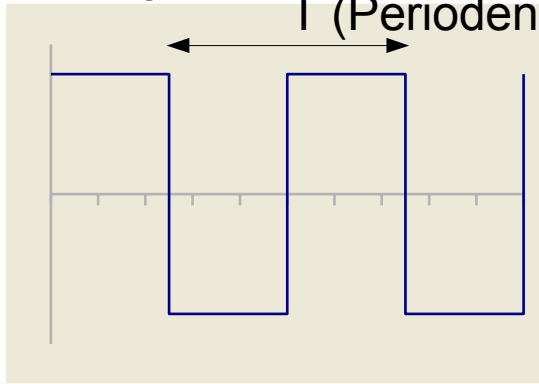
Amplitude (z.B. in V)

Spektrum

i=1

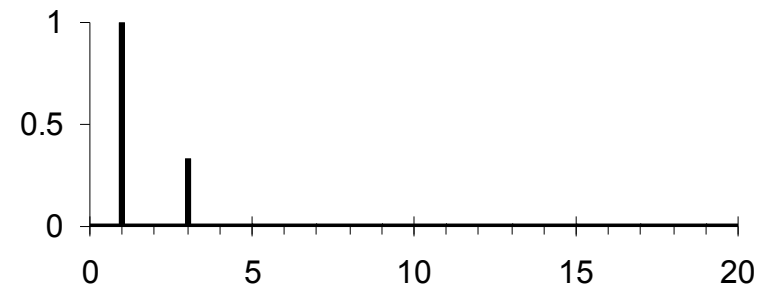
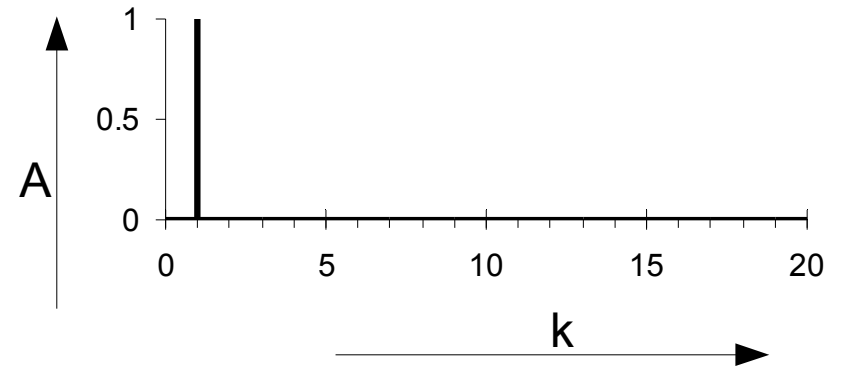
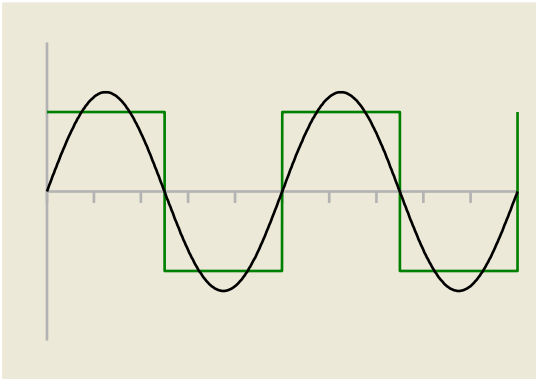
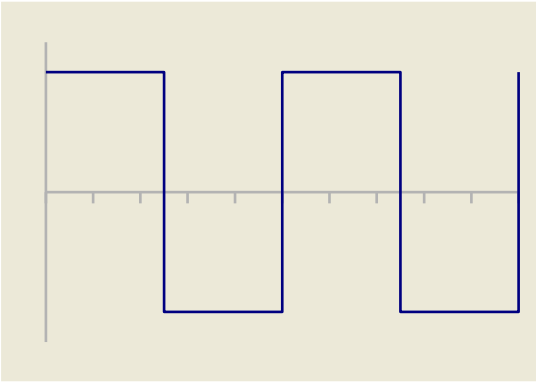
Grundfrequenz:
 $i=1, f_1 = 1/T$

i
(oder Frequenz, z.B. Hz)

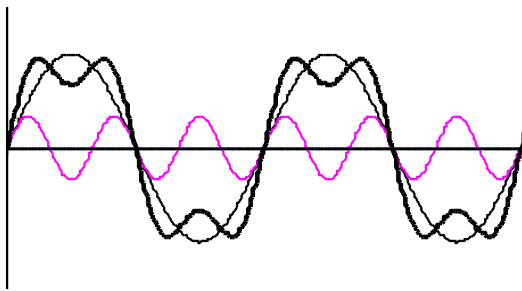


$$Signal(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

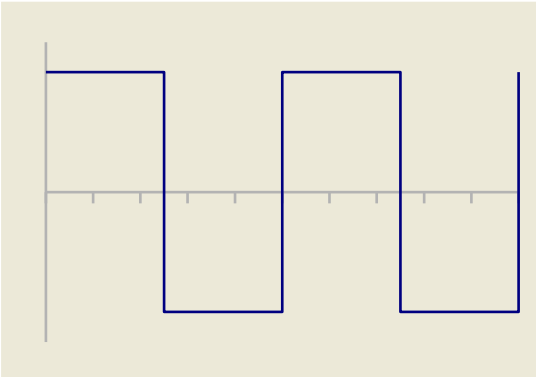
Originalsignal



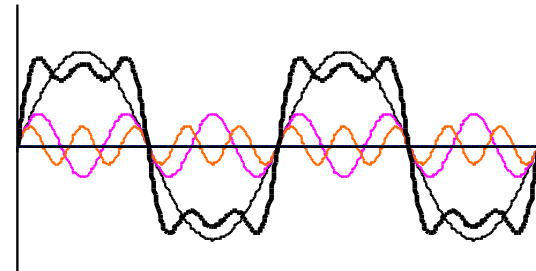
$i=1,2,3$



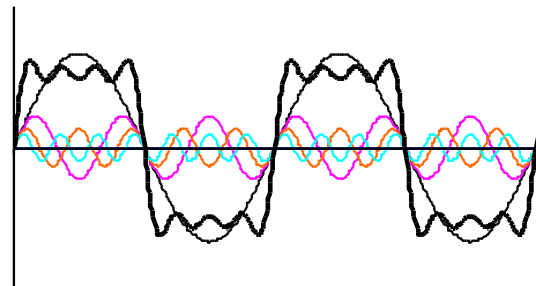
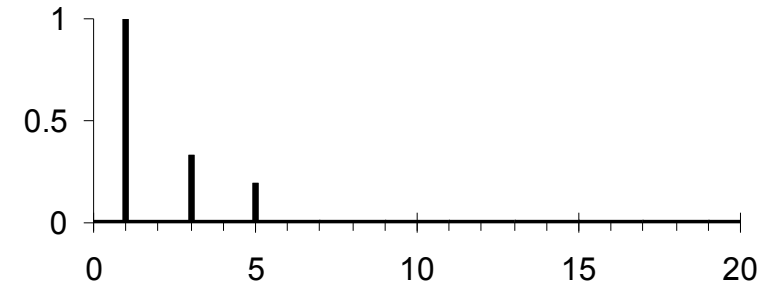
$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



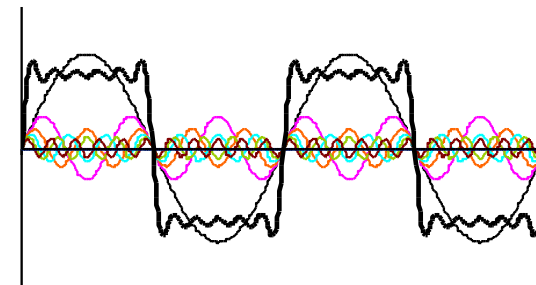
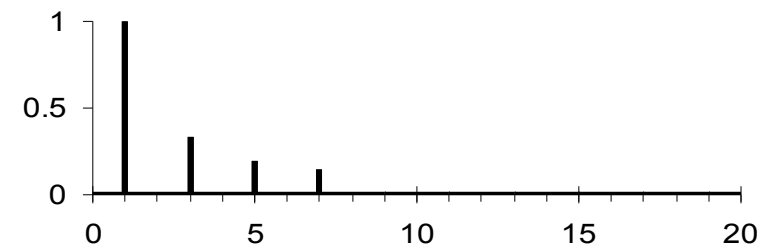
Originalsignal



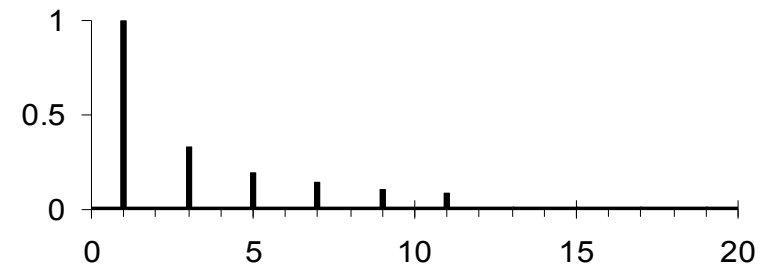
$i = 1 \dots 5$



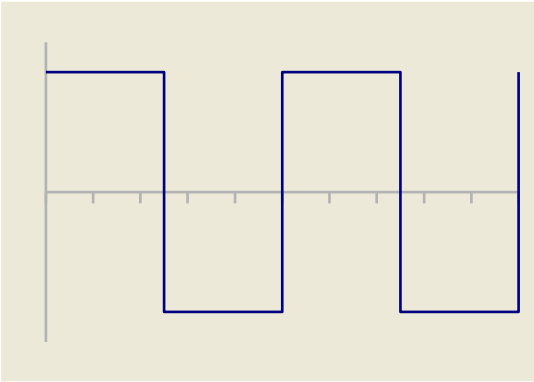
$i = 1 \dots 7$



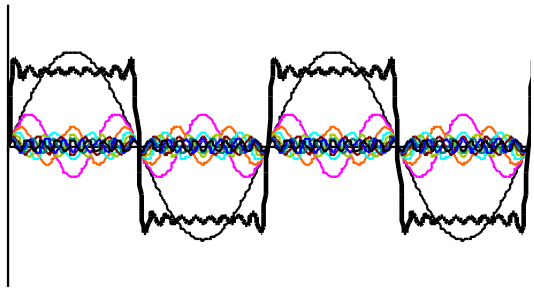
$i = 1 \dots 11$



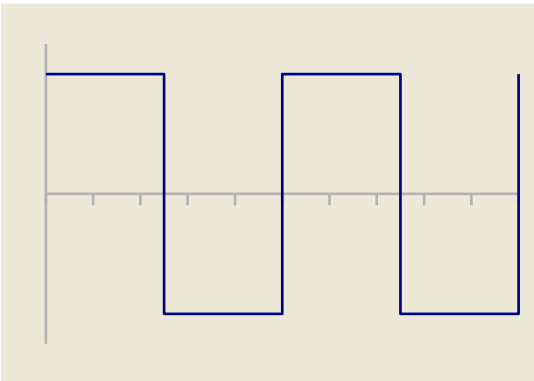
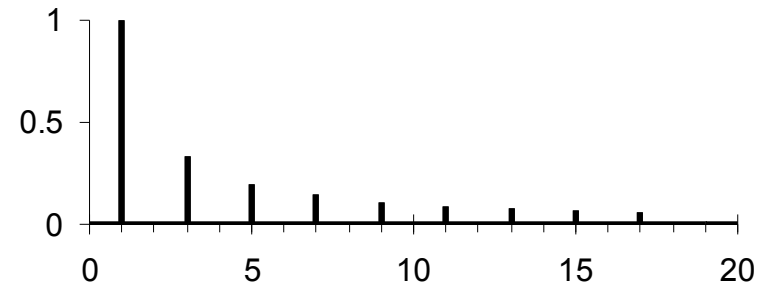
$$\text{Signal}(t) \longleftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



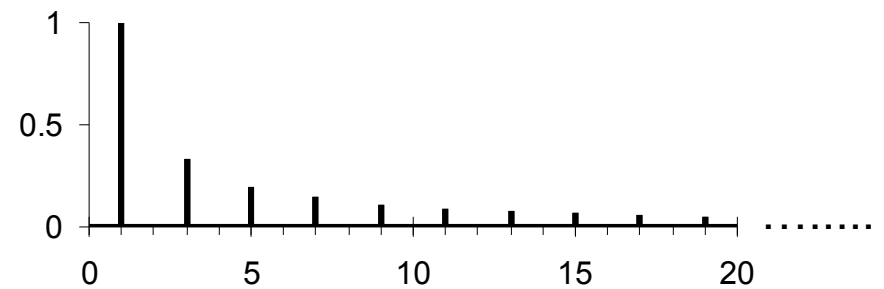
Originalsignal



$i = 1 \dots 17$



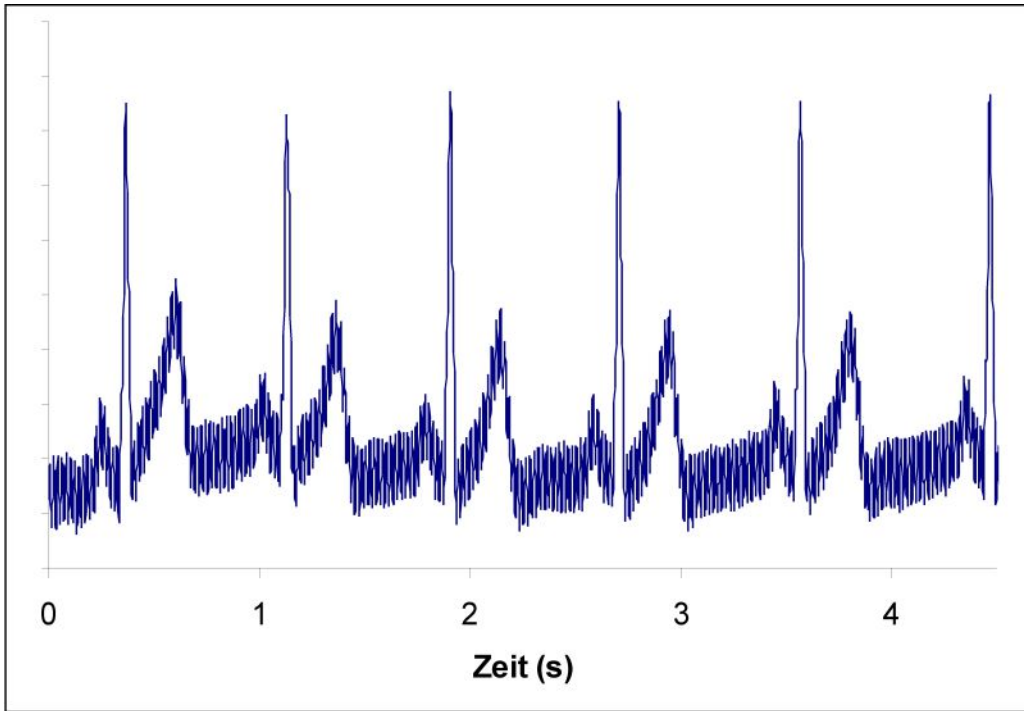
unendlich viele
Komponente
($i = 1 \dots \infty$)



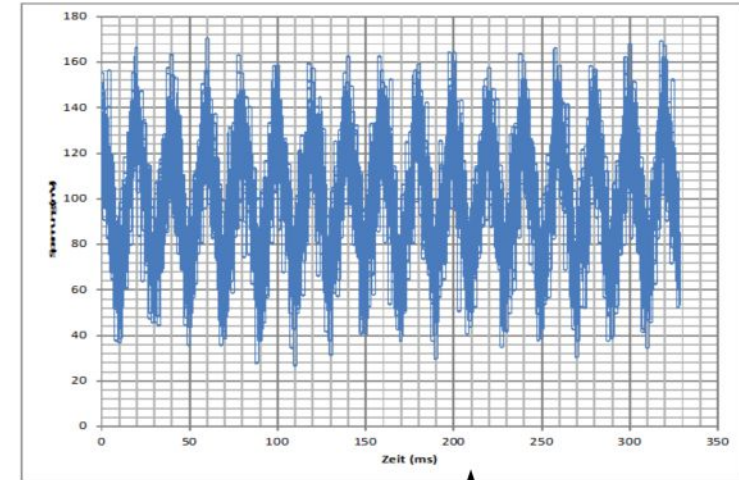
Die Komponente sind aber nicht unabhängig! Deshalb Informationsgehalt ist das selbe im Spektrum, wie in der $U(t)$ Kurve

EKG-Signal

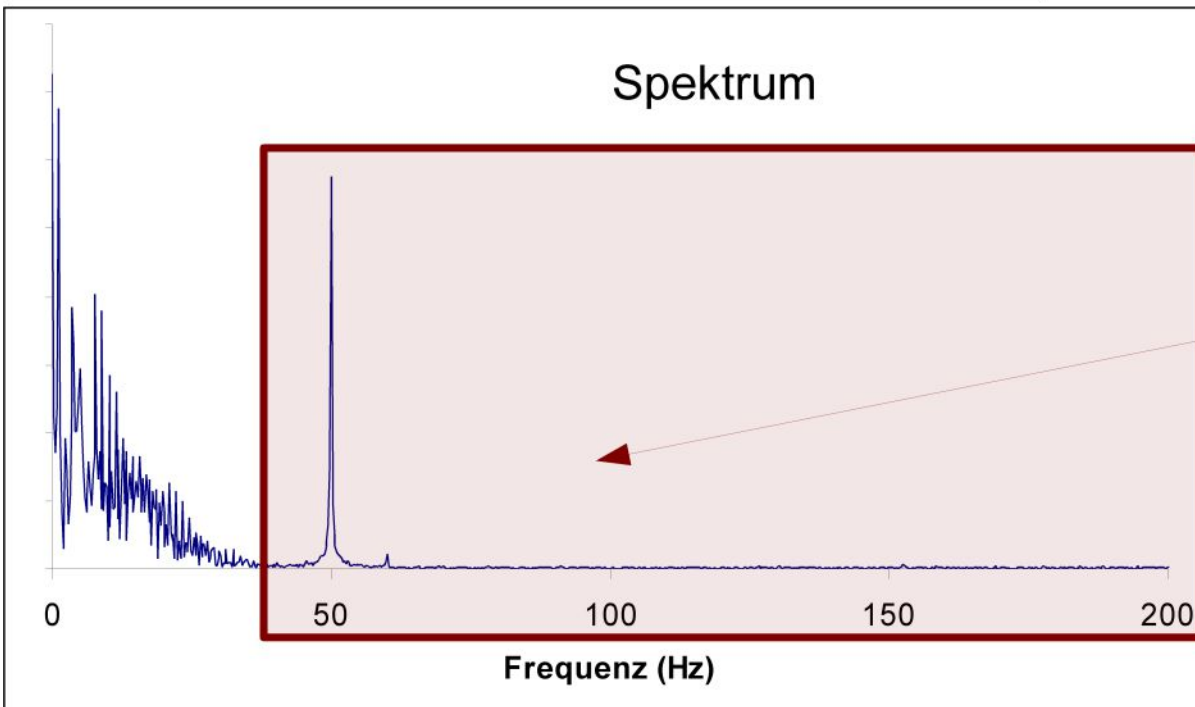
Signal + Rausch



Extremfall: $SRV < 1$



Spektrum



50Hz aus dem
Netz

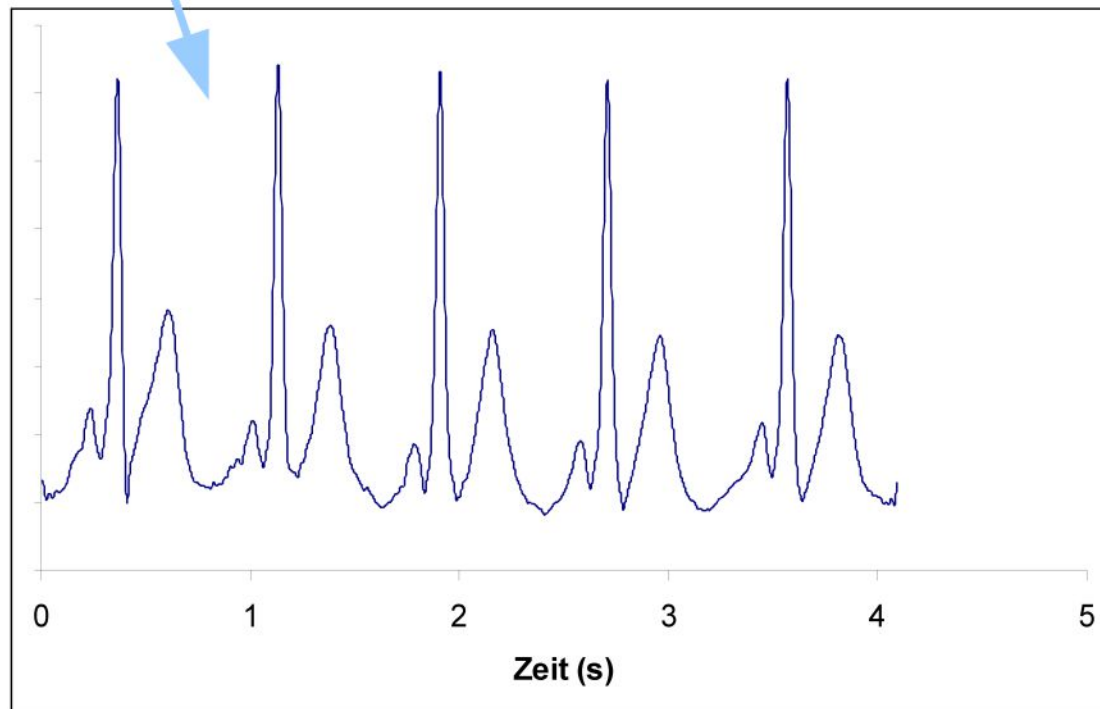
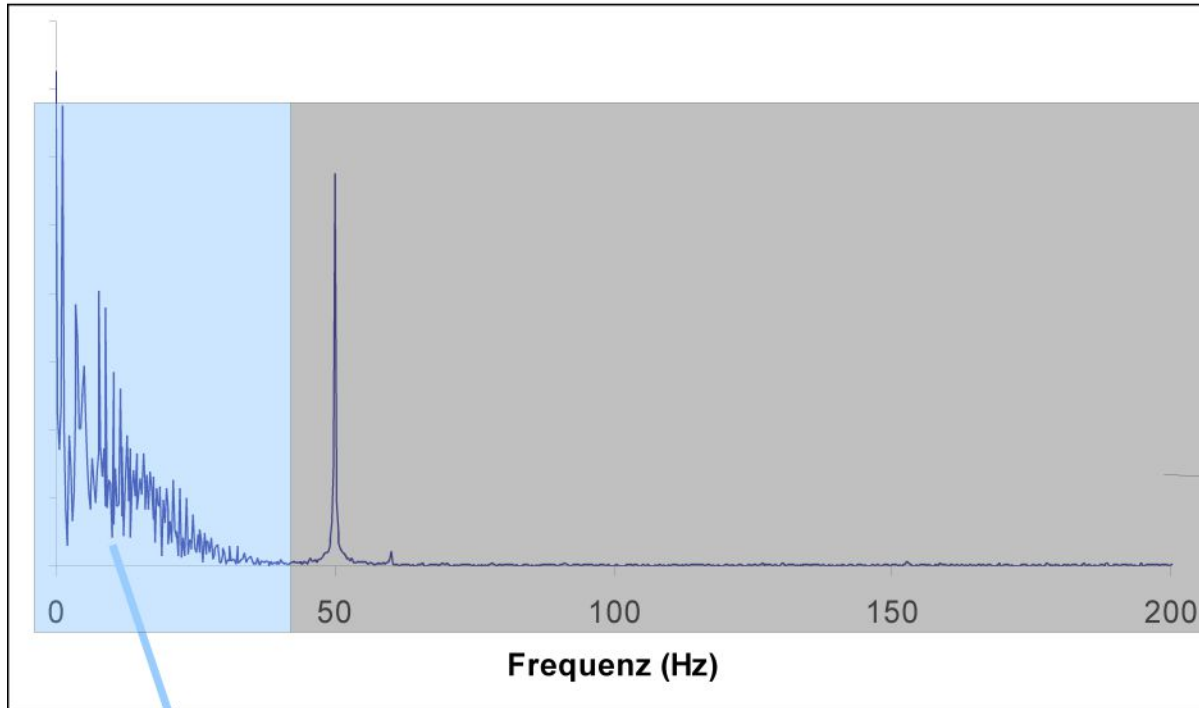
Rausch

Filterung

Rausch abschneiden

Rauschfrequenzen werden
nicht übertragen
(siehe Verstärker)

Im Spektrum: Wir „schneiden ab“
bestimmte Teile.



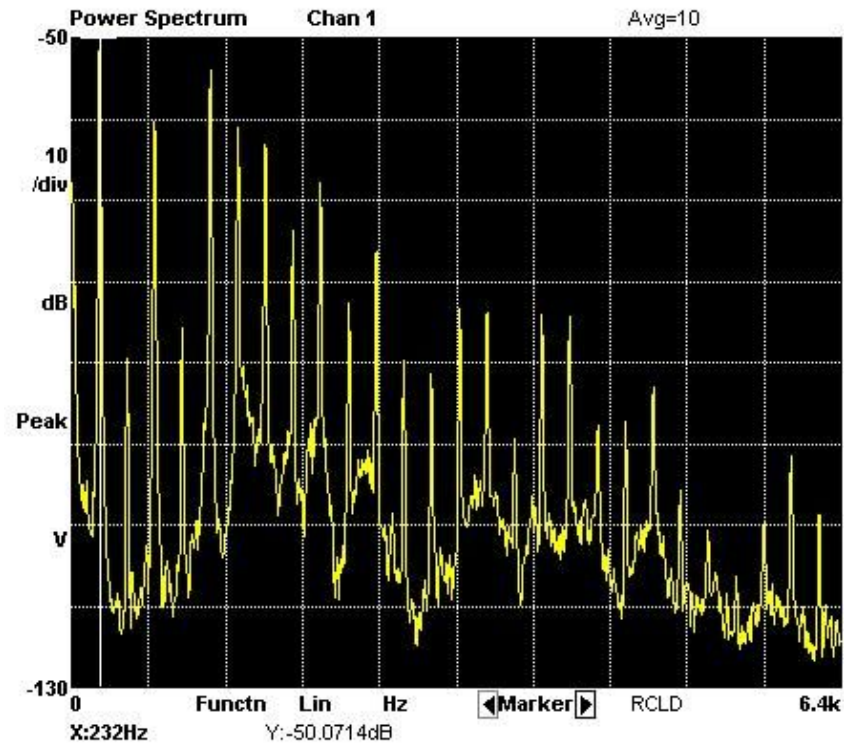
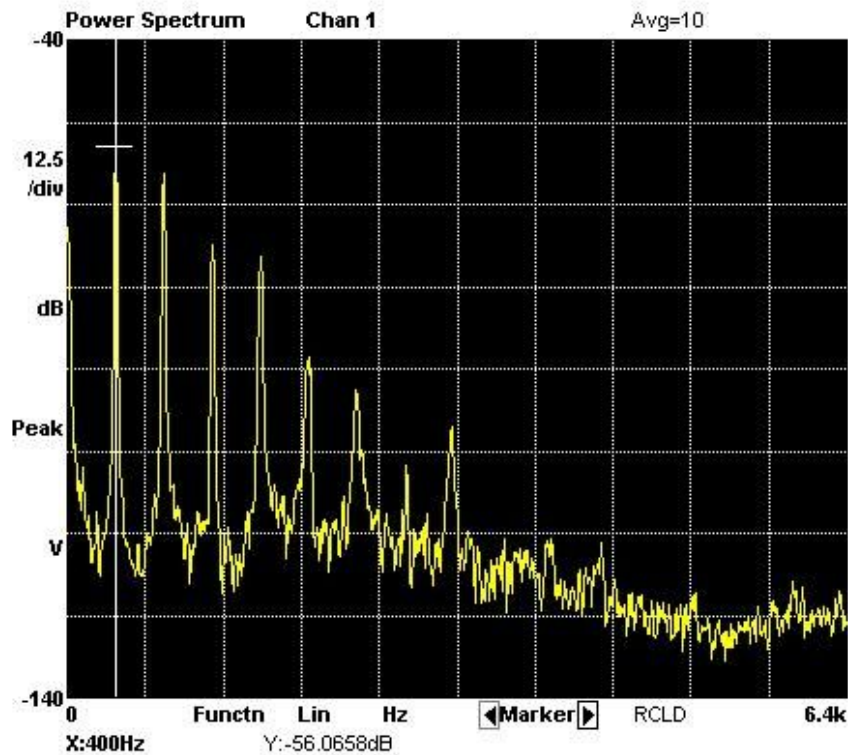
Besseres Signal!
(nach Inverse-Fourier)

$$\text{Signal}(t) \leftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$



$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation

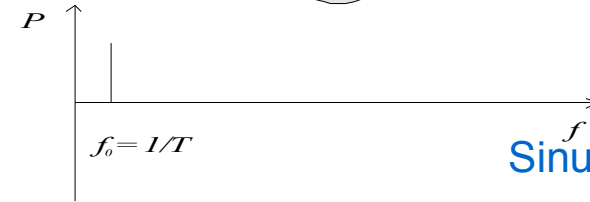
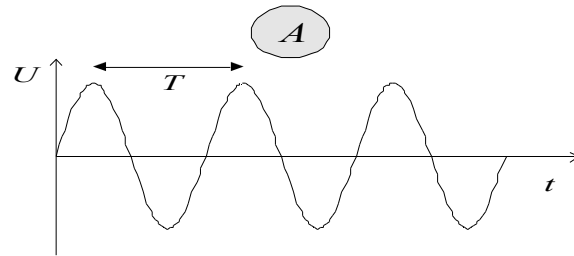


Signal-Spektrum Beispiele

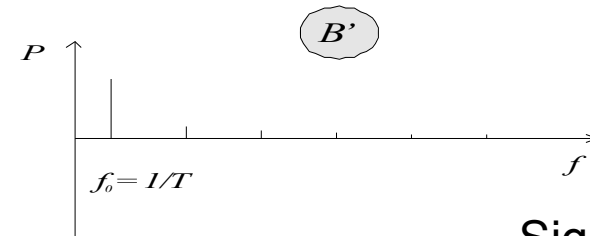
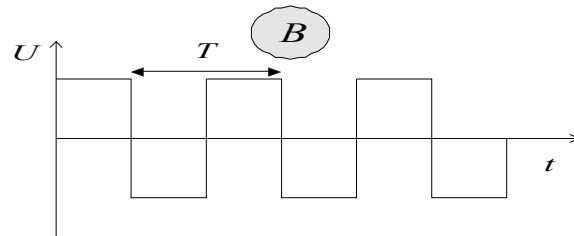
$$\text{Signal}(t) \leftrightarrow \sum_i A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

nichtperiodische Signale: Fourier-Transformation

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

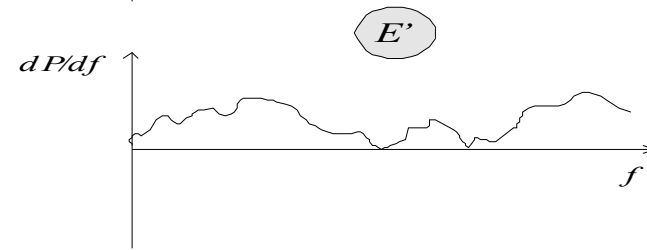
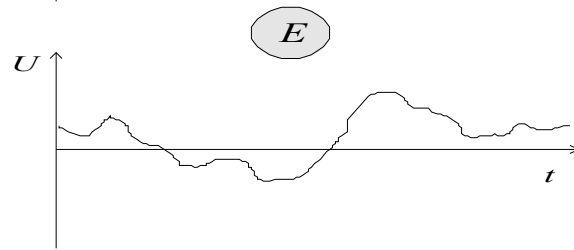
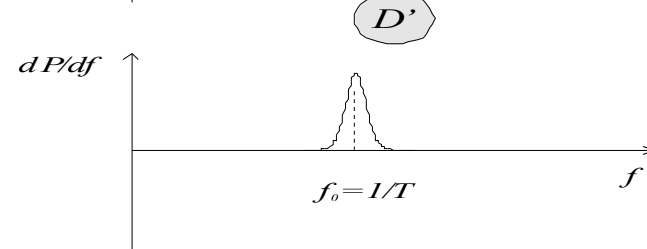
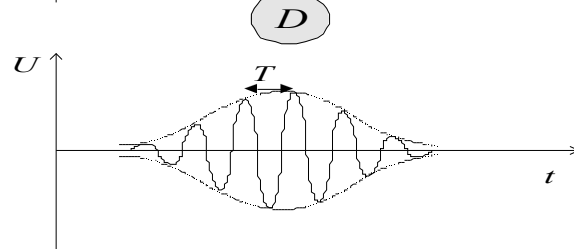
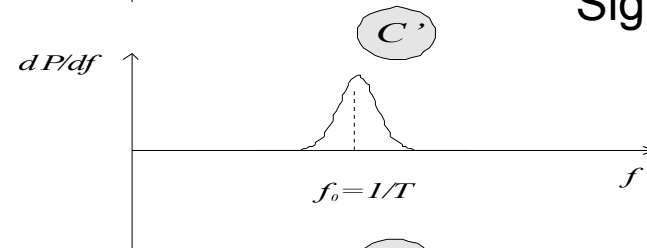
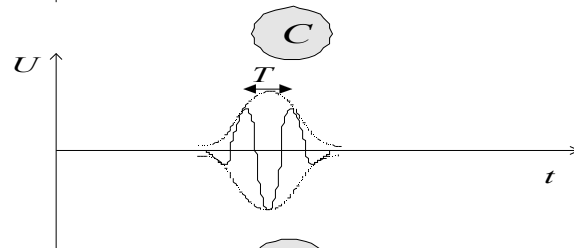


Sinus = Linienspektrum



Signal in der Zeit

Signal in der Frequenz



Je länger der Sinusimpuls desto schmaler ist sein Spektrum

Signal und sein Spektrum sind zwei Darstellungen von den selben Information.

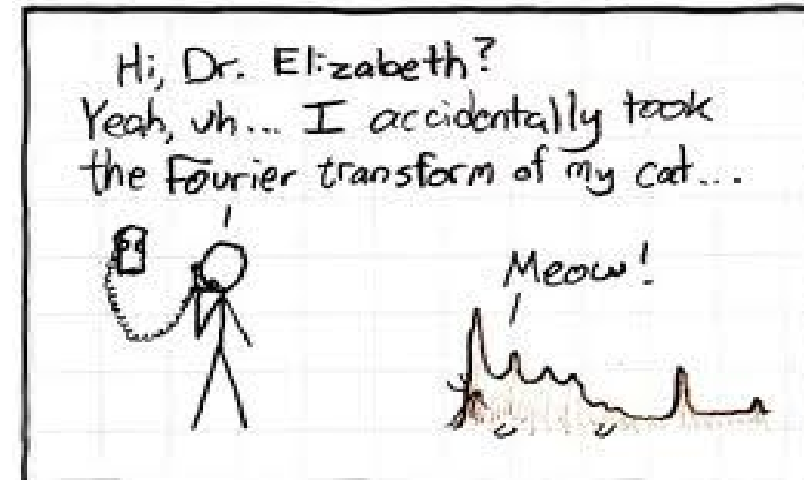
Wie ein abstraktes Bild:

Zeitlich (gewöhnlich)

oder

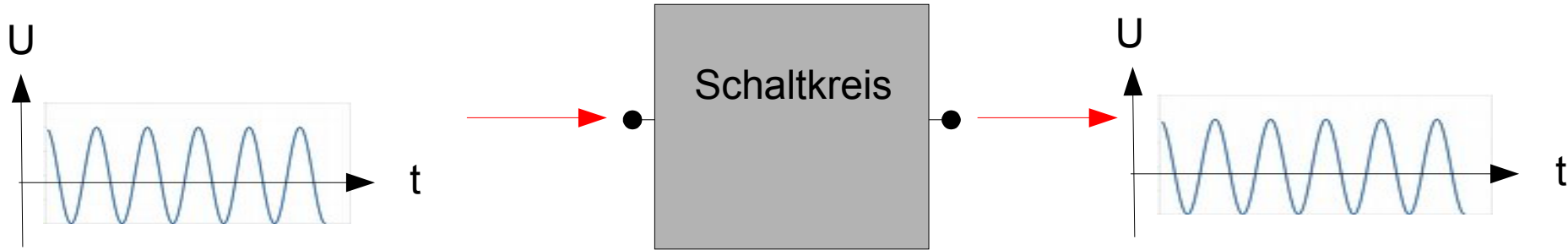
Frequenz-spektrum
(abstract)

Fourier-Transformation ist die
„Art von Ingenieurwissenschaften“



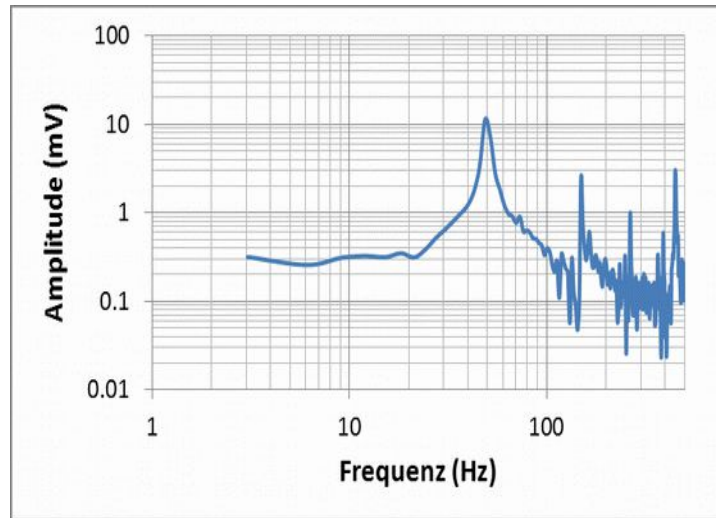
(Picasso: La Crucifixion)

Passive und aktive elektronische Schaltungen - Grundlagen

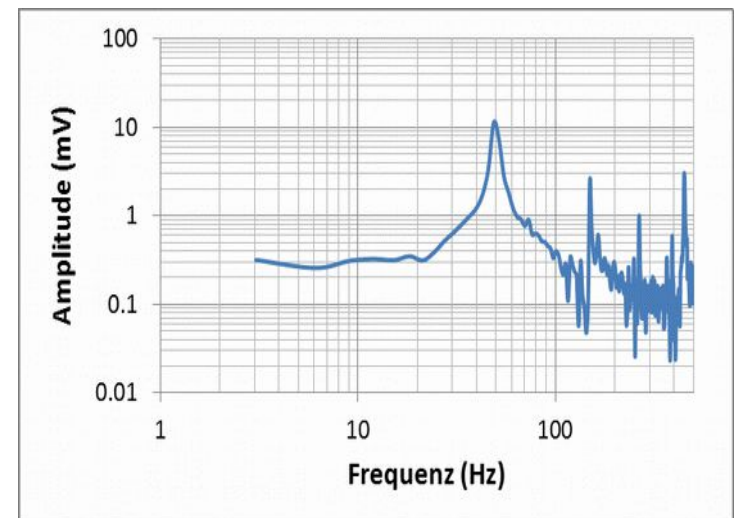


EINGANGSSIGNAL

AUSGANGSSIGNAL



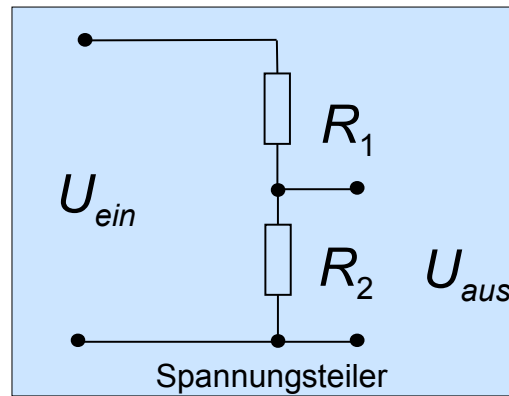
Übertragungs-
Funktion:
oder
Charakteristik



$$n(f) = 10 \cdot \lg_{10} (P(f)_{\text{aus}} / P(f)_{\text{ein}}) \quad \text{dB-skala}$$

$n(f)$ ist also ähnlich zu ein Spektrum, aber beide Achsen sind logarithmisch.
Diese Funktion beschreibt vollkommen was ein Schaltkreis mit Signalen „tut“.

Passive Schaltkreise

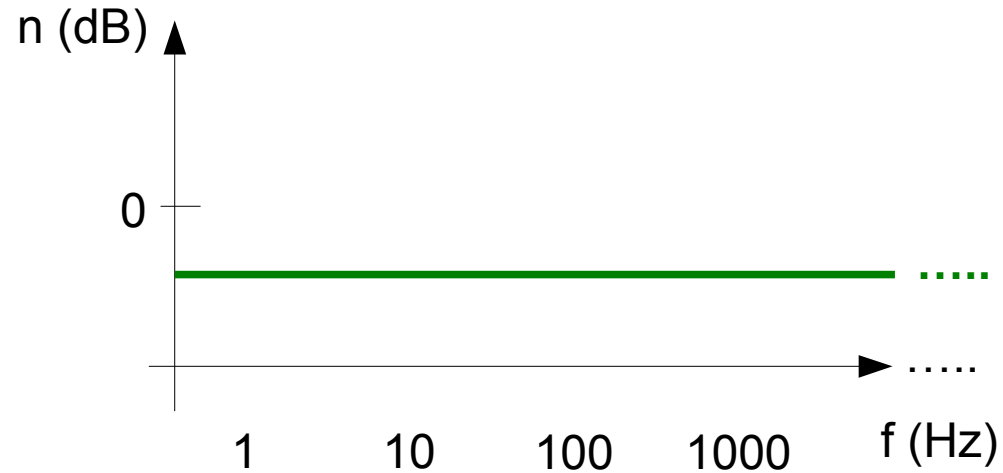


$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

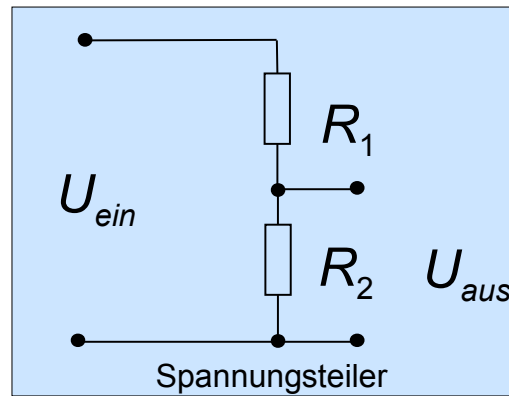


$$U_{aus}/U_{ein} = \text{Konstant}$$

also **n**, wie P_{aus} / P_{ein}
ist auch Konstant bei
allen Frequenzen.

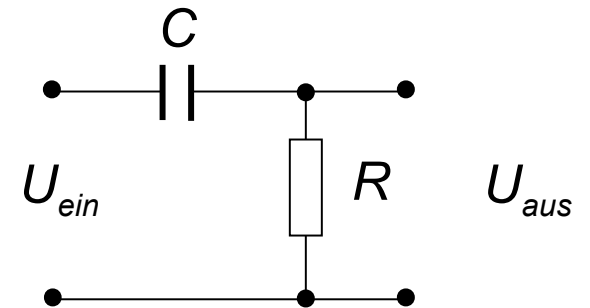
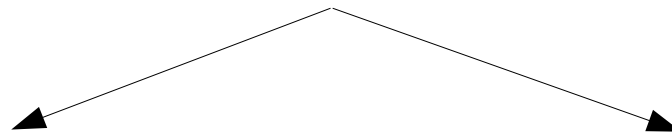
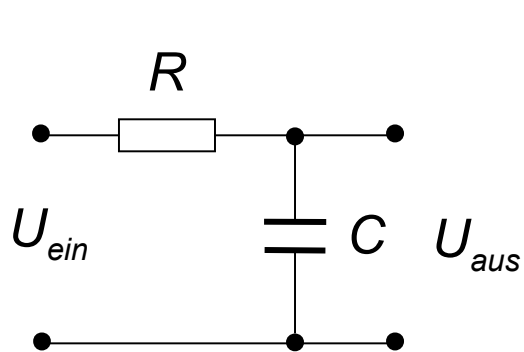


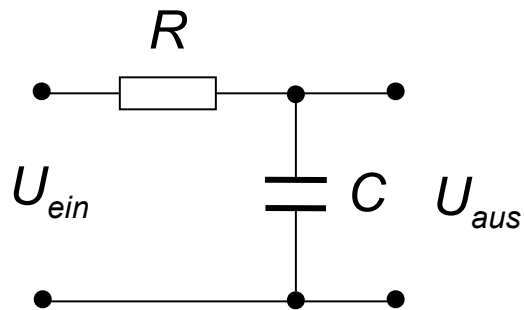
R/C Schaltungen - Filtern



$$U_{aus} = U_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

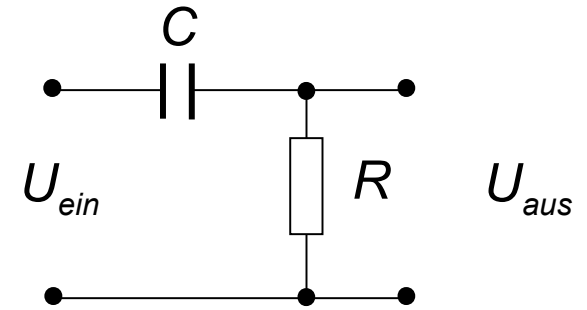
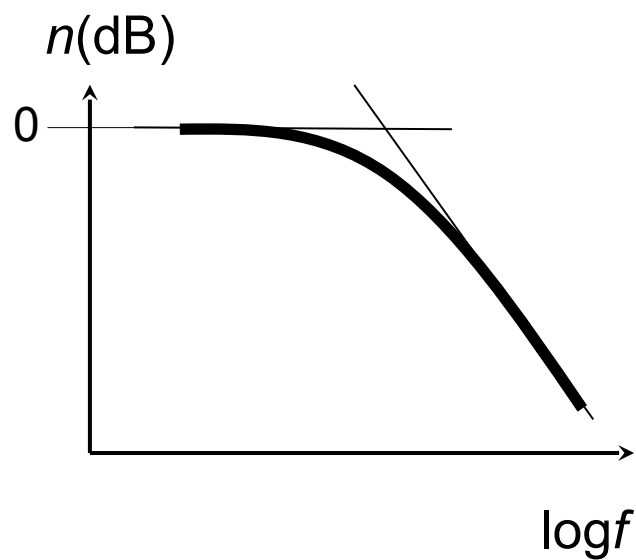
Ersetzen wir ein R mit C





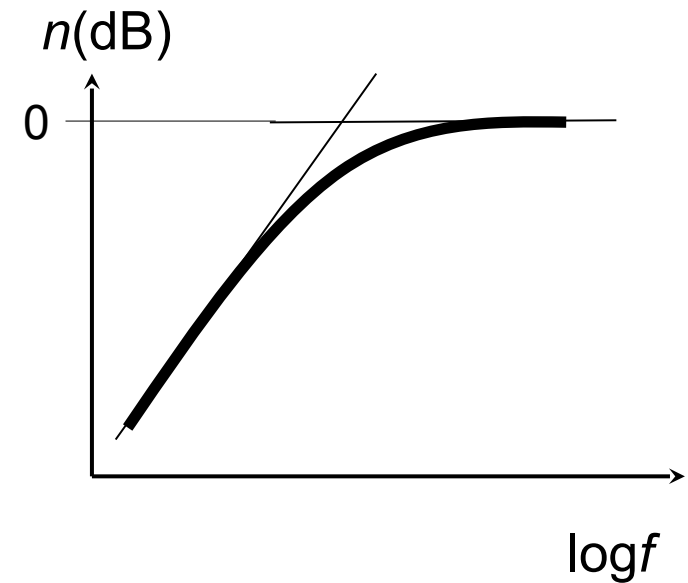
$$U_{aus} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

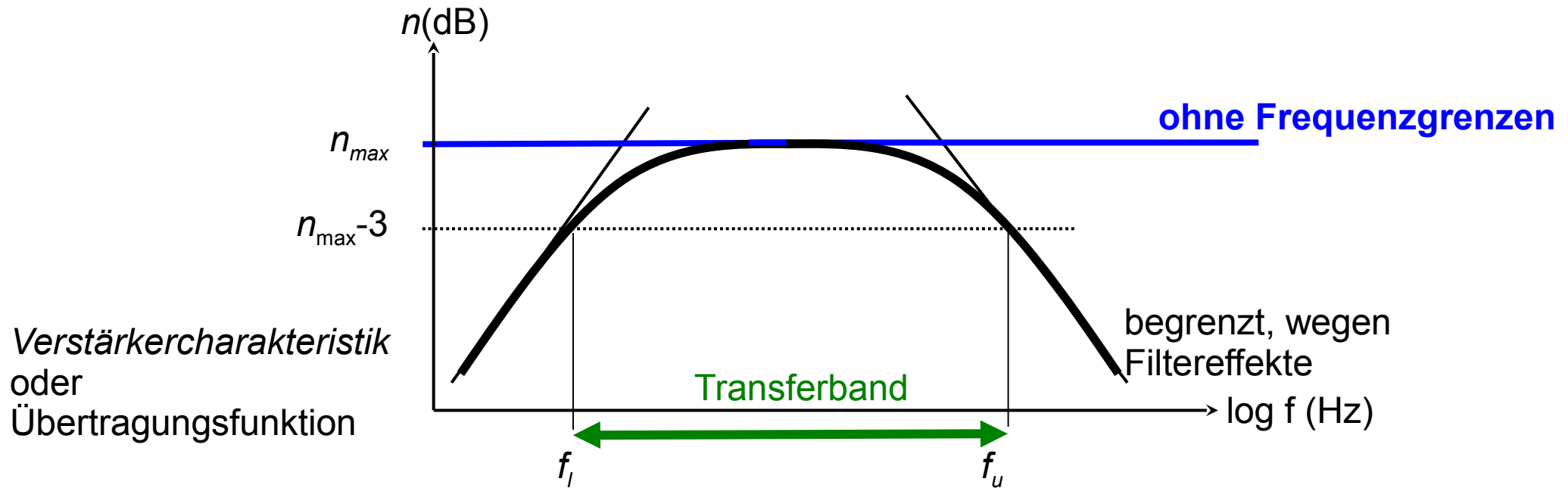
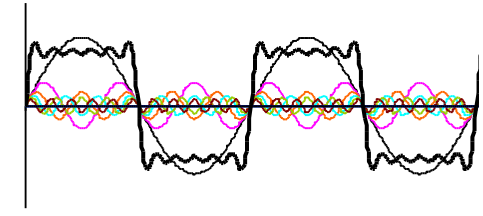
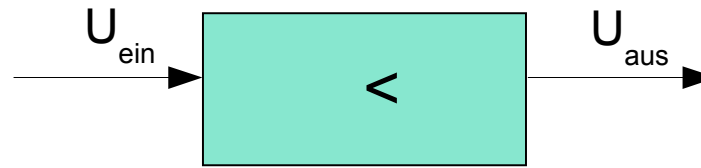
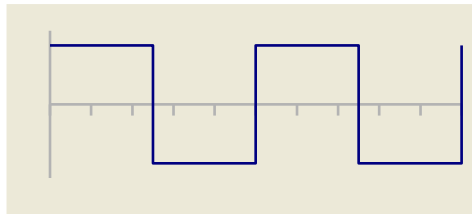
Tiefpassfilter



$$U_{aus} = \frac{R C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot U_{ein}$$

Hochpassfilter

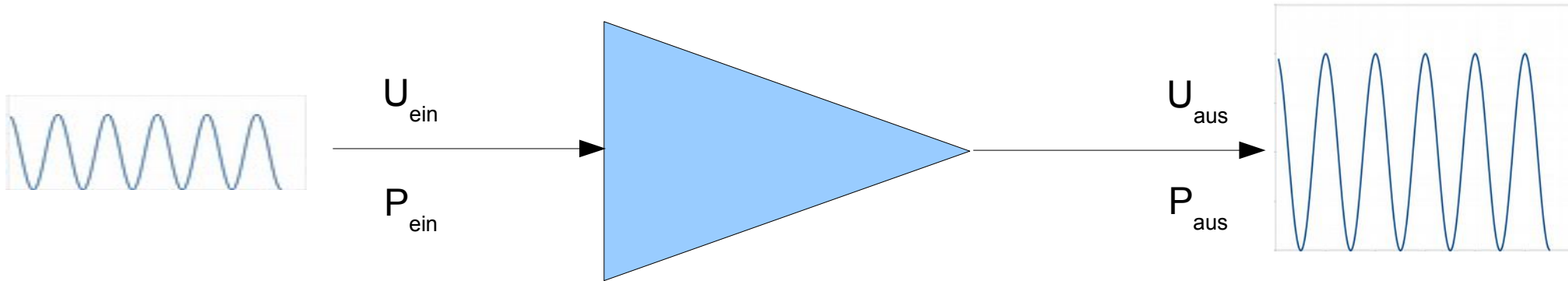




Hauptsache: die wichtigen Frequenzkomponente des Signals müssen im Transferband liegen!

(wenn nicht, dann verlieren wir Information!)

Basis unserer Analyse: Verstärkungsfaktor (n)



$$n = 10 \cdot \log \left(\frac{P_{\text{Ausgang}}}{P_{\text{Eingang}}} \right) \quad [dB]$$

$$V_U = U_{\text{aus}} / U_{\text{ein}}$$

Beispiele für dB-Skala

U_2/U_1	P_2/P_1	n dB
1,414	2	3
2	4	6
	8	9
3,16	10	10
	20	13
10	100	20
	1000=10 ³	30
100=10 ²	10000=10 ⁴	40
1000=10 ³	10 ⁶	60

$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow n = 10 \cdot \lg 10 \text{ (dB)} = 10 \cdot 1 \text{ (dB)} = 10 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow n = 10 \lg 2 \text{ (dB)} = 10 \cdot 0,3 \text{ (dB)} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1/2 \Leftrightarrow n = -10 \lg 2 \text{ (dB)} = -10 \cdot 0,3 \text{ (dB)} = -3 \text{ dB}$$

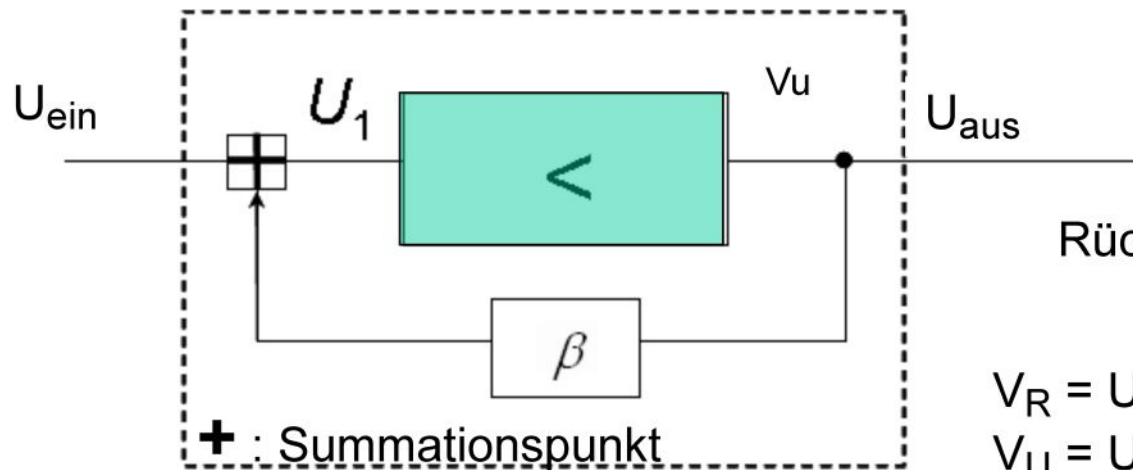
$$P = U \cdot I = U^2 / R$$

$$\log(P) = 2 \cdot \log(U) - \log(R)$$

$$10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{U_2^2}{R_2}}{\frac{U_1^2}{R_1}}\right) = 10 \cdot 2 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) + 10 \cdot \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Wenn $R_1 = R_2$ dann $n = 20 \cdot \log(U_2/U_1)$

Verstärkeranalyse - Rückkopplung



Rückkopplung bei Verstärker

$V_R = U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}}$: Verstärkung **MIT** Rückkopplung

$V_U = U_{\text{aus}}/U_1$: Verstärkung **ohne** Rückkopplung

$\beta > 0$: Mitkopplung

$\beta < 0$: Gegenkopplung

$$U_{\text{aus}} = V_U \cdot U_1 \quad \text{und} \quad U_1 = U_{\text{ein}} + \beta \cdot U_{\text{aus}}$$

$$U_{\text{aus}} = V_U \cdot (U_{\text{ein}} + \beta \cdot U_{\text{aus}})$$

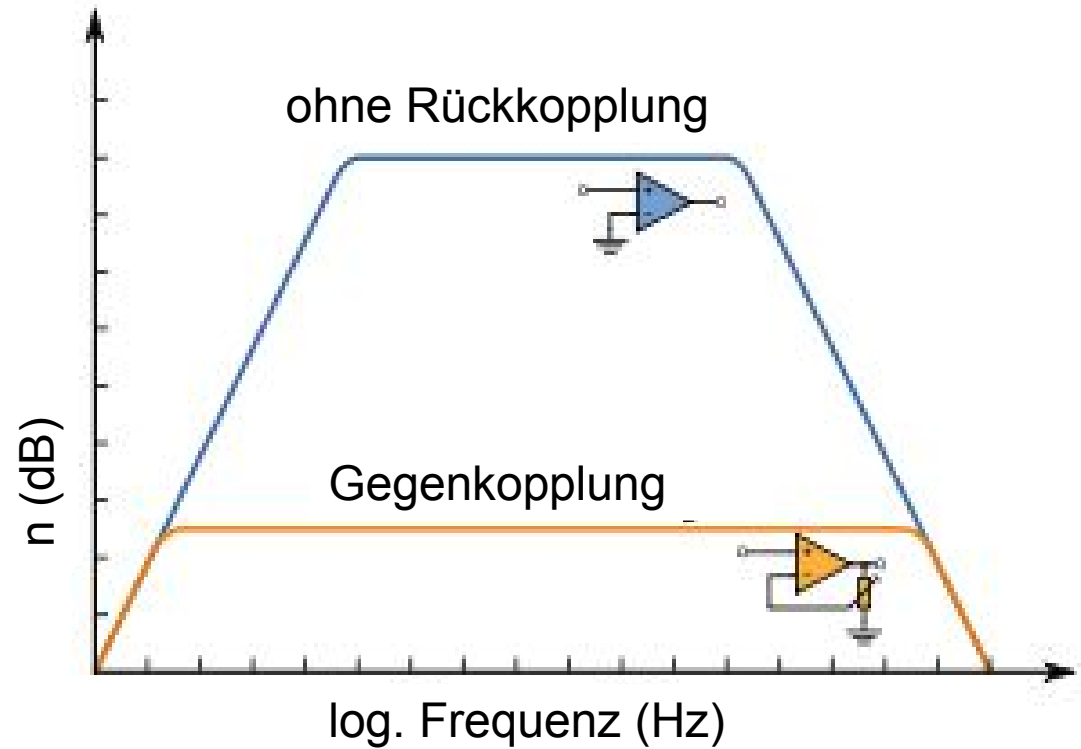
$$V_U \cdot U_{\text{ein}} = U_{\text{aus}} \cdot (1 - \beta \cdot V_U) \quad \longrightarrow \quad V_R = U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}} = V_U / (1 - \beta \cdot V_U)$$

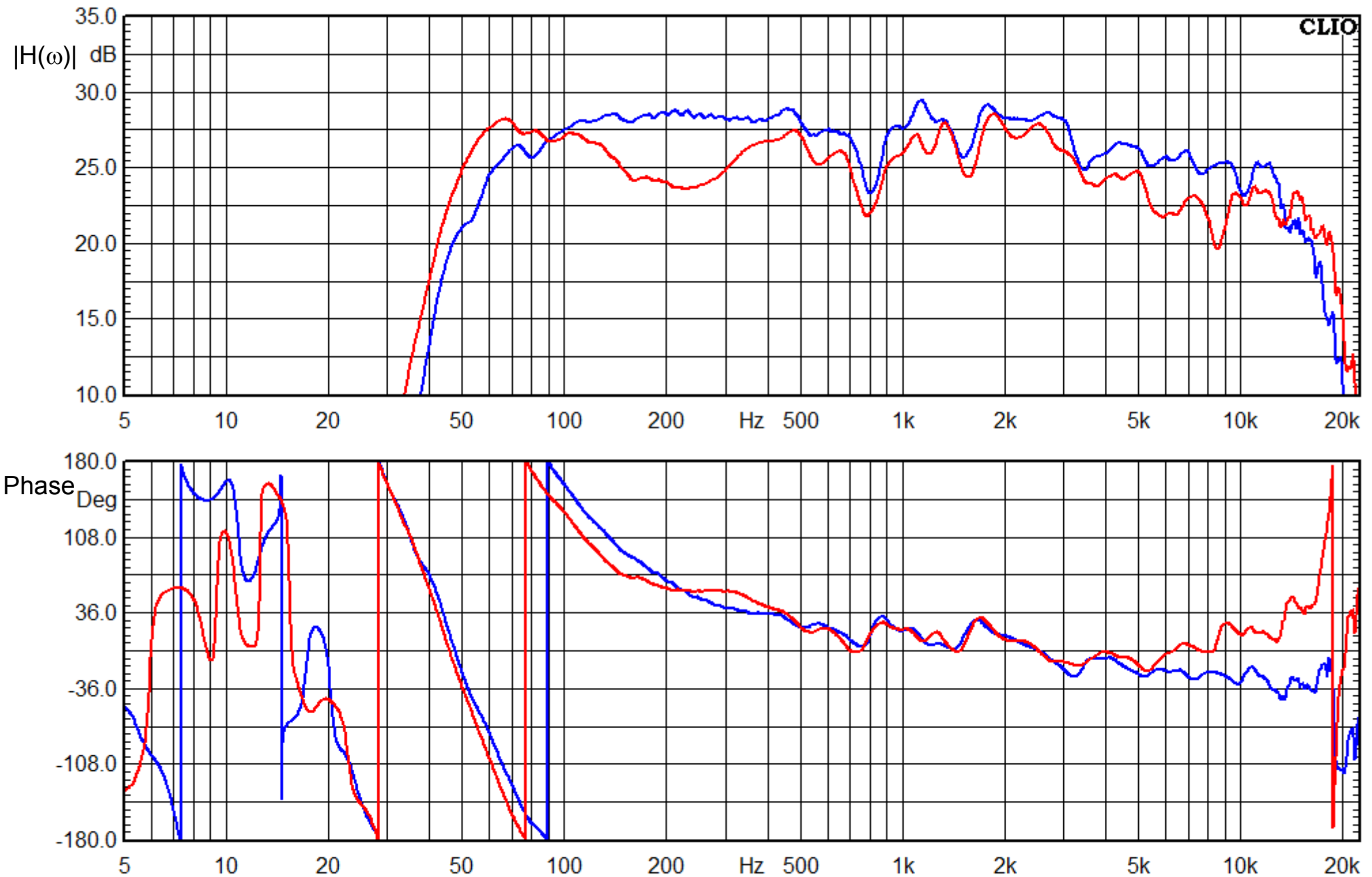
$V_U \beta = 1$: Oszillator (unendliche Verstärkung)

Verstärkeranalyse - Übertragungsfunktion

Verstärkungsbandbreitenprodukt
(Gain Bandwidth Product)

Verstärkung · Bandbreite = Konstant





Ergänzungsmaterial!

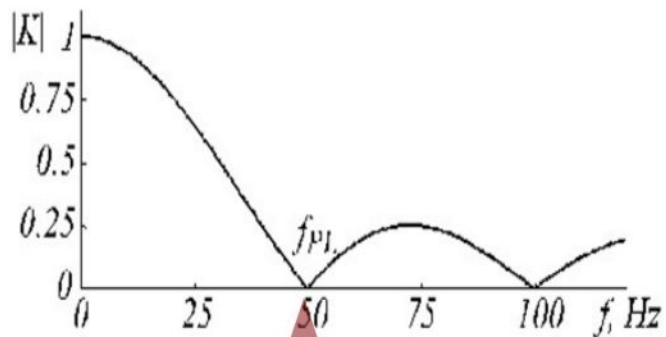
Frequenzübertragung eines Konzertverstärkers im Konzertraum. Blau: zu Lautsprecher , Rot: zu StageMonitor

Allgemein außer Pegel ($|H(\omega)|$ in dB) ist auch die *Phasenverschiebung* frequenzabhängig!

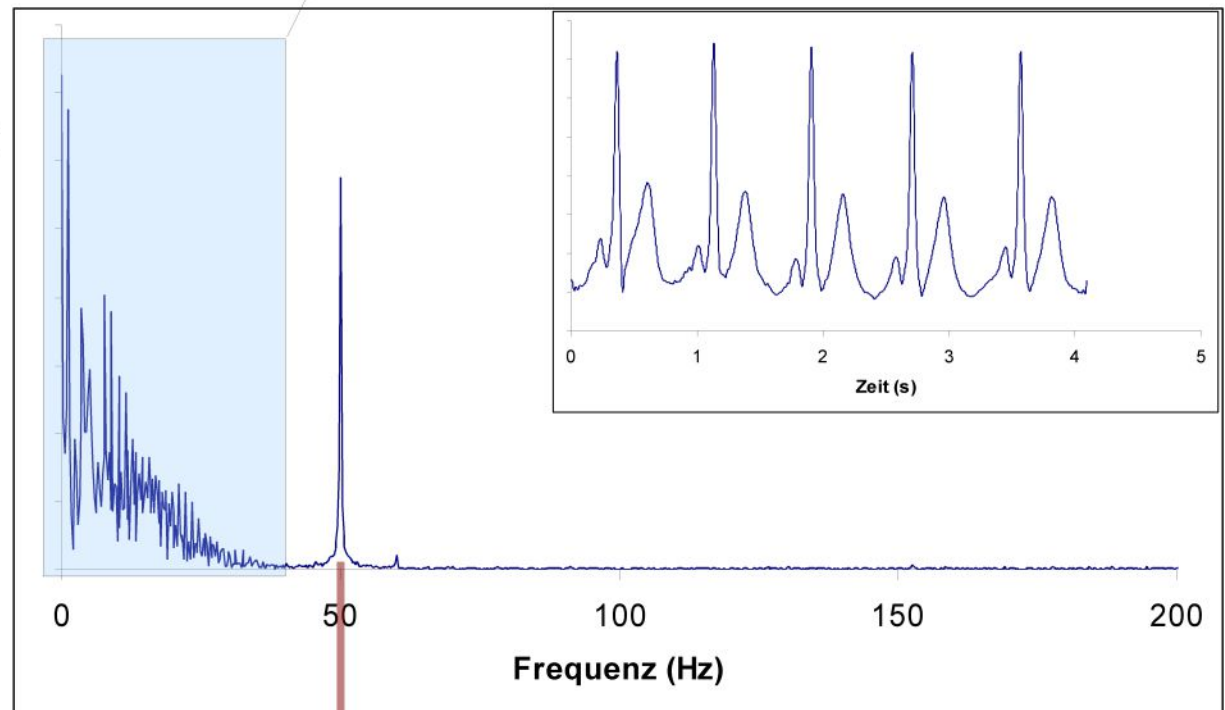
spezielle Verstärker dienen als *Rauschfilter*:

Nur die Teile des Spektrums werden übertragen, die Information tragen. Rausch wird unterdrückt.

gewünschter Übertragungsfunktion



50Hz unterdrücken



Schwingkreis

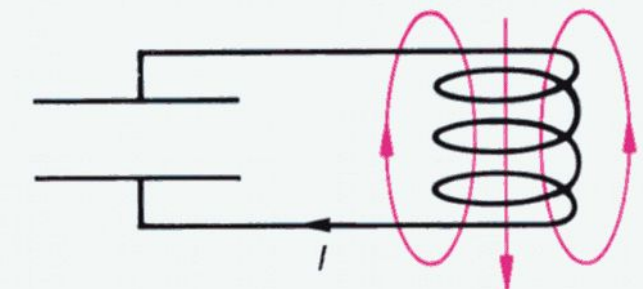
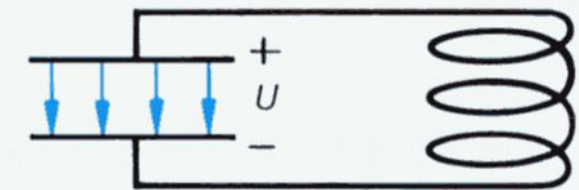
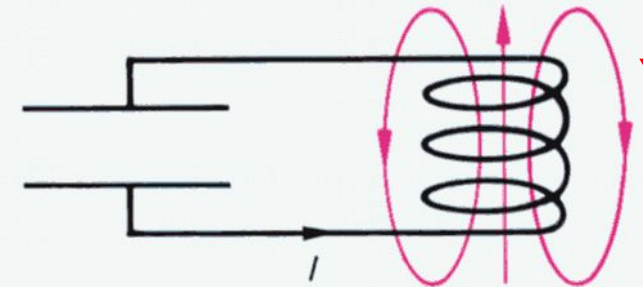
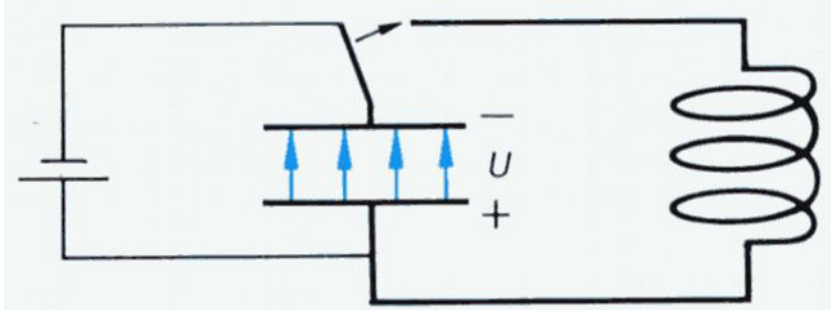
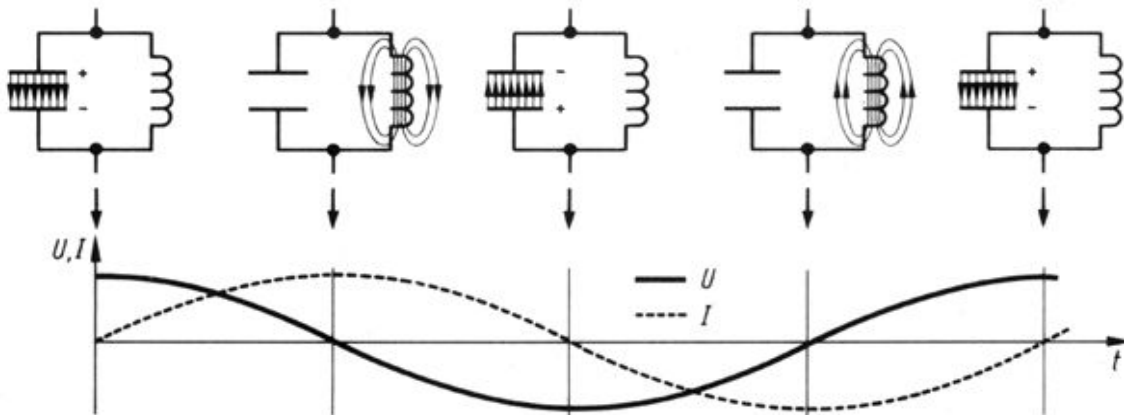
Zuerst wird der Kondensator aufgeladen, und Energie gespeichert.

Dann pendelt die Ladung zwischen der zwei Platten so, dass während Strom fließt, wird die Energie in dem Magnetfeld gespeichert.

$$\frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$$

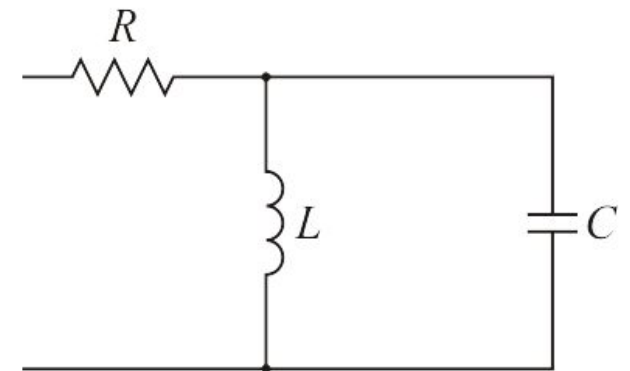
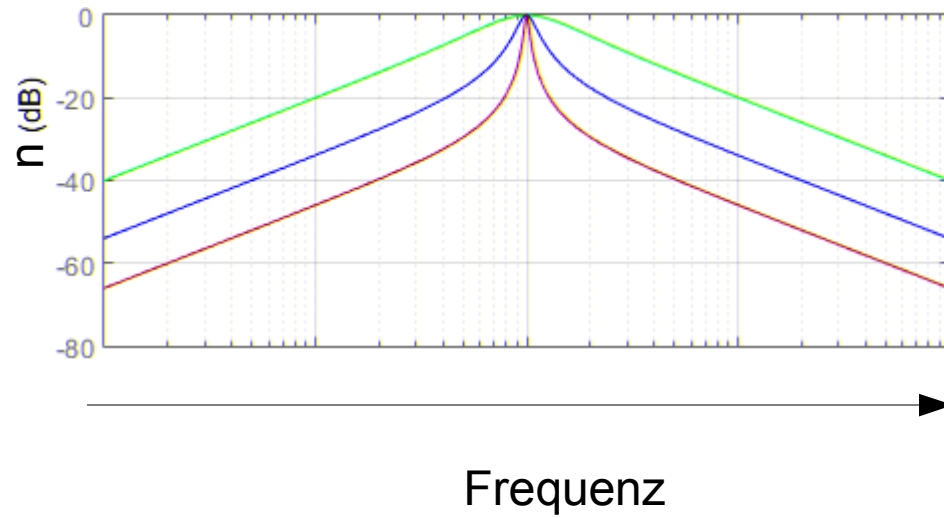
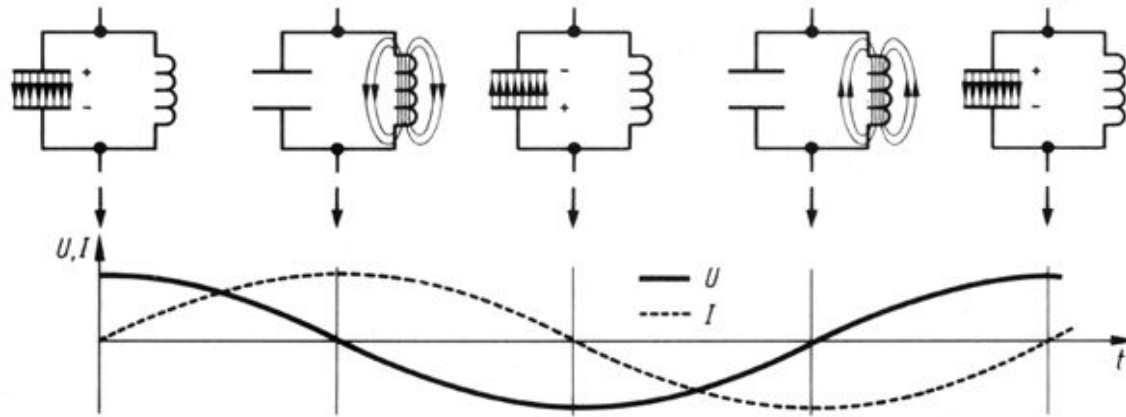
Die Frequenz ist abhängig von L und C:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

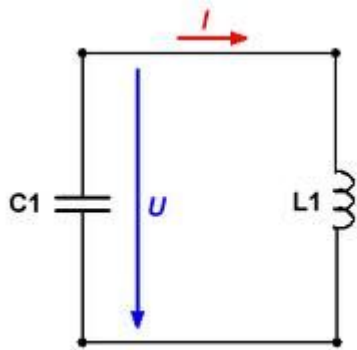


Ergänzungsmaterial!

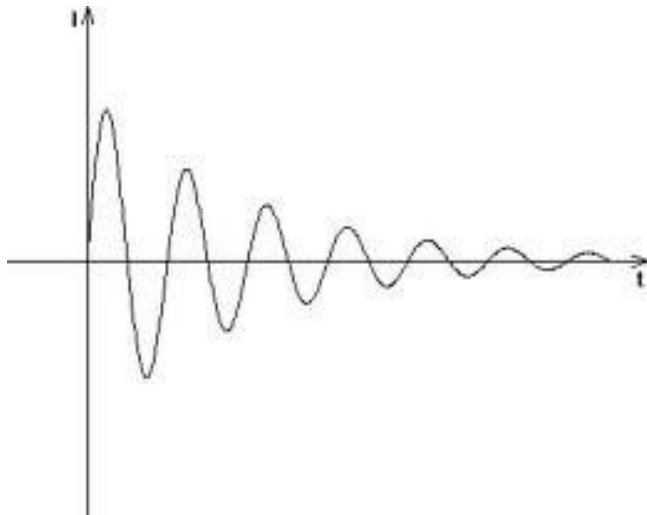
Spektrum: Schmaler Band



Ergänzungsmaterial!



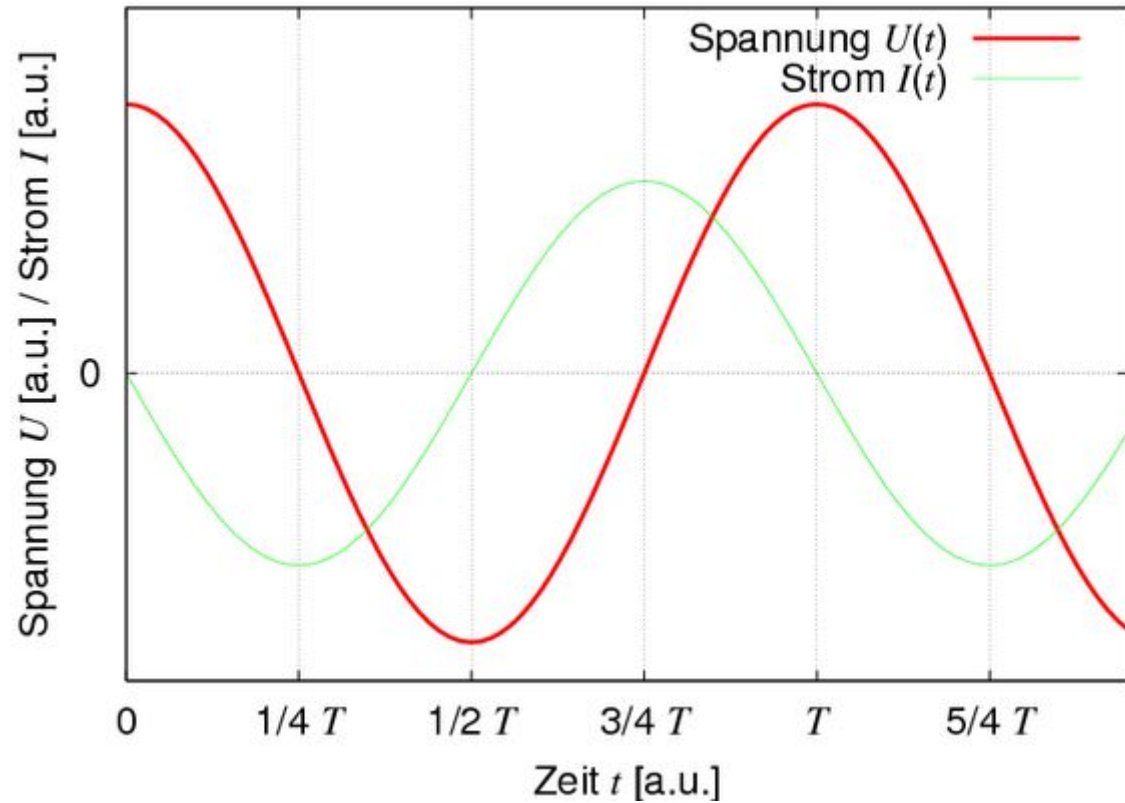
Idealfall: Sinussignale



Verstärker mit **positiver** Rückkopplung.
die Rückkopplungsschaltung ist ein Schwingkreis

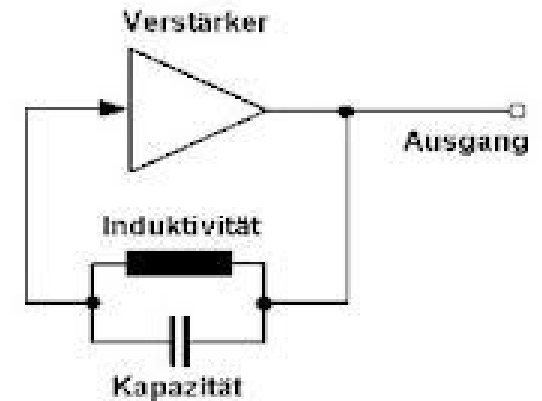


siehe Sinusoszillator



Im reellen Schwingkreis gibt es Verluste, also nimmt die Amplitude ab.

Mit Hilfe von einem Verstärker kann man es vermeiden: Sinusoszillator.



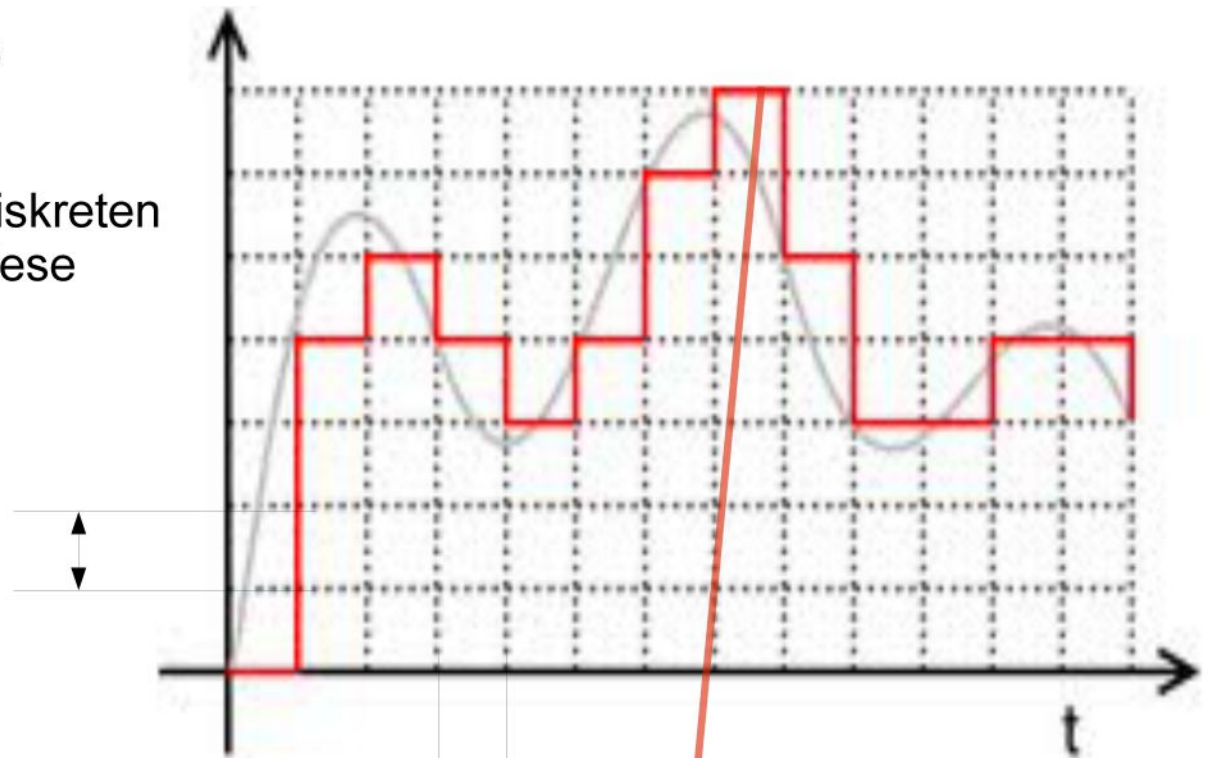
Ergänzungsmaterial!

digitale Signaleverarbeitung - DSP

Wir stellen analoge Signale als eine Reihe von Zahlen dar.

Wir messen die Testgröße in diskreten Zeitpunkten, und übertragen diese Messwerte.

Messauflösung



digitale Signale sind zeitlich und wertlich **diskret**

Zahlen können einfach, und störungslos weitergegeben werden

Zeitauflösung

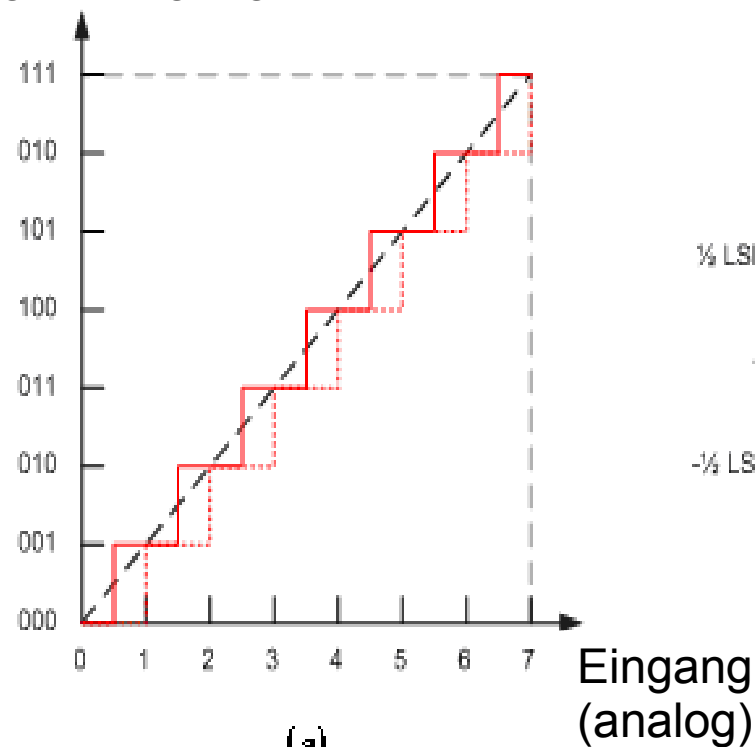
0 4 5 4 3 4 6 7 5 4 4 5 5 ...

digitale Signale – Quantifizierung (Kodierung)

digitale Signale sind
zeitlich und wertlich **diskret**

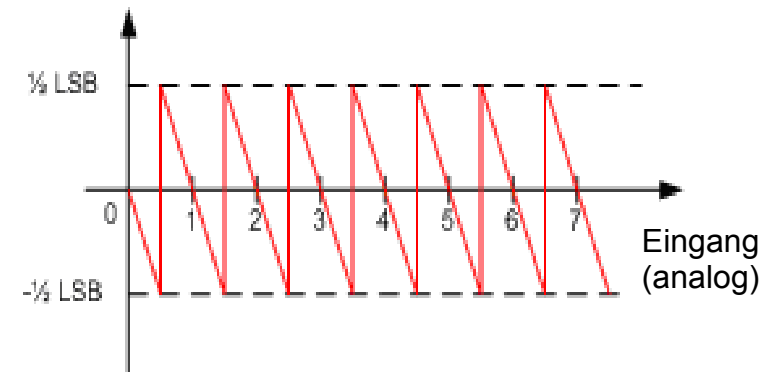
Was passiert mit Werte dazwischen?
Die gehen verloren!
(gewisse Informationsverlust)

Digitalausgang



(a)

Fehler



(b)

SRV der A/D Umwandlung : Ergänzungsmaterial!

Frage: wie viel Rausch wird durch eine bestimmte A/D Umwandlung produziert?

Sei die Auflösung der Messung ist q , und sei der Signal ein Sinussignal (Amplitude =1, $R=1$ Ohm).

In diesem Fall ist die Leistung $P_A = \frac{1}{2}$ W.

Der Quantisierungsfehler entspricht eine Gleichverteilung mit der Umfang von q .
Leistung des Rausches ist gleich dem Varianz der Gleichverteilung ($q^2/12$)

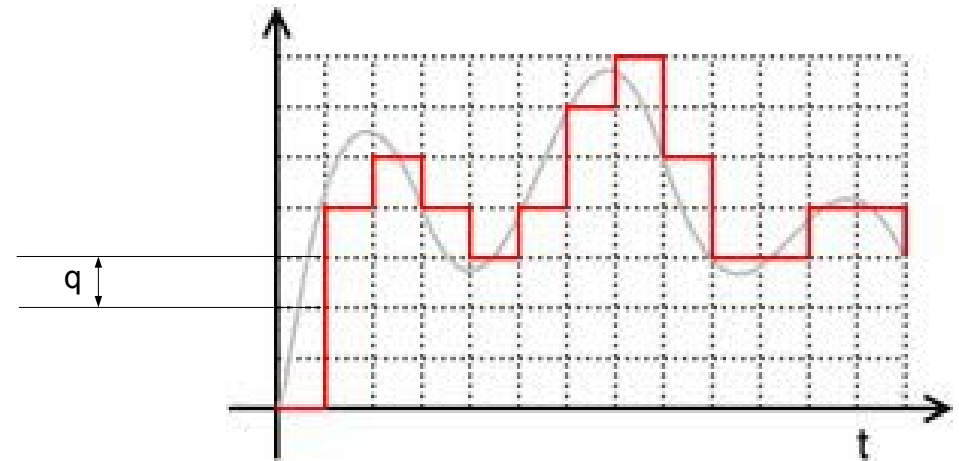
$$SRV = SNR = \frac{P_A}{\sigma^2} = \frac{1/2}{q^2/12} = \frac{6}{q^2}$$

Quantisierungsfehler kann verkleinert werden durch der Verfeinerung der Auflösung.

ABER: **Je feiner ist die Auflösung, desto langsamer ist ein A/D Umwandler!**

Das kann problematisch sein, siehe Nyquist später.

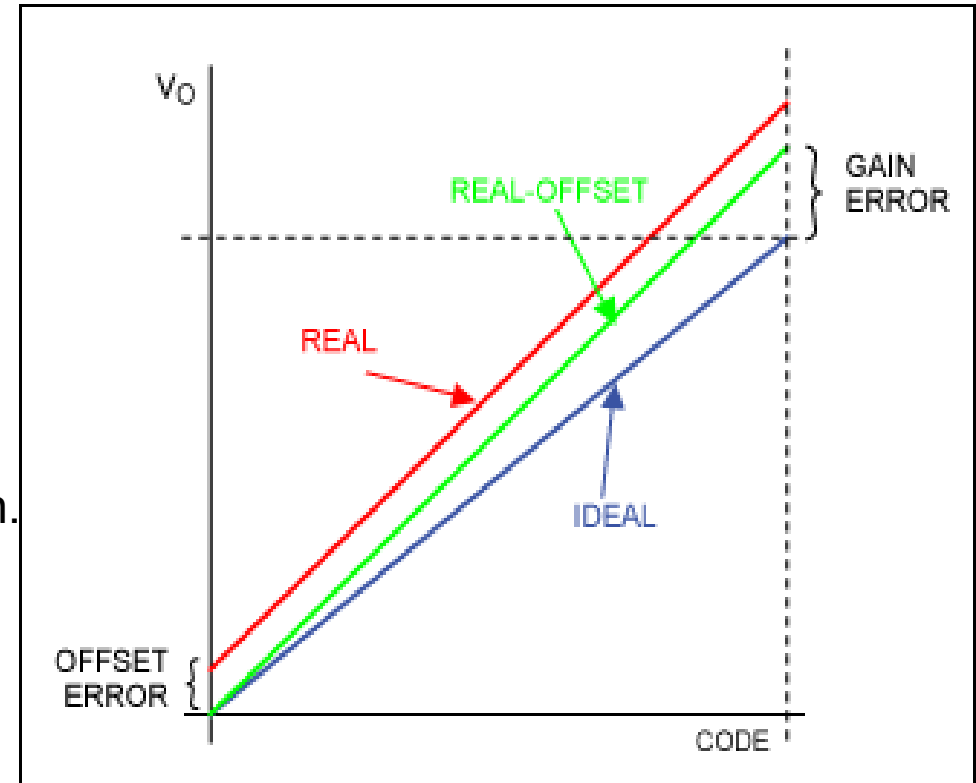
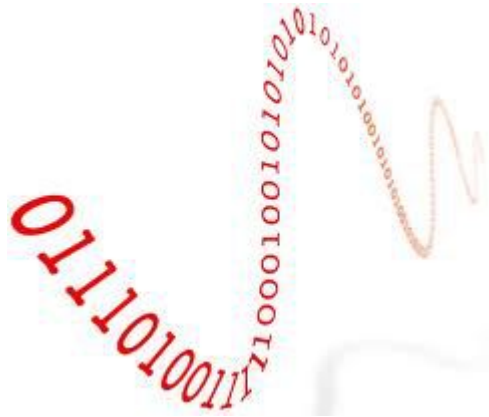
Kompromiss: wählen wir q so, dass SRV wegen Digitalisierung alleine ungefähr 10x größer bleibt als SRV des Originalsignals.



digitale Signale – Wiederherstellung (DAC) (Dekodierung)

digital zu analog Umwandler

Einfach nahe zu ideal Umwandler zu bauen.



einige Fehlermöglichkeiten:

„offset“ : wenn Zahl = 0 dann $U_{\text{aus}} \neq 0$

„gain error“: z.B. wenn Zahl = 10, dann
 $U_{\text{aus}} \neq 10 \text{ V}$

Ergänzungsmaterial!

digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

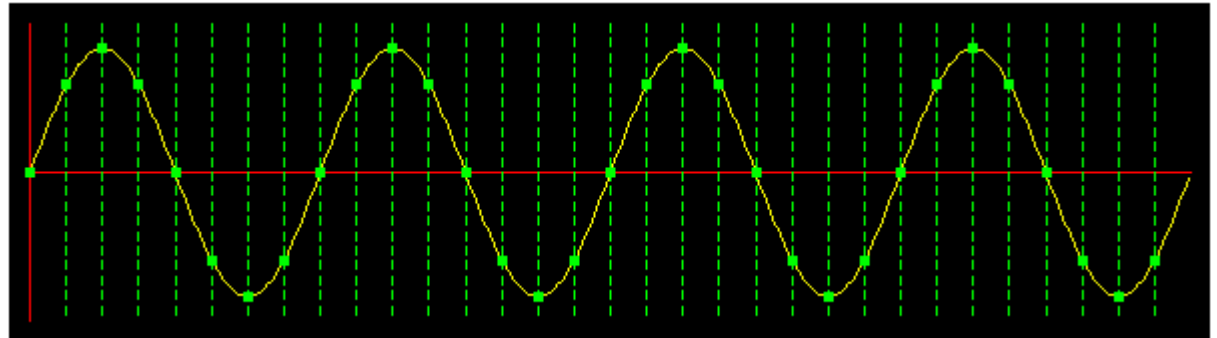
Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

$f = 1000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

gut

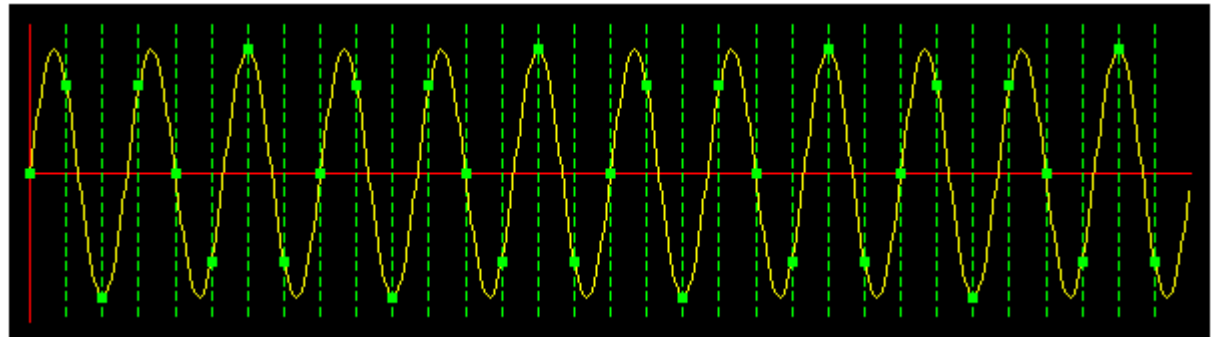
*gut ist, wenn nur EIN bestimmtes
sinus kann die Punkte binden.*



$f = 3000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

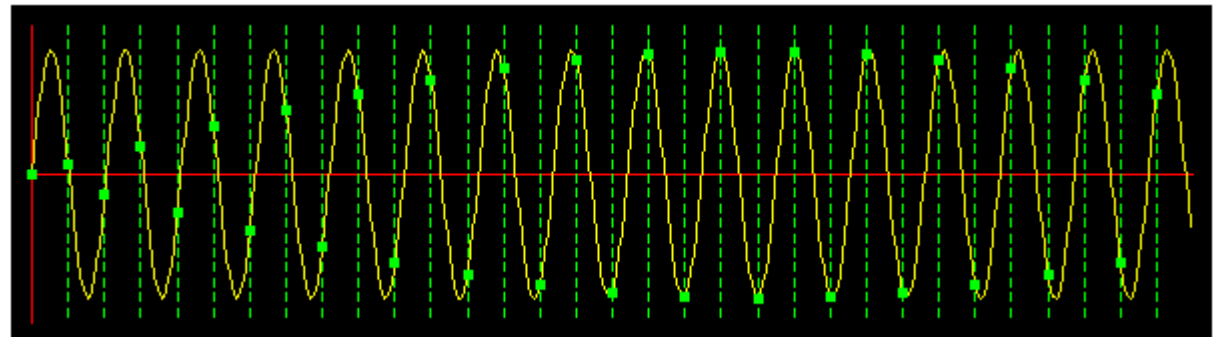
Noch gut



$f = 3900 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

Immer noch gut
(aber „knapp”)



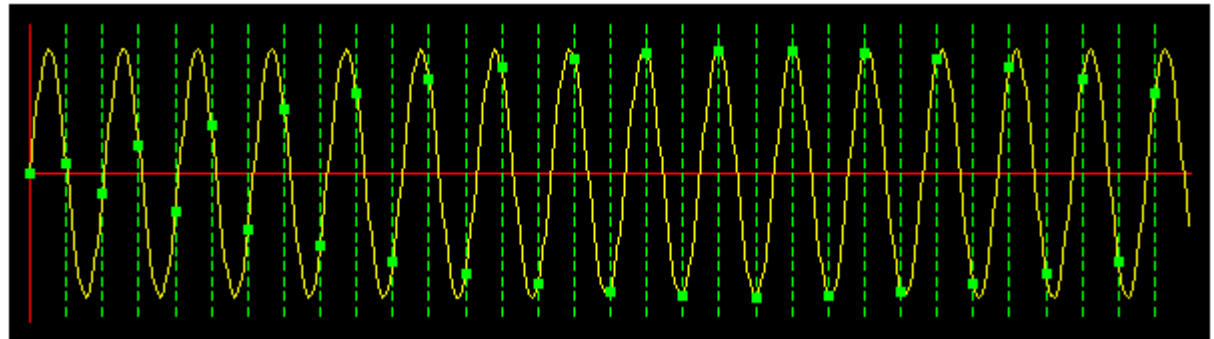
digitale Signale – „Sampling”: Abtastung

Für nicht sinusförmige Signale: „zuerst Fourier, dann Abtastung von jeder Sinusfunktion”

$f = 3900 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

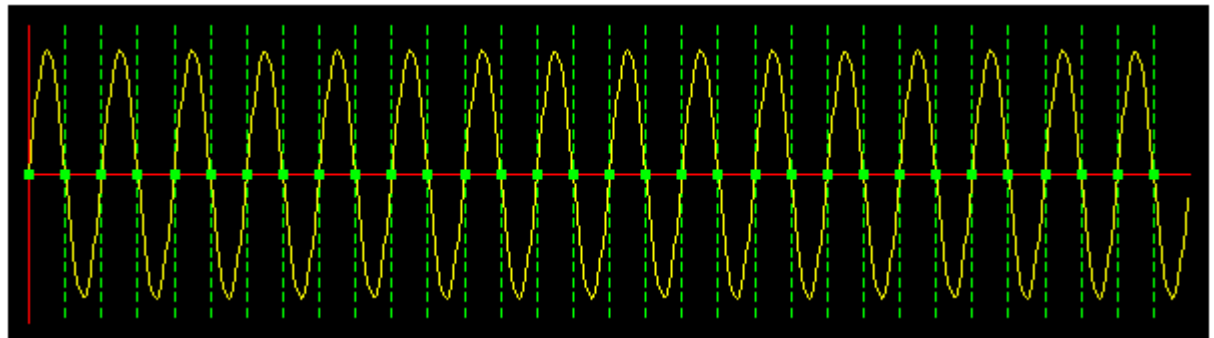
Immer noch gut



$f = 4000 \text{ Hz}$

$f_s = 8000 \text{ Hz}$

▪ ▪ ▪ ▪ Signal weg!

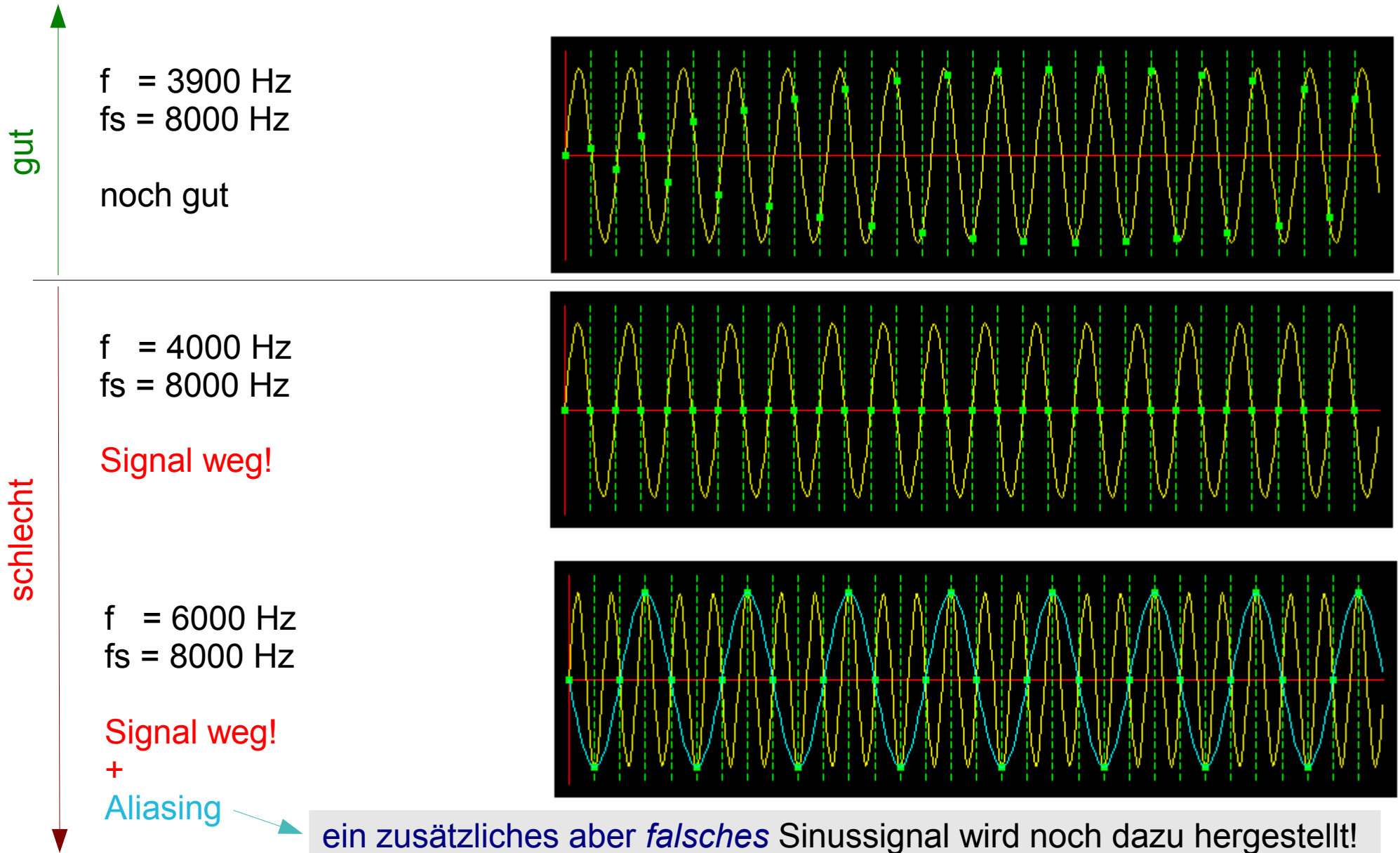


die Nyquist-Theorie: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein

nicht sinusförmig? dann gilt $2 \times f_{\max}$ (siehe Fourier-Spektrum)

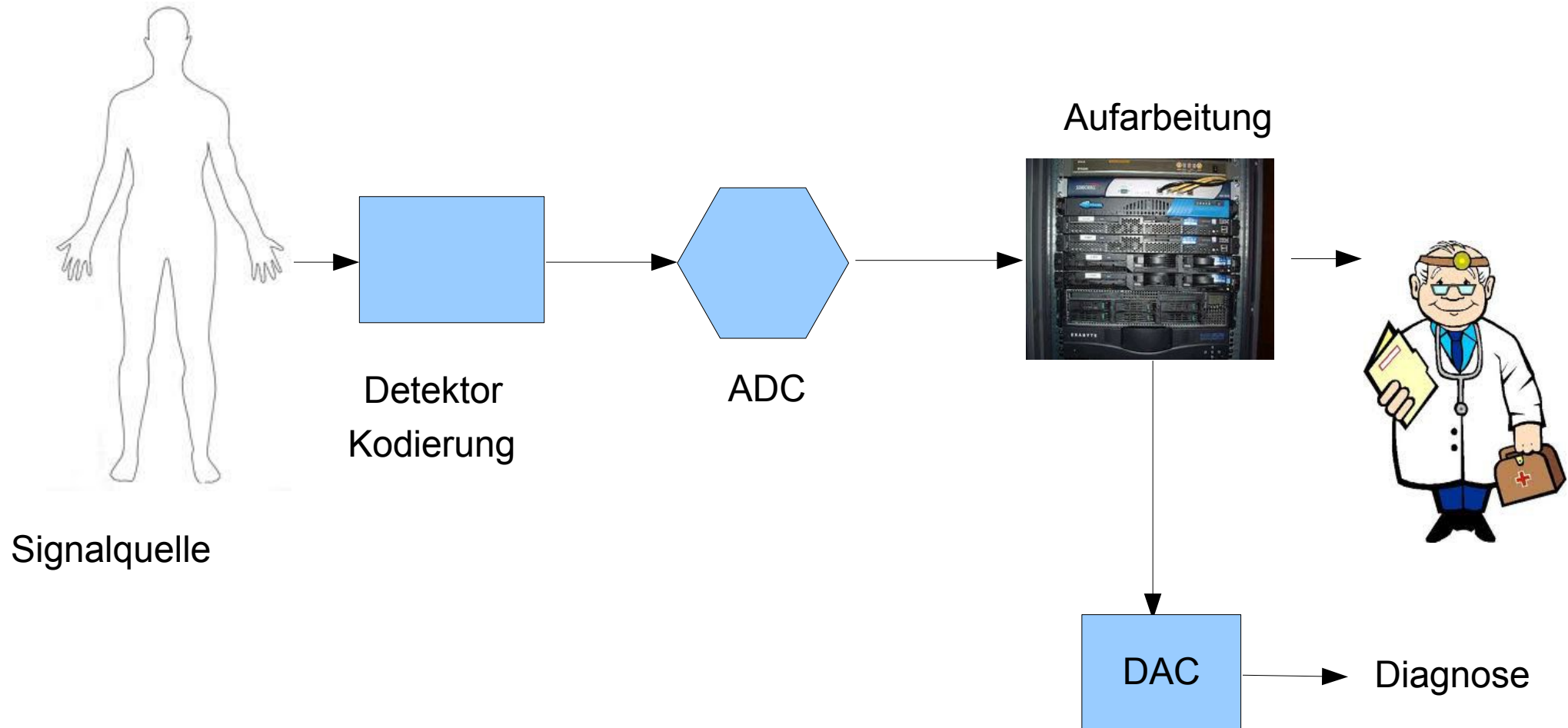
digitale Signale – Nyquist

die **Nyquist-Theorie**: Abtastfrequenz muss mindestens 2x der Frequenz des Sinussignals sein

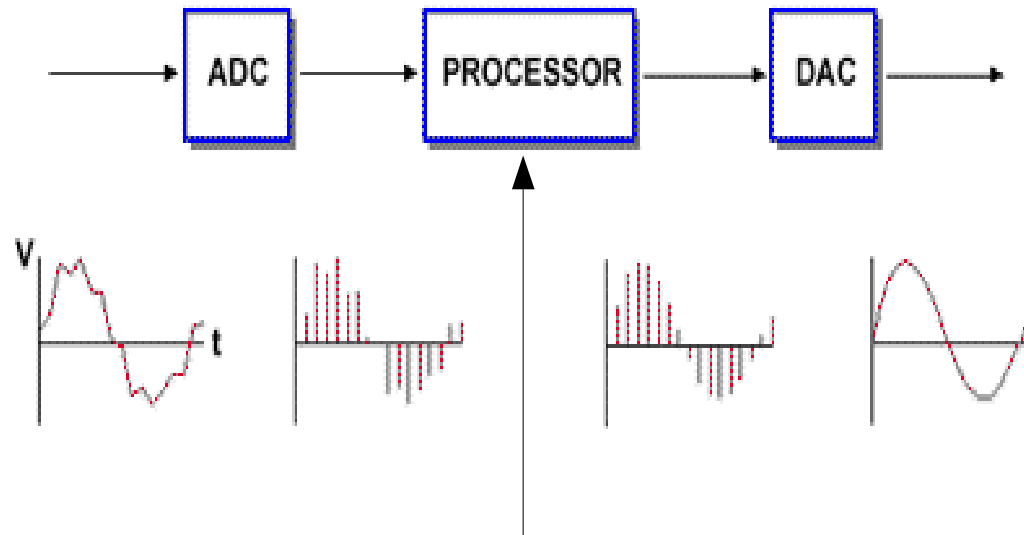


digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)

Digitale Signalaufarbeitung



digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP) Digitale Signalaufarbeitung



beliebige mathematische Transformationen sind möglich

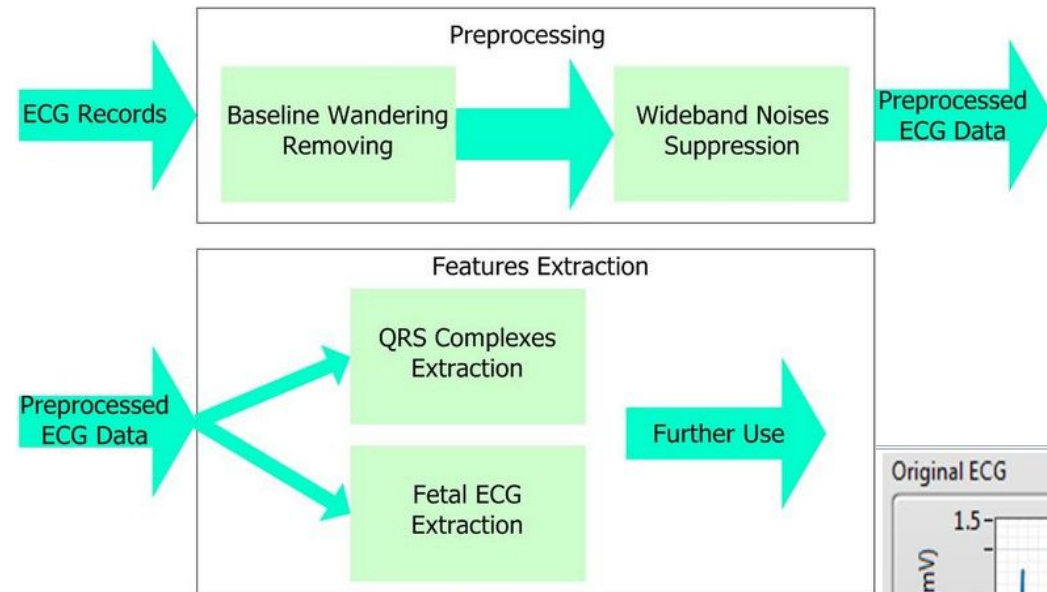
FFT: Fast Fourier Transform (schneller, digitaler Fourier-Transformation)

IFFT: Inverse FFT

In dem Frequenzspektrum sind dann veränderungen möglich,
z.B. Bei EKG bestimmte Störfrequenzen können gelöscht werden.

digitale Signale – Digital Signal Processing (DSP)

Digitale Signalaufarbeitung



Beispiel: EKG.

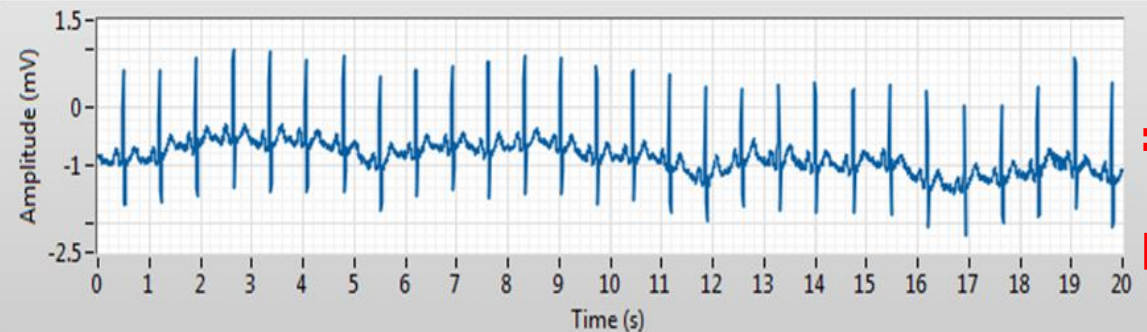
Hintergrundsignale (Wanderung)
Rauschsignale
(hochfrequenz und 50 Hz)
werden digital unterdrückt mit DSP-Filtern

weitere Aufarbeitung:

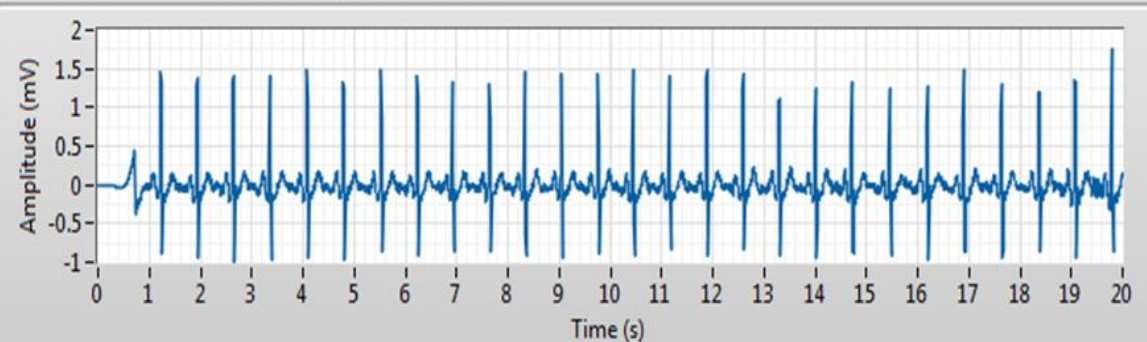
Nur die Kurven mit hoch genug
SRV werden behalten, und gezeigt.

Folge:
Einfachere, und sicherere Diagnose

Original ECG



ECG with Baseline Wander Removed by FIR Highpass Filter



Ergänzungsmaterial!

DSP ist heute schon überall

Verschiedene mathematische möglichkeiten: verschlüsseln, filtern, verändern, usw.

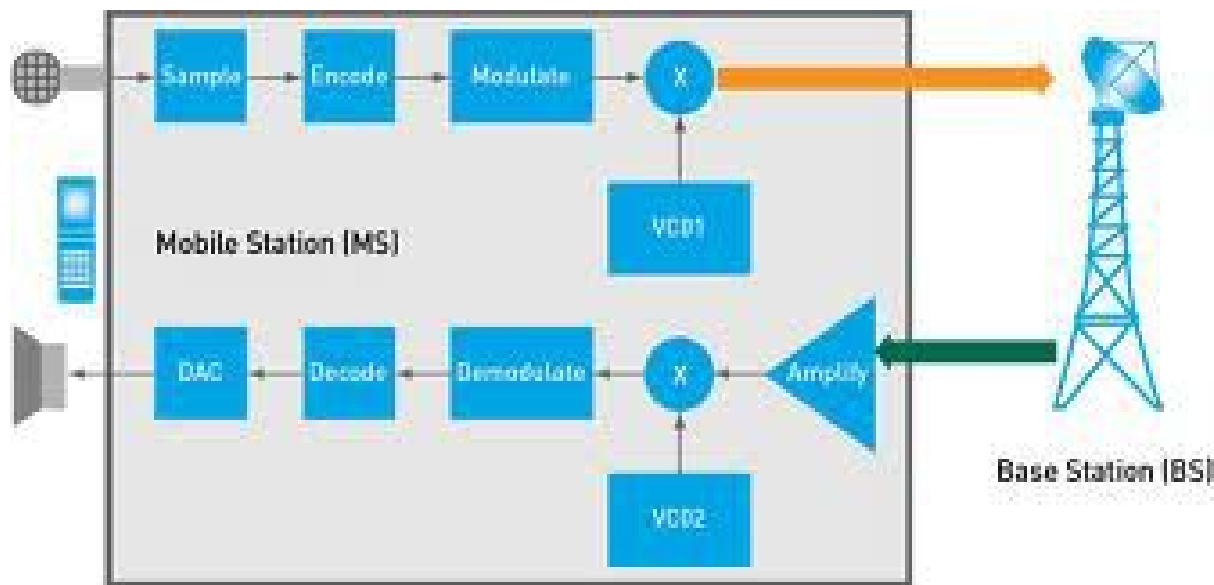
Handy

ADC, Kodierung,
Übertragung, Dekodierung, DAC

CD/DVD Spieler

Licht: digital 1010110...

DAC: von Zahlen zu Musik



Ergänzungsmaterial!

