Biofizika I.
Fogorvostan hallgatóknak

2. előadás:
Biostatisztika II.
2020. Szeptember 14.
Veres Dániel

Események valószínűségei I.

Események valószínűségének alaptörvényei ***(Kolmogorov-axiómák)***:
1. **0 ≤ P(A) ≤ 1**

2. **P(*biztos*) = 1** *(a páciens előbb vagy utóbb meghal)*
P(*lehetetlen*) = 0 *(a páciens teljesen egészséges*)*

*3. Egymást kölcsönösen kizáró eseményekre: (*P(AésB)=0)
P(AvagyB)=P(A)+P(B)
*(annak a valószínűsége, hogy páciensünk terhes **vagy** férfi)*

Ezekből levezethető:
+4. *Független eseményekre*: **P(AésB)=P(A)*P(B)**
*(annak a valószínűsége, hogy az első páciensünk férfi **és** a második nő)*

A legutóbbi előadást a valószínűség fogalmával fejeztük be, illetve azzal, hogy ehhez mennyiséget rendelhetünk. Az események valószínűségeinek mennyiségi leírását a Kolmogorov axiómák segítségével tehetjük meg. Az alábbiakban ezeket az axiómákat írom le (kissé egyszerűsített formában).
1. Egy esemény valószínűsége 0 és 1 közötti érték.
2. a) A biztos esemény valószínűsége 1 (*a páciens előbb-utóbb meghal* – mint tudjuk az élet egy szexuális úton fertőző halálos betegség ☺).
2. b) A lehetetlen esemény valószínűsége 0 (*a páciens teljesen egészséges* – mint tudjuk nincs egészséges ember, csak rosszul kivizsgált beteg ☺).
3. Annak a valószínűsége, hogy *A vagy B* esemény bekövetkezik, ha *A* és *B* események *egymást kölcsönösen kizáróak* egyenlő az egyik esemény valószínűségének és a másik esemény valószínűségének az összegével *(annak a valószínűsége, hogy következő páciensünk egy férfi lesz vagy egy terhes = annak a valószínűsége, hogy férfi lesz a következő páciensünk + annak a valószínűsége, hogy egy terhes lesz a következő páciensünk).*

Ezekből az axiómákból számos egyéb összefüggés levezethető, amelyek közül most egyet emelnék ki.
+4. Annak a valószínűsége, hogy *A és B* esemény is bekövetkezik, ha *A* és *B* események egymástól független események egyenlő az *A* esemény valószínűségének és a *B* esemény valószínűségének szorzatával *(annak a valószínűsége, hogy az első páciensünk férfi és a rákövetkező nő lesz = annak a valószínűsége, hogy férfi lesz a következő páciensünk*annak a valószínűsége, hogy a rákövetkező páciensünk nő lesz).*

Megjegyzendő, hogy ezek a megállapítások (2-4) „fordítva" is igazak. Például ha P(AésB)=P(A)*P(B), akkor *A* és *B* események egymástól függetlenek.

Az emberi gondolkodás...

Linda tehetséges, független, filozófia szakot végzett 31 éves nő. Nagyon érzékeny a társadalmi igazságtalanságokra. Diákként részt vett az antinukleáris demonstrációkban. Sorszámozza meg az alábbi állításokat aszerint, hogy mennyire tartja valószínűnek (1-es sorszám a legvalószínűbb):

a) Linda tanító egy általános iskolában,
b) Linda könyvesboltban dolgozik, és jóga tanfolyamra jár,
c) Linda a nőszavazók ligájának tagja,
d) Linda bankpénztáros,
e) Linda biztosítási ügynök,
f) Linda bankpénztáros és feminista.

Az előző előadást ezzel a példával fejeztük be. Vizsgáljuk meg csak a következő két állítást: Linda bankpénztáros, illetve Linda bankpénztáros és feminista. Az előadás során többetek előrébb sorolta azt, hogy Linda bankpénztáros és feminista, mint azt, hogy Linda bankpénztáros. Pedig ismerve az előző dián is leírt független események valószínűségének együttes előfordulási valószínűségét, beláthatjuk, hogy egy esemény valószínűsége mindig legalább ugyanakkora, mint ugyanezen esemény és egy másik esemény együttes előfordulásának valószínűsége... (De úgy is mondhatjuk, hogy a bankpénztáros és feminista halmaz részhalmaza a bankpénztáros halmaznak)

Események valószínűségei IIa.

Feltételes valószínűség számítása

általános forma 2 eseményre: **P(A|B)=P(AésB)/P(B)**

Különleges esetek:

I. Független eseményekre:

annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi,

HA az első nő volt

P(A|B)=P(AésB)/P(B)
P(A|B)=P(A)*P(B)/P(B)
P(A|B)=P(A)

annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi, HA az első nő volt = annak a valószínűsége, hogy a második páciensünk férfi

A következőkben a feltételes valószínűséggel kapcsolatos számításokat mutatok be. A fent látható összefüggés az úgynevezett Bayes tétel egyszerűsített, de általános formája 2 esemény valószínűségére vonatkoztatva. Ezt szoktuk a feltételes valószínűségek „szorzási szabályának" is hívni. Először 2 speciális esetben vizsgáljuk meg ezt a 2 összefüggést.

Egyik speciális esete a feltételes valószínűségek szorzási szabályának, ha független eseményekre vonatkoztatjuk, például a kérdésünk az, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a rendelőnkben a második páciens férfi, ha az első nő volt.
Mint az látjuk ebben az esetben a feltétel valószínűségének nincs hatása az eseményünk valószínűségére.
Ugyanez a helyzet érme feldobásnál, kockadobásnál, stb. – az előző eseményeknek nincs hatása az utána jövő esemény valószínűségére (független tőle)

Események valószínűségei IIb.

II. A esemény részhalmaza B eseménynek:

annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van

HA ismert, hogy fertőzése vírusos eredetű

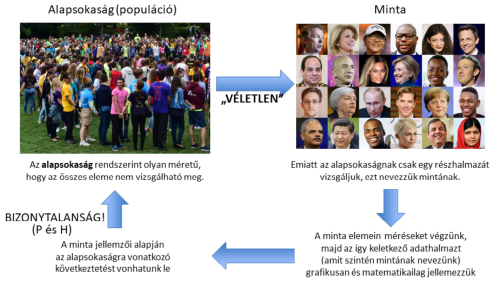
P(A|B)=P(AésB)/P(B)
P(A|B)=P(A)/P(B)

Számolási példa:
Annak a valószínsége, hogy páciensünknek vírusos fertőzése van:
P(B)=8%
Annak a valószínűsége, hogy páciensünknek influenza fertőzése van:
P(A)=2%
annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van
HA ismert, hogy fertőzése vírusos eredetű:
P(A|B) = 2% / 8 % = 25%.

Másik speciális eset, ha az *A* esemény részhalmaza *B* események.
Példa:
Számolási példa:
Annak a valószínsége, hogy páciensünknek vírusos fertőzése van: P(B)=8%
Annak a valószínűsége, hogy páciensünknek influenza fertőzése van: P(A)=2%
annak a valószínűsége, hogy a páciensünknek influenza fertőzése van HA ismert, hogy fertőzése vírusos eredetű: P(A|B) = 2% / 8 % = 25%.
Jól látható, hogy a vírusfertőzés megállapításával erősen nőtt az influenzafertőzés valószínűsége.

Ismétlés: Alapsokaság és minta

(Következtető statisztika alap problémája)



Mint említettük, a statisztika végtelen tömegjelenségek leírója. Ez azt jelenti, hogy a jelenségek vizsgálata során *sok*, akár *végtelensok* mérést is végezhetünk. Ezen elméletileg lehetséges összes mérés kimeneteleinek, eredményeinek összefoglaló halmazát nevezzük *alapsokaságnak* (*populációnak*). Elméletben a statisztikai változó teljes megismeréséhez ezt a végtelensok mérést el kellene végeznünk, de erre nyilvánvalóan nincs lehetőségünk.

Ezért az alapsokaságnak csak egy részhalmazát vizsgáljuk, amit *mintának* nevezünk. A minta tehát az alapsokaság részhalmaza, amelynek alapja a *véletlen* kiválasztás.

A létrehozott mintán méréseket végzünk, a keletkező mérési eredmények (kimenetelek) halmazát szintén mintának nevezzük. (Magyarán: kevésbé precíz fogalmazással pl. az évfolyam mint alapsokaság egyik csoportjának tagjait tekinthetjük az évfolyamból vett mintának; precízebben fogalmazva az évfolyam hallgatóinak vércsoportadatai jelenthetnek alapsokaságot, míg az egyik csoport tagjainak vércsoportadatai egy lehetséges mintát.)

A mintát jellemezhetjük grafikusan és számszerűen, *ahogyan azt megtanultuk az előzőekben*. A minta így megállapított tulajdonságait extrapolálhatjuk, azaz kiterjeszthetjük az alapsokaságra. Az előbbi példánál maradva: amilyen arányban a mintában előfordulnak az egyes vércsoportok, kb. olyasmit várunk el az egész alapsokaságtól is. Mivel a minta összeállítása véletlenszerűen történik, nem biztos, hogy tökéletesen reprezentálja az alapsokaságot, a különböző értékek alapsokaságon belüli előfordulási arányát. Így a minta alapján levont következtetésekhez *mindig társul valamekkora bizonytalanság*.

Milyen mennyiség ez a bizonytalanság? Hogyan definiálhatjuk?

2 mennyiséget szoktunk használni erre: valószínűség (P) és hiba (H)

Becslés

Alapsokaság (populáció) ← Minta
Valódi érték — Becslés — Becslés

Alapsokaság (populáció)	Minta
Valószínűség	Relatív gyakoriság
Várható érték (populációs átlag)	Minta átlaga
Elméleti variancia (szórásnégyzet)	Minta variancia
Két várható érték különbsége	Mintaátlagok különbsége

Tehát a következtető statisztikában becsléseket végzünk, ezeket elemezzük.
Például a populációban egy adott változó kimenetel valószínűségét a minta relatív gyakoriságával becsüljük. A változó várható értékét a minta átlagával, a varianciát (másnéven szórásnégyzetet) a mintabeli (úgynevezett tapasztalati) szórásnégyzettel becsüljük. Két sokaság átlagának különbsége becsülhető a mintaátlagok különbségével (pl. hátosos-e a gyógyszer – eltérő átlagok).

Hiba

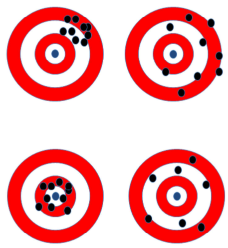
Alapsokaság (populáció) ← Minta
• Valódi érték — Becslés — • Becslések

Több véletlen mintavételt képzelünk el –becslések

Várható érték, szórás, két populáció várható értékének különbsége – a gyógyszer hatásosság mértéke mind becsült paraméterek. Kérdés mekkora hibával tehetjük ezt meg? Képzeljük el, hogy az adott valódi értéket több mintából becsüljük - a minták a sokaságból véletlen mintavétellel származnak. A valódi érték és a becslés közötti eltérés a hiba.

Hiba – 2 dimenziója

„Átlagos eltérés” (torzítás)
Szisztematikus hiba



1. A becslések változékonysága

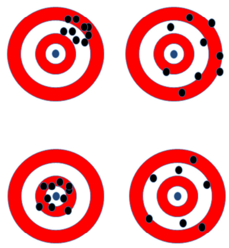
2. A becslések „közepének” eltérése a valódi értéktől

„Változékonyság” (szóródás);
Véletlen hiba (mintavételi hiba)

A hibát 2 „tényezőre bontható”: a véletlen hibára és a szisztematikus hibára. A véletlen hibát a becslések szóródása, amíg a szisztematikus hibát a becslések „közepének” és a becsült értéknek az eltérése jellemzi.

Hiba – 2 dimenziója

„Átlagos eltérés” (torzítás)
Szisztematikus hiba



Jó becslés, ha:
Torzítatlan:
A becslések „közepe” (várható értéke) a valódi érték
Hatásos:
A becslések változékonysága a lehető legkisebb
Konzisztens:
az elemszám növelésével csökken a becslés változékonysága
()

„Változékonyság” (szóródás);
Véletlen hiba

Ezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a becslés jó, ha:

1. *Torzítatlan* – azaz a becslések várható értéke a valódi érték,
2. *Hatásos* – azaz a becslések változékonysága a lehető legkisebb
3. + *Konzisztens* - azaz az elemszám (amiből az egyes becsléseket készítjük) növelésével csökken a becslések változékonysága

(4. nem beszélünk róla…)

Konfidencia intervallumok

De nekünk csak 1 mintánk van, valódi értéket nem ismerjük!
– Akkor számítható egyáltalán a hiba?
IGEN, a véletlen hiba (mintavételi hiba): ez a becslés standard hibája - a mintából becsülhető!

De hiszen nekünk 1 mintánk van és a valódi értéket sem ismerjük.
A hiba azonban ekkor is BECSÜLHETŐ, de (általában) csak a mintavételi hiba. Az adott becslés (pl. átlag, szórás, stb.) szórását hívják standard hibának, amely tehát a mintából becsülhető.

Konfidencia intervallumok

De nekünk csak 1 mintánk van, valódi értéket nem ismerjük!
– Akkor számítható egyáltalán a hiba?
IGEN, a véletlen hiba (mintavételi hiba): ez a becslés standard hibája - a mintából becsülhető!

Példa:
az átlag standard hibája (röviden standard hiba, vagy átlag hibája, SEM)

Emlékeztető: Centrális határeloszlás tétele (mintavételi átlagokra): ha egy adathalmazból *n* elemű mintákat veszünk, akkor elég általános feltételek teljesülése esetén a minták átlagai normál eloszlásúak lesznek, és az eloszlás varianciája az eredeti eloszlás varianciájának *n*-ed része lesz.

Nézzük meg, hogyan is lehetséges ez a becslés, példaként használjuk az átlagot. Az átlag(ok) szórását tehát az átlag standard hibájának, röviden standard hibának nevezzük, SEM-nek rövidítjük.
A hiba becsléséhez emlékezzünk vissza a centrális határeloszlás tételére (CLT: central limit theorem).

Konfidencia intervallumok

1. Tehát az átlag standard hibája (szóródásának mértéke): a minta varianciájának n-ed részének négyzetgyöke.
2. Megadható egy olyan tartomány, amely az átlagot adott „bizonyossággal" tartalmazza: ez az átlag konfidencia intervalluma.
   az adott valószínűség: konfidenciaszint

Az átlag esetében (a normál eloszlás miatt) pl:
Az átlag 95% szintű konfidencia intervallumának határai:

$$\sim \bar{x} \pm 2 * SEM$$

Más becslésre is megadható adott szintű konfidencia intervallum!
Mutatja a becslés értékét, annak hibáját, adott valószínűségű intervallumát

A CLT alapján 2 következtetést vonhatunk le:
1. Az átlag standard hibája (az átlagok szórása): a minta varaianciájának n-ed részének négyzetgyöke
2. Megadható egy olyan tartomány, amely az átlagot adott „bizonyossággal" (kb. valószínűséggel) tartalmazza: ezt hívjuk konfidencia intervallumnak. Az adott valószínűséget nevezzük konfidencia szintnek.

Ismerve, hogy az átlagok normális eloszlást követnek, megadható, hogy a 95%-a az átlagoknak az átlag+-2*SEM tartományban vannak.

Nem csak az átlagra, hanem szórásra, átlagok különbségére… is becsülhető standard hiba, és az eloszlásuk ismeretében megadható konfidencia intervallum is. (Tehát megadható, hogy az adott becsült érték egy adott bizonyossággal milyen tartományban van.)

Hipotézisvizsgálatok
Mintavételi (véletlen hiba) másképp

Hipotézisvizsgálat **célja**: **eldöntendő kérdésre statisztikai választ** adjon

Hogyan?

Állítás *direkt bizonyítása*: minden lehetséges esetre belátom, hogy igaz.
pl: 1,2…n számok összege: (n+1)*(n/2) – teljes indukcióval

Állítás *indirekt bizonyítás*: felteszem a pontos ellenkezőjét és belátom, hogy nem igaz.

A statisztikai fegyvertárban egy igen gyakran használt eszköz a statisztikai próbák. Ennek célja, hogy választ adjon (döntést hozzunk) egy eldöntendő kérdésről – pl: „hatásos –e" a gyógyszer.
Ebben a részben a legtöbb információ rajta van a dián, így ide igyekszem nem mind megismételni.
Az igen/nem kérdésre egy válaszunk, állításunk van, amelyet megpróbálunk bizonyítani.
A matematikában a bizonyításnak két módja van: direkt és indirekt bizonyítás.

Indirekt bizonyítás

Egy dobozban van 100 üveggolyónk. Mindegyikük vagy piros, vagy fehér.

1. eset: A feltevésünk (*H*): mind fehér.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk egy golyót a dobozból.
Megfigyelés: az első kivett golyó piros színű.
Következtetés: a megfigyelésünk valószínűsége, *ha* a H igaz, 0: a feltevésünk 100% biztonság-gal téves.

2. eset: A feltevésünk (*H*): 99 fehér és egy piros.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk és visszarakunk egy golyót, ezt 5-ször végezzük el.
Megfigyelés: mind az 5 piros.
Következtetés: a H *majdnem* 100% biztonsággal téves: a megfigyelésünk valsége, *ha* a H igaz, $0.01^5 = 10^{-10}$: (gyakorlatilag lehetetlen).

3. eset: A feltevésünk (*H*): 50 fehér és 50 piros.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk és visszarakunk egy golyót, ezt 5-ször végezzük el.
Megfigyelés: mind az 5 piros.
Következtetés: most nem olyan egyértelmű: a megfigyelésünk valószínűsége, *ha* a H igaz, $0.5^5 = 0.03125$: alacsony de azért nem túl valószínűtlen..

4. eset: A feltevésünk (*H*): mind piros.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk és visszarakunk egy golyót, ezt 5-ször végezzük el.
Megfigyelés: mind az 5 piros.
Következtetés: a megfigyelésünk valószínűsége, *ha* a H igaz, $1^5 = 1$. Ez mit is jelent?

A hipotézisvizsgálatok során indirekt bizonyítást végzünk.
Nézzünk meg néhány elméleti kísérletet.

Indirekt bizonyítás

Egy dobozban van 100 üveggolyónk. Mindegyikük vagy piros, vagy fehér.

1. eset: A feltevésünk (*H*): mind fehér.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk egy golyót a dobozból.
Megfigyelés: az első kivett golyó piros színű.
Következtetés: a megfigyelésünk valószínűsége, *ha* a H ig[illegible]ésünk 100% biztonság-gal téves.

Lehetetlen esemény

✓

A feltevés hamis

A falszifikáció működik

A verifikáció nem működik

4. eset: A feltevé[illegible]d piros.
Kísérlet: véletlenül kiveszünk [illegible]s visszarakunk egy golyót, ezt 5-ször v[illegible]gezzük el.
Megfigyelés: [illegible]s.
Következtetés: a meg[illegible]ésünk valószínűsége, *ha* a H igaz, $1^5 = 1$. Ez mit is jelent?

A feltevés igaz

✗

Biztos esemény

Falszifikáció: elmélet megcáfolása
Verifikáció: elmélet alátámasztása

Indirekt bizonyítás

A 2. és 3. eset?
Matematikai logika:
Van egy feltevésünk (*H*).
Ha *H* igaz, az *E* esemény nem következhet be.
E bekövetkezik.
Tehát *H* hamis.
Amint azt az előzőekben láttuk, **egy feltevést csak elvetni tudunk.**

Statisztikai logika:
Van egy feltevésünk (*H*).
Ha *H* igaz, az *E* esemény bekövetkezése nagyon valószínűtlen.
E bekövetkezik.
Elvetjük *H*-t. De sohasem lehetünk 100%-ig bizonyosak, hogy *H* hamis.
Ez esetben **egy feltevést még elvetni sem tudunk százszázalékos bizonyossággal – mintavételi hiba lehetséges.** ENNEK VALÓSZÍNŰSÉGÉT KELLENE MEGBECSÜLNI

A matematikában a cáfolat egyértlemű – egy elem megcáfolja – de a statisztikában nem ez a helyzet: itt egy elem csak a cáfolat valószínűségét (bizonyíték mértékét) csökkentheti.

Milyen legyen a kérdés?

...legyen eldöntendő (igen/nem, dichotomikus).

- 50%-e a mielómások ötéves túlélési aránya (vagyis valsége)?
- Eltér-e a Cushing-kórosok vérkoleszterinszintje a normálisnak tartott 200 mg/dL értéktől? ✓

- Mekkora a mielómások ötéves túlélési aránya?
- Mi a Cushing-kórosok koleszterinszintjének várható értéke? ✗

...esetek halmazára és ne egyedi esetre vonatkozzon.
(És a kérdés mindig az alapsokaságra irányul, nem a mintára.)

- 50%-e a mielómások ötéves túlélési aránya? ✓

- Élni fog-e még ez a mielómás beteg 5 év múlva? ✗

...legalább az egyik válaszlehetőségnek egyértelműnek kell lennie.

- 50%-e a mielómások ötéves túlélési aránya? ✓

- Kevesebb-e a mielómások túlélési aránya, mint 50%? ✗

A jó kérdés….

Milyen legyen a hipotézis?

Két válaszunk (feltevésünk) van a kérdésre:

A nullhipotézis (H_0)

- **Egyértelmű**: csak egyféleképpen teljesülhet. Valamilyen formában szerepel benne az = jel.
  A mielóma ötéves túlélési aránya 50%.
- A tudomány **jelenleg elfogadott álláspontját** tükrözi,
  A Cushing kórosok vérkoleszterinszintje megegyezik az egészségesek alapsokaságának átlagával.
  vagy valamit, ami „közhelyes”, kevés benne a megkötés (Occam borotvája).
  Az érmefeldobásban a fejek valsége 50%.
- **Nem** feltétlenül nemleges válasz a feltett kérdésre.

Az alternatív vagy ellenhipotézis (H_1)

- Jellemzően **többféleképpen is teljesülhet**.
  A mielóma ötéves túlélési aránya nem 50%.
  (lehet kissé több vagy sokkal kevesebb stb.)
- A tudományos konszenzusnak ellent-mondó **új megállapítást** fogalmaz meg,
  A Cushing kórosok vérkoleszterinszintje eltér az egészségesek alapsokaságának átlagától.
  vagy egy kevéssé közhelyes, megkötéseket tartalmazó állítást.
  Az érmefeldobásban a fejek valsége nem 50%.
- Legtöbbször a **H_0-sel komplementer** (vagyis annak tagadása).
  H_1 = nem H_0

A jó hipotézis.

Mintavételből származó („véletlen”) hiba

Hipotézisvizsgálat **célja**: **eldöntendő kérdésre statisztikai választ** adjon

Kiindulópont: az eldöntendő kérdés statisztikai átfogalmazása, majd :

H_0: nullhipotézis – „véletlen” hiba

H_a (vagy H_1): alternatív hipotézis (ellenhipotézis) – nem H_0

Döntés alapja: a „véletlen” szerepe a H_0 esetén (mintavételi hiba)

A minta az, amely esetleg megcáfolja H_0-t

Tehát rendelkezünk egy kérdéssel és rá válaszként 2 hipotézissel.
A „bizonyítás” során a fontos a H0 hipotézis: ha a H0 igaz a valóságban, akkor a mintából számolt - tapasztalt – eltérés csak a mintavétel miatt (mert nem mérünk mindenkit, csak egy mintát) lehet. Tehát a minta a H0 elleni „bizonyíték mértéke”.
Végül ez alapján kell döntést hoznunk.

Mintavételből származó („véletlen”) hiba

Hipotézisvizsgálat **célja**: **eldöntendő kérdésre statisztikai választ** adjon

Kiindulópont: az eldöntendő kérdés statisztikai átfogalmazása, majd :

H_0: nullhipotézis – „véletlen” hiba

H_a (vagy H_1): alternatív hipotézis (ellenhipotézis) – nem H_0

Döntés alapja: a „véletlen” szerepe a H_0 esetén (mintavételi hiba)

A minta az, amely esetleg megcáfolja H_0-t

		A populációban (a valóságban) a null hipotézis:	
		Igaz	Hamis
A döntés: a null hipotézist:	Megtartom (Nem vetem el)	Helyes döntés	Hiba (**másod fajú**) (β) (álnegatív eredmény)
	Elvetem	Hiba (**első fajú**) (α) (álpozitív eredmény)	Helyes döntés (**erő**) (1-β)

De milyen is lehet ez a döntés? Erről szól az oldal alján levő táblázat. A (nem ismert) valóságban a H0 lehet igaz, vagy hamis, a mi döntésünk pedig lehet H0 elvetése, vagy megtartása. Ha megtartjuk az igaz H0-t, vagy elvetjük a hamis H0-t, akkor helyes döntést hoztunk. Ez utóbbi valószínűségét szokták statisztikai erőnek nevezni és 1-bétával jelölni. (Ezt – kissé pongyolán, de - úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mekkora a valószínűsége, hogy „kimutatjuk a hatást”, ha az létezik.)
Ha elvetjük az igaz H0-t, vagy megtartjuk a hamis H0-t, akkor hibás döntést hozunk. Az előbbit első fajú (vagy fajta) hibának, az utóbbit másodfajú hibának nevezzük. Az első fajú hiba valószínűségét alfával, míg a másodfajút bétával jelöljük.

Egyszerűsített példa 1. lépések

Szituáció: Dobókockás társasjátékot játszunk – nem mi nyerünk...

„Rossz” a dobókocka?

Mi a kérdés??!! (és mire vonatkozik):

Minden oldala ugyanolyan valószínűségű-e? (ennek a kockának)

A hatos dobás valószínűsége eltér 1/6-tól, méghozzá nagyobb?

– most válasszuk ezt

Nullhipotézis ??!!:

A 6-os dobás valószínűsége 1/6 vagy kisebb – (*összetett hipotézis*)

Vegyük az alternatív hipotézis szempontjából „legrosszabb esetet”

(hiszen ha akárcsak egy eleme az összetett hipotézisnek „megfelelhet” a nullhipotézisnek, akár nincs bizonyíték az elvetésre a teljes tartományban):

H_0: A 6-os dobás valószínűsége 1/6.

H_a: nagyobb 1/6

A következőkben egy hipotézisvizsgálat gondolatmenetét követjük nyomon egy fiktív példában.

Egyszerűsített példa további lépések

Mi a kérdés: A hatos dobás valószínűsége eltér 1/6-tól, méghozzá nagyobb?

Nullhipotézis: H_0: A 6-os dobás valószínűsége 1/6.

Mennyi bizonyíték kell, hogy eltérőnek tekintsem? - Szignifikancia szint ??!!:
Hatóság megadta… Adott terület szakirodalma --- **KIINDULÓPONT**, de kisebb/nagyobb, gyakoribb/ritkább mellékhatások?, olcsóbb/ drágább?…
itt: minden hétvégén játszunk vele, dobókockát nem drága lecserélni
– legyen 5% helyett 10% (kevesebb bizonyíték elég H_0 elvetéséhez)

Bizonyíték gyűjtése – a minta ??!! (hogyan, mennyi…kérdezze statisztikusát):
24 dobásból 6 darab 6-os.
Tényleg a kérdésre válaszolok?
Módosítanom/pontosítanom kell a kérdést? (mire vonatkozik)
(pl. itt: dobókockányi lukak vannak az asztalon…)

A szignifikancia szintet úgy tekinthetjük, mint egy határt a döntésünkhöz – mikor tekintjük a mintánkat „elég bizonyítéknak” a H0 ellen.
A korrekt eljárás, ha a szignifikanciaszintet még a vizsgálat előtt (az adatok ismerete nélkül) rögzítjük.

Egyszerűsített példa további lépések

Mi a kérdés: A hatos dobás valószínűsége eltér 1/6-tól, méghozzá nagyobb?

Nullhipotézis: H_0: A 6-os dobás valószínűsége 1/6.

Szignifikancia szint:10%

A minta: 24 dobásból 6 darab 6-os.

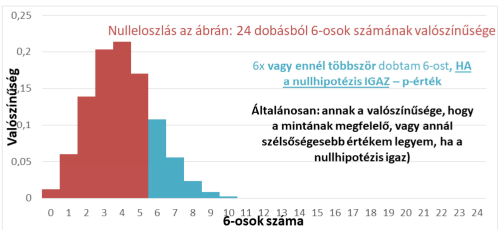
Lényeges a különbség egyáltalán – releváns ??!!:
24 dobásból 6 darab 6-ost dobtam, ez 6/24 = 1/4 ez **1,5**-szeres az 1/6-nak
– igen, ez nekem lényeges

Mennyi a bizonyíték – p-érték ??!!:
Hogyan számoljak?, (torzítatlanul, hatásosan, konzisztensen…)
Lényeges: kérdés, változók mérési skálája, mérési körülmények
Számolás során kell:
Nulleloszlás – ha a null hipotézis igaz, mekkora a valószínűsége az elméletileg lehetséges mintáknak, amit így vettünk?
A minta „helye” ebben az eloszlásban:
próbastatisztika (teszt-statisztika, pl: valószínűség, t-érték, p-érték…)

A statisztika nevezéktanában a releváns szó azt fejezi ki, hogy a hatás számomra (klinikailag) lényeges.
A hogyan számoljak?-ra a válasz a céltól (mit is akarok öszehasonlítani: eloszlást, átlagot, szórást…), a változók típusától (mérési skálájától), és néhány a későbbiekben tárgyalt feltételtől függ.

A számolás a „háttérben”

Binomiális próbával!



…

Egyszerűsített példa további lépések

Mi a kérdés: A hatos dobás valószínűsége eltér 1/6-tól, méghozzá nagyobb?

Nullhipotézis: H_0: A 6-os dobás valószínűsége 1/6.

Szignifikancia szint:10%

A minta: 24 dobásból 6 darab 6-os.

Lényeges a különbség egyáltalán – releváns: minta alapján: 1/4 ez **1,5**-szeres az 1/6-nak
Mennyi a bizonyíték – p-érték: 0,1995

Döntés: nincs elég bizonyíték az elvetésre – megtartjuk a H_0-t

		A populációban (a valóságban) a null hipotézis:	
		Igaz	Hamis
A döntés: a null hipotézist:	Megtartom (Nem vetem el)	Helyes döntés	Hiba (**másod fajú**) (β) (álnegatív eredmény)
	Elvetem	Hiba (**első fajú**) (α) (álpozitív eredmény)	Helyes döntés (**erő**) (1-β)

…

Egymintás Student-féle t-próba

Mire vagyok kíváncsi
A minta várható értéke megegyezik-e egy ismert populációátlaggal
Változó típusa
1 számszerű és folytonos
Feltételek
Egymástól független megfigyelések
átlagok eloszlása legyen normál azaz:
normál eloszlású változó vagy nagy minta (CLT miatt)
Megjegyzés: Számolás:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

normalitást NE teszteljük másik hipotézisvizsgálattal! Előzetes tudásunk, ábrázolás alapján
(+teszt növeli az elsőfajú hibát, „multiplicitás”)

A következőkben néhány, gyakran (a gyakorlaton is) használt hipotézisvizsgálatot mutatok be: a cél, a változók mérési skálája (típusa) és a használhatósági feltételek feltüntetésével.

CLT: central limit theorem – centrális határeloszlás tétele

Párosított t-próba

Mire vagyok kíváncsi
Két várható érték megegyezik-e - párosított csoportokban
Változó típusa
1 számszerű és folytonos, valamint 1 bináris („csoportok”)
Feltételek
Egymástól független megfigyelések a csoportokban, párosított csoportok
átlagok <u>különbségének</u> eloszlása legyen normál azaz:
normál eloszlású különbség vagy nagy minta
Megjegyzés:
párosított próbák ereje általában nagyobb, mint nem párosítotté
egyéb helyparaméterek (kvantilisek) összehasonlítására is jó
átlagok különbsége = különbségek átlaga

A párosított t-próba matematikailag megegyezik az egymintás t-próbával, de itt az adathalmazt a <u>párok különbsége</u> jelenti.

Student-féle 2 mintás t-próba

Mire vagyok kíváncsi
Két várható érték megegyezik-e
Változó típusa
1 számszerű és folytonos, valamint 1 bináris („csoportok”)
Feltételek
Csoportonként és egymástól is független megfigyelések
átlagok eloszlása legyen normál mindkét csoportban azaz:
normál eloszlás a csoportokban vagy nagy minta
szórások azonosak legyenek a csoportokban
Megjegyzés:
egyéb helyparaméterek (kvantilisek) összehasonlítására is jó
szórásokat általában nem ismerjük, ne teszteljük! (multiplicitás)
Welch próbát használjunk!

…

Welch-féle t-próba

Mire vagyok kíváncsi
Két várható megegyezik-e
Változó típusa
1 számszerű és folytonos, valamint 1 bináris („csoportok”)
Feltételek
Csoportonként és egymástól is független megfigyelések
átlagok eloszlása legyen normál mindkét csoportban azaz:
normál eloszlás a csoportokban vagy nagy minta
Megjegyzés:
egyéb helyparaméterek (kvantilisek) összehasonlítására is jó
nem érzékeny az eltérő varianciákra (robosztus a varianciák eltérésére)

…

Khi-négyzet függetlenség próba

Mire vagyok kíváncsi
- Ismeretlen eloszlás, illetve gyakoriságok és ismert eloszlás megegyezik-e
- Másképp: a 2 változó független-e

Változó típusa
- 2 kategoriális változó

Feltételek
- Egymástól független megfigyelések
- Az összes „elvárt” gyakoriság nagyobb, mint 1 és maximum 20%-uk kisebb, mint 5.

…

„Korrelációs” t-próba (Pearson lineáris regresszió)

Mire vagyok kíváncsi
- 2 változó (lineárisan) függ-e egymástól

Változó típusa
- 2 számszerű változó (X és Y)

Feltételek
- Egymástól független megfigyelések (x és y párok)
- Lineáris összefüggést feltételezünk
- x értékei mérési hiba nélküliek
- minden x értékre y-ok eloszlása normális
- minden x értékre y-ok szorása azonos

Megjegyzés:
- 2 értéket becslünk: a lineáris meredekségét és tengelymetszetét
  - a meredekség a lényeges, ezt teszteljük

…

Releváns, de mégsem szignifikáns

Okai lehetnek:
- kicsi statisztikai erő:
  - kicsi elemszám (+klinikai problémák: pénz, etikai kérdések)
  - nagy a változatosság a vizsgált paraméterben, illetve alanyokban
  - kicsi erejű próbát használunk
  - (megsértjük a próba feltételeit)
- nem mérünk elég precízen

Tervezzünk előre!!

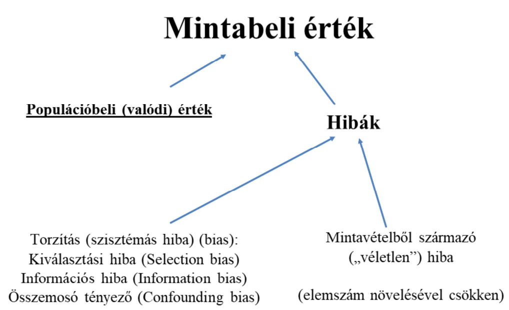
- más hibák (lásd mindjárt)

Pechünk volt (mintavételi hiba, véletlen)

-**Kérdezze meg statisztikusát...**
(☺ pl: https://www.youtube.com/watch?v=PbODigCZqL8)

A kutató orvos, fogorvos (szakdolgozatíró) gyakran olyan problémával találja szemben magát, hogy a vizsgált hatás a minta alapján lényegesnek mutatkozik (releváns), a statisztikai próbával mégsem sikerült elvetni a H0-t (nem szignifikáns). Mi lehet az ok, ha feltételezzük, hogy a valóságban megvan ez a hatás???
Ezeket soroltam fel az ábrán.
Látható, hogy ez a probléma úgy kerülhető el, ha előre tervezünk!

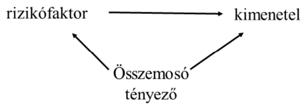
Az esetszám kérdés általában nem egyszerű, de erről egy videót is meg lehet tekinteni alább:
Esetszám vicces videó:
https://www.youtube.com/watch?v=Hz1fyhVOjr4



Az eddigiekben a mintavételből származó hibáról, hiba becsléséről esett szó. Azonban a mintabeli érték és a valódi érték eltérését a szisztematikus hiba – a torzítások – is okozhatják.
A torzításoknak 3 típusát szoktuk megkülönböztetni:
(sajnos a magyar nyelvben nem született egységes nevezéktan, így gyakran az angol szavakat használják, ezért tüntettem én is fel)

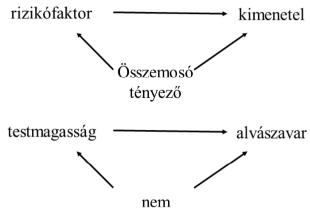
1. Összemosó, megzavaró hiba, confounding
2. Kiválasztási hiba, torzítás
3. Információs hiba, torzítás

Összemosó (megzavaró) hiba (confounding)



Röviden összemosó (megzavaró) hibáról, confoundingrül akkor beszélünk, ha egy kimeneti változóban megjelenő hatást egy adott rizikóváltozó hatásának tekintjük, pedig nem az.

Összemosó hiba



Leggyakoribbak: nem, életkor – mindig gondoljunk rá!

Jobban érthető ez egy példán keresztül: egy vizsgálatban azt tapasztaltuk, hogy a nagyobb testmagasság gyakrabban jár alvászavarral – ezt úgy magyarázhatnánk, hogy a magasság hat az alvászavarra (rövid az ágy, a takaró, ezen emberek görbébben alszanak… ötleteink támadhatnak.)
Azonban az alvászavar valójában nem függ a testmagasságtól: a férfiaknál gyakoribb az alvászavar és ők magasabbak is! Ha külön-külön vizsgálnánk a férfiakat és nőket, akkor már nem látnánk a testmagasság hatását.
Az összemosó tényező miatt a mért (első ránézésre úgy tűnő) hatás nagyobbnak, de akár kisebbnek is látszhatnak a valóságosnál.
Confounding az lehet, amely egyaránt „hat” a rizikófaktorra és kimenetre is.
Leggyakoribb megzavarók: nem, életkor – erre mindig gondoljunk!!!!!!!!!

Kiválasztási, Információs hiba

Kiválasztási hiba:
Különbség van a felmérésbe beválasztottak és nem beválasztottak vagy a beválasztottak csoportba sorolása között (egy kimenetelt befolyásoló paraméter tekintetében)
tipikus hibák: életkor, nem eltérő a csoportokban
alappopoláció eltérő
utánkövetés eltérő

Információs hiba:
Téves az alanyoktól kapott, alanyokról gyűjtött információ (, amely befolyásolja a kimenetelt)
tipikus hibák: visszaemlékezés rossz
elfogódottság

Kiválsztási hiba:
Tudva, hogy a nem befolyásolja az alvázavart, az új gyógyszert kapók, illetve a placebót kapó csoportok között eltérő a nők aránya
Utánkövetés megszűnése – IV droghasználóknál vagy homoszexuálisoknál gyakoribb az AIDS: akik AIDS-esek lesznek, gyakrabban „kilépnek” az utánkövetésből, mint akik nem kapnak AIDS-t, valamint az IDU használók is gyakrabban „eltűnnek”, mint homoszexuálisok
Alappopuláció más: csonttörés nőknél és táplálkozás összefüggése: csonttörötteket trauma osztályról választjuk, kontrollt az adott kórház belgyógyászatáról (De a belgyóygászaton levőknek más betegsége is van! Pl. diabetes gyakoribb!!)

Információs hiba:
Visszaemlékezés: azok a szülők, akiknek a gyermeke daganatos, jobban visszaemlékeznek gyermekük korábbi fertőzéses megbetegedéseire, mint azok, akiknek gyermeke egészséges.
Elfogódottság: a gyermekeket, időseket, bizonyos populációkat jobban megvizsgáljuk, mint nem ilyeneket.

További:
Catalogue of Bias Collaboration, Spencer EA, Brassey J, Mahtani K., 2017. https://catalogofbias.org/

Ellenőrző kérdések

- Mit jelent a szisztémás és a véletlen hiba?
- Mit jelent, ha egy becslés torzítatlan?
- Mit jelent, ha egy becslés hatásos?
- Mit jelent, ha egy becslés konzisztens?
- Definiáld a konfidencia intervallumot!
- Mi a hipotézisvizsgálatok célja?
- Milyen a hipotézisvizsgálatok „jó kérdése”?
- Milyen a hipotézisvizsgálatok „jó hipotézise”:
- Mit jelent a szignifikancia szint?
- Mit jelent az, hogy egy hatás, különbség… releváns?
- Definiáld az elsőfajú hibát!
- Definiáld a másodfajú hibát!
- Fogalmazd meg a hipotézisvizsgálat p-értékének jelentését.
- Mit jelent a konfounding (összemosó) hiba?
- Mit jelent az információs és kiválasztási torzítás?

A kérdéseket önellenőrzésnek szánjuk. A kérdések megválaszolhatók az előadáson elhangzottak, a gyakorlatvezetővel folytatott konzultációk, illetve saját utánaolvasás segítségével.