



SEMMELWEIS EGYETEM

Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet,
Nanokémiai Kutatócsoport



TRANSPORTFOLYAMATOK II biológiai rendszerekben

Zrínyi Miklós

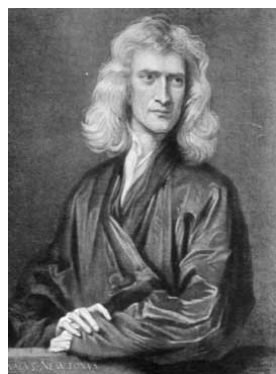
egyetemi tanár; az MTA rendes tagja
mikloszrinyi@gmail.com

2020



A különböző anyagi rendszerek folyásával
foglalkozó tudományt 1928-ban **Bingham**
javaslatára nevezték el **reológiának**.

(Rheos logos = folyástan)



Sir Isac Newton (1642-1727)

Konduktív transzportfolyamatok egységes leírása

	diffúzió	hővezetés	reológia
ÁRAM:	komponens áram (tömeg áram)	energia áram	impulzus áram
HAJTÓERŐ:	∇c ΔP	∇T	∇v
ÁRAMSŰRŰSÉG:	$j_n = -D \nabla c$	$j_Q = -k \nabla T$	$j_i = -\eta \nabla v$
VÁLTOZÁS:	$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$	

Fick

Fourier

Newton

Laplace operátor: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ha egy testre **erő** hat
 helyváltozás
 alakváltozás

DEFORMÁCIÓ

rugalmasság

viszkózus



Fluidumok áramlása

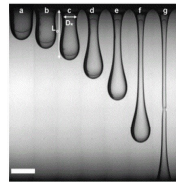
Fluid fázis: a folyadék és a gáz halmazállapot összefoglaló neve, amely arra utal, hogy az anyagok mindkét állapotban viszonylag könnyen változtatják alakjukat, könnyen folynak.

A reológiai viselkedés viszonylagossága

Deborah-szám

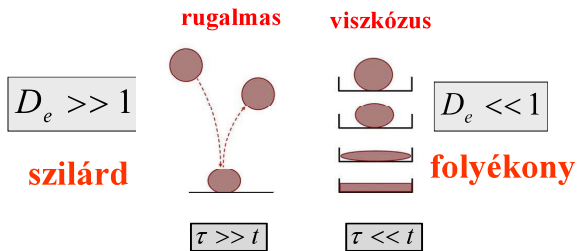
$$D_e = \frac{\tau}{t}$$

← Relaxációs idő
← Megfigyelés ideje



$$D_e \approx 1$$

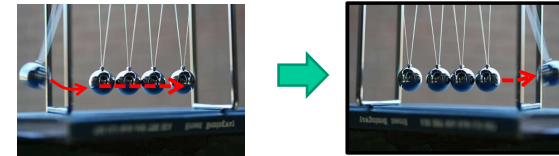
viszkoelasztikus



Még a kőzetek is folynak a geológiai időtartam alatt!

REOLÓGIA

(konduktív impulzustranszport)

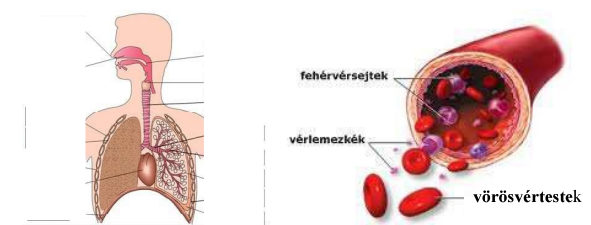


(Rheos logos = áramlástan)



Légzés

Vérkeringés



A térfogatáram hajtóereje: a nyomás különbség



$$1 \text{ Hgmm} = 133,32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 735,55 \text{ Hgmm}$$

	P/Hgmm
arteriás (szisztolés)	100 - 140
arteriás (diasztolés)	60 - 90
kapilláris az artéria végénél	30

Alapfogalmak

Folyás

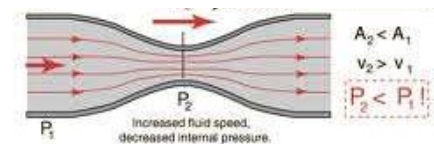
- lamináris,
- turbulens,
- összenyomható,
- összenyomhatatlan,
- „száraz”,
- viszkózus,
- állandó,
- pulzáló,
- rotáló.



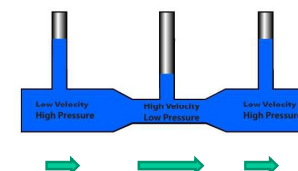
Daniell Bernoulli
1700-1782

Bernoulli egyenlet

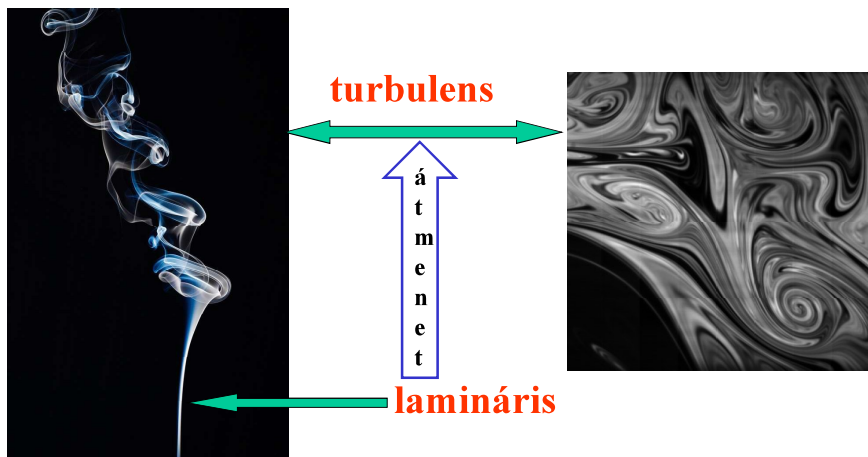
$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = konst.$$



$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$$



Az áramlás típusai



$$R_e = \frac{\text{tehetetlenségi}}{\text{viszkózus}} \left. \vphantom{\frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}} \right\} \text{erők}$$

$$R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}$$

v : átlagos áramlási sebesség

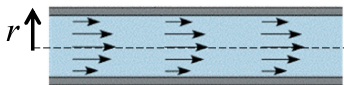
ρ : folyadék sűrűsége

η : viszkozitás

d : átmérő



Osborne Reynolds
1842-1912

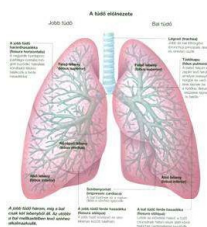


ha $R_e < 2100$

Lamináris áramlás

Megjegyzés: ha átmérő helyett sugarat használunk, akkor $Re=1150$

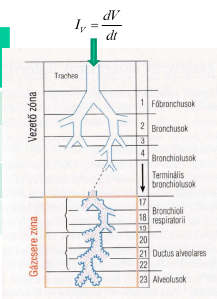
Levegő áramlása a tüdőben



23 generáció a légcsövek átmérőjében

Normál légzés 12/perc Heves légzés 30/perc

átmérő (cm)	v (cm/s)	Re	v (cm/s)	Re
1,8	197	2325	790	9324
0,56	250	921	1002	3684
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127



$$\frac{dV_{lev.}}{dt} = \square 5 \text{ L/min} \rightarrow O_2 \square 2 \text{ kg/nap}$$

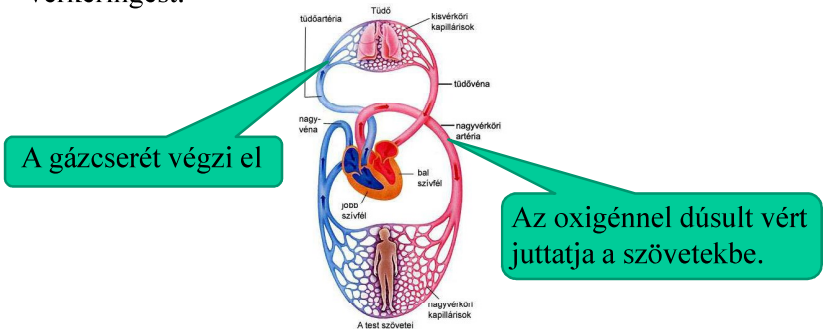
Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légcsövekben.

A vérkeringés

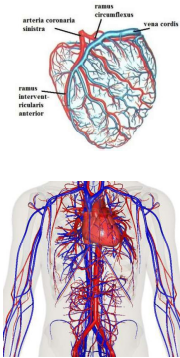
Impulzus, anyag és energia transzport

A **kisvérkör**, amelynek feladata a szívből a tüdőbe eljuttatni az oxigénben szegény és széndioxidban dús vért és a tüdőből a szívbe szállítani az oxigénben dús vért.

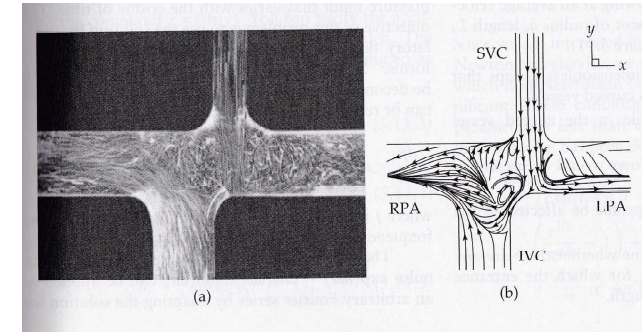
A **nagyvérkör**, amely a szívből a szervekhez juttatja az oxigénben dús és onnan szállítja el az „elhasznált” vért együttesen alkotja a vérkeringést.



Vér áramlása a szív- és érrendszerben



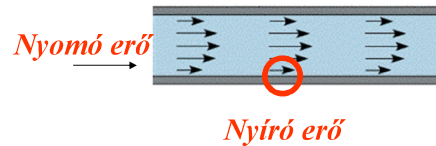
erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	4500	20	750
↓ aorta	1,3	105	3400	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	10^{-6}



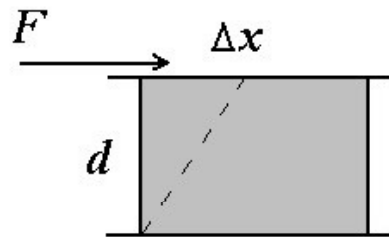
A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris**. Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.

Elágazásoknál és szűkületeknél könnyen kialakulhat turbulencia!

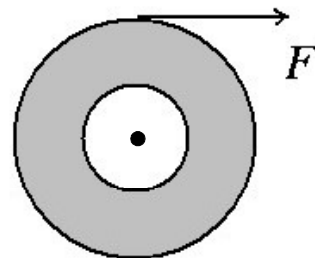
Alapfogalmak:



Nyírás: tangenciálisan ható (**nyíró**)erő (F) vált ki deformációt.



Tiszta nyírás

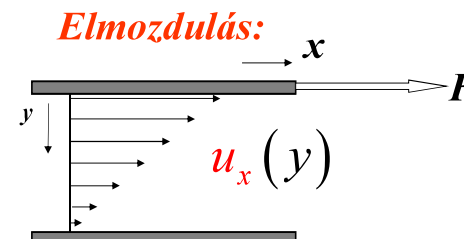


Rotációs nyírás

Alapfogalmak:

Nyírófeszültség:

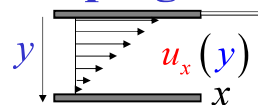
$$\tau = \frac{F}{A_S}$$



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x(y)}{dy}$$

Alapfogalmak:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x}{dy}$$

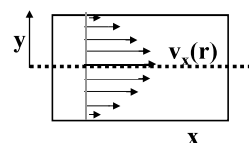
Deformáció sebesség:

$$\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{du_x}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{du_x}{dt} \right) = \frac{dv_x}{dy}$$

A **deformáció sebesség** megegyezik a **sebesség gradienssel**!

A reológia alapösszefüggése. **Newton egyenlet**



$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy} \rightarrow \tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

Nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$

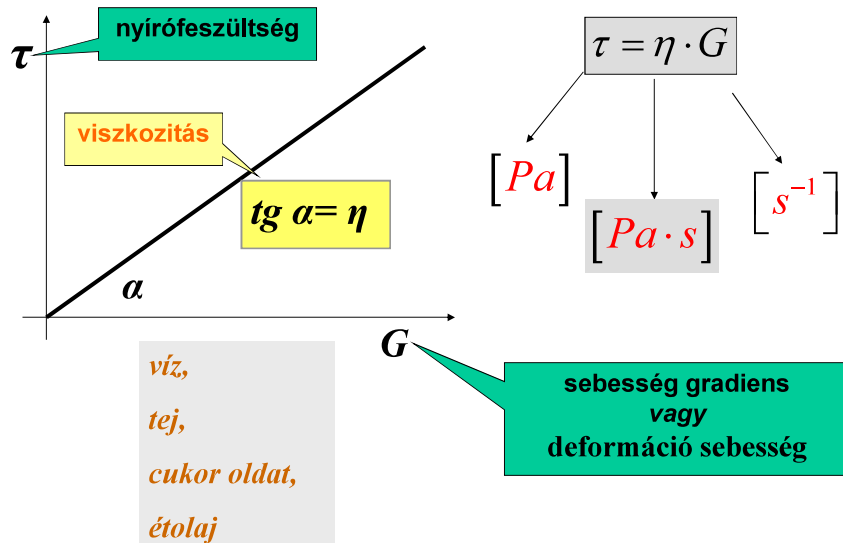


Sebesség gradiens:

$$G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}$$

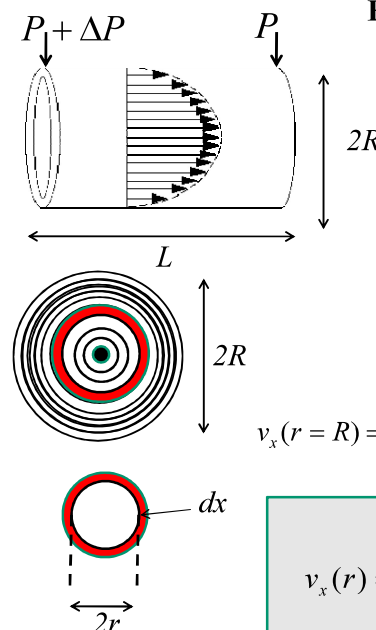


Newtoni folyadék folyásgörbéje



Folyadék áramlása kapillárisban

áramlási profil



$$\tau = \eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r \pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

$$dv_x = \frac{\tau}{\eta} dr = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot r \cdot dr = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d(r^2)$$

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konst.$$

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Áramlási profil

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$v_{\max} = v(r=0)$$

$$v_x(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

A térfogatáram

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr$$

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot dr$$

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Hagen-Poiseuille törvény

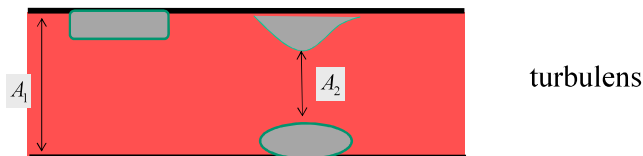
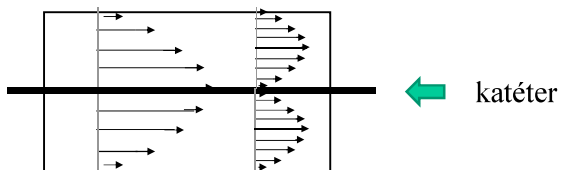
Átlagos áramlási sebesség

$$\langle v_x \rangle = \frac{I_V}{R_o^2 \pi} = \frac{R_o^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max}$$

Hagen-Poiseuille törvény jó közelítéssel alkalmazható a vérkeringésre

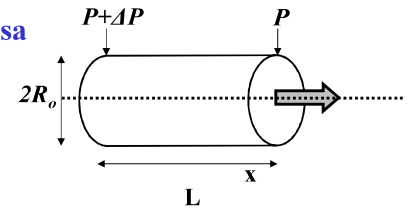
A szervezet az erek átmérőjének változtatásával biztosítani tudja az egyes szervek vérrellátását.

Parabolikus sebesség profil módosulása

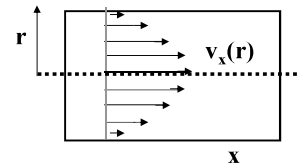


Newtoni folyadék lamináris áramlása

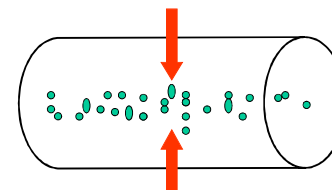
(összefoglalás)



Parabolikus sebesség profil



$$v(r) = \frac{\Delta P R_o^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_o^2}\right)$$



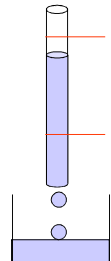
$$p + \frac{1}{2} \rho v_x^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulli törvény

Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Térfogatáram



Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt *pascal secundum* (Pa·s))

Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) tiszteletére használták a

$$1 \text{ poise} = 100 \text{ centipoise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Az orvosi gyakorlatban ma is gyakran a cP (centi-poise)-t használják

Fluiditás a viszkozitás reciproka

Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa ($m^2 s^{-1}$) vagy *stoke* (St).

Néhány folyadék viszkozitása

anyag	T/ °C	viszkozitás /mPa·s
víz	20	1,0
glicerin	20	1500
n-pentán	20	0,23

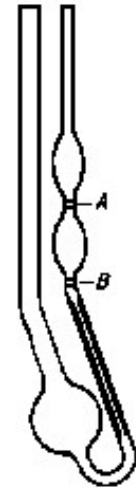
biofolyadék	T/ °C	viszkozitás /mPa·s
vér	37	4 (nem Newtoni !)
vér plazma	37	1,5
könny	37	0,73 – 0,97
levegő	18	0,018
liquor	20	1,02

Relatív viszkozitás (η_{rel}).

$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_o} = \frac{t}{t_o}$$

oldat

oldószer



Specifikus viszkozitás (η_{sp})

$$\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$$

Ostwald-féle viszkoziméter

Redukált viszkozitás (η_{red})

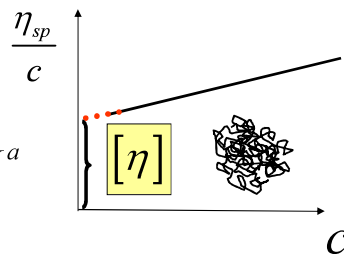
$$\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}$$



Jellemző viszkozitás ($[\eta]$) Ubbelohde féle viszkoziméter

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \eta_{red}$$

$$[\eta] = k \cdot M^a$$



Jellemző viszkozitás ($[\eta]$)

Molekula	konformáció	$[\eta]$ [ml/g]	M
mioglobin	globula	3.1	17800
mioglobin	gombolyag	21	17800
hemoglobin	globula	3.6	64450
hemoglobin	gombolyag	19	64450
Szérum albumin	globula	3.7	67500
Szérum albumin	gombolyag	51	67500

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$f_s = 4R^2\pi \cdot \tau$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{R}$$

$$f_s = 4R^2\pi \cdot \eta \cdot \frac{v}{R}$$

$$f_s = 4\pi\eta Rv_x$$

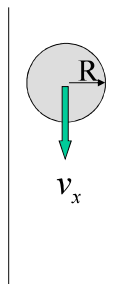
Stokes törvény:

$$f_\eta = 6\pi\eta Rv_x$$

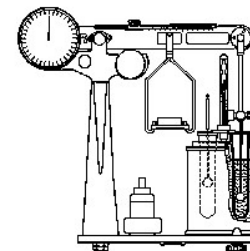
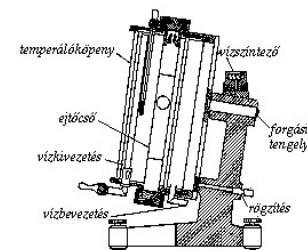
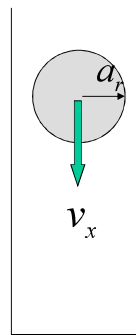
$$f_g = f_\eta \Rightarrow v_x = \frac{2}{9} \frac{R^2 \Delta \rho g}{\eta}$$



George Stokes
1819-1903

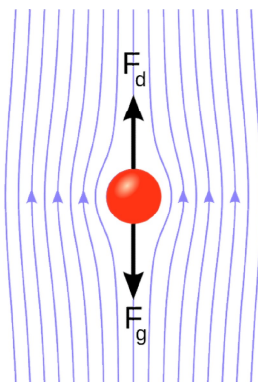


$$f_\eta = 6\pi\eta a_r v_x$$

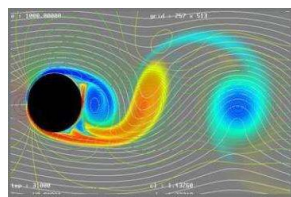


Höppler féle viszkoziméter

Kármán örvénysor



lamináris
 $Re < 2100$



turbulens
 $Re \gg 2100$



Kármán Tódor
1881-1963

Híg szuszpenziók viszkozitása

Általában *newtoni* viselkedés

Einstein-egyenlet

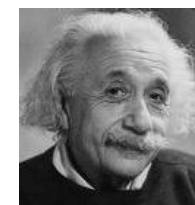


$$[\eta] = 2.5\Phi$$



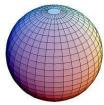
$$\eta = \eta_o (1 + 2.5\Phi)$$

Térfogati tört



Albert Einstein
1879-1955

Einstein-egyenlet általánosítása:



$$[\eta] = \nu_a \Phi$$

$$\eta = \eta_o (1 + \nu_a \Phi)$$

Aszimmetria faktor

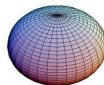
$$\nu_a = \frac{(a/b)^2}{15 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{3}{2} \right]} + \frac{(a/b)^2}{5 \left[\ln \left(\frac{2a}{b} \right) - \frac{1}{2} \right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid



$$\nu_a = \frac{16(a/b)}{15 \tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid

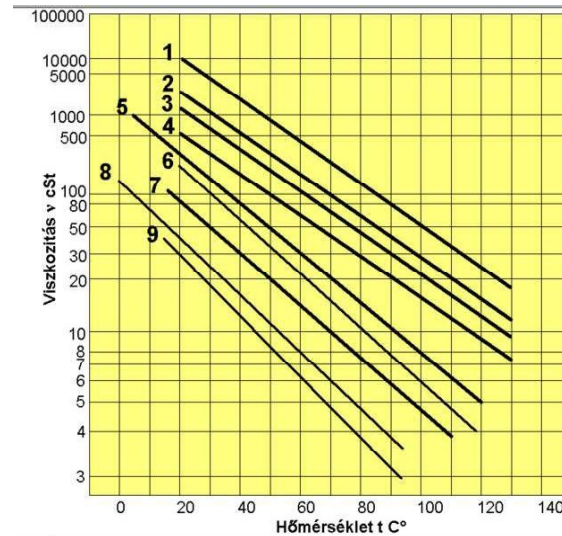


DNS-re: $a/b = 27,8$ $\nu_a = 65,2$

Stokes-Einstein törvény:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi \eta a_r}$$

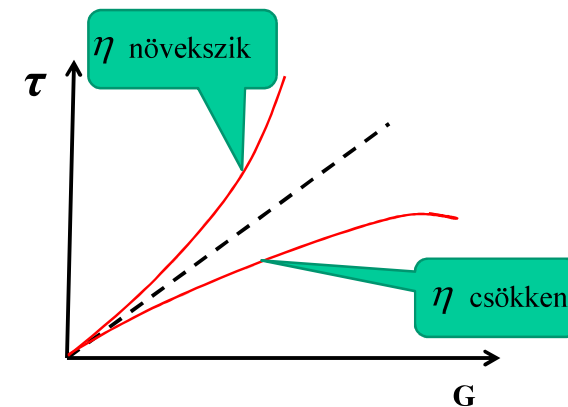
A viszkozitás függése a hőmérséklettől:



$$\eta(T) = \eta_o \exp \left(\frac{E_a}{RT} \right)$$

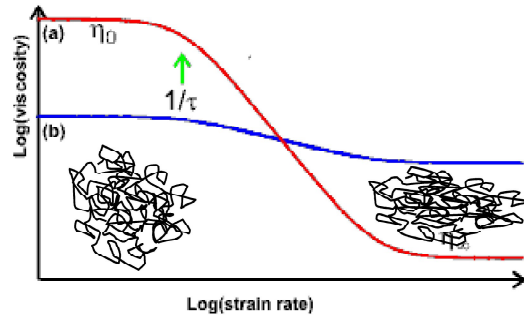
Nem newtoni folyadékok

- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a **deformációs hatás mértékétől** és **idejétől** is függ.

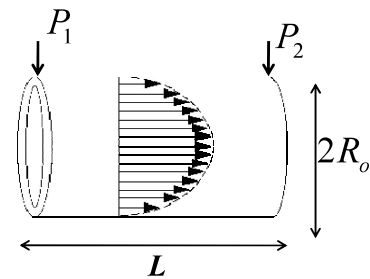
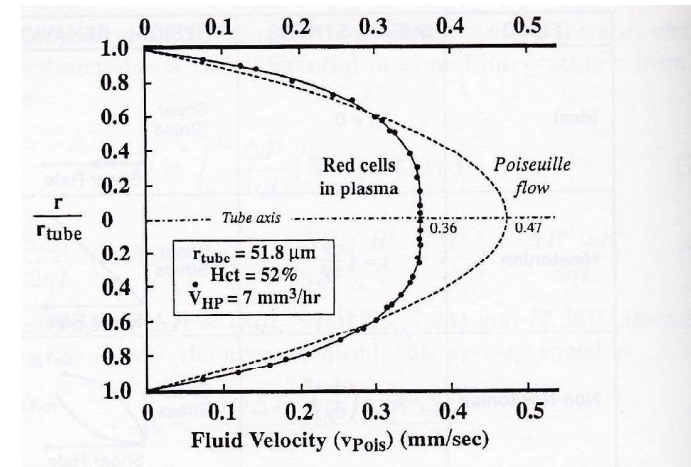


• szerkezeti viszkozitás

Viszkozitás csökken nyírás hatására



polimer oldat
festék
ketchup



Gázok áramlása kapillárisban

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\tau = \frac{r^2 \pi \cdot dP}{2r \pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \left(\frac{dP}{dx} \right) \neq \frac{r}{2} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$I_v = \frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{dn}{dt} = \frac{RT}{P} I_n$$

$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{8\eta} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx}$$

$$I_n dx = \frac{R_o^4 \pi}{16\eta RT} d(p^2)$$

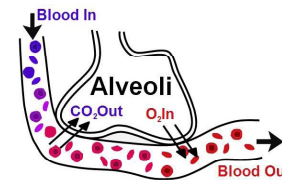
$$I_n = \frac{R_o^4 \pi}{16\eta RT} (P_1^2 - P_2^2)$$

A gáz áramlási sebessége nem a nyomások, hanem a nyomásnégyzetek különbségével arányos!

Egy különleges átadási transzport : a **perfúzió**

AV=alveolus

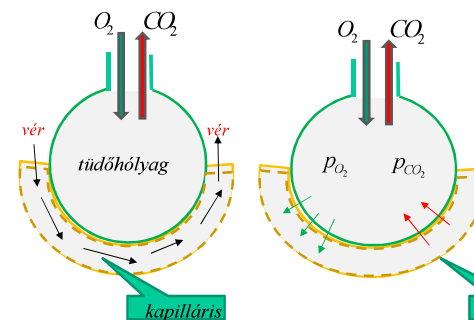
V=AV légzés= levegő térfogata/min



$$V = \frac{dV_{AV}}{dt} = V_{breath} \cdot f_{breath} \approx (5000-1500) \cdot 12 = 4200 \text{ ml/min}$$

Q=Perfúzió= átfolyó vér mennyisége /min

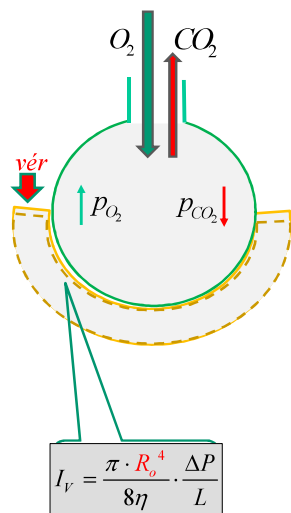
$$V = 4200 \text{ ml/min} \quad Q = 5000 \text{ ml/min}$$



$$\frac{V}{Q} = 0,8$$

Ideális eset

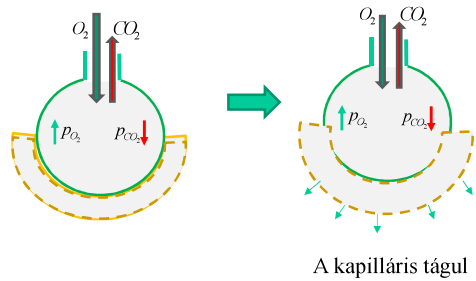
Intenzív egészséges légzés



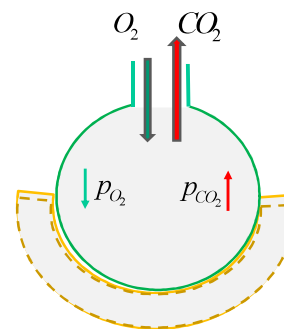
$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4 \cdot \Delta P}{8\eta \cdot L}$$

$$\frac{V \uparrow}{Q} > 0,8$$

$$\frac{V \uparrow}{Q \uparrow} \rightarrow 0,8$$



Gyenge légzés



$$\frac{V \downarrow}{Q \uparrow} < 0,8$$

$$\frac{V \downarrow}{Q \uparrow} \rightarrow 0,8$$

